LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 6 mai
M.P.S.I.2

2023 2024

TD27

∘0∘ Montrez que $x \longmapsto \cos(e^x)$ n'est pas lipschitzienne (sans dériver, étudiez le taux d'accroissement entre $\ln(k.\pi)$ et $\ln((k+1).\pi)$ pour k entier).

Certes, sa dérivée n'a pas l'air bornée, mais si on nous l'interdit, prouvons la négation du caractère lipschitzien

$$\forall K,\ \exists (x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| > K.|x-y|$$

K quelconque donné, notre mission est de trouver x et y tel que le taux d'accroissement dépasse K.

Il ne faut pas rêver et se dire « oh, et si je prenais $x = y$? ». En effet, on demande $|f(y) - f(x)| > K.|x-y|$ avec inégalité stricte.

Dans le taux $\dfrac{|\cos(e^y) - \cos(e^x)|}{|y-x|}$ on ne peut pas espérer rendre le numérateur grand. Il reste entre 0 et 2.
Afin d'optimiser, prenons le égal à 2 d'ailleurs avec deux cosinus égaux à -1 et 1.
D'où l'idée de $\ln(n.\pi)$ et $\ln((n+1).\pi)$ (puisque $\cos(n.\pi)$ et $\cos((n+1).\pi)$ sont de signes opposés).

Et le dénominateur ? C'est $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ après fusion des deux logarithmes.
Et il tend vers 0. Ce qui va rendre le taux d'accroissement très grand.

Explicitement, K étant fixé, on veut $\dfrac{2}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} > K$.

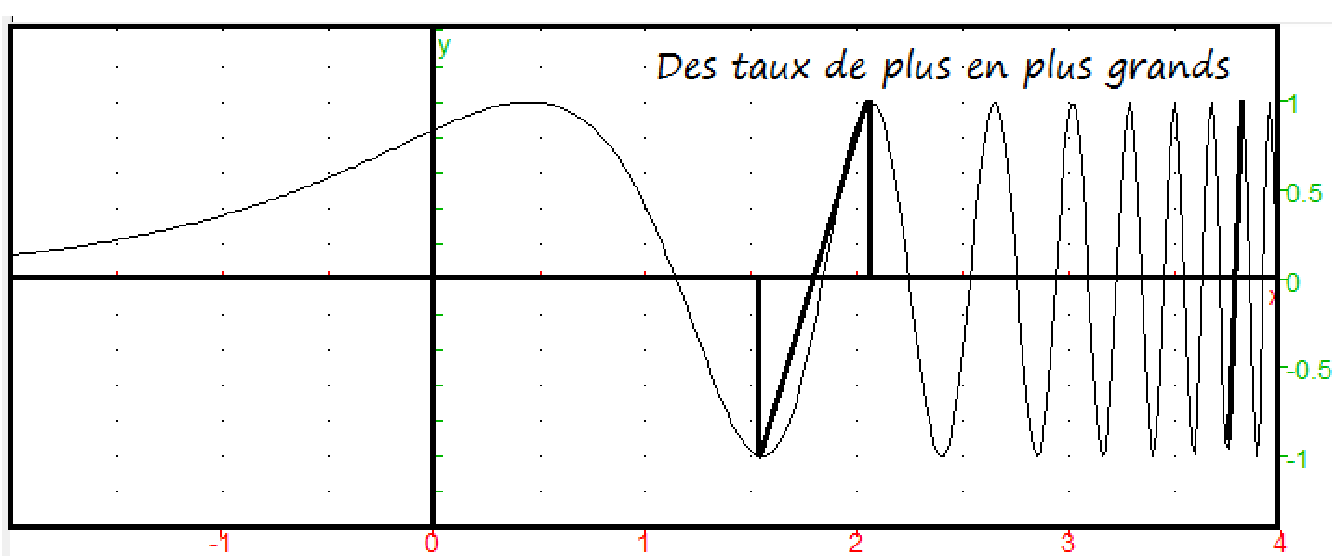
C'est une inéquation qui conduit à $n > \dfrac{1}{e^{2/K}-1}$. On va donc prendre explicitement

$$x = \ln\left(\left(\left[\frac{1}{e^{2/K}-1}\right]+1\right).\pi\right),\ y = \ln\left(\left(\left[\frac{1}{e^{2/K}-1}\right]+2\right).\pi\right)$$

et vérifier

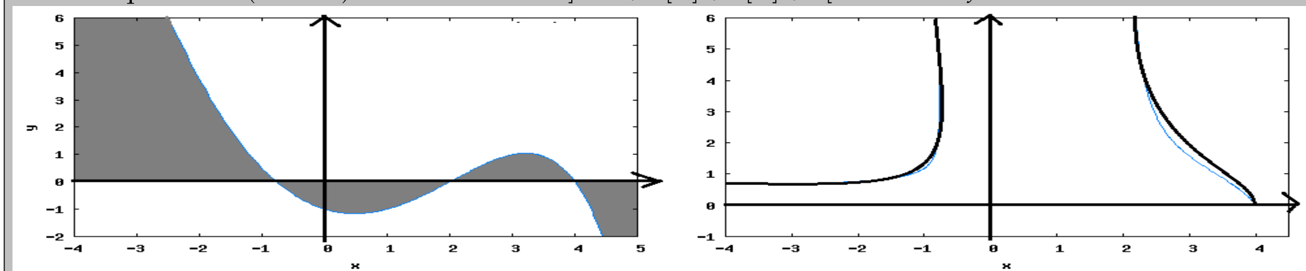
$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = \frac{2}{\ln\left(\dfrac{\left[\dfrac{1}{e^{2/K}-1}\right]+2}{\left[\dfrac{1}{e^{2/K}-1}\right]+1}\right)} > K$$

Visuellement,



$\circ 1 \circ$

On définit $\varphi = x \longmapsto x^2 - 2^x$. Montrez (sans forcément calculer φ') que φ' s'annule au moins une fois sur $]2,\ 4[$.
Quitte à étudier φ'' et même $\varphi^{(3)}$, montrez que φ admet trois racines.
Écrivez un script **Python** qui détermine la racine négative de φ à 10^{-3} près *(on la notera α).*
Montrez que $x \longmapsto (x^2 - 2^x)^{\frac{1}{x-3}}$ est définie sur $]-\infty,\ \alpha[\cup]2,\ 3[\cup]3,\ 4[$ *(on la notera f).*



Déterminez la limite de f en α, en 2 et en 4.
Montrez que f se prolonge par continuité en 3 *(la valeur sera un truc moche ou au contraire très esthétique selon vos gouts).*
Montrez que f est dérivable en 4.

On doit arriver à quelquechose sur la dérivée ? C'est le théorème de Rolle. On en vérifie les hypothèses :
• φ est continue et dérivable sur $[2,\ 4]$
• $\varphi(2) = \varphi(4) = 0$.
Aux concours, on va vérifier que vous citez bien « continue, dérivable », sinon, ça veut dire que vous ne serez pas un ingénieur fiable. Vous allez vous précipiter sur des idées sans vérifier avant que tout est en place pour pouvoir le faire...

φest nulle en 2 et en 4. Mais entre 0 et 2 . Et avant 0 ?

On dérive :

$\varphi''(x)$	$2 - (\ln(2))^2.2^x$
$\varphi'(x)$	$2.x - \ln(2).2^x$
$\varphi(x)$	$x^2 - 2^x$

oui, il faut écrire 2^x comme une exponentielle $2^x = e^{\ln(2).x}$. Toute autre dérivation vous vaudra la relégation totale. Et pourtant, j'en connais...
φ'' s'annule une fois, en $\dfrac{1}{\ln(2)}.\ln\left(\dfrac{2}{(\ln(2))^2}\right)$ qui est un réel positif (qu'on va noter β). Et elle y change de signe, passant du positif au négatif (c'est 2^xqui va l'emporter vers $+\infty$).

φ' est donc croissante, puis décroissante.

x	$]-\infty,\ \beta[$	β	$]\beta,\ +\infty[$
$\varphi'(x)$	$-\infty \nearrow$	?	$\searrow -\infty$

Niveau crétin : on dit que φ' va s'annuler deux fois, alors même qu'on n'en sait rien.
Niveau Terminale : on a compris la difficulté : quel est le signe de $\varphi'(\beta)$?
on doit calculer un truc indigeste ?
Niveau Sup : mais attends ! on a montré au début que φ' s'annulait au moins une fois. Vu va forme, elle va donc s'annuler deux fois.

Maintenant, φ est donc décroissante, croissante, décroissante. Avec des limites en $-\infty$ et $+\infty$ facilement calculables.
Comme indiqué sur la vignette.

φ a donc une autre racine, avant 0 (ça, on le savait par théorème des valeurs intermédiaires généralisé !).
Mais alors quoi ? Tout ça pour si peu ? On le savait déjà !
Non, elle aurait pu peut être en avoir plus...
Sauf que là, les trois intervalles où φ est monotone sont des intervalles où elle ne peut s'annuler qu'une fois (je fais le coup de citer « homéomorphisme » ?[1]).

Bref, φ s'annule trois fois et c'est tout.

Remarque : on pouvait aussi dire que si φ avait eu plus de trois racines, le théorème de Rolle « en cascade » aurait donné trop de racines à $\varphi^{(3)}$ qui est une exponentielle, jamais nulle...
Tiens, ça me rappelle l'exercice qui dit qu'un polynôme et l'exponentielle ne se croisent pas trop...

Pour détecter la racine ?

1. non, parce que je n'ai pas dit de quoi dans quoi

```
a, b = -10, 0
while b-a >
....c = (a+b)/2
....y = c*c-2**c
....if y > 0 :
........a = c
....else :
........b = c
```

Comment définir $x \longmapsto (x^2-2^x)^{\frac{1}{x-3}}$ uniquement en revenant à la forme exponentielle puisque tout bouge : $f(x) = \exp\Big(\dfrac{\ln(x^2-2^x)}{x-3}\Big)$.
Il faut que x^2-2^x soit positif. C'est le tableau de variations de φ (ou son graphe, forme évoluée de tableau de variations) qui le dit : avant α ou « entre 2 et 4.
A ce stade : $]-\infty,\ \alpha[\cup]2,\ 4[$.
Mais il faut aussi éviter 3 à cause du dénominateur. Et on écrit $]-\infty,\ \alpha[\cup]2,\ 3[\cup]3,\ 4[$ plutôt que $(]-\infty,\ \alpha[\cup]2,\ 4[)-\{4\}$. Il faut impérativement découper en intervalle. Si vous n'avez toujours pas compris que le mot intervalle intervient dans à peu près tous nos théorèmes d'analyse, faites des maths avec votre chat, pas avec moi (valeurs intermédiaires, homéomorphisme, accroissements finis, Rolle...).

	x^2-2^x.	$\ln(x^2-2^x)$.	$\dfrac{\ln(x^2-2^x)}{x-3}$.	$f(x) = \exp\Big(\dfrac{\ln(x^2-2^x)}{x-3}\Big)$.
α par valeur inférieure	O^+	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
2 par valeur supérieure	0^+	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
4 par valeur inférieure	0^+	$-\infty$	$-\infty$	0

Oui, encore une fois, un tableau. pas de blabla, pas de formules partout. mais un truc que le lecteur comprend tout de suite.

Le graphe offert dans la capsule de l'énoncé confirme.

Quand x tend vers 3, on ajoute une ligne

	x^2-2^x.	$\ln(x^2-2^x)$.	$\dfrac{\ln(x^2-2^x)}{x-3}$.	$f(x) = \exp\Big(\dfrac{\ln(x^2-2^x)}{x-3}\Big)$.
3 par valeur inférieure	1	0	?	?
3 par valeur supérieure	1	0	?	?

Oui, on n'est guère avancé.

Mais si on définit $t \longmapsto \ln(t^2-2^t)$ qu'on note g, la forme indéterminée $\dfrac{\ln(t^2-2^t)}{t-3}$ s'écrit en fait $\dfrac{g(t)-g(3)}{t-3}$.
Elle tend vers $g'(3)$.

Il nous suffit donc de calculer $g'(3)$ par les formules simples : $g'(x) = \dfrac{2.x-\ln(2).2^x}{x^2-2^x}$.

On a donc la même limite à droite et à gauche : $\dfrac{\ln(x^2-2^x)}{x-3} \longrightarrow_{x\to 3} \dfrac{6-8.\ln(2)}{1}$

puis $f(x) \longrightarrow_{x\to 3} \exp\Big(6-8.\ln(2)\Big)$.

On a trouvé une limite. Et elle vaut $\boxed{\dfrac{e^6}{256}}$ Pourquoi pas.

En 4, on doit étudier $\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$.

◦2◦

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

. Généralités .

Une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou même de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$) est dite convexe si pour tout triplet ordonné $(a,\ b,\ c)$ avec $a \leqslant b \leqslant c$, on a $\begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$.

I~0) Montrez l'équivalence entre la positivité de ce déterminant et le jeu d'inégalités :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

I~1) Montrez que les applications affines sont convexes, de même que $x \longmapsto x^2$.

Pour une application affine, le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha.a+\beta & \alpha.b+\beta & \alpha.c+\beta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ est toujours nul (quel que soit l'ordre de a, b et c). Il est donc positif ou nul.
Les applications affines sont convexes (et concaves).

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (b-a).(c-a).(c-b)$$

(VanDerMonde après deux échanges). Si on a pris $a \leqslant b \leqslant c$, il est fait de trois facteurs positifs, il est positif.

I~2) Montrez que l'ensemble des applications convexes est stable par addition.

On prend f et g convexes. On se donne un triplet ordonné. Par multilinéarité du déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a)+g(a) & f(b)+g(b) & f(c)+g(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Cette somme est positive.

I~3) Montrez que $x \longmapsto |x|$ est convexe (distinguer suivant la position de a, b et c par rapport à 0).

Pour la valeur absolue, on a plusieurs cas

cas	$a \leqslant b \leqslant c \leqslant 0$	$a \leqslant b \leqslant 0 \leqslant c$	$a \leqslant 0 \leqslant b \leqslant c$	$0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lvert a\rvert & \lvert b\rvert & \lvert c\rvert \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a & -b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
	0	$2.c.(b-a)$	$-2.a.(c-b)$	0

Dans tous les cas, ce déterminant est positif.

II~0) Montrez que f est convexe si et seulement si $x \longmapsto f(-x)$ est convexe.

On suppose que f est convexe. On pose $g = x \longmapsto f(-x)$.
On se donne un triplet $(a,\ b,\ c)$ avec $a \leqslant b \leqslant c$.

On calcule $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ f(-a) & f(-b) & f(-c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ f(-a) & f(-b) & f(-c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

On échange deux colonnes : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c & -b & -a \\ f(-c) & f(-b) & f(-a) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Or, on a justement $-c \leqslant -b \leqslant -a$. La convexité de $f$assure que ce déterminant est positif.

On a juste finalement fait une symétrie d'axeOy, la convexité s'est conservée.

II~1) Montrez que f est convexe de $]0,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $x \longmapsto x.f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe $]0,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est convexe sur $]0,\ +\infty[$. On pose $h = x \longmapsto x.f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
On se donne un triplet $(a,\ b,\ c)$ avec $0 < a \leqslant b \leqslant c$.
On calcule

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ h(a) & h(b) & h(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a.f(1/a) & b.f(1/b) & c.f(1/c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a.b.c. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f(1/a) & f(1/b) & f(1/c) \\ 1/a & 1/b & 1/c \end{vmatrix}$$

(on a sorti a, b et c par multilinéarité).
On échange deux lignes :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ h(a) & h(b) & h(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a.b.c.\begin{vmatrix} 1/a & 1/b & 1/c \\ f(1/a) & f(1/b) & f(1/c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On échange deux colonnes :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ h(a) & h(b) & h(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a.b.c.\begin{vmatrix} 1/c & 1/b & 1/a \\ f(1/c) & f(1/b) & f(1/a) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Or, on a justement $\dfrac{1}{c} \leqslant \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$. La convexité de f appliquée au triplet ordonné $\left(\dfrac{1}{c},\, \dfrac{1}{b},\, \dfrac{1}{a}\right)$ assure que ce déterminant est positif.
Et le facteur $a.b.c$ devant l'est aussi.

Cet exercice est joli, mais je n'en vois pas ensuite d'application à des fonctions convexes bien choisies...

A-t-on raisonné par équivalences ?

On a juste prouvé

f convexe	$\Rightarrow$	$x \longmapsto f(-x)$ convexe
f convexe	$\Rightarrow$	$x \longmapsto x.f(1/x)$ convexe

On peut affirmer qu'on a raisonné par équivalences... Pas tout à fait convaincant.
Mais appliquons notre résultat non pas à f mais à sa transformé :

g convexe	$\Rightarrow$	$x \longmapsto g(-x)$ convexe	et c'est	$x \longmapsto f(x)$
h convexe	$\Rightarrow$	$x \longmapsto x.h(1/x)$ convexe	et c'est	$x \longmapsto x.\left(\dfrac{1}{x}.f\left(\dfrac{1}{1/x}\right)\right)$

Le résultat dans le sens direct fournit sa propre réciproque quand on l'applique à la transformée à la place de f !

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

Dérivabilité

III~0) Soit f une application convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que pour tout x, et pour tout triplet $(h,\ k,\ t)$ avec $h < k < 0 < t$: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \dfrac{f(x+k)-f(x)}{k} \leqslant \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$
(on pourra prendre $(a,\ b,\ c) = (x+h,\ x+k,\ x)$ puis un autre triplet).

On suppose f convexe. On pourra donc écrire $\begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$ mais attention, seulement après avoir vérifié $a \leqslant b \leqslant c$!

On veut prouver $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \dfrac{f(x+k)-f(x)}{k} \leqslant \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$ pour $h \leqslant k < 0 < t$.

On n'a pas $f(h)$, $f(k)$, mais $f(a+h)$, $f(a+k)$ et autres.

On va donc considérer $x+h \leqslant x+k < x < x+t$. Un quadruplet, donc deux triplets ordonnés au moins :

$x+h \leqslant x+k < x$	$x+k < x < x+t$
$\begin{vmatrix} x+h & x+k & x \\ f(x+h) & f(x+k) & f(x) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$	$\begin{vmatrix} x+k & x & x+t \\ f(x+k) & f(x) & f(x+t) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$
$\begin{vmatrix} h & k & x \\ f(x+h)-f(x) & f(x+k)-f(x) & f(x) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$	$\begin{vmatrix} k & x & t \\ f(x+k)-f(x) & f(x) & f(x+t)-f(x) \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \geqslant 0$
$\begin{vmatrix} h & k \\ f(x+h)-f(x) & f(x+k)-f(x) \end{vmatrix} \geqslant 0$	$\begin{vmatrix} k & t \\ f(x+k)-f(x) & f(x+t)-f(x) \end{vmatrix} \leqslant 0$ 1 est en position « négative »
$(f(x+k)-f(x)).h \geqslant (f(x+h)-f(x)).k$	$(f(x+t)-f(x)).k \leqslant (f(x+k)-f(x)).t$
$\dfrac{f(x+k)-f(x)}{h} \geqslant \dfrac{f(x+h)-f(x)}{k}$ On a divisé par $h.k$ qui est positif !	$\dfrac{f(x+t)-f(x)}{t} \geqslant \dfrac{f(x+k)-f(x)}{k}$ On a divisé par $k.t$ qui est négatif !

Ce sont exactement les inégalités attendues, à mettre bout à bout.

On notera que si on se laisse guider par les combinaisons sur les colonnes, le calcul devient plus simple.
Mais je ne peux pas vous interdire de raisonner encore comme des élèves de Terminale, en cherchant toujours à tout développer plutôt que de chercher à rendre les choses agréables...

III∼1) Déduisez que $h \longmapsto \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est croissante majorée sur $]-\infty,\ 0[$.

III∼2) Déduisez que f est dérivable à gauche en tout point. f est elle dérivable à droite en tout point ?

L'inégalité $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \dfrac{f(x+k)-f(x)}{k}$ montre que $h \longmapsto \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$est croissante sur $]-\infty,\ 0[$.
L'inégalité $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \dfrac{f(x+k)-f(x)}{k} \leqslant \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$ montre qu'elle est majorée, par exemple par $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{1}$ *(ne dépendant pas de h).*
En tant qu'application croissante majorée, elle a une limite en 0 par valeur inférieure.

Les taux d'accroissement à gauche ont une limite...
L'application est dérivable à gauche en tout point x.

III∼3) f est elle continue en tout point ? f est elle dérivable en tout point ?

Passons à droite, avec plus ou moins de rigueur ou d'expertise.

Méthode propre : je recommence les mêmes idées.
Pour tout triplet $h < 0 < t < s$, on a $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t} \leqslant \dfrac{f(x+s)-f(x)}{s}$.
L'application $t \longmapsto \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$ est croissante sur $]0,\ +\infty[$.
L'application $t \longmapsto \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$ est minorée sur $]0,\ +\infty[$ par exemple par $\dfrac{f(x-1)-f(x)}{-1}$.
Elle admet donc une limite en 0^+.

Pur physicien, au sens noble du terme.

Méthode moins propre : j'affirme.
On fait « le même type de raisonnement à droite », ça marche aussi bien.

Pur matheux, pas forcément au sens le plus noble du terme.

Méthode propre : j'enchaîne les idées.
On a montré f convexe implique f dérivable à gauche en tout point.
On a montré f convexe implique $x \longmapsto f(-x)$ convexe.
On a donc f convexe implique $x \longmapsto f(-x)$ dérivable à gauche en tout point x.
Et ceci donne que f est dérivable à droite en tout point $-x$.
Donc en tout point.

Pur matheux. Au sens « concours » du terme.

---

f est dérivable à gauche en tout point, donc continue à gauche (développement d'ordre 1 implique développement d'ordre 0).
f est dérivable à droite en tout point, donc continue à droite.
f est continue de chaque côté en tout point, donc continue.
f est bien continue en tout point.

Une application discontinue ne peut pas être convexe.
Mais c'est directement offert dans notre inégalité avec les déterminants...

f est dérivable à droite et à gauche en tout point. Ceci ne garantit pas qu'elle soit dérivable. Rien ne dit que $f'_g(x)$ sera égal à $f'_d(x)$.

> *Peut être la suite pourrait nous le dire. mais justement, on voit ensuite des f'_d et f'_g.*
> *Et puis on a vu l'exemple de la valeur absolue... Convexe mais pas dérivable en 0.*

III∼4) **Montrez $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$ (ceci répond partiellement à la question précédente ?) pour tout x.**

Repartons de $\dfrac{f(x+k)-f(x)}{k} \leqslant \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$ pour $k < 0 < t$.
Faisons tendre k vers 0 par valeur inférieure (vers 0^- quoi), maintenant qu'on sait que la limite existe. Le premier membre tend vers $f'_{g(x)}$.
On a donc $f'_g(x) \leqslant \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$.
Faisons tendre t vers 0 par valeur supérieure (on sait que la limite existe) : $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$.

> *Erreur fatale et classique de l'élève non matheux : passer à la limite sans avoir d'ores et déjà prouvé l'existence des limites. C'est à ça qu'on voit la différence fondamentale entre le matheux et le... comment appeler ça, un truc qui sait faire des calculs mais n'a pas conscience qu'il n'a justifié aucune existence ? Comment appeler celui qui confond passage à la limite et théorème d'encadrement ?*

On note que pour la valeur absolue, en 0 on a $f'_g = -1$ et $f'_d = 1$. Conforme.

III∼5) **En prenant $(x,\ \dfrac{x+y}{2},\ y)$ dans le rôle de a, b et c, montrez $f'_d(x) \leqslant f'_g(y)$ pour tout couple $(x,\ y)$ avec $x \leqslant y$.**

Si on prend x et y avec x pus petit que y, on peut insérer $\dfrac{x+y}{2}$ entre les deux. Et on a donc un triplet ordonné sur lequel appliquer la formule du déterminant :

$$\begin{vmatrix} x & b & y \\ f(x) & f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) & f(y) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$$

puis par exemple

$$\frac{f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big)-f(x)}{\dfrac{x+y}{2}-x} \leqslant \frac{f(y)-f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big)}{y-\dfrac{x+y}{2}}$$

Ce sont deux taux d'accroissements, de la forme $\dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$ avec $t = \dfrac{y-x}{2}$ *(positif)*
et $\dfrac{f(y+k)-f(y)}{k}$ avec $k = \dfrac{x-y}{2}$ *(négatif)*

Le premier est plus grand que la limite à droite quand t tend vers 0^+ des $\dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$ *(limite à droite d'application croissante)*.
Le second est plus grand que la limite à gauche quand k tend vers 0^- des $\dfrac{f(y+k)-f(y)}{k}$ *(limite à gauche d'application croissante)*.
On a donc

$$f'_d(x) \leqslant \frac{f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big)-f(x)}{\dfrac{x+y}{2}-x} \leqslant \frac{f(y)-f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big)}{y-\dfrac{x+y}{2}} \leqslant f'_g(y)$$

III∼6) **Déduisez que f'_g et f'_d sont croissantes.**

On met tout bout à bout ? $f'_g(x) \leqslant f'_d(x) \leqslant f'_g(y) \leqslant f'_d(y)$.

Effaçons ce qui ne sert pas :

$f'_g(x) \leqslant \ldots \leqslant f'_g(y) \leqslant \ldots$	$\ldots \leqslant f'_d(x) \leqslant \ldots \leqslant f'_d(y)$
f'_g est croissante	f'_d est croissante

III~7) Montrez que si f est convexe et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors f' est croissante.

L'hypothèse ajoutée est f est dérivable. On sait donc par avance que f' existe en tout point.
Et quitte à regarder à droite et à gauche, f' est croissante.
Donc f' est croissante.

IV~0) Montrez que si f est dérivable avec f' croissante, alors f est convexe.

Supposons f dérivable et f' croissante.

On se donne alors a, b et c avec $a < b < c$ et calculons le célèbre déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ qu'on écrit $\begin{vmatrix} a-b & b & c-b \\ f(a)-f(b) & f(b) & f(c)-f(b) \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ puis $-\begin{vmatrix} a-b & c-b \\ f(a)-f(b) & f(c)-f(b) \end{vmatrix}$ et enfin $\begin{vmatrix} b-a & c-b \\ f(b)-f(a) & f(c)-f(b) \end{vmatrix}$ et enfin $(b-a).(f(c)-f(b)) - (c-b).(f(b)-f(a))$.

Par théorème des accroissements finis, $f(c)-f(b)$ s'écrit $(c-b).f'(\gamma)$ pour un γ de $]b,\ c[$
$f(b)-f(a)$ s'écrit $(b-a).f'(\alpha)$ pour un γ de $]a,\ b[$
On a donc

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (c-b).(b-a).(f(\gamma) - f'(\alpha))$$

avec $a < \alpha < b < \gamma < c$.
Par croissance de f', chacun des trois termes du produit est positif ou nul. Ce produit l'est aussi.

Pour f dérivable, il y a donc équivalence entre « f convexe » et « f' croissante ».

Pour f de classe D^2, avec théorème du cours, il y a équivalence entre « f convexe » et « f'' positive ».

IV~1) Justifiez que expest convexe.

L'exponentielle a pour dérivée l'exponentielle, croissante...
Elle est donc convexe.

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24

. Inégalités de convexité .

V~0) On se donne a et c avec $a \leqslant c$. Montrez que $t \longmapsto (1-t).a + t.c$ est bijective de $[0,\ 1]$ dans $[a,\ c]$ (explicitez sa réciproque).

L'application $t \longmapsto (1-t).a + t.c$ est affine, croissante. L'image de 0 est a et l'image de 1 est c.
Toute valeur intermédiaire entre a et c est atteinte une fois.

D'ailleurs, un réel b entre a et c est l'image de $t = \dfrac{b-a}{c-a}$ (équation du premier degré).
Et ce t est positif (numérateur et dénominateur positifs), plus petit que 1 (numérateur inférieur au dénominateur).

Résumé :

	$t \in [0,\ 1]$	$\longrightarrow$	$(1-t).a + t.c \in [a,\ c]$	barycentre
Thalès	$\dfrac{b-a}{c-a}$	$\longleftarrow$	$b \in [a,\ c]$	

V~1) Montrez que f est convexe si et seulement si
pour tout triplet $(a,\ c,\ t)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,\ 1]$ on a $f((1-t).a + t.c) \leqslant (1-t).f(a) + t.f(c)$.

Supposons f convexe.
On se donne a et c avec $a \leqslant c$, et on se donne t dans $[0,\ 1]$.

On sait que pour tout b entre a et c, on a $\begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$.

En particulier pour $b = (1-t).a + t.b$ (qui est bien entre a et c) : $\begin{vmatrix} a & (1-t).a + t.c & c \\ f(a) & f((1-t).a + t.c) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$

On développe

$$-f(a).\begin{vmatrix} (1-t).a+t.c & c \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + f((1-t).a+t.b).\begin{vmatrix} a & c \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - f(b).\begin{vmatrix} a & (1-t).a+t.c \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$$

On simplifie :

$$f(a).(1-t).(c-a) + (a-c).f((1-t).a+t.b) + f(b).t.(a-c) \geqslant 0$$

On fait passer de l'autre côté en simplifiant par $c-a$ positif :

$$f((1-t).a+t.c) \leqslant (1-t).f(a) + t.f(c)$$

L'image de la moyenne est plus petite que la moyenne des images.

Mais il manque un cas. Si si.
Que fait on si a est plus grand que c ?
Il faut échanger les rôles... Et remplacer t par $1-t$.

Réciproquement ;
supposons pour tout triplet $(a,\ c,\ t)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,\ 1]$ on a $f((1-t).a+t.c) \leqslant (1-t).f(a)+t.f(c)$.

On se donne alors a, b et c vérifiant $a \leqslant b \leqslant c$.
On pose $t = \dfrac{b-a}{c-a}$. Il est entre 0 et 1. On peut alors utiliser l'hypothèse : $f((1-t).a+t.c) \leqslant (1-t).f(a)+t.f(c)$.
Elle devient

$$f(b) \leqslant \Big(1 - \frac{b-a}{c-a}\Big).f(a) + \frac{b-a}{c-a}.f(c)$$

puis $(c-a).f(b) \leqslant (c-b).f(a) + (b-a).f(c)$ (car $c-a$ est positif).

On regroupe et on reconnaît $\begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$ (développé par rapport à sa seconde ligne).

On a prouvé l'équivalence.

Et vu qu'il y a des variables à introduire à chaque fois, dans un bon ordre, on ne peut pas dire qu'on a raisonné par équivalences...

V∼2) Montrez que si f est convexe, et h convexe et croissante alors $h \circ f$ est convexe.

On prend f convexe, et h convexe aussi et croissante.
On ne va pas utiliser la définition par déterminant pour prouver que $h \circ f$ est convexe.
On va utiliser le critère « pour tout triplet $(a,\ c,\ t)$ de $\mathbb{R}^2 \times [0,\ 1]$,

$$g(f((1-t).a+t.c)) \leqslant (1-t).g(f(a)) + t.g(f(c))$$

On se donne donc a, b et t.
On écrit la convexité de f :

$$f((1-t).a+t.c) \leqslant (1-t).f(a) + t.f(c)$$

On compose par g croissante :

$$g(f((1-t).a+t.c)) \leqslant g((1-t).f(a) + t.f(c))$$

Dans le membre de droite, on pose $a' = f(a)$ et $c' = f(c)$ et on utilise la convexité de g :

$$g((1-t).a' + t.c') \leqslant (1-t).g(a') + t.g(c')$$

On met bout à bout $g(f((1-t).a+t.c)) \leqslant g((1-t).f(a)+t.f(c))$ et
$g((1-t).f(a)+t.f(c)) \leqslant (1-t).g(f(a)) + t.g(f(c))$
On a obtenu

$$g(f((1-t).a+t.c)) \leqslant (1-t).g(f(a)) + t.g(f(c))$$

c'est ce qu'on voulait.

VI~0) Montrez que f est convexe si et seulement si pour tout n uplet $(x_1,\dots x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et tout n-uplet $(\lambda_1,\dots\lambda_n)$ de $(\mathbb{R}^{+*})^n$ on a $f\Big(\dfrac{\lambda_1.x_1+\dots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}\Big)\leqslant\dfrac{\lambda_1.f(x_1)+\dots+\lambda_n.f(x_n)}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}$.
pour un sens, vous pourrez considérer le cas particulier $n=2$
pour l'autre sens, vous pourrez faire une récurrence sur n en étudiant $(1-t).\frac{\lambda_1.x_1+\dots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}+t.x_{n+1}$ pour $t=\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1+\dots+\lambda_n+\lambda_{n+1}}$.

Appelons petite inégalité celle en
« pour tout triplet $(a,\ c,\ t)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[0,\ 1]$ on a $f((1-t).a+t.c)\leqslant(1-t).f(a)+t.f(c)$ ».

Appelons grande inégalité celle en
« pour tout n uplet $(x_1,\dots x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et tout n-uplet $(\lambda_1,\dots\lambda_n)$ de $(\mathbb{R}^{+*})^n$ on a

$$f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\dots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}\Big)\leqslant\frac{\lambda_1.f(x_1)+\dots+\lambda_n.f(x_n)}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}$$

»[2].

Passons de la grande à la petite.
On suppose que la grande est vraie pour tout n (c'est ça l'essentiel).
Elle l'est donc pour n gal à 2 (cas particulier).
On a donc « pour tout couplet $(x_1,\ x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et tout couplet $(\lambda_1,\ \lambda_2)$ de $(\mathbb{R}^{+*})^2$:

$$f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\lambda_2.x_2}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)\leqslant\frac{\lambda_1.f(x_1)+\lambda_2.f(x_2)}{\lambda_1+\lambda_2}$$

Si maintenant on nous donne a, c quelconques et t dans $[0,\ 1]$, on prend $x_1=a$, $x_2=b$, $\lambda_1=1-t$ et $\lambda_2=t$ (positifs).
L'hypothèse devient

$$f((1-t).a+t.c)=f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\lambda_2.x_2}{\lambda_1+\lambda_2}\Big)\leqslant\frac{\lambda_1.f(x_1)+\lambda_2.f(x_2)}{\lambda_1+\lambda_2}=(1-t).f(a)+t.f(c)$$

C'est la petite inégalité de convexité !

Passons de la petite à la grande.
On suppose qu'on pourra utiliser la formule $f((1-t).a+t.c)\leqslant(1-t).f(a)+t.f(c)$ autant de fois qu'on veut avec t entre 0 et 1.
On note P_n la propriété pour tout n uplet $(x_1,\dots x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et tout n-uplet $(\lambda_1,\dots\lambda_n)$ de $(\mathbb{R}^{+*})^n$ on a

$$f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\dots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}\Big)\leqslant\frac{\lambda_1.f(x_1)+\dots+\lambda_n.f(x_n)}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}$$

que l'on veut établir pour tout n.
On va le faire par récurrence sur n. Pour n gal à 1, c'est évidemment vrai.
Pour n égal à 2, on reconnaît la petite inégalité de convexité prise en hypothèse, mais on n'en pas pas besoin.

On se donne n, on suppose P_n vraie, et on veut prouver P_{n+1}.
On prend donc $n+1$ réels de x_1 à x_{n+1} et $n+1$ pondérations positives de λ_1 à λ_{n+1}.
On veut prouver

$$f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\dots+\lambda_{n+1}.x_{n+1}}{\lambda_1+\dots+\lambda_{n+1}}\Big)\leqslant\frac{\lambda_1.f(x_1)+\dots+\lambda_{n+1}.f(x_{n+1})}{\lambda_1+\dots+\lambda_{n+1}}$$

quitte à utiliser

$$f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\dots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}\Big)\leqslant\frac{\lambda_1.f(x_1)+\dots+\lambda_n.f(x_n)}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}$$

et la petite inégalité de convexité.
Comme suggéré, on calcule $(1-t).\dfrac{\lambda_1.x_1+\dots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}+t.x_{n+1}$ pour $t=\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1+\dots+\lambda_n+\lambda_{n+1}}$.
On trouve

$$(1-t).\frac{\lambda_1.x_1+\dots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}+t.x_{n+1}=\frac{\lambda_1.x_1+\dots+\lambda_{n+1}.x_{n+1}}{\lambda_1+\dots+\lambda_{n+1}}$$

2. je ferme les guillemets ouverts deux lignes plus haut

Et surtout, t est entre 0 et 1 (sinon, on ne peut rien faire !).
La petite inégalité de convexité donne donc

$$f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_{n+1}.x_{n+1}}{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}}\Big)=f\Big((1-t).\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}+t.x_{n+1}\Big)\leqslant(1-t).f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}\Big)+t.f(x_{n+1})$$

Mais l'hypothèse de rang n donne

$$f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}\Big)\leqslant\frac{\lambda_1.f(x_1)+\ldots+\lambda_n.f(x_n)}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}$$

On multiplie par $(1-t)$ (positif), on ajoute le terme au bout :

$$f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_{n+1}.x_{n+1}}{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}}\Big)=f\Big((1-t).\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}+t.x_{n+1}\Big)\leqslant(1-t).\frac{\lambda_1.f(x_1)+\ldots+\lambda_n.f(x_n)}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}+t.f(x_{n+1})$$

On remplace t par sa valeur :

$$f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_{n+1}.x_{n+1}}{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}}\Big)\leqslant\frac{\lambda_1.f(x_1)+\ldots+\lambda_n.f(x_n)}{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}}+\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}}.f(x_{n+1})$$

C'est exactement ce qu'on voulait au rang $n+1$.
La récurrence s'achève.

VI∼1) Déduisez pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout n uplet $(x_1,\ldots x_n)$: $\exp\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{e^{x_1}+\ldots+e^{x_n}}{n}$.

La fonction exponentielle est convexe (on l'a prouvé par dérivée seconde).
On peut donc lui appliquer la grande inégalité de convexité. Mais pourquoi n'y a-t-il pas de λ_k dans la formule attendue $\exp\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{e^{x_1}+\ldots+e^{x_n}}{n}$? Simplement parce qu'on a pris les λ_k tous égaux à 1 (positifs, oui !).
Et on a donc bien $f\Big(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\Big)\leqslant\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}$, avec $f=\exp$.

VI∼2) Déduisez pour tout n et tout n uplet de réels strictement positifs $(a_1,\ldots a_n)$: $\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$.

On nous donne des a_i strictement positifs ? Oui. Ce sont eux qui sont donnés.
Alors on pose $x_i=\ln(a_i)$ pour tout i (oui, c'est dans ce sens, on nous donne les a_i, on définit les x_i).

La formule devient $\exp\left(\frac{\ln(a_1)+\ldots+\ln(a_n)}{n}\right)\leqslant\frac{e^{\ln(a_1)}+\ldots+e^{\ln(a_n)}}{n}$.

Par propriété du logarithme, on trouve bien $(e^{\ln(a_1\ldots a_n)})^{1/n}\leqslant\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ (comparaison des moyennes).

Dans la grande majorité des copies d'élèves, les variables sont mal quantifies.
On ne tape pas sur les hypothèses en introduisant les variables dans le mauvais ordre.
Poser $a_i=e^{x_i}$ revient à disposer des x_i et à définir les a_i alors que les a_i sont en $\forall$ dans l'énoncé.
D'ailleurs, si au lieu de dire « a_i donné, on pose $x_i=\ln(a_i)$ », on part de x_i et on pose $a_i=e^{x_i}$, qu'est ce qui assure que les $a_i$sont bien quelconques ?

VI∼3) Montrez pour f convexe et g continue : $f\Big(\frac{1}{b-a}.\int_a^b g(t).dt\Big)\leqslant\frac{1}{b-a}.\int_a^b f(g(t)).dt$ *(inégalité de Jensen)*.

On veut établir $f\Big(\frac{1}{b-a}.\int_a^b g(t).dt\Big)\leqslant\frac{1}{b-a}.\int_a^b f(g(t)).dt$ avec g continue et f convexe.

Déjà, on observe que f est continue car convexe. Les composées sont continues. Les intégrales existent.
Et quel rapport avec la convexité ? Des sommes ? Oui ! De Riemann.

$\frac{1}{b-a}.\int_a^b f(g(t)).dt$ est la limite de $\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}f\Big(g\Big(a+k.\frac{b-a}{n}\Big)\Big)$ quand n tend vers l'infini.
$\frac{1}{b-a}.\int_a^b g(t).dt$ est la limite de $\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}g\Big(a+k.\frac{b-a}{n}\Big)$ quand n tend vers l'infini.

$f\Big(\frac{1}{b-a}.\int_a^b g(t).dt\Big)$ est la limite de $f\Big(\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} g\Big(a+k.\frac{b-a}{n}\Big)\Big)$ (continuité de f).

Or, justement, pour tout n, on a

$$f\Big(\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} g\Big(a+k.\frac{b-a}{n}\Big)\Big) \leqslant \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(g\Big(a+k.\frac{b-a}{n}\Big)\Big)$$

(c'est avec des λ_k égaux à 1 et des x_k égaux à $g\Big(a+k.\frac{b-a}{n}\Big)$).
Il suffit de passer à la limite(s) *(on sait qu'elles existent)* : l'image de l'intégrale est plus petit que l'intégrale des images.

Il suffisait pour cette question de penser aux sommes de Riemann et de passer à la limite...

Factorielle

L'objectif est de montrer que la fonction factorielle de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est logarithmiquement convexe (c'est à dire que son logarithme est convexe)*, puis de montrer qu'il existe une unique application qui généralise la factorielle à $\mathbb{R}^+$ et reste logarithmiquement convexe. On l'appelle fonction* Γ (gamma).

VII∼0) Montrez, pour trois entiers naturels a, b et c vérifiant $a \leqslant b \leqslant c$: $\Big(\frac{b!}{a!}\Big)^{c-b} \leqslant b^{(c-b).(b-a)} \leqslant \Big(\frac{c!}{b!}\Big)^{b-a}$, déduisez que $n \longmapsto \ln(n!)$ est convexe de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

On se donne trois entiers a, b et c avec $a < b < c$. On doit montrer que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \ln(a!) & \ln(b!) & \ln(c!) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ est positif.

On calcule ce déterminant en soustrayant déjà la deuxième colonne aux autres (comme a est le plus petit, $\ln(b!/a!)$ est cohérent à envisager).

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \ln(a!) & \ln(b!) & \ln(c!) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b & c-b \\ \ln(a!/b!) & \ln(b!) & \ln(c!/b!) \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a-b & c-b \\ \ln(a!/b!) & \ln(c!/b!) \end{vmatrix}$$

Ce nombre est $(b-a).\ln\Big(\frac{c!}{b!}\Big) - (c-b).\ln\Big(\frac{b!}{a!}\Big)$ et même

$$\ln\Big(\Big(\frac{c!}{b!}\Big)^{b-a}\Big) - \ln\Big(\Big(\frac{b!}{a!}\Big)^{c-b}\Big)$$

Mais qui est $\frac{b!}{a!}$? C'est $(a+1).(a+2)\dots(b)$. On a $b-a$ termes, tous plus petits que b.

Mais qui est $\Big(\frac{b!}{a!}\Big)^{c-b}$? C'est $\Big((a+1).(a+2)\dots(b)\Big)^{c-b}$. On a $(c-b).(b-a)$ termes, tous plus petits que b.

De même qui est $\frac{c!}{b!}$? C'est $(b+1).(b+2)\dots(c)$. On a $c-b$ termes, tous plus grands que b.

Mais qui est $\Big(\frac{c!}{b!}\Big)^{b-a}$? C'est $\Big((b+1).(b+2)\dots(c)\Big)^{c-b}$. On a $(c-b).(b-a)$ termes, tous plus grands que b.

Il y a autant de termes dans $\Big(\frac{b!}{a!}\Big)^{c-b}$ que dans $\Big(\frac{c!}{b!}\Big)^{b-a}$.
Mais dans l'un : tous les facteurs plus grands UE b, dans l'autre tous les facteurs plus petits que b.
On a donc

$$\Big(\frac{b!}{a!}\Big)^{c-b} \leqslant b^{(c-b).(b-a)} \leqslant \Big(\frac{c!}{b!}\Big)^{b-a}$$

On passe au logarithme. Le déterminant est positif...

VIII∼0) Pour x réels strictement positif donné et n entier naturel, on pose $I_n(x) = \frac{n^x.n!}{x.(x+1)\dots(x+n)}$.
Montrez : $I_n(x) = \int_0^n \Big(1-\frac{t}{n}\Big)^n.t^{x-1}.dt = n^x.\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.du$.

Chaque produit $I_n(x)$ dépend de deux variables effectivement : n et x.

La relation $I_n(x) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.t^{x-1}.dt = n^x.\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.dx$ doit pouvoir se démontrer par récurrence...
Déjà, on passe de $\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.t^{x-1}.dt$ à $n^x.\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.dx$ par changement de variable $t = n.u$.
On a alors $dt = n.du$ et $t^{x-1} = n^{n-1}.u^{x-1}$. C'est bien un n^x devant.

On va donc ensuite prouver par récurrence sur n (à x fixé) : $\frac{I_n(x)}{n^x} = \int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.dx$ c'est à dire $\frac{n!}{x.(x+1)\dots(x+n)} = \int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.dx$.
Pour n égal à 0, on a bien $\frac{1}{x} = \int_0^x u^{x-1}.dx = \left[\frac{u^x}{x}\right]_0^1$ (seule difficulté : on dérive uu^x à x fixé).

On se donne n (et x) et on suppose $\frac{n!}{x.(x+1)\dots(x+n)} = \int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.dx$.

On calcule alors $\int_0^1 (1-u)^{n+1}.u^{x-1}.dx$ par parties :

$(1-u)^{n+1}$	$\hookrightarrow$	$-(n+1).(1-u)^n$
u^{x-1}	$\hookleftarrow$	$\frac{u^x}{x}$

Le crochet est nul en $u = 0$ (par u^x avec x strictement positif) et en 1 (par $(1-u)^n$).
Mais qu'a-t-on ? $\int_0^1 (1-u)^{n+1}.u^{x-1}.dx = 0 + \frac{n+1}{x}.\int_0^1 (1-u)^n.u^x.dx$.
On ne retrouve pas l'intégrale précédente ?
Allez, un peu d'initiative : $\int_0^1 (1-u)^{n+1}.u^{x-1}.dx = \frac{n+1}{x}.\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.u.du$

$$\int_0^1 (1-u)^{n+1}.u^{x-1}.dx = \frac{n+1}{x}.\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.(1-(1-u)).du$$

$$\int_0^1 (1-u)^{n+1}.u^{x-1}.dx = \frac{n+1}{x}.\left[\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.du - \int_0^1 (1-u)^{n+1}.u^{x-1}.du\right]$$

La relation est de la forme $x.J = (n+1).(I-J)$ avec $I = \int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.du$ et $J = \int_0^1 (1-u)^{n+1}.u^{x-1}.du$.
Quitte à faire passer d l'autre côté : $(n+1+x).J = (n+1).I$.
On peut reporter :

$$\int_0^1 (1-u)^{n+1}.u^{x-1}.dx = \frac{n+1}{x}.\int_0^1 (1-u)^n.u^x.dx = \frac{n+1}{n+1+x}.\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.du$$

Il est temps de remplacer par hypothèse de récurrence :

$$\int_0^1 (1-u)^{n+1}.u^{x-1}.dx = \frac{n+1}{n+1+x}.\frac{n!}{x.(x+1)\dots(x+n)}$$

C'est bien la formule attendue.

Calculez $I_n(3)$ et donnez sa limite quand n tend vers l'infini.

$$I_n(3) = \frac{n^3.n!}{3.4.\dots(n+3)} = \frac{n^3.n!}{(n+3)!/2} = \frac{n^3.n!}{n!.(n+1).(n+2).(n+3)}.2 = \frac{2.n^3}{(n+1).(n+2).(n+3)}$$

Quand n tend vers l'infini, le numérateur est égal à $2.n^3$ et le dénominateur est équivalent à n^3.
Le quotient est équivalent à 2. Il tend vers 2.

Niveau Terminale (si il y a encore un niveau) : le quotient se comporte comme le quotient de ses termes de plus haut degré.

Simplifiez $I_n(p)$ si p est un entier naturel et donnez sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Que se passe-t-il si x est un entier naturel p : $I_n(p) = \frac{n^p.n!}{p.(p+1)\dots(p+n)}$.
Comme p est entier, le dénominateur est à son tour une factorielle ou plutôt un quotient de factorielles : $(n+p).(n+p-1)\dots p = \frac{(n+p)!}{(p-1)!}$.
On a donc $I_n(p) = \frac{n^p.n!(p-1)!}{(n+p)!}$.

On y trouve un coefficient binomial ?
Mais en quoi ceci va-t-il aider ? Surtout si à la fin on doit obtenir $(p-1)!$ si on en croit les questions suivantes...

Simplifions plutôt
$$\frac{(n+p)!}{n!} = (n+p).(n+p-1)\dots(n+1)$$
On a donc $I_n(p) = \dfrac{n^p}{(n+1).(n+2)\dots(n+p)}.(p-1)!$.

Montrez que chaque application $x \longmapsto \ln(I_n(x))$ est convexe sur $]0,\ +\infty[$.

Pour montrer la convexité de $x \longmapsto \ln(I_n(x))$, on développer cette application :
$\ln(I_n) = (x \longmapsto x.\ln(n) + \ln(n!) - \ln(x) - \ln(x+1) - \dots \ln(x+n))$.
On dérive une fois : $x \longmapsto \ln(n) - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} - \dots - \dfrac{1}{x+n}$.
La constante est constante.
Chaque $x \longmapsto \dfrac{1}{x+k}$ est décroissante sur $]0,\ +\infty[$.
La somme est croissante, puisqu'on a un signe moins devant chaque $x \longmapsto \dfrac{1}{x+k}$.
La dérivée est croissante.
L'application est convexe.

IX∼0) x est un réel strictement positif donné ; montrez : $(t+1)^{x+1} - t^{x+1} \geqslant (x+1).t^x$ pour tout t positif.

Le réel x est fixé. On doit montrer sur $\mathbb{R}^+$: $(t+1)^{x+1} - t^x \geqslant (1+x).t^x$.
C'est quoi cette formule ? Posons $\varphi = t \longmapsto t^{x+1}$.
On doit prouver $\varphi(t+1) - \varphi(t) \geqslant \varphi'(t)$.
Et si on faisait appel au théorème des accroissements finis ?
Il existe c entre $t$et $t+1$ vérifiant $\dfrac{\varphi(t+1)-\varphi(t)}{t+1-t} = \varphi'(c) = (x+1).c^x$.
Comme c est plus grand que t (et x positif), on a
$$\varphi(t+1) - \varphi(t) = \frac{\varphi(t+1)-\varphi(t)}{t+1-t} = \varphi'(c) = (x+1).c^x \geqslant (x+1).t^x$$

On pouvait aussi écrire une formule de Taylor : $\varphi(t+1) = \varphi(t) + 1.\varphi'(t) +$ reste avec un reste positif à cause du signe de la dérivée seconde.
On pouvait aussi écrire $\dfrac{(t+1)^{x+1} - t^{x+1}}{x+1} = \left[\dfrac{u^{x+1}}{x+1}\right]_{u=t}^{u=t+1} = \displaystyle\int_t^{t+1} u^x.du \geqslant \int_t^{t+1} t^x.du = t^x$.
De la belle analyse. Digne de la belle algèbre.

IX∼1) Déduisez : $(n+1)^{x+1} \geqslant n^x.(n+1+x)$ pour tout entier naturel n. Déduisez que $(I_n(x))_n$ est une suite croissante.

On doit prouver ensuite $(n+1)^{x+1} \geqslant n^x.(n+1+x)$. On se dit que ça ressemble au résultat précédent pour $t = n$ (positif).
On a prouvé $(n+1)^{x+1} - n^{x+1} \geqslant (x+1).n^x$.
On fait passer de l'autre côté : $(n+1)^{x+1} \geqslant n^{x+1} + (x+1).n^x$
$(n+1)^{x+1} \geqslant n.n^x + (x+1).n^x$
$(n+1)^{x+1} \geqslant n^x.(n+x+1)$

On voit le rapport avec la croissance de $n \longmapsto I_n(x)$?
Calculons le quotient (termes positifs) :
$$\frac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)} = \frac{(n+1)^x.(n+1)!}{x.(x+1)\dots(x+n+1)}.\frac{1}{\dfrac{n^x.n!!}{x.(x+1)\dots(x+n)}} = \frac{(n+1)^x}{n^x}.\frac{(n+1)}{(n+x+1)} = \frac{(n+1)^{x+1}}{n^x.(n+x+1)}$$
Quelle chance, la question précédente donne que ce terme est plus grand que 1.

Chaque suite $(I_n(x))_n$ est croissante.

Si on la majore, elle converge
Pour x donné, on majore $I_n(x)$ par $I_n([x]+1)$.

On majore $I_n([x]+1)$ par sa limite (car pour l'entier $[x]+1$, la convergence est acquise, vers la factorielle).

IX∼2) Montrez pour tout x que la suite $(I_n(x))$ converge. *On pose alors* $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} I_n(x)$.

X∼0) Exprimez $I_n(x+1)$ à l'aide de $I_{n+1}(x)$. Déduisez : $\Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$.

Pour x et n donnés, on a $I_n(x+1) = \dfrac{n^{x+1}.n!}{(x+1)\dots(x+n+1)}$ et $I_{n+1}(x) = \dfrac{(n+1)^x.(n+1)!}{x.(x+1)\dots(x+n+1)}$.

On écrit $I_{n+1}(x) = \dfrac{(n+1)^{x+1}.n!}{x.(x+1)\dots(x+n+1)}$ en décalant un terme de la factorielle.

On poursuit : $I_{n+1}(x) = \dfrac{1}{x}.\dfrac{(n+1)^{x+1}.n!}{(x+1)\dots(x+n+1)} = \dfrac{1}{x}.\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^{x+1}.\dfrac{n^{x+1}.n!}{(x+1)\dots(x+n+1)}$.

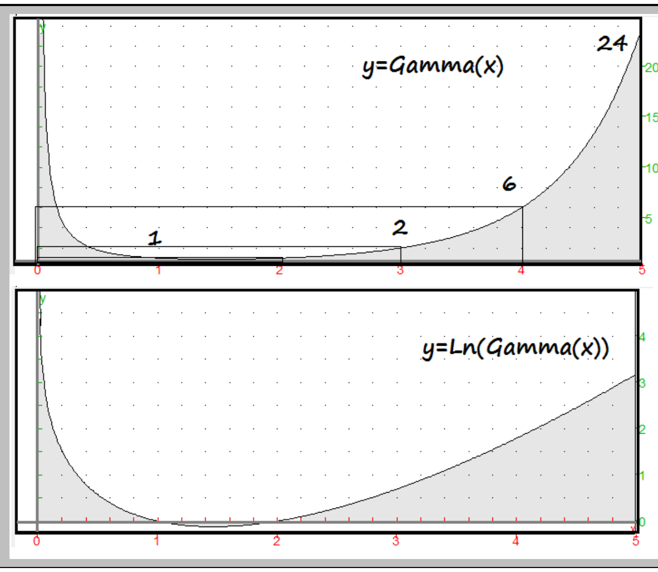
On a donc $I_{n+1}(x) = \dfrac{1}{x}.\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{x+1}.I_n(x+1)$.

Il est temps de faire tendre n vers l'infini ; les limites existent : $\Gamma(x) = \dfrac{1}{x}.\Gamma(x+1)$.
On a donc la formule $\Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$.
C'est de la forme $(x+1-1)! = x.(x-1)!$.

Montrez que $x \longmapsto \ln(\Gamma(x))$ est convexe sur $]0, +\infty[$.

Déduisez que Γ est convexe.

On a donc montré que Γ est une fonction logarithmiquement convexe, qui généralise la factorielle à $]0, +\infty[$ (en fait, historiquement, à cause de ce sale Gauss, il perdure un décalage depuis toujours : $\Gamma(p) = (p-1)!$).



Chaque $x \longmapsto \ln(I_n(x))$ est convexe.

On se donne trois réels positifs ordonnés : $a < b < c$. On a $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \ln(I_n(a)) & \ln(I_n(b)) & \ln(I_n(c)) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$.

On fait tendre n vers l'infini. Chaque terme de la ligne du milieu converge (convergence de chaque $I_n(x)$ vers $\Gamma(x)$, et le logarithme est convexe) :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \ln(\Gamma(a)) & \ln(\Gamma(b)) & \ln(\Gamma(c)) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$$

On reconnaît la convexité de $x \longmapsto \ln(\Gamma(x))$.

Une limite d'applications convexes est convexe à son tour.

On sait passer de la convexité de $x \longmapsto \ln(\Gamma(x))$?
On compose à gauche par exp.
Et exp est convexe, croissante.
On a prouvé « si f est convexe, et h convexe et croissante alors $h \circ f$ est convexe ».
Bref, si $\ln(\Gamma)$ est convexe, alors Γ est convexe.

Unicité

Passons à : « c'est la seule généralisation de la factorielle ».

XI∼0) *Soit f une application de $]0,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(1) = 1$, $f(x+1) = x.f(x)$ pour tout x et f est logarithmiquement convexe.* Calculez $f(n)$ pour tout entier naturel n.

XI∼1) *On pose $g = \ln(f)$.* Montrez pour tout x et tout n : $g(x+n) - g(x) - g(n) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\dfrac{x+k}{k}\right)$.

XI∼2) Montrez pour k entier, plus grand que x : $\dfrac{g(n)-g(n-1)}{1} \leqslant \dfrac{g(x+n)-g(n)}{x} \leqslant \dfrac{g(n+k)-g(n)}{k}$.

XI∼3) Déduisez : $\dfrac{g(x+n)-g(x)}{x} - \ln(n) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$.

XI∼4) Déduisez $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(x.\ln(n) - \ln(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\dfrac{x+k}{k}\right)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(I_n(x))$.

∘3∘ Il parait que l'application $x \longmapsto |2.x - 2.[x] - 1|$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$, prouvez le. Prouvez aussi qu'elle est périodique. Calculez son intégrale de 0 à 3.

L'application $x \longmapsto |2.x - 2.[x] - 1|$ est définie partout. Tant que l'on se place en un point a non entier, l'application est localement affine, donc continue.
Plus précisément, si a est dans un intervalle ouvert $]n,\ n+1[$, alors l'application est localement de la forme $x \longmapsto |2.x - 2.n - 1|$, elle est continue.

Rappelons que l'application valeur absolue est continue. C'est un défaut de dérivabilité qu'elle a.

Il reste le problème de la continuité en un point a entier.

	à gauche	en a	à droite
remarque	$[x] = a - 1$	$[a] = a$	$[x] = a$
fonction	$\lvert 2.x - 2.(a-1) - 1\rvert = \lvert 2.x - 2.a + 1\rvert$	1	$\lvert 2.x - 2.a - 1[$
limite	1	1	1

f est continue en tout point ma entier aussi.

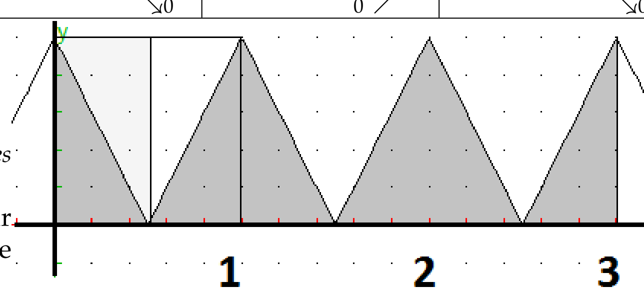
Pour la périodicité, pas de prise de tête sur le domaine. On se donne x et $x+1$. On a immédiatement $[x+1] = [x]+1$. On reporte :

$$f(x+1) = |2.x + 2 - 2.([x]+1) - 1| = |2.x - 2.[x] - 1| = f(x)$$

C'est la définition de la périodicité.
Disposant de la périodicité, il suffit de la représenter sur $[0,\ 1]$ pour la connaître sur tout $\mathbb{R}$.
Sa forme est alors $x \longmapsto |2.x - 1|$ (même en 1, je sais). On découpe en $\dfrac{1}{2}$.

intervalle	$\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$	$\left[1,\ \frac{3}{2}\right]$	$\left[\frac{3}{2},\ 2\right]$	$\left[2,\ \frac{5}{2}\right]$
formule	$1 - 2.x$	$2.x - 1$	$3 - 2.x$	$2.x - 3$	$5 - 2.x$
allure	$^1\searrow_0$	$_0\nearrow^1$	$^1\searrow_0$	$_0\nearrow^1$	$^1\searrow_0$

On a une fonction périodique « en triangle » *(le signal des instruments à bois si je me souviens bien)*.
Pour ce qui est de calculer son intégrale de 0 à 3, par périodicité, c'est trois fois son intégrale de 0 à 1 qui se calcule géométriquement et donne $3/2$.



◦4◦

Pour tout n, on définit $f_n = x \longmapsto x^n/n!$ de $[0,\ 2]$ dans $\mathbb{R}$.
Déterminez $||f_n||_\infty$ pour tout n.
Montrez que pour tout x de $[0,\ 2]$, $(f_n(x))$ converge vers un réel que l'on notera $f(x)$.
Représentez graphiquement f et calculez $||f||$.
Déterminez $||f_n - f||_\infty$ pour tout n.
Déterminez $||f_n||_p$ pour tout naturel strictement positif p. Déterminez la limité de $||f_n||_p$ quand p tend vers l'infini.
Rappel : $||f||_\infty = Sup(|f(t)| \mid t \in D_f)$ et $||f||_p = \sqrt[p]{\int_{D_f} |f(t)|^p.dt}$.

Pour tout n, l'application $x \longmapsto \dfrac{x^n}{n!}$ est positive (elle coïncide avec sa valeur absolue)
et croissante (son maximum est atteint en 1)

Son maximum en valeur absolue vaut $\dfrac{2^n}{n!}$: $||f_n||_\infty = \dfrac{2^n}{n!}$

---

x est fixé, c'est n qui bouge. $\dfrac{x^n}{n!}$ converge vers 0 (croissances comparées si x est plus grand que 1 et simple limite si x entre 0 et 1).
$\dfrac{x^n}{n!}$ converge vers 0.
L'application limite f est identiquement nulle. C'est bien la peine de la nommer ainsi.
Mais l'énoncé ne peut pas tout dévoiler dès le début.

Chaque norme de différence $||f_n - f||_\infty$ vaut $||f_n||_\infty$ ce qui fait $\dfrac{2^n}{n!}$.

On se donne n et p et on calcule

$$\int_0^2 |f_n(t)|^p.dt = \frac{1}{(n!)^p}\int_0^2 t^{n.p}.dt = \frac{2^{n.p+1}}{(n!)^p.(n.p+1)}$$

On passe à la racine p^{ieme} : $||f_n||_p = \dfrac{2^{n+\frac{1}{p}}}{n!.(n.p+1)^{\frac{1}{p}}}$.

C'est à p de tendre vers l'infini... $2^{n+\frac{1}{p}}$ tend vers 2^n
$n!$ ne bouge pas
$(n.p+1)^{\frac{1}{p}}$ est égal à $\exp\left(\dfrac{\ln(n.p+1)}{p}\right)$ et tend vers e^0

L'ensemble tend vers $\dfrac{2^n}{n!}$. C'est $||f_n||_\infty$.

◦5◦

♡ Montrez que si f est càdlàg et paire, alors elle est continue en tout point.
La composée de deux applications càdlàg est elle càdlàg ?
La composée de deux applications càdlàg croissantes est elle càdlàg ?
Si f est càdlàg et g continue, qui est càdlàg ? $f \circ g$ ou $g \circ f$.

Rappel càdlàg = continue à droite en tout point et avec des limites à gauche.
Pour tout a, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ existe (pas forcément égal à $f(a)$) et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a)$.

En tout point a, f est continue à droite en a.
Mais p f est continue à droite en $-a$ ($\lim\limits_{\substack{x\to -a\\ x>-a}} f(x) = f(-a)$).

Changeons le nom de la variable : $\lim\limits_{\substack{-x\to -a\\ -x>-a}} f(-x) = f(-a) = f(a)$.

Profitions de la parité : $\lim\limits_{\substack{-x\to -a\\ -x>-a}} f(-x) = \lim\limits_{\substack{-x\to -a\\ -x>-a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a)$

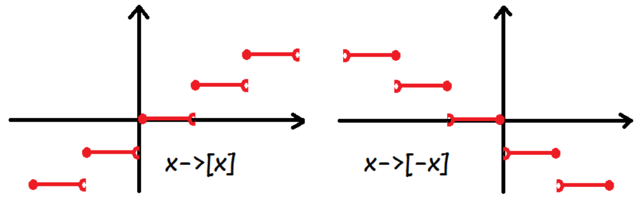
Par parité, ceci entraine que f est continue à gauche en a.

Étant continue à droite et à gauche en a, elle est continue en a.

Étant continue en tout point, elle est continue.

L'application $x \longmapsto -x$ est càdlàg, puisque continue en tout point.
Et elle va permettre par composition de retourner l'axe des abscisses.

Et si $x \longmapsto f(x)$ est càdlàg, $x \longmapsto f(-x)$ est plutôt càglàd, puisqu'on a renversé le temps.
La composée $x \longmapsto -x \longmapsto [x]$ est donc la composée de deux applications càdlàg, mais elle n'est plus càdlàg (en 1, elle vaut -1, et sa limite à droite existe et vaut 0).



On prend f croissante et càdlàg et g aussi.
On se place en a.
Et on fait tendre x vers a par valeur supérieure.
$f(x)$ tend vers $f(a)$, encore par valeur supérieure *(croissance de f et caractère càd...)*.
Alors $g(f(x))$ tend vers $g(f(a))$ *(caractère càdlàg de g)*.
$g \circ f$ est continue à droite.

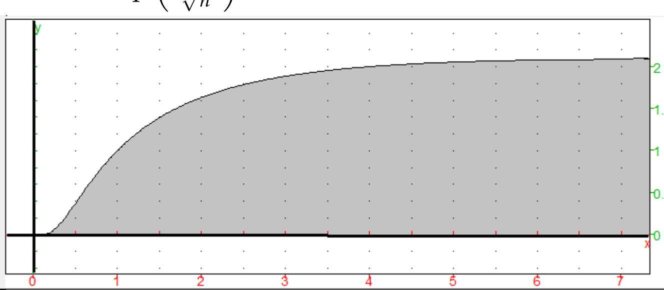
Et on fait tendre x vers a par valeur inférieure.
$f(x)$ tend vers une limite λ, encore par valeur inférieure *(croissance de f et caractère ...làg)*.
Alors $g(f(x))$ tend vers μ *(caractère ...làg de g en λ)*.
$g \circ f$ a une limite à gauche en a.

Si f est càdlàg et g continue alors $g \circ f$ est càdlàg.

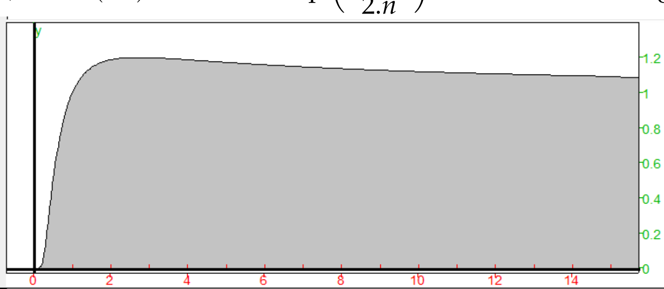
◦6◦ Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt[\ln(n)]{\dfrac{\ln(n)}{n}}$.
Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $n^{1/\sqrt{n}}$.
Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt{n}^{1/n}$.

On écrit $\sqrt[\ln(n)]{\dfrac{\ln(n)}{n}} = \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^{\frac{1}{\ln(n)}} = \exp\left(\dfrac{\ln\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)}{\ln(n)}\right)$ (existence pour tout n sauf 0 et 1).
Dans la parenthèse on a un $\dfrac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$ qui tend vers 0 (croissances comparées avec $\ln(n)$ dans le rôle de x qui tend vers l'infini).
un $\dfrac{-\ln(n)}{\ln(n)}$ qui tend vers -1.
Le contenu de l'exponentielle tend vers -1.
Par continuité de l'exponentielle, la limite vaut $\dfrac{1}{e}$.

$n^{1/\sqrt{n}} = \exp\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)$. On va trouver e^0 c'est à dire 1.



$\sqrt{n}^{\frac{1}{n}} = (n^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{2.n}} = \exp\left(\dfrac{\ln(n)}{2.n}\right)$. Là encore, limite égale à 1.



∘7∘

♡ Montrez qu'on a $n \sim_{n\to+\infty} n+1$ mais pas $\sin(n) \sim_{n\to+\infty} \sin(n+1)$.
♡ Montrez qu'on a $n \sim_{n\to+\infty} n+k$ pour tout k, mais qu'on n'a pas $n \sim_{n\to+\infty} n+n$.

Question évidentes. $\dfrac{n+1}{n}$ converge vers 1. mais $\dfrac{\sin(n+1)}{\sin(n)}$ vaut $\dfrac{\sin(n).\cos(1)+\cos(n).\sin(1)}{\sin(n)}$ et donc $\cos(1)+\tan(n).\sin(1)$.
La suite $\tan(n)$ ne converge pas (classique). La combinaison ne converge pas.

Le quotient $\dfrac{n+k}{n}$vaut $1+\frac{k}{n}$. Il converge vers 1.
Le rapport $\dfrac{n+n}{n}$converge vers 2. Et pas vers 1.

Pourquoi $(\tan(n))$ ne converge pas ?
Par l'absurde, si elle convergeait vers a,alors la suite $(\tan(n+1))$ convergerait aussi vers a.
Or, $\tan(n+1) = \dfrac{\tan(1)+\tan(n)}{1-\tan(1).\tan(n)}$. par passage à la limite et unicité de celle ci : $a = \dfrac{a+\tan(1)}{1-a.\tan(1)}$.
Mais aussi $\tan(2.) = \dfrac{2.\tan(n)}{1-(\tan(n)^2}$et cette fois $a = \dfrac{2.a}{1-a^2}$.
Les deux équations n'ont pas de racine commune...

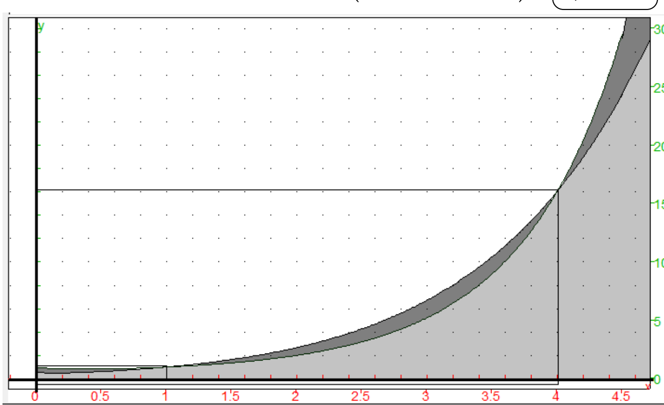
∘8∘

Résolvez $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ d'inconnue réelle x *(peut on considérer que 0 est solution ?)*

x est forcément positif.
Et 0 est solution (on rappelle $0^0 = 1$ et c'est $o(1)^{o(1)}$ qui est indéterminé (avec des petits o)...
Et 1 est solution aussi.
Ensuite, pour résoudre, on passe au logarithme : $\sqrt{x}.\ln(x) = x.\ln(\sqrt{x})$.
L'équation devient $\left(\sqrt{x}-\dfrac{x}{2}\right).\ln(x) = 0$

$$\sqrt{x}.\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right).\ln(x) = 0$$

On a donc nos trois solutions (et elles seules) : $\boxed{0, 4 \text{ et } 1}$



∘9∘

Montrez que si f est paire et dérivable, alors f' est impaire.
Donnez un contre-exemple à "f impaire implique f' paire".

On suppose $\forall x,\ f(x) = f(-x)$ et on dérive : $\forall x,\ f'(x) = -f'(-x)$ (il sort un signe moins à droite à cause de la dérivation composée).
On reconnaît que f' est impaire.

Blague (véridique) :	Le prof demande à l'élève « montrez que f est impaire ». L'élève écrit « on calcule $f(2.n+1)$ ».

La preuve ci dessus semble donner « f impaire implique f' paire ».
Mais qui dit que f est dérivable.
Prenons $Signe = x \longmapsto \left\{\begin{array}{ccc} 1 & si & x>0 \\ 0 & si & x=0 \\ -1 & si & x<0 \end{array}\right|$. Elle est impaire. Mais pas dérivable. En tout cas, pas dérivable en 0 car elle n'y est même pas continue...

∘10∘ Prolongez par continuité en 0 $t \longmapsto \dfrac{\sin\left(\dfrac{2.q+1}{2}.t\right).\sin\left(\dfrac{2.p+1}{2}.t\right)}{\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)}$ (notée $f_{p,q}$), et montrez $\int_{-\pi}^{\pi} f_{p,q(t)}.dt = 2.\pi.(Min(p,q)+1)$.

Oui, c'est lui qui se cache dans l'exercice avec $f_{p,q}$.
Mais déjà, prolonger par continuité en 0 se fait avec des équivalents :

$$\sin\left(\frac{2.q+1}{2}.t\right).\sin\left(\frac{2.p+1}{2}.t\right) \sim \frac{(2.p+1).(2.q+1)}{4}.t^2$$

et $\sin\left(\dfrac{t}{2}\right).\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \sim \dfrac{1}{4}.t^2$.
Le quotient est équivalent à $(2.p+1).(2.q+1)$. On posera donc $\boxed{f_{p,q}(0) = (2.p+1).(2.q+1)}$

Ayant prolongé par continuité au seul point posant problème, l'intégrale existe.
Mais pour la calculer ? $\dfrac{\sin\left(\dfrac{2.q+1}{2}.t\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} = \sum_{k=-q}^{q} e^{i.k.t}$ et $\dfrac{\sin\left(\dfrac{2.p+1}{2}.t\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} = \sum_{j=-q}^{q} e^{i.j.t}$.
Le produit donne $\sum_{\substack{-q\leqslant j\leqslant q\\ -p\leqslant k\leqslant p}} e^{i.(j+k).t}$.
On intègre par linéarité : $\int_{\pi}^{\pi} f_{p,q}(t).dt = \sum_{\substack{-q\leqslant j\leqslant q\\ -p\leqslant k\leqslant p}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i.(j+k).t}.dt$.
Mais chaque intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i.(j+k).t}.dt$ est nulle : $\dfrac{1}{i.(j+k)}.\left[e^{i.(j+k).t}\right]_{t=-\pi}^{\pi} = \dfrac{e^{(j+k).\pi} - e^{-(j+k).\pi}}{i.(j+k)}$.
Dans l'exponentielle complexe, les sinus sont nuls, et les deux cosinus aussi, par parité.
Ou alors on dit que $(j+k).\pi$ et $-(j+k).\pi$ ne diffèrent que d'un multiple de $2.\pi$.

Alors quoi ? Chaque intégrale est nulle, et la somme est nulle ?

Mais attention à $j = -k$. On ne peut pas mettre $j+k$ au dénominateur. Et en fait, on intègre la fonction constante égale à 1 sur un intervalle de longueur $2.\pi$.
On récupère autant de fois $2.\pi$ qu'on peut trouver de couples $(j,\ k)$ avec $j = -k$.
Sans perte de symétrie, supposons $p \leqslant q$. Pour chaque j de $-p$ à p il y a exactement un k qui lui est associé. Et on a donc $2.p+1$ termes.

Sinon, on pouvait aussi écrire

$$\frac{\sin\left(\dfrac{2.q+1}{2}.t\right).\sin\left(\dfrac{2.q+1}{2}.t\right)}{\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)} = \Big(1+2.\sum_{k=1}^{q}\cos(k.t)\Big).\Big(1+2.\sum_{j=1}^{p}\cos(k.t)\Big)$$

développer et intégrer. Chaque intégrale $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k.t).\cos(j.t).dt$ était nulle. Sauf pour j égal à k.

∘11∘ A l'École Nationale de Robotique / Université de Technologie, cent cinquante élèves suivent les cours d'anglais, cent suivent les cours de chinois, trente sont bilingues (anglais/chinois) et quatre vingt dix ne suivent aucune de ces deux langues. Combien y a-t-il d'élèves ?

Bon, il n'y a pas de piège

	Anglais	pas Anglais	
Chinois	30		100
pas Chinois		90	
	150		

On complète pour les sommes en ligne et colonne

	Anglais	pas Anglais	
Chinois	30	70	100
pas Chinois	120	90	
	150		

Et on a le total : 310.

◦12◦ Montrez que l'ensemble des matrices de spectre rationnel (les valeurs propres sont dans $\mathbb{Q}$) n'est stable ni par addition, ni par multiplication.

Il suffit de contre-exemples. Ce qu'on sait déjà, c'est que si les valeurs propres sont rationnelles, la trace et le déterminant (somme et produit des-dites valeurs propres) sont rationnels. Mais on n'a pas de réciproque (tout va dépendre du discriminant).

Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ont toutes deux un spectre rationnel (et même entier) : $\{1,\ -1\}$ pour chacune.

Leur somme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a pour spectre $\{\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\}$.

D'autres exemples sont possibles. Il suffit d'essayer un peu au hasard.

De même, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Elles ont pour spectres $\{-1,\ 1\}$ pour l'une et l'autre.

Leur produit $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour spectre $\{i,\ -i\}$, même pas réel. On reconnaît une rotation d'angle $\pi/2$.

◦13◦ On veut étudier les variations de $x \longmapsto \dfrac{\ln(x^2+1)}{x+1}$ sur $]-\infty,\ +\infty[$ (notée f). Montrez que f' est du signe de $x \longmapsto \dfrac{2.x^2+2.x}{x^2+1} - \ln(1+x^2)$ (notée g).
Montrez que g' est négative sur $]-1,\ 1[$ et positive sur $]1,\ +\infty[$.
Déduisez que f est décroissante, croissante puis décroissante.

Bon, le domaine a un trou en -1.

On dérive : $f' = x \longmapsto \dfrac{2.x}{(x^2+1).(x+1)} - \dfrac{\ln(x^2+1)}{(x+1)^2}$.

On compacte en $f' = x \longmapsto \dfrac{\dfrac{2.x.(x+1)}{x^2+1}}{(x+1)^2} - \dfrac{\ln(x^2+1)}{(x+1)^2}$.

Le signe est bien celui de $g = x \longmapsto \dfrac{2.x.(x+1)}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$ *(en ne se préoccupant pas de $(x+1)^2$).*

Mais cette fonction n'est pas très pratique. On va la dériver à son tour, cette fois sur $\mathbb{R}$.

Cette fois :

$$g'(x) = \frac{4.x+2}{x^2+1} - \frac{4.x^2.(x+1)}{(x^2+1)^2} - \frac{2.x}{x^2+1}$$

pour tout x.

On réduit au dénominateur commun :

$$g'(x) = \frac{(4.x+2).(x^2+1) - 4.x^2.(x+1) - 2.x.(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

On étudie en détail le numérateur *(sans facteur 2)* $(2.x+1).(x^2+1) - 2.x^2.(x+1) - x.(x^2+1)$. C'est $(x+1)^2.(1-x)$.

On a donc le signe de $g'(x)$, par intervalles.
Puis les variations de g et ses limites aux bornes.

	$]-\infty,\ -1[$	-1	$]-1,\ 1[$	1	$]1,\ +\infty[$
signe de $g'(x)$	$+$		$+$		$-$
variations de g	$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$		$\searrow$
avec limites	$-\infty \nearrow -\ln(2)$		$-\ln(2) \nearrow 2-\ln(2)$		$2-\ln(2) \searrow -\infty$
signe de $g(x)$	négatif		change de signe		change de signe

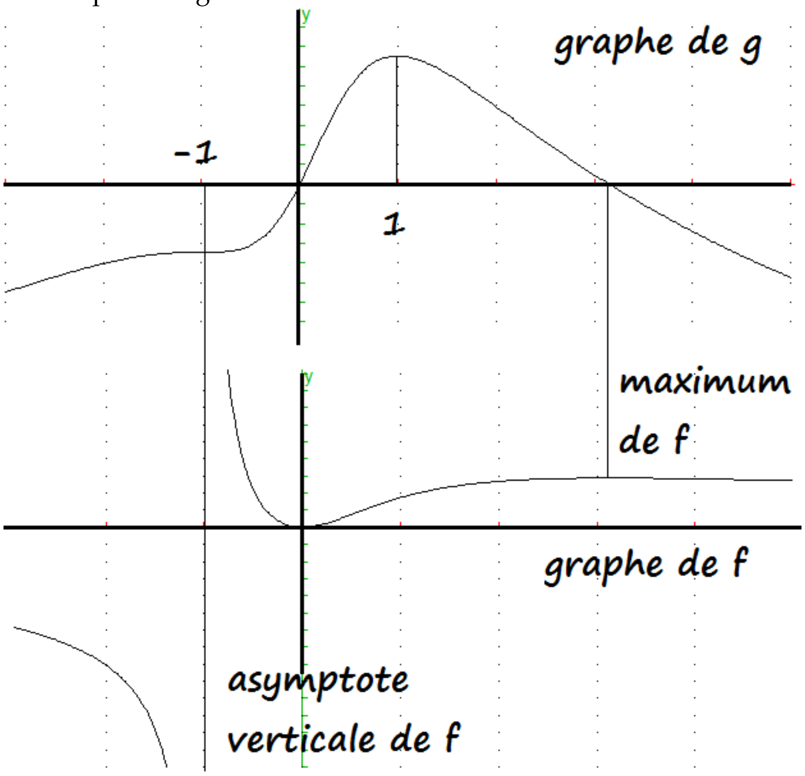
Par sens de variations, g reste de signe constant avant -1.
Puis, par continuité, g change de signe entre -1 et 1 . On trouve que g s'annule en 0 d'ailleurs.
Ensuite, par continuité encore, g s'annule entre 1 et $+\infty$.
La continuité donne au moins deux racines.

Par sens de variations, g n'a que ces deux racines.

Rappel capital :

$T.V.I.$		signe de f'
continuité		monotonie
au moins une solution		au plus une solution
surjectivité		injectivité

Je vous rappelle que vous devez séparer dans votre esprit ainsi en deux tableaux.
En terminale on vous a tout mis en un. Fort mauvaise idée.
Ceci vous conduit à appliquer des phrases toutes faites, sans comprendre ce qui sert à quoi.
Et vous finissez par dire « par le T.V.I., elle ne s'annule qu'une fois ». Et là, c'est TOTALEMENT CON. Et si vous passez pour un con, vous repasserez le concours un an plus tard.
Donc, tout sauf des formules toutes prêtes.
On réfléchit en parlant, et on prend conscience du prix à payer pour toute affirmation.
Ou alors on change de filière. J'ai connu des gens qui ont quand même fait une belle carrière en n'ayant rien compris aux maths et aux sciences. Ce sera peut être vous si vous persistez en disant « j'ai toujours fait comme ça, je ne vais pas changer ».



∘14∘ On définit : $F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}.dt\right)^2$ | $\phi(x) = \left(\int_0^1 e^{-t^2}.dt + \int_1^x e^{-t}.dt\right)^2$

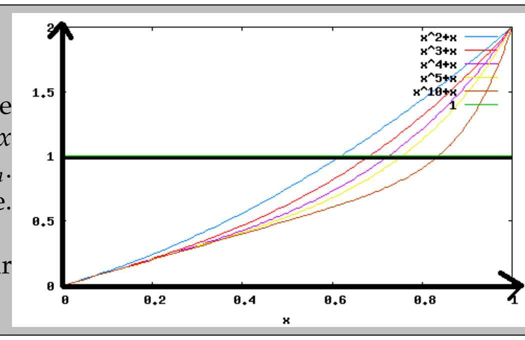
Montrez que F est croissante sur $\mathbb{R}^+$, majorée par ϕ sur $[1,\ +\infty[$. et admet une limite en $+\infty$ qu'on ne calculera pas (c'est le but de l'exercice).
Calculez F'.

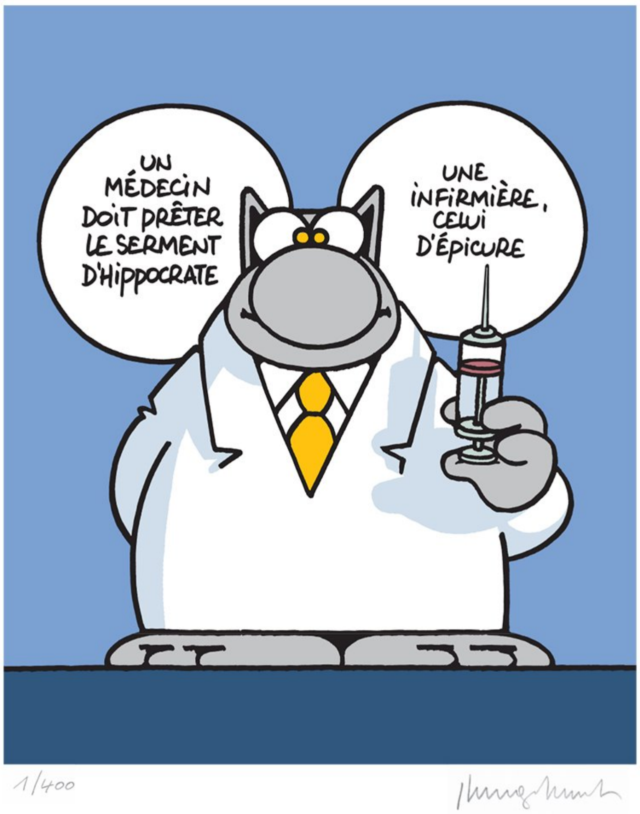
On définit aussi $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x.(1+t^2)}}{1+t^2}.dt$ | $H(x) = -\int_0^1 e^{-x.(1+t^2)}.dt$

Montrez pour x et $x+h$ positifs : $\left|G(x+h) - G(x) - h.H(x)\right| \leqslant \frac{h^2}{2}.\int_0^1 (1+t^2).e^0.e^{2.|h|}dt$. Déduisez que G est dérivable de dérivée H.
Montrez que $x \longmapsto F(x) + G(x^2)$ est constante (valeur) ?
Montrez : $0 \leqslant G(x) \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x}}{(1+t^2)}.dt$. Calculez alors $\lim_{x\to+\infty} G(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
Maintenant qu'on a $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}.dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrez moi $\int_0^{+\infty} e^{-u^2-\frac{1}{u^2}}.du = \frac{\sqrt{\pi}}{2.e^2}$.

A faire.

◦15◦ ♡ Montrez que pour tout n l'équation $x^n + x = 1$ admet une unique racine sur $[0, 1]$ (on introduira l'application $x \longmapsto x^n + x$ que l'on pourra noter φ_n). La racine en question sera notée x_n. Montrez $\varphi_{n+1}(x_n) < 0$. Déduisez que la suite (x_n) est croissante. Montrez qu'elle converge.
On note α sa limite et on suppose $\alpha < 1$. Montrez alors par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = 0$. Déduisez $\alpha = 1$. Concluez.





Les dures luttes sont pénibles quand on n'a que vingt ans.
Le prof de français trouve les jeux de Queneau un peu ridicules.
La latiniste n'apprécie pas les bottes antiques.
On a besoin de l'été pour se dépasser.
Il est arrivé officier en peinant.
Agités dans le Vexin, ils séduisent dans le Perche.
Elle n'apprécie pas les cakes de mimolette (translation).
Des trombones gênent votre Pise.

Règle du jeu : sur chaque ligne, les lettres de A à D et une case transparente. Et au bout, l'indication de « qui on voit depuis ce bord ».

	A	C		A		
	A	C	D		B	
D	D	B	C	A		A
A		A	B	D	C	
C	C		A	B	D	D
	B	D		C	A	

◦16◦ Montrez : $\displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p.(\zeta(p) - 1) = \frac{1}{2}$ après en avoir prouvé l'existence.

Chaque $\zeta(p)$ est une somme de série.
Et on calcule une série de séries.

Ce serait bien d'en faire une famille sommable, afin de n'avoir plus qu'une somme double, et de pouvoir permuter les sigmas.

Mais pour cela, il faut prouver l'existence de la somme de famille avec des valeurs absolues.
On va donc, le temps de la preuve d'existence), effacer le $(-1)^p$.
On veut prouver l'existence de $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}-\{0,1\}} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}} \frac{1}{n^p} \Big)$.
Par théorème de Fubini, il suffit qu'existe
$\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}-\{0,1\}} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}} \frac{1}{n^p} \Big)$, $\displaystyle\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}-\{0,1\} \\ p\in\mathbb{N}-\{0,1\}}} \frac{1}{n^p}$ ou $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}} \Big(\sum_{p\in\mathbb{N}-\{0,1\}} \frac{1}{n^p} \Big)$

Or, le denier se calcule :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}\Big(\sum_{p\in\mathbb{N}-\{0,1\}}\frac{1}{n^p}\Big)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n}}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n.(n-1)}=\sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\Big)$$

Calculons la dernière forme (télescopique) avec un retour à horizon fini

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\Big)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\Big)=\lim_{N\to+\infty}1-\frac{1}{N}=1$$

On a prouvé la sommabilité et trouvé la valeur sans les $(-1)^p$.

On a donc le droit d'appliquer le théorème de Fubini, même avec les $(-1)^p$

$$\sum_{p\in\mathbb{N}-\{0,1\}}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}\frac{(-1)^p}{n^p}\Big)=\sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{n^p}\Big)=\sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}\Big)$$

Nos lecteurs auront reconnu une série géométrique de premier terme $\frac{1}{n^2}$et de raison $\frac{-1}{n}$ (plus petite que 1 en module).

$$\sum_{p\in\mathbb{N}-\{0,1\}}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}\frac{(-1)^p}{n^p}\Big)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n.(n+1)}=\sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)$$

On refait le coupe de la somme télescopique et il reste juste $\frac{1}{2}$.

On note que la convergence de la série de séries $\sum_{p=2}^{+\infty}(-1)^p.(\zeta(p)-1)$ pouvait se démontrer par critère spécial des séries alternées.
On pose $\alpha_p=\zeta(p)-1$. C'est une suite positive décroissante

$$\alpha_{p+1}-\alpha_p=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+1}}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1-n}{n^{p+1}}<0$$

puisque chaque terme de la somme est négatif.
De plus, cette suite tend vers 0

$$\alpha_p=\frac{1}{2^p}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n^p}\leqslant\frac{1}{2^p}+\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^p}=\frac{1}{2^p}+\Big[\frac{t^{1-p}}{1-p}\Big]_2^{+\infty}$$

et on peut conclure par majoration.

∘17∘ On définit $S(p)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$. Prouvez l'existence de $S(p)$ pour tout p de $\mathbb{N}^*$.
Sachant $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$, calculez $S(2)$ et $S(4)$.
Montrez que S est décroissante.
Pouvez vous calculer $\sum_{p=1}^{+\infty}S(p)$.
Pouvez vous calculer $\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p+1}.S_p$?

Pour p strictement positif, la série répond au critère des séries alternées.
Le terme général est de la forme $(-1)^n.a_n$avec a_n qui tend vers 0 en décroissant.

Sinon, pour p plus grand que 2, la série est même absolument convergente.

Ayant l'absolue convergence pour S_2 et $\zeta(2)$ (ou la sommabilité, dites comme vous voulez), on peut fusionner, regrouper, réarranger les termes.

$$\zeta(2)+S(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2}=\sum_{\substack{1\leqslant n<+\infty\\ n\ pair}}\frac{2}{n^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2}{(2.p)^2}=\frac{1}{2}.\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}$$

Ayant $S(2)+\zeta(2)=\dfrac{\zeta(2)}{2}$ on trouve $S(2)=-\dfrac{\zeta(2)}{2}$.

Le même type de raisonnement avec un facteur $\dfrac{2}{(2)^4}$ donne $S(4)=\dfrac{-7.\pi^4}{120}$.

Pour la décroissance, on se donne p et on calcule $S(p+1)-S(p)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.\Big(\frac{1}{n^{p+1}}-\frac{1}{n^p}\Big)$ (somme de séries). On factorise

$$S(p+1)-S(p)=\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}.\Big(\frac{n-1}{n^{p+1}}\Big)$$

(le terme $n=1$ est parti).
Tiens, ne serait ce pas encore une série vérifiant le critère spécial ?
Cette fois, la variable est n et on regarde si $\dfrac{n-1}{n^{p+1}}$ décroit avec n (qu'il tend vers 0, c'est normal).
On dérive la fonction de n (vu comme variable réelle), on trouve que la dérivée $n\longmapsto\dfrac{p+1-n.p}{n^{p+2}}$s'annule et change de signe en $n=\dfrac{p+1}{p}$ donc avant 2.

Pourquoi avoir appliqué le critère spécial ? Parce que la somme $S(p+1)-S(p)$ est alors encadrée par ses sommes partielles, donc

$$(-1)^{2+1}.\Big(\frac{2-1}{2^{p+1}}\Big)\leqslant S(p+1)-S(p)\leqslant(-1)^{2+1}.\Big(\frac{2-1}{2^{p+1}}\Big)+(-1)^{3+1}.\Big(\frac{3-1}{3^{p+1}}\Big)$$

Attention, S est décroissante, mais négative. Elle s'éloigne donc de 0.
Pour descendre en direction de -1 je le sais.

Pour $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}S(p)$ et $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p+1}.S_p$ le terme général ne tend pas vers 0.

En revanche, en exercice je vous laisse $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}\Big)$ et $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p.\Big(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}\Big)$ par théorème de Fubini après justification.

∘18∘ Montrez que si la série à termes positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (avec une limite non nulle), alors la série à termes positifs $\dfrac{a_0+\ldots+a_n}{n+1}$ ne converge pas.

Déjà, la condition nécessaire.
Comme la série de terme général a_n, converge, ce terme tend vers 0.
Par théorème de Cesàro, le terme général $\dfrac{a_0+\ldots+a_n}{n+1}$ converge aussi vers 0.
Déjà, pas de divergence grossière.

La série de sommes est à termes positifs. On en fait une famille sommable (ou non).
Si l'un des termes existe, ce qui suit est légitime. Si une des sommes est infinie, ce qui suit prouve que la série diverge.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{n+1}\Big)=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\frac{a_k}{n+1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{a_k}{n+1}\Big)$$

Et dans cette somme de termes positifs, il y a déjà $a_0.\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$.
pas de change. La série harmonique.
Le regroupement de la première colonne donne déjà l'infini, la famille n'est pas sommable. La série à termes positifs diverge.

Ah mais si a_0 est nul ?
Alors au moins l'un des a_k est non nul. Disons a_{k_0}. Et il est en facteur de $\sum_{n=k_0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ qui vaut quand même $+\infty$. Bref, dans tous les cas, c'est foutu.

a_0					
$a_0/2$	$a_1/2$				
$a_0/3$	$a_1/3$	$a_2/3$			
$a_0/4$	$a_1/4$	$a_2/4$	$a_3/4$		
$a_0/5$	$a_1/5$	$a_2/5$	$a_3/5$	$a_4/5$	
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
∞	∞	∞	∞	∞	

En revanche, on pourra voir dans le cadre d'un autre exercice que la moyenne $\dfrac{\sum_{k=0}^{n} k.a_k}{\sum_{k=0}^{n} k}$ *va conduire à une nouvelle série convergente.*

◦19◦ On note L_2 l'espace des suites réelles de carré sommable (les (a_n) telles que $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n)^2$ existe).
Montrez que pour (a_n) et (b_n) dans L_2 alors la série de terme général $a_n.b_n$ est absolument convergente (pensez à une majoration avec des $(a_n)^2$ et des $(b_n)^2$).
Déduisez que L_2 est stable par addition et multiplication par un réel (oh, oui, un espace vectoriel).

Le petit indice 2 c'est pour dire carrés. Et vous croiserez L_1 : c'est $\sum_{n=0}^{+\infty|a_n|}$ qui doit exister. Je vous laisse méditer sur « lequel implique lequel ».

On suppose donc que $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n)^2$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}(b_n)^2$ existent (séries à termes positifs / familles sommables).

Profitons en pour dire au passage que $\sum_{n=0}^{+\infty}\Big((a_n)^2+(b_n)^2\Big)$ existe aussi.

On regarde la série de terme général $|a_n.b_n|$ (absolue convergence ?).

Or, on sait : $|a_n.b_n| \leqslant \dfrac{(a_n)^2+(b_n)^2}{2}$. C'est une comparaison des moyennes, ou c'est issu de $(|a|-|b|)^2 \geqslant 0$.
Par majoration entre séries numériques à termes positifs, la série de terme général $|a_n.b_n|$ converge.

On aussi $\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.b_n\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n.b_n| \leqslant \frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n)^2+\frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{+\infty}(b_n)^2$ *mais je ne vois pas trop à quoi cela peut servir.*

Pour la stabilité additive, il faut encore vérifier si la série de terme général $(a_n+b_n)^2$ converge.
Mais elle est maintenant la somme de trois séries convergentes : $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n)^2$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(b_n)^2$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.b_n$.

Pour ce qui est de $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda.a_n)^2$, c'est direct.

Il s'ensuit que $(L_2,+,.)$ est bien un espace vectoriel.
dans la suite du cours, nous verrons que on peut définir ensuite la norme d'une suite $\sqrt{(a_0)^2+(a_1)^2+\ldots+(a_n)^2+\ldots}$ *quand la suite est dans L_2.*
On pourra définir aussi le produit scalaire de deux suites, puis leur angle.
Bref, on fera de la géométrie sur les suites.

◦20◦ Montrez l'existence de chaque $\sum_{k=n}^{+\infty}\dfrac{1}{k!}$ (noté a_n) et montrez que la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et calculez sa somme.

Déjà, chaque terme est une série.

C'est même le reste de la série convergente $\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{k!}$ (qui vaut e).

En fait, une fois qu'on a dit $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ il suffit de dire

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$$

(réel moins somme finie).

Mais ensuite, il faut prouver la convergence de la série des séries.
Mais comme tous les termes sont positifs, on peut la regarder comme une famille éventuellement sommable.
Et lui appliquer le théorème de Fubini, sous réserve d'existence d'une des trois sommes.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} \Big) = \sum_{\substack{(k,n)\in\mathbb{N}^2 \\ n\leqslant k}} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{k!} \Big)$$

Or, celle de droite est la plus intéressante, car n est devenu un compteur :

$$\Big(\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{k!} \Big) = (k+1).\frac{1}{k!}$$

On s'interroge maintenant sur l'existence(et la valeur tant qu'on y est) de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!}$.

On sépare en deux sommes convergentes : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.
On décale les indices dans la première (en enlevant le terme $k = 0$) et il reste $e + e$.

Les trois sommes existent et les trois donnent la même valeur : $2.e$.

∘21∘

d_n est le nombre de diviseurs positifs de n. Montrez que la série de terme général $\frac{d_n}{2^n}$ converge.
Montrez que la série de terme général $\frac{1}{2^n - 1}$ ($n > 0$ évidemment) converge.
Comparez les deux sommes obtenues.

La série est à termes positifs. Il suffit de dominer par une série de référence.
d_n ne peut pas dépasser n (un entier ne peut pas avoir tous les entiers avant lui comme diviseurs !).
Or, la série de terme général $\frac{n}{2^n}$ converge.
On peut en faire un $O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ par réflexe.

Ou on peut même joliment calculer

$$\sum_{n=à}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{k=0}^{n-1} 1\Big) = \sum_{0\leqslant k<n<+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \Big)$$

$$\sum_{n=à}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2}} \Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

Ensuite, le terme général $\frac{1}{2^n - 1}$ est positif aussi et est équivalent au terme général positif d'une série de référence : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.
On a la convergence, mais pas la somme.

Ensuite, si on nous demande de les comparer, c'est qu'il doit se passer quelquechose. Mais quoi ? Une égalité ?

```
S = 0
puis = 1
for n in range(200) :
....puis *= 2 #calcul progressif de 2**n sans utiliser **
....S += 1/(S-1)
```

`S` vaut `1.6066951524152913`

```
def nbdiv(n) :
....c = 0
....for k in range(1, n+1) :
.......if n%k == 0 :
...........c += 1
....return c
```

```
S = 0
p = 1
for n in range(200) :
....S += nbdiv(n)/p
```

`S` vaut cette fois `1.6066951524152917`

Mais comment prouver l'égalité ? On ne l'a pas terme à terme mais surement en passant par une famille sommable à deux indices.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{k=1}^{n} 1_{k|n}\Big)$$

$1_{k|n}$ est un indicateur de « k divise n » (oui, on s'en serait douté) et la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} 1_{k|n}$ est un compteur. On peut même l'écrire $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 1_{k|n}$ puisque au delà de n les termes sont tous nuls. On permute alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{2^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.1_{k|n}\Big)$$

Cette fois, dans la somme, on a des $\dfrac{1}{2^n}$ uniquement quand n est un multiple de k (retourné de la phrase « k divise n »).
On ne garde donc que les n de la forme $k.p$ avec p décrivant $\mathbb{N}^*$ et on somme la série géométrique (raison $\dfrac{1}{2^k}$convenable et premier terme $\dfrac{1}{2^k}$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{2^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{p.k}}\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2^k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k-1}$$

∘22∘ Prolongez par continuité en 0 l'application $x \longmapsto (x+1)^{\ln(x)}$. Montrez qu'elle est décroissante puis croissante sur $]0, +\infty[$.

On écrit $(x+1)^{\ln(x)} = e^{\ln(x).\ln(x+1)}$. Le domaine de définition est $]0, +\infty[$ pour que $\ln(x)$ existe (et dès lors, $\ln(x+1)$ aussi, tiens !).

Quand x tend vers 0, $\ln(x)$ tend vers $-\infty$ et $\ln(1+x)$ tend vers 0. la forme est indéterminée.
On n'a pas d'équivalent du logarithme en 0 (à part $\ln(x) \sim \ln(x)$).
Mais on a un équivalent de $\ln(1+x)$: $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$.
On multiplie $\ln(1+x).\ln(x) \sim_{x\to 0} x.\ln(x)$.
Or, $x.\ln(x)$ tend vers 0 en 0.
La quantité qui lui est équivalente doit aussi tendre vers 0.
Ou alors même, je le rejoue façon Terminale « je ne connais pas les équivalents, mais je me débrouille) :

$\ln(1+x).\ln(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}.x.\ln(x)$ le premier terme tend vers 1 et le second vers 0. Le produit tend vers 0.
Par composition, $(x+1)^{\ln(x)}$ tend vers 1.

Son sens de variations est celui de $x \longmapsto \ln(x).\ln(x+1)$ (on compose ensuite par l'exponentielle, croissante)
On dérive une fois : $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{x}$.
On veut le signe de cette chose. Passons par le signe de $x.\ln(x) + (x+1).\ln(x+1)$, ce sera le même.
A finir.

◦23◦ ♡ Étudiez $u_{n+1} = \dfrac{(u_n)^3+1}{3}$ *(discutez en fonction de u_0, en nommant les racines de l'équation $x^3+1 = 3.x$, sans chercher à les calculer).*

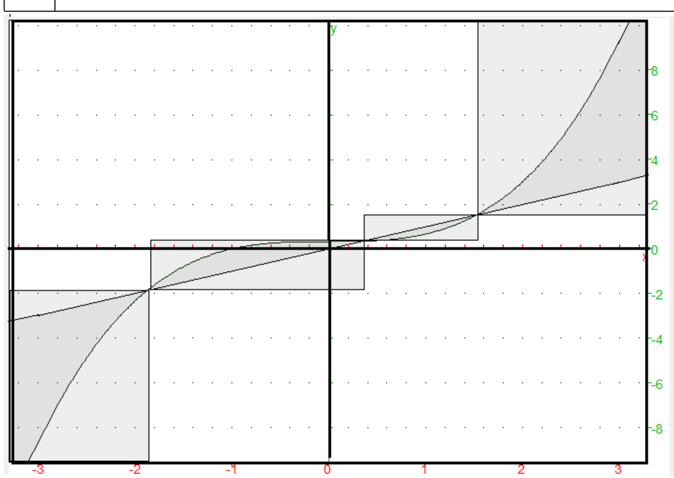
On décide de noter f l'application $x \longmapsto \dfrac{x^3+1}{3}$ (strictement croissante, ça pourra servir).

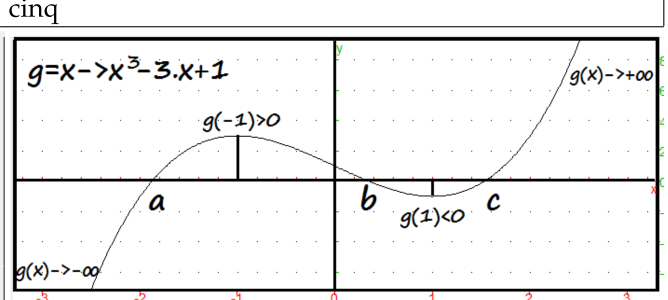
On en cherche les points fixes. On résout $x^3 - 3.x + 1 = 0$.
On montre qu'elle a trois solutions, en étudiant les variations de $x \longmapsto x^3 - 3.x + 1$ (notée g même si c'est juste $f - Id$).
g est croissante, décroissante, croissante.
Un maximum local est atteint en -1 et il vaut 3.
Un minimum local est atteint en 1 et il vaut -1.
Le théorème des valeurs intermédiaires lui donne trois solutions :
- une entre $-\infty$ et -1, notée a
- une entre -1 et 1, notée b (te même entre 0 et 1)
- une entre 1 et $+\infty$, notée c

On a dès lors quatre intervalles stables : $]-\infty,\ a[$, $]a,\ b[$, $]b,\ c[$ et $]c,\ +\infty[$.
A titre d'exemple, si x est entre a et b, on a $a < x < b$ puis $f(a) < f(x) < f(b)$ et donc $a = f(a) < f(x) < b = f(b)$.
Par récurrence immédiate : $u_0 \in]a,\ b[\Rightarrow (\forall n,\ u_n \in]a,\ b[)$.

Sur chacun des intervalles stables, la position du graphe par rapport à la bissectrice vient de l'étude de signe de g.

	$u_0 \in]-\infty,\ a[$	$u_0 = a$	$u_0 \in]a,\ b[$	$u_0 = b$	$u_0 \in]b,\ c[$	$u_0 = c$	$u_0 \in]c,\ +\infty[$
R	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-\infty,\ a[$	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]a,\ b[$	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = b$	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]b,\ c[$	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = c$	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]c,\ +\infty[$
B	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$	C^{te}	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$	C^{te}	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$	C^{te}	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$
C	converge ou file vers $-\infty$	converge	converge	converge	converge	converge	converge ou file vers $+\infty$
E	file vers $-\infty$						file vers $+\infty$
L	$-\infty$	a	b	b	b	c	$+\infty$
	cinq						





R c'est récurrence
B c'est position par rapport à la bissectrice
C c'est converge (croissante majorée)
ou « converge ou diverge vers un infini »

E c'est élimination pour refuser des limites inaccessibles (par exemple $u_n \leqslant u_0 < a$ pour tout n
donc si la limite existe : $\lim_{n\to+'\infty} u_n \leqslant u_0 < a$
elle ne peut valoir ni a ni b ni c
finalement, la suite ne peut pas converger
par élimination, la suite tend vers $-\infty$

L c'est pour limite

∘24∘

♡ u_0 donné. $u_{n+1} = 3.Arcsin(u_n)/\pi$. Discuter.

Traiter cet exercice, c'est étudier existence, monotonie, convergence et limite éventuelle de cette suite.
Discuter, c'est regarder en fonction de u_0, et dresser un tableau.
La première chose à faire, c'est un dessin. Le graphe de f et de la première bissectrice, avec leur intersection, afin de détecter les limites éventuelles, découper des intervalles stables, voir la monotonie (sans calcul), tracer des escaliers, des colimaçons...

Une exigence pour démarrer : u_0 est entre -1 et 1. On va travailler dans ce contexte.

Attention : Pour que tous les termes de la suite existent, la condition n'est pas juste $u_0 \in D_f$.
Il est possible que u_0 soit convenable dans D_f pour que u_1 existe. Mais ensuite, si u_1 tombe mal, que faites vous ?
Il faut donc dans votre esprit visualiser une suite

u_0	$\underset{f}{\rightarrow}$	$u_1 = f(u_0)$	$\underset{f}{\rightarrow}$	$u_2 = f(f(u_0))$	$\underset{f}{\rightarrow}$	$u_3 = f(f(f(u_0)))$	$\underset{f}{\rightarrow}$	$\ldots$

et pas une formule (mais ça, vous devez l'avoir compris, non ? on est en maths pas en chimie mal assimilée).

Premier constat : l'application d'itération f est bornée (ici par $-3/2$ et $3/2$). La suite est donc bornée dès le rang 1 par ces valeurs.
Et avant même ce constat : il n'y a pas de problème de domaine de définition. Par récurrence évidente, tous les termes de la suite existent.

Simplifions nous la vie en jouant sur la parité. Si on remplace u_0 par son opposé, tous les termes de la suite sont changés de signe. On va donc se contenter du cas $u_0 > 0$.

Remarque : Si u_0 est nul, tous les termes de la suite sont nuls. Elle est monotone (dans tous les sens du terme) et converge vers 0.

Si u_0 est plus grand que 1, u_1 n'existe pas.
Si u_0 est entre $\sqrt{3}/2$ et 1, certes u_1 existe. Mais u_2 n'existe pas, car u_1 est plus grand que 1.
Si $u_0$est entre $Arcsin()$ et $\sqrt{3}/2$, u_1 et u_2 existent, mais u_3 ne peut plus exister.

On sent venir le problème. Suivant le choix de u_0 la suite va poser problème et un de ses termes va dépasser 1.

Soyons précis, cernons les points fixes.
On a $f(0) = 0$ mais aussi $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ (et évidemment $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$).

Maintenant, on est informé :
$$\begin{array}{lll} \text{si } x = 0 & \text{alors} & f(x) = 0 \\ \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} & \text{alors} & 0 = f(0) < x < f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ \text{si } x = \frac{1}{2} & \text{alors} & f(x) = \frac{1}{2} \\ \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1 & \text{alors} & \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right) < f(x) \end{array}$$
par croissance de f.

On étudie le cas favorable :

si u_0 est entre 0 et $\frac{1}{2}$ alors pour tout n, u_n est entre 0 et $\frac{1}{2}$ (récurrence évidente... mais à citer)
mais alors (et seulement maintenant), on a $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$ pour tout n (position du graphe par rapport à la bissectrice)
la suite est décroissante
or, elle est minorée
elle converge donc
sa limite ne peut être que 0, $1/2$ ou $-1/2$ (points fixes)
mais par positivité, ce ne peut pas être $-1/2$
par décroissance stricte, ce ne peut être $1/2$
par élimination c'est 0
la suite converge vers 0
(à traiter dans le bon ordre, sans bluffer ; c'est élémentaire, mais tant d'élèves font n'importe quoi...)

Passons maintenant au cas plus délicat.

si u_0 est entre 0 et $\frac{1}{2}$ on sait que u_1 existe, mais on ignore ensuite combien de termes existent
on dit alors « tant que la suite est définie »
les termes restent plus grands que $1/2$
la suite est croissante (pour x plus grand que $1/2$, $f(x)$ est plus grand que $1/2$)
elle n'a donc que deux possibilités : converger ou partir vers l'infini
mais si elle converge, c'est vers $-1/2$, 0 ou $1/2$, trois valeurs inaccessibles (stricte croissance)
c'est donc que la suite file vers l'infini
et c'est donc qu'elle finit par dépasser 1, et qu'elle cesse d'exister en fait
résumé : pour u_0 strictement plus grand que $1/2$, il y a toujours un indice pour lequel u_n dépasse 1 et pour lequel u_{n+1} n'existe pas...

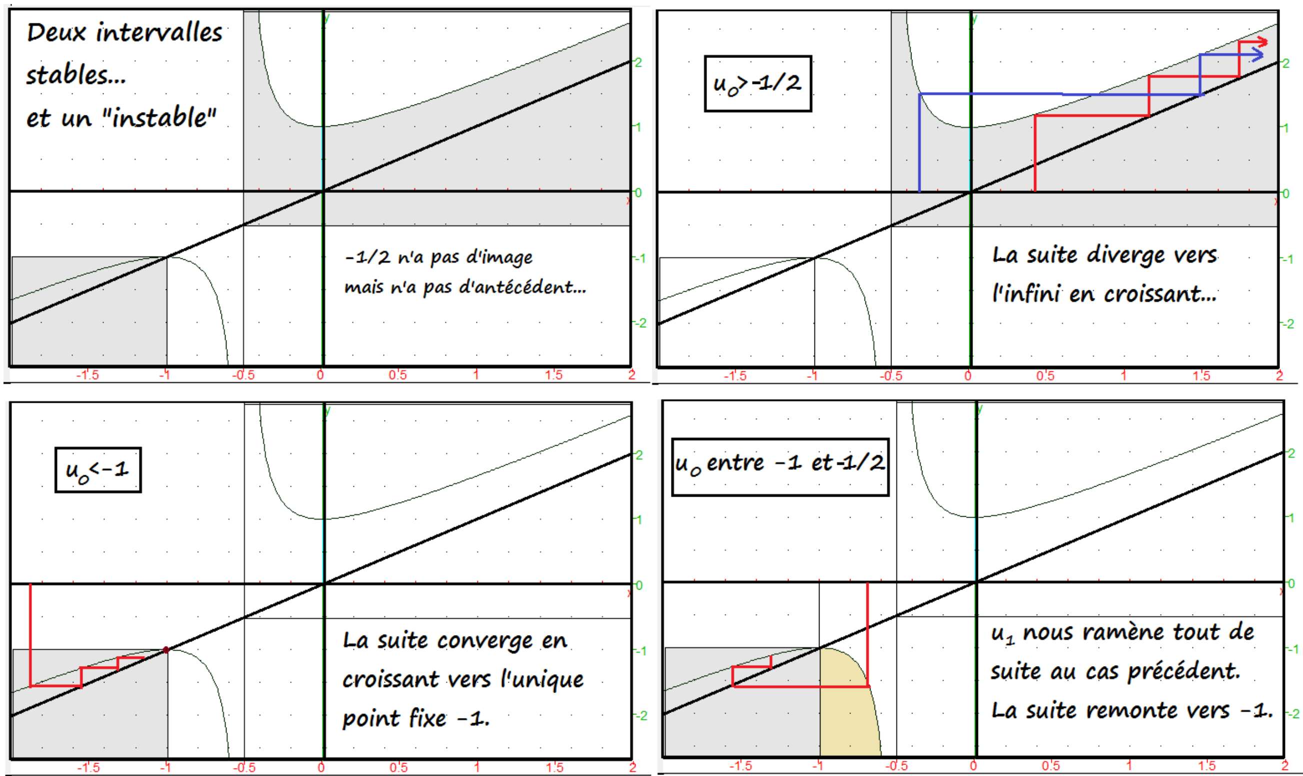
	$u_0 < \frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2} = u_0$	$\frac{-1}{2} < u_0 < 0$	0	$0 < u_0 < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < u_0$
stabilité	$\forall n \in ?,\ u_n < \frac{-1}{2}$	$u_n = \frac{-1}{2}$	$\forall n,\ \frac{-1}{2} < u_0 < 0$	$u_n = 0$	$\forall n,\ \frac{-1}{2} < u_0 < 0$	$u_n = \frac{1}{2}$	$\forall n \in ?,\ u_n = \frac{-1}{2}$
croissance	décroissante	$\longrightarrow$	croissante	$\longrightarrow$	décroissante	$\longrightarrow$	croissante
convergence	dépassera -1	constante	converge	constante	converge	constante	dépassera 1
limite		$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	

Arguments des lignes

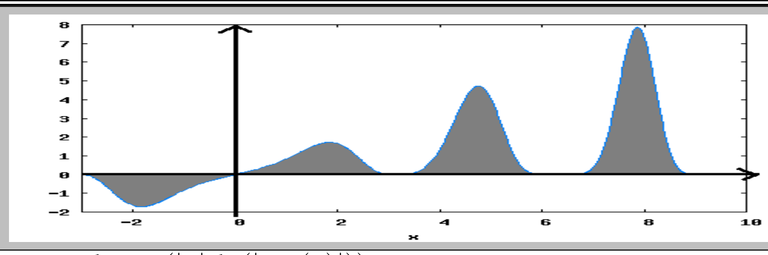
stabilité	récurrence sur n intervalle stable
croissance	position par rapport à la bissectrice et récurrence précédente
convergence	monotone bornée
limite	seules valeurs possibles et élimination

Ici, si on ne part pas entre $-1/2$ et $1/2$, la suite cesse d'exister à partir d'un certain rang.

◦25◦ $u_{n+1} = u_n + \frac{1+u_n}{1+2.u_n}$. Vous savez ce qu'il vous reste à faire.



∘26∘ Prolongez par continuité en 0
$x \longmapsto |\sin(x)|^{|x|}.x$.
Est elle alors dérivable en 0 ?
Est elle dérivable en π ?



En 0, on a bien une forme indéterminée. Que penser de $\exp(|x|.\ln(|\sin(x)|))$?
Il suffit de l'écrire $\exp\left(\frac{|x|}{|\sin(x)|}.\sin(x).\ln(|\sin(x)|)\right)$.
Le quotient célèbre quotient $\frac{|x|}{|\sin(x)|}$ tend vers 1.
Le célèbre produit $\sin(x).\ln(|\sin(x)|)$ tend vers 0 (de la forme $t.\ln(t)$ en 0).
Le contenu de l'exponentielle tend vers 0.
On multiplie par x, l'ensemble tend vers 0.
On posera donc $f(0) = 0$.

Si toutefois cette application s'appelle f.
Sinon, on posera $\varpi(0) = 0$ si on aime les lettres étranges.

Pour ce qui est de la dérivabilité en 0, point de salut hors des taux d'accroissement. Un outil que vous avez jeté aux orties quand vous avez crû passer le bac et devenir grands..

∘27∘ Prolongez par continuité en 0 $t \longmapsto \frac{t}{e^t - 1}$ et donnez alors sa dérivée en 0 (notée b) puis la position du graphe par rapport à sa tangente. Vérifiez que $f - b.Id$ est paire. Donnez le coefficient de t^9 dans le développement limité de f en 0.

L'application $t \longmapsto \frac{t}{e^t - 1}$ n'est pas définie en 0 mais s'y prolonge par la valeur $\boxed{1}$ *(inverse d'un taux d'accroissement de l'exponentielle en 0, c'est si con !).*

Pour la dérivabilité, on peut étudier

$$\frac{\dfrac{t}{e^t-1}-1}{t}=\frac{t-e^t+1}{t.(e^t-1)}=\frac{t-\Big(1+t+\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)\Big)+1}{t.\Big(1+t+o(t)-1\Big)}$$

Le numérateur est équivalent à $-\frac{t^2}{2}$ et le dénominateur à t^2. Le quotient tend vers $-\dfrac{1}{2}$. Les taux d'accroissement ont une limite, l'application est dérivable.

> *Qui est passé par une recherche de la limite de* $t\longmapsto\dfrac{e^t-1-t.e^t}{(e^t-1)^2}$ *en allant ensuite chercher le théorème de la limite de la dérivée ?*

On cherche ensuite le signe de $\dfrac{t}{e^t-1}-1+\dfrac{t}{2}$ pour connaître la position du graphe par rapport à sa tangente.

On réduit au dénominateur commun : $\dfrac{2.t-2.e^t+2+t.e^t-t}{2.(e^t-1)}$. On cherche le signe du numérateur grâce à un développement limité :

$$2-2.e^t+t+t.e^t=2-2-2.t-t^2-\frac{t^3}{3}+t+\Big(t+t^2+\frac{t^3}{2}\Big)+o(t^3)=\frac{t^3}{6}+o(t^3)_{t\to 0}$$

Le numérateur sera du signe de t, et le dénominateur aussi (e^t-1). Le quotient est toujours positif. Le graphe est au dessus de sa tangente.

> *On aurait pu aussi écrire a priori* $\dfrac{t}{e^t-1}=1-\dfrac{t}{2}+c.t^2+o(t^2)$*, effectuer un produit en croix* $t=\Big(t+\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)\Big).\Big(1-\dfrac{t}{2}+c.t^2+o(t^2)\Big)$ *et identifier. On trouvait alors* $\dfrac{t}{e^t-1}=1-\dfrac{t}{2}+\dfrac{t^2}{12}+o(t^2)_{t\to 0}$ *et conclure « graphe localement convexe).*

On doit étudier $t\longmapsto\dfrac{t}{e^t-1}+\dfrac{t}{2}$ et prouver sa parité *(domaine de définition symétrique)*.

On compare donc $\dfrac{t}{e^t-1}+\dfrac{t}{2}$ et $\dfrac{-t}{e^{-t}-1}-\dfrac{t}{2}$ en calculant leur différence :

$$\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}+\frac{t}{e^{-t}-1}+\frac{t}{2}=t.\Big(1+\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{e^{-t}-1}\Big)$$

En réduisant au dénominateur commun, on trouve $t.\dfrac{(e^t-1).(e^{-t}-1)+(e^{-t}-1)+(e^t-1)}{(e^t-1).(e^{-t}-1)}$ ce qui fait bien 0.

Comme $f-a.Id$ est paire, le coefficient en t^9 du développement limité en 0 est nul.
On ajoute $a.t$ qui ne change en rien le coefficient de t^9 : il reste nul.

Dans $\dfrac{t}{e^t-1}$ il y un terme constant, un terme en t et ensuite que des termes d'exposant pair.

> *Pour information :* $\dfrac{t}{e^t-1}=1-\dfrac{t}{2}+\dfrac{t^2}{12}-\dfrac{t^4}{720}+\dfrac{t^6}{30\,240}-\dfrac{t^8}{1\,209\,600}+\dfrac{t^{10}}{47\,900\,160}-691.\dfrac{t^{12}}{1\,307\,674\,368\,000}+o(t^{13})$ *avec des coefficients qui sont des célébrités des mathématiques :les nombres de Bernoulli.*

On prolonge en 0 par la valeur 1 (inverse d'un taux d'accroissement de l'exponentielle, ou développement limité$f(x)=\dfrac{x}{1+x+o(x)-x}$).

Pour la dérivée en 0, on écrit

$$f(x)=\frac{x}{1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)-1}=\frac{1}{1+\dfrac{x}{2}+o(x)}=\frac{1}{1+\Big(\dfrac{x}{2}+o(x)\Big)}=1-\frac{x}{2}+o(x)$$

Disposant d'un développement limité d'ordre 1, la fonction est dérivable de dérivée $\dfrac{-1}{2}$.

On écrit même un terme de plus avec

$$f(x)=\frac{x}{1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)-1}=\frac{1}{1+\Big(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}+o(x^2)\Big)}=1-\Big(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\Big)+\Big(\frac{x}{2}\Big)^2+o(x^2)$$

$$1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2)$$

La fonction est localement convexe.

On étudie $\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}$ dont on va chercher la parité en calculant la valeur en x et en $-x$:

$$\Big(\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}\Big)-\Big(\frac{-x}{e^{-x}-1}-\frac{x}{2}\Big)=\frac{x}{e^x-1}+x-\frac{x}{e^{-x}-1}=\frac{x}{e^x-1}+x-\frac{x.e^x}{1-e^x}=x.\Big(\frac{1+(e^x-1)-e^x}{(e^x-1)}\Big)=0$$

Un terme sur deux du développement limité sera nul.

Pour des raisons de parité justement, le terme en x^9 dans le développement de $f(x)+\frac{x}{2}$ est nul.
On ajoute $-\frac{x}{2}$, le terme en x^9 reste nul.

Pour information : en écrivant

$$\frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^{10}}{10!}-1+o(x^{10})}=\frac{1}{1+\Big(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\ldots+\frac{x^9}{10!}+o(x^9)\Big)}$$

et en développant

$$1-\Big(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\ldots+\frac{x^9}{10!}\Big)+\Big(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\ldots+\frac{x^8}{9!}\Big)^2+\Big(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\ldots+\frac{x^7}{8!}\Big)^3+\ldots+\Big(\frac{x}{2}\Big)^9$$

on peut finir par arriver à

$$1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+\frac{x^6}{30240}+\frac{x^8}{1209600}+o(x^9)$$

et à moins d'être Euler, on ne devine rien.

∘28∘

I∼0) On définit la suite (B_n) par $\boxed{B_0=1 \text{ et } \forall n,\ B_{n+1}=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.B_p}$ Calculez B_n pour n de 0 à 5.

n	formule	valeur
0	définition	1
1	$\binom{0}{0}.1$	1
2	$\binom{1}{0}.1+\binom{1}{1}.1$	2
3	$\binom{2}{0}.1+\binom{2}{1}.1+\binom{2}{2}.2$	5
4	$\binom{3}{0}.1+\binom{3}{1}.1+\binom{3}{2}.2+\binom{3}{3}.5$	15
5	$\binom{4}{0}.1+\binom{4}{1}.1+\binom{4}{2}.2+\binom{4}{3}.5++\binom{4}{4}.15$	52

I∼1) Écrivez un script **Python** qui pour n donné calcule B_n.[a]

[a] niveau physique : **from math import binomial**, niveau PC : je reconstruis **binomial** mais en recréant déjà **factorielle**, niveau MP ou PSI : je reconstruis **binomial** mais sans factorielle, car je suis intelligent (pléonasme)

Dans tous les cas, on va calculer de proche en proche les B_k, en les stockant dans une liste qui grandit peu à peu.
On l'initialise à 1, puis on calcule chaque nouveau terme par la formule (somme de 0 à n+1 inclus).
Le programme **Python** de l'utilisateur pour qui l'ordinateur est une boite noire qui calcule pour lui :

```
def B(n) :
....L = [1] #premier terme de la liste
....for k in range(n) : #on va avancer case par case
........S = 0 #un accumulateur
........for p in range(k+1) : #une somme de k+1 termes
............S += L[p]*binomial(k,p)#la formule de la somme
........L.append(S) #c'est bon, on le mémorise
....return L[-1] #seul le dernier terme importe
```

Le PC utilise la formule $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$

```
def Binomial(n, k) :
....return(Facto(n)//(Facto(k)*Facto(n-k)))
```

```
def Facto(n) :
....P = 1
....for k in range(1, n+1) :
........P *= k
....return P
```

Il est nul ! C'est ainsi que pour calculer $\binom{50}{1}$ il va calculer 50! et le diviser par 49!. Sans se rendre compte que ça fait 50.
Pas de sa faute, il a l'habitude de dépenser des sous sans réfléchir... Et pour aller à la boulangerie, comme on lui a dit « elle est en face du métro Saint-Paul, il retourne chez lui à vélo, puis il prend le métro jusqu'à Saint-Paul, il achète son croissant, il retourne chez lui en métro et revient au lycée à vélo.

Le PSI ne fait que les calculs utiles : $\binom{n}{k} = \dfrac{n.(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2.3\dots k}$ avec k termes en haut et en bas

```
def Binomial(n, k) :
....B = 1
....for i in range(k) :
........B = B*(n-i)//(i+1)
....return B
```

Le MP en fait moins au delà du milieu de la ligne.

```
def Binomial(n, k) :
....if 2*k > n : #fin de ligne
........k = n-k
....B = 1
....for i in range(k) :
........B = B*(n-i)//(i+1)
....return B
```

Le vrai élève de Prépas se dit que ligne après ligne, il recalcule plein de binomiaux. Et si il avançait avec la formule de Pascal ?

```
def B(n) :
....L = [1]
....Pascal = [1] #première ligne du triangle
....for k in range(n) :
........S = 0 #un accumulateur
........for p in range(k+1) : #la somme
............S += L[p]*Pascal[p] #la formule
........L.append(S) #le nouveau terme est calculé
........NewLine = [1] #passons à la ligne suivante du triangle
........for p in range(k) : #case par case
............NewLine.append(Pascal[p]+Pascal[p+1]) #la formule de Pascal
........NewLine.append(1) #le terme du bout
........Pascal = NewLine[ : ] #on recopie
....return L[-1]
```

I~2) Montrez que (B_n) est une suite d'entiers naturels qui diverge vers $+\infty$.

Par récurrence forte, chaque terme de la liste est un entier positif.

La suite (B_n) est croissante puisque $B_{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{p}.B_p\right) + B_n$.

En tant que suite d'entiers strictement croissante, elle diverge vers $+\infty$.

Mieux encore, pour tout n, on a $B_n \geqslant 1$.
On reporte : $\forall n,\ B_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}.B_p \geqslant \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{p} = 2^{n-1}$.
On recommence : $\forall n,\ B_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}.B_p \geqslant \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}.2^{p-1} = \frac{1}{2}.\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}.2^p = \frac{3^{n-1}}{2}$.
On pourrait continuer ainsi sans arrêt.

I~3) Montrez pour tout n : $B_n \geqslant 1$, $B_n \geqslant 2^{n-1}$, $B_n \geqslant \dfrac{3^{n-1}}{2}$.

Récurrence forte ?

II∼0) On pose $\boxed{E = x \longmapsto e^{(e^x)}}$ Montrez pour tout n : $E^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \exp . E^{(k)}$.

La formule $E^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \exp . E^{(k)}$ ressemble à une formule de Leibniz !

Si vous ne voyez pas ça, non seulement vous êtes foutu, mais en plus vous êtes un foutu crétin pour lequel j'ai fait une semaine de cours pour rien.
On dérive déjà une fois : $E'(x) = e^x.e^{(e^x)}$ en tant que composée $x \longmapsto \exp(x) \longmapsto \exp(\exp(x))$.

On reformule à l'étage des fonctions : $E' = \exp \times E$.

On dérive n fois car tout est n fois dérivable : $(E')^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \exp^{(n-k)} . E^{(k)}$.

On a donc : $E^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \exp . E^{(k)}$.

Déduisez $\forall n,\ e.B_n = E^{(n)}(0)$.

On applique en 0 : $\exp(0)$ vaut 1. On a donc $E^{(n+1)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . E^{(k)}(0)$.

La suite $(E^{(n)}(0))_n$ vérifie la même relation de récurrence que (B_n) .
Mais vous ne pouvez pas affirmer comme ça qu'elles sont donc égales ».
En effet, il reste le problème de « sont elles initialisées pareil ? ».

Rappel :

La suite nulle et la suite factorielle vérifient $u_{n+1} = (n+1).u_n$ pour tout n. Mais elles ne sont pas égales.
Les suites (5^n) et $((-3).5^n)$ vérifient la même relation $u_{n+1} = 3.u_n$ mais elles ne sont pas égales.
Les applications cos *et* sin *vérifient $y'' = -y$. Mais elles ne sont pas égales.*

Donc, si vous concluez juste avec une phrase trop simpliste, vous n'avez pas les points.
Il faut pour le moins citer le mot « récurrence », avec adjectif « forte ». Sans oublier l'initialisation.

Je vous la fais.
Pour tout n, on note (P_n) la proposition : $\forall k \leqslant n,\ E^{(k)}(0) = e.B_k$.
On initialise P_0 qui se borne à $E(0) = e$ et $B_0 = 1$.
Pour un n donné quelconque, on suppose $\forall k \leqslant n,\ E^{(k)}(0) = e.B_k$.
On reporte dans $E^{(n+1)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . E^{(k)}(0)$

$$E^{(n+1)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . e.B_k$$
$$E^{(n+1)}(0) = e. \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . B_k$$
$$E^{(n+1)}(0) = e.B_{n+1}$$

Et l'hérédité est établie.

Remarque :

Dans le sujet original de Mines-Ponts, on profitait de cette fonction E pour obtenir la formule $B_n = \frac{1}{e}.\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.
Mais on avait besoin de théorèmes de seconde année sur les séries entières et les double limites.
L'idée était d'écrire $e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$ *(formule de Taylor avec reste intégrale expédié à l'infini)*
de l'appliquer en $t = e^x$: $E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{k.x}}{k!}$
de dériver n fois : $E^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n.e^{k.x}}{k!}$ *(en dérivant une somme infinie ?)*
de calculer en 0 : $E^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

III∼0) p est un entier naturel fixé, montrez que $\left(\frac{2^k.k^p}{k!}\right)_k$ tend vers 0 à l'infini et est majorée.

La suite $\left(\frac{2^k.k^p}{k!}\right)_k$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini.
Il suffit de poser $u_k = \frac{2^k.k^p}{k!}$, de calculer

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{2^{k+1}.(k+1)^p}{(k+1)!}.\frac{k!}{2^k.k^p} = \frac{2.(k+1)^p}{k^p}.\frac{1}{k+1}$$

Le réel 2 ne bouge pas. Le quotient $\frac{(k+1)^p}{k^p}$tend vers 1 et $\frac{1}{k+1}$ tend vers 0.
On peut appliquer le théorème de comparaison logarithmique.
Bref, des croissances comparées...

Comme la suite (u_k) tend vers 0 , elle est bornée. On notera M_p un majorant si on en a besoin.

III∼1) Déduisez que $\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{k^p}{k!}\right)_N$ est une suite croissante majorée qui converge vers une limite qu'on va noter $\boxed{A_p}$ sans la calculer.

p est fixé. Dans $\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{k^p}{k!}\right)_N$, c'est donc N (le nombre de termes) qui augmente[3].
On a évidemment

$$\sum_{k=0}^{N+1}\frac{k^p}{k!} - \sum_{k=0}^{N}\frac{k^p}{k!} = \frac{(N+1)^p}{(N+1)!}$$

positif. La suite est donc croissante.

On va la majorer par une quantité qui aura le droit de dépendre de p, mais pas de k (variable de sommation) ni de N variable de la suite.
On a montré que la suite $\left(\frac{2^k.k^p}{k!}\right)_k$ est majorée et on a noté M_p un majorant.
On a donc en multipliant : $\frac{k^p}{k!} \leqslant \frac{M_p}{2^k}$ pour tout k.
On somme de 0 à N :

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{k^p}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{N}\frac{M_p}{2^p} = M_p.\frac{1-\frac{1}{2^{N+1}}}{1-\frac{1}{2}} \leqslant M_p.\frac{1}{\frac{1}{2}}$$

Le majorant ne dépend pas de N, on a gagné.

La suite $\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{k^p}{k!}\right)_N$ est croissante majorée, elle converge.
On ne sait rien en effet de sa limite (au mieux qu'elle est inférieure ou égale à $2.M_p$ sachant qu'on ne connaît même pas M_p).

III∼2) Calculez quand même A_0.

Pour p égal à 0, on étudie $\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\right)_N$ (y compris pour 0^0, on est d'accord, ce n'est pas la limite, la forme indéterminée, 0 et 0 sont des entiers dans la formule).
Question d'habitude : $\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{t^k}{k!}\right)_N$ converge vers e^t. C'est ici le cas particulier $t = 1$.
Mais il faut une preuve. Et elle repose sur notre outil : la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$e^1 = \sum_{k=0}^{N}\frac{1^k.e^0}{k!} + \frac{1^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.e^{t.1}.dt$$

On encadre le reste intégrale :

$$0 \leqslant \frac{1^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.e^{t.1}.dt \leqslant \frac{1}{n!}.\int_0^1 1.e.dt$$

---

3. ne parlez pas de k c'est juste la variable muette de sommation

Il tend vers 0, la série converge vers e^1.

Évidemment : *En Spé, le résultat $e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$ est un acquis du cours.*
Plus précisément « du cours sur les séries de fonctions et même sur les séries entières ».

III∼3) Montrez pour tout n : $A_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.A_p$.

On va prouver $A_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.A_p$ en partant du membre de gauche pour aboutir à celui de droite.

Rappel : *Combien de fois vous ai-je dit « la tendance naturelle du cerveau est quand même de mettre de l'ordre dans quelquechose de compliqué dans l'espoir d'en faire quelquechose de simple ».*
Ensuite,partir de la gauche pour finir à droite est la tendance naturelle de l'être humain quand il prend de l'âge. Georges Clemenceau en est le meilleur exemple, mais si vous suivez la politique, vous devez en connaître quelques uns...

$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.A_p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.\Big(\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{k^p}{k!}\Big)$ par définition

$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.A_p = \lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.\Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{k^p}{k!}\Big)\Big)$ (limite d'une somme / somme des limites)

$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.A_p = \lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{N} \Big(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.\frac{k^p}{k!}\Big)\Big)$ (interversion sur des sommes finies)

$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.A_p = \lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}.\Big(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.k^p\Big)\Big)$ (on a sorti un terme)

$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.A_p = \lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}.(k+1)^n\Big)$ (formule du binôme)

$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.A_p = \lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(k+1)!}.(k+1)^{n+1}\Big)$ (on a multiplié haut et bas par $k+1$, la belle idée)

$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.A_p = \lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{K=1}^{N+1} \frac{K^{n+1}}{K!}\Big)$ (ça prend forme, on a eu raison d'avoir l'idée au dessus)

$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.A_p = \lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{K=0}^{N+1} \frac{K^{n+1}}{K!}\Big)$ (le terme $K = 0$ est nul !)

$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.A_p = A_{n+1}$ (définition, que ce soit N ou $N+1$ qui parte à l'infini, qu'importe).

III∼4) Donnez la relation entre (A_n) et (B_n) .

Cette fois encore, une récurrence forte. On peut la citer et ne pas la faire.
Pour tout n, $A_n = e.B_n$.

On a donc prouvé $\boxed{B_n = \frac{1}{e}.(x \longmapsto e^{e^x})^{(n)}(0) = \frac{1}{e}.\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}}$

IV∼0) Pour tout λ strictement positif, on pose $\boxed{\phi_\lambda = x \longmapsto x - x.\ln(x) + \lambda.\ln(x)}$ définie sur $]0, +\infty[$. Donnez les limites de ϕ_λ aux bornes de son domaine de définition[a]. Montrez que ϕ_λ admet un maximum, atteint en un unique réel qu'on notera α_λ (dont on prouvera l'existence mais qu'on ne déterminera pas explicitement).

a. en 0, vous pourrez poser $x = \frac{1}{X}$ si la forme indéterminée vous embête

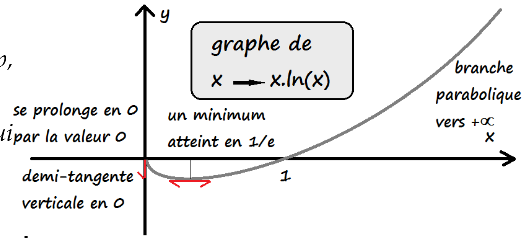
$\phi_\lambda = x \longmapsto x - x.\ln(x) + \lambda.\ln(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$.
En 0, c'est $\ln(x)$ qui l'emporte et la fait tendre vers $-\infty$.

Classique : *La limite $x.\ln(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 est un classique.*

En Terminale, on ne la voit pas en général, mais en Sup, elle sert. Il fat la connaître.

Et c'est facile. Si x tend vers 0, on l'écrit $\dfrac{1}{X}$ avec X qui tend vers l'infini.

On remplace alors $x.\ln(x)$ par $\dfrac{-\ln(X)}{X}$.



Et cette fois, c'est une limite usuelle, c'est le X du dénominateur qui l'emporte.

En $+\infty$, c'est $-x.\ln(x)$ qui l'emporte (écrivez $-x.\ln(x).(1-\dfrac{1}{\ln(x)})$ si nécessaire).

A chaque extrémité de l'intervalle, elle tend vers un infini négatif. Entre les deux, elle doit bien avoir un maximum. Ou deux si elle est chameau !

On la dérive : $(\phi_\lambda)' = x \longmapsto -\ln(x) + \dfrac{\lambda}{x}$.

Et encore une fois : $(\phi_\lambda)'' = x \longmapsto -\dfrac{1}{x} - \dfrac{\lambda}{x^2}$.

Et encore une fois... non, ça ne sert à rien.

$(\phi_\lambda)''$ est négative sur $]0,\ +\infty[$ (ϕ_λ est convexe).

$(\phi_\lambda)'$ est décroissante sur $]0,\ +\infty[$, en 0 elle tend $+\infty$ et en $+\infty$ elle tend vers $-\infty$.

$(\phi_\lambda)'$ est d'abord positive, puis négative et s'annule une fois et une seule. Quelquepart.

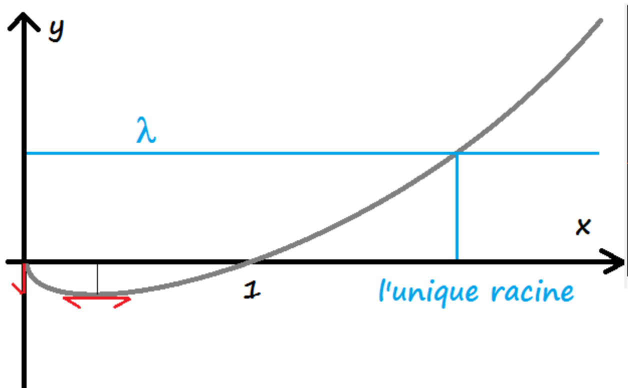
ϕ_λ est donc croissante puis décroissante.

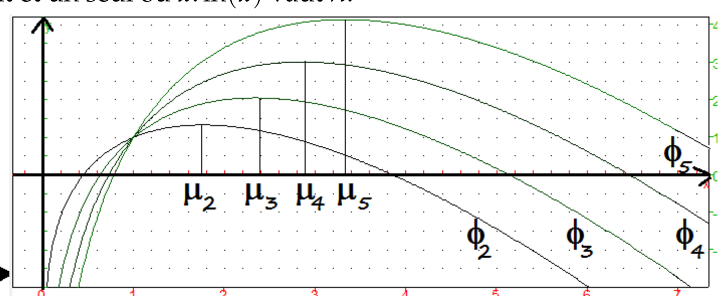
Elle admet un unique maximum. Atteint là où sa dérivée s'annule et change de signe.

Cet unique point où $(\phi_\lambda)'$ s'annule est le réel solution de $\boxed{x.\ln(x) = \lambda}$

On va faire appel à une fonction auxiliaire : $x \longmapsto x.\ln(x)$ représentée un peu plus haut.

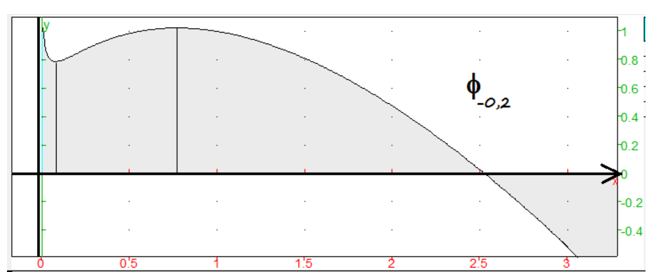
Pour chaque λ strictement positif, il y a bien un point et un seul où $x.\ln(x)$ vaut λ.



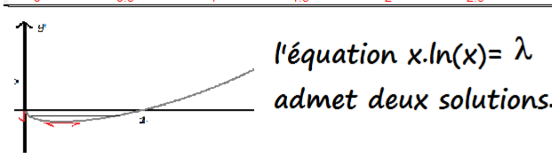


Quelques graphes

et leurs extrema



On notera que pour λ négatif (mais pas trop), l'équation $(\phi_\lambda)'(x) = 0$ admet deux solutions (toutes deux plus petites que 1), ce qui crée un graphe assez joli.



IV∼1) Montrez pour tout x supérieur ou égal à -1 :

$$\phi_\lambda(\alpha_\lambda.(1+x)) = \phi_\lambda(\alpha_\lambda) + (\alpha_\lambda - \lambda).(x - \ln(1+x)) - \alpha_\lambda.x.\ln(1+x)$$

On se donne λ et x (plus grand que -1 pour que $\alpha_\lambda.(1+x)$ soit positif).

On veut prouver $\phi_\lambda(\alpha_\lambda.(1+x)) = \phi_\lambda(\alpha_\lambda) + (\alpha_\lambda - \lambda).(x - \ln(1+x)) - \alpha_\lambda.x.\ln(1+x)$
On calcule chaque morceau$\phi_\lambda(\mu_\lambda.(1+x))$, $\phi_\lambda(\mu_\lambda)$, $(\mu_\lambda - \lambda).(x - \ln(1+x))$ et $\mu_\lambda.x.\ln(1+x)$ sachant que $\mu_\lambda.\ln(\mu_\lambda)$ vaut λ.

$\phi_\lambda(\alpha_\lambda.(1+x)) =$	$\alpha_\lambda.(1+x)$	$-\alpha_\lambda.(1+x).\ln(\alpha_\lambda)$ $-\alpha_\lambda.(1+x).\ln(1+x)$	$\lambda.\ln(\alpha_\lambda)$ $+\lambda.\ln(1+x)$
$\phi_\lambda(\alpha_\lambda) =$	α_λ	$-\alpha_\lambda.\ln(\alpha_\lambda)$	$+\lambda.\ln(\alpha_\lambda)$
$(\alpha_\lambda - \lambda).(x - \ln(1+x)) =$	$\alpha_\lambda.x$ $-\lambda.x$	$-\alpha_\lambda.\ln(1+x)$ $+\lambda.\ln(1+x)$	
$-\alpha_\lambda.x.\ln(1+x) =$		$-\alpha_\lambda.x.\ln(1+x)$	

On élimine les termes qui sont visiblement les mêmes.

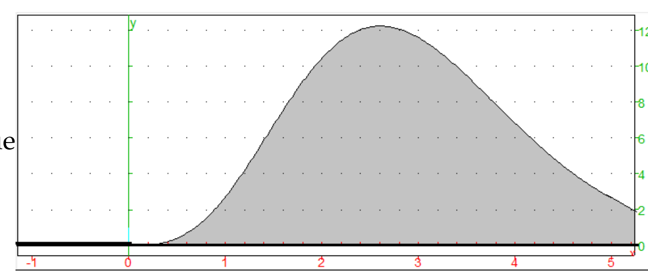
$\phi_\lambda(\alpha_\lambda.(1+x)) =$	A α_λ B $\alpha_\lambda.x$	C $-\alpha_\lambda.\ln(\alpha_\lambda)$ $-\alpha_\lambda.x.\ln(\alpha_\lambda)$ E $-\alpha_\lambda.\ln(1+x)$ F $-\alpha_\lambda.x.\ln(1+x)$	D $\lambda.\ln(\alpha_\lambda)$ G $+\lambda.\ln(1+x)$
$\phi_\lambda(\alpha_\lambda) =$	A μ_λ	C $-\alpha_\lambda.\ln(\mu_\lambda)$	D $+\lambda.\ln(\alpha_\lambda)$
$(\alpha_\lambda - \lambda).(x - \ln(1+x)) =$	B $\alpha_\lambda.x$ $-\lambda.x$	E $-\alpha_\lambda.\ln(1+x)$ G $+\lambda.\ln(1+x)$	
$-\alpha_\lambda.x.\ln(1+x) =$		F $-\alpha_\lambda.x.\ln(1+x)$	

Il ne reste somme toute que $-\alpha_\lambda.x.\ln(\alpha_\lambda)$ dans le premier membre et $-\lambda.x$ dans le second.
Mais justement, $\alpha_\lambda.\ln(\alpha_\lambda)$ est égal à λ.
Bref, il y a égalité.

Remarque :
Dans le sujet de Mines-Ponts, la formule était admise.
C'est un peu dommage. La démonstration montrait votre capacité à organiser vos calculs proprement.
D'autre part, si vous vous contentez de « on simplifie le membre de droite, on retrouve celui de gauche », ce n'est pas suffisant.
Il faut indiquer qui part avec qui. Et préciser le rôle de $\mu_\lambda.\ln(\mu_\lambda) = \lambda$.
Sinon, ce n'est que du bluff. Et c'est très très dangereux et risqué.

V∼0) n est fixé dans $\mathbb{N}^*$. On définit $\boxed{f_n = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & si & x \leqslant 0 \\ e^x.x^{n-x-\frac{1}{2}} & si & x > 0 \end{array} \right.}$
Montrez que f_n admet sur $\mathbb{R}^+$ un maximum, atteint en un unique point $\boxed{\mu_n}$

Il faut établir que f_n admet un maximum (sur $\mathbb{R}^+$ parce que sur $\mathbb{R}^-$ elle est assez plate).
On recommence tout ? Ce serait étrange. Que vient on de faire avant ? D'étudier une application qui a justement un maximum sur $]0, +\infty[$.
Prenons la peine d'écrire x^{-x} dans $f_n(x)$ sous sa forme $e^{-x.\ln(x)}$ et l'idée prend forme.
$f_n(x) = e^x.\exp((-x + n - \frac{1}{2}).\ln(x)) = \exp(x - x.\ln(x) + \lambda.\ln(x))$ avec $\lambda = n - \dfrac{1}{2}$.



Par composition avec l'exponentielle, f admet un unique maximum en $\alpha_\lambda = \alpha_{n-0.5}$ qu'on note donc μ_n.

Ce réel μ_n est la solution de l'équation $t.\ln(t) = n - \dfrac{1}{2}$.

V∼1) f_n est elle continue sur $\mathbb{R}$?

La continuité de f_n est acquise sur $]-\infty, 0[$ (fonction nulle) puis sur $]0, +\infty[$ (composée)

Reste sa continuité en 0. A gauche elle a une limite : 0.

A droite, on l'a vu, $x - x.\ln(x) + \left(n - \dfrac{1}{2}\right).x$ tend vers $-\infty$. Son exponentielle tend vers 0.

La limite à gauche en 0 est égale à la limite à droite en 0, et c'est la valeur de la fonction en 0.

La voilà continue en 0 aussi.

V$\sim$2) f_n est elle dérivable sur $\mathbb{R}$ (même en 0 , à droite et à gauche ?).

Pour la dérivabilité, on a une demi-tangente horizontale à gauche.
A droite, on dérive f_n ? L'horreur. Il est facile de mal dériver $x \longmapsto x^{-x}$. [4]

Mais en fait, c'est quoi f_n dérivable ? C'est l'existence de la limite des taux d'accroissement : $\dfrac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}$.

Ici, à droite en 0 : $\dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x} = e^x.x^{-x+n\frac{-3}{2}} = f_{n-1}(x)$.
On connaît la limite à droite en 0 : c'est 0.

La dérivée à droite et la dérivée à gauche en 0 sont égales, et valent 0.
f_n est dérivable en 0 de dérivée $(f_n)'(0) = 0$.

V$\sim$3) Montrez : $1 < \mu_1 < 2 < \mu_2$ (pour info : $\ln(2^4) < 3$).

Pour encadrer $1 < \mu_1 < 2 < \mu_2$, il faut revenir à la caractérisation de μ_n : la solution de $t.\ln(t) = n - \dfrac{1}{2}$ d'inconnue t sur le domaine où l'application $t \longmapsto t.\ln(t)$ est croissante.
On donne un nom à l'application $t \longmapsto t.\ln(t)$ de $[1, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$: φ car on manque d'originalité (mais on peut alors parler de φ^{-1}).

La définition est alors $\mu_n = \varphi^{-1}\left(n - \frac{1}{2}\right)$.

On calcule : $\varphi(1) = 0$, $\varphi(2) = 2.\ln(2)$. [5] On encadre : $\varphi(1) < 1 - \dfrac{1}{2} < \varphi(2)$.

Ceci permet d'affirmer $0 \leqslant \mu_1 = \varphi^{-1}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) < 2$.

On affirme ensuite $2.\ln(2) < 2 - \dfrac{1}{2}$ d'où $\varphi(2) < 2 - \dfrac{1}{2} = \varphi(\mu_2)$ puis $2 < \mu_2$.

Cadeau ? | L'affirmation $2.\ln(2) < 2 - \dfrac{1}{2}$ est $4.\ln(2) \leqslant 3$.
C'est celle qui est offerte par l'énoncé.
Je rappelle que l'usage de la calculatrice était interdit sur cette épreuve de Mines-Ponts, dont je n'ai pas retrouvé le rapport de jury, désolé pour ceux qui sont friands de remarques et comparaisons.

V$\sim$4) Montrez pour n supérieur ou égal à 3 : $\sqrt{n} < \mu_n < n$.

Pour établir $\sqrt{n} < \mu_n < n$, il suffit d'établir $\varphi(\sqrt{n}) < n - \dfrac{1}{2} < \varphi(n)$.

L'inégalité de droite $n - \dfrac{1}{2} < n < n.\ln(n)$ est vraie dès que $\ln(n)$ est plus grand que 1. Justement, n vaut au moins 3.

L'inégalité de gauche est $\sqrt{n}.\ln(\sqrt{n}) < n - \dfrac{1}{2}$.

Elle se ramène à $\sqrt{n}.\ln(n) < 2.n - 1$ et même $0 < 2.\sqrt{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \ln(n)$.

On étudie l'application différence $x \longmapsto 2.\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \ln(x)$. Elle se dérive en $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2.x.\sqrt{x}}$, ce qui fait $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x} + \dfrac{1}{2.x.\sqrt{x}}$.
Sa dérivée est positive sur $[1, +\infty[$. Elle croit. Elle est déjà positive en 1. Inutile d'en demander plus.

V$\sim$5) Justifiez : $\mu_n = o(n)_{n\to+\infty}$ et $\mu_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\ln(n)}$.

On tient : $\sqrt{n} < \mu_n < n$.
On divise par n : $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \dfrac{\mu_n}{n} < 1$.
Le théorème des gendarmes est inopérant.

Rapport : | Je suis prêt à parier que le rapport du jury aura fait référence ici aux élèves ayant invoqué en coup de vent le théorème des gendarmes comme argument sans vérifier s'il était utilisable...
Que penser effectivement de tels élèves comme futurs ingénieurs ? Dangereux, non ?

4. oui : $(x \longmapsto x^{-x})' = (x \longmapsto -(1+\ln(x)).x^{-x})$
5. quand j'étais petit et déjà jeune, je connaissais $\ln(2) \simeq 0,693$ mais c'était à cause des circuits oscillants en électronique, pas vous ?

On repart de ce qui caractérise μ_n : $\mu_n.\ln(\mu_n) = n - \dfrac{1}{2}$ (grand classique : étudier un objet non pour sa valeur qu'on ne peut pas donner mais pour ce qui le caractérise).

On divise : $\dfrac{\mu_n}{n}.\ln(\mu_n) = 1 - \dfrac{1}{2.n}$ encore : $\dfrac{\mu_n}{n} = \dfrac{1-\dfrac{1}{2.n}}{\ln(\mu_n)}$.
Or, μ_n tend vers l'infini quand n tend vers l'infini (là c'est bien l'encadrement $\sqrt{n} < \mu_n < n$).
Le quotient de droite tend vers 0. $dsp\frac{\mu_n}{n}$ tend vers 0, c'est la définition de $\mu_n = o(n)$.

Pour $\mu_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\ln(n)}$, on calcule un quotient : $\dfrac{\mu_n.\ln(n)}{n}$.
On l'écrit même

$$\frac{\mu_n.\ln(\mu_n)}{n}.\frac{\ln(n)}{\ln(\mu_n)}$$

On peut remplacer :

$$\frac{\mu_n.\ln(n)}{n} = \frac{n-\dfrac{1}{2}}{n}.\frac{\ln(n)}{\ln(\mu_n)}$$

Le premier terme tend vers 1 classiquement (même un Terminale peut le dire...).
L'encadrement $\sqrt{n} < \mu_n < n$ donne juste $\dfrac{\ln(n)}{2} < \ln(\mu_n) < \ln(n)$ puis $\dfrac{1}{2} < \dfrac{\ln(\mu_n)}{\ln(n)} < 1$.
Pas suffisant pour un équivalent. Mais l'élève eut espérer un bout de point si il a rédigé ça.

Mais on a encore une belle idée : $\mu_n.\ln(\mu_n) = n - \dfrac{1}{2}$ donc $\ln(\mu_n) + \ln(\ln(\mu_n)) = \ln\left(n - \dfrac{1}{2}\right)$.

On divise : $\dfrac{\ln(\mu_n)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln\left(n-\dfrac{1}{2}\right)}{\ln(n)} + \dfrac{\ln(\ln(\mu_n))}{\ln(n)}$.

Le terme $\dfrac{\ln\left(n-\dfrac{1}{2}\right)}{\ln(n)}$ converge vers 1 (niveau Sup $\dfrac{\ln\left(n-\dfrac{1}{2}\right)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n)+\ln\left(1-\dfrac{1}{2.n}\right)}{\ln(n)}$ tend vers 1).
Le terme $\dfrac{\ln(\ln(\mu_n))}{\ln(n)}$ est encadré par $\dfrac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$ et $\dfrac{\ln(\ln(\sqrt{n}))}{\ln(n)}$. Il tend vers 0.

V∼6) Soit α un réel de $]0,\ 1[$, montrez : $n^\alpha = o(\mu_n)_{n\to+\infty}$.

On termine avec $n^\alpha = o(\mu_n)_{n\to+\infty}$.
Pour ce faire, on se donne α (et dans sa tête on se dit$\alpha = 0,8$ puisqu'il est entre 0 et 1).
On regarde le quotient $\dfrac{n^\alpha}{\mu_n}$. Ayant un équivalent de μ_n, on le fait intervenir :

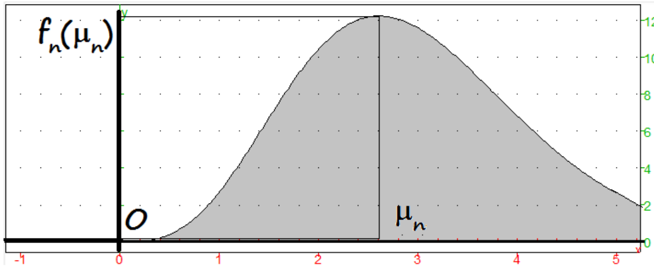
$$\frac{n^\alpha}{\dfrac{n}{\ln(n)}}\frac{\dfrac{n}{\ln(n)}}{\mu_n} = \frac{\ln(n)}{n^{1-\alpha}}\frac{\dfrac{n}{\ln(n)}}{\mu_n}$$

L'exposant $1-\alpha$ est positif. La forme indéterminée $\dfrac{\ln(n)}{n^{1-\alpha}}$ tend vers 0. Et le terme $\dfrac{n}{\ln(n).\mu_n}$ tend vers 1.
Le produit tend vers 0 , et c'est ce qu'on attend pour un petit o.

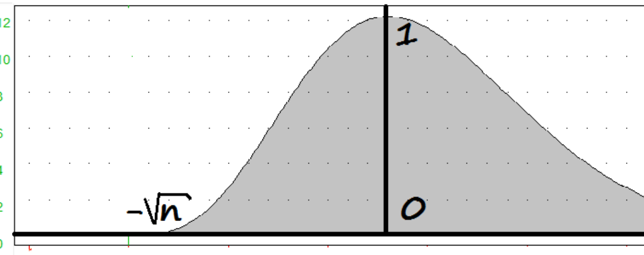
VI∼0) On définit ensuite $\boxed{g_n = x \longmapsto \dfrac{1}{f_n(\mu_n)}.f_n\left(\mu_n.\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)}$ Justifiez pour tout x :

$$f_n(x) = f_n(\mu_n).g_n\left(\frac{\sqrt{n}}{\mu_n}.x - \sqrt{n}\right)$$

Malgré l'écriture $\dfrac{1}{f_n(\mu_n)}.f_n\left(\mu_n.\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)$ un peu indigeste, c'est juste un changement d'échelle sur l'axe des abscisses $x \longmapsto f_n(a.x+b)$, et une dilatation sur l'axe des ordonnées. On divise la fonction par son maximum non nul, g_n est une fonction positive (f_n l'était) et son maximum vaut 1 (c'est $\dfrac{||f_n||_\infty}{f_n(\mu_n)}$ et justement, μ_n est l'en droit où f_n atteint son maximum).
On reprend donc le graphe de f_n et on change les graduations de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées.



graphe de f_n



graphe de g_n

L'application g_n est d'abord nulle, puis croissante, elle atteint le niveau 1, et elle décroît en direction (asymptotique) de 0.

VI∼1) Donnez l'allure du graphe de g_n.

Il me semble que c'est fait.

VI∼2) Montrez que pour tout x, la suite $(g_n(x))$ converge vers un réel qu'on notera tout naturellement $g(x)$ et que vous expliciterez.

x est fixé (on va appeler ça de la convergence « simple » ou « point par point »).

Supposons x positif. Que fait $\mu_n.\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)$? μ_n tend vers l'infini (questions précédentes) et $\dfrac{\mu_n}{\sqrt{n}}$ tend aussi vers l'infini (rappel de l'équivalent de μ_n). Le terme dans la parenthèse $\mu_n.\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)$ tend vers l'infini. Et à l'infini, $f_n$tend vers 0.

sauf que c'est f_n et que f_n dépend de n.

Et devant, on a $f(\mu_n)$ au dénominateur...

Il faut vraiment regarder ce qu'il y a dans cette fonction.

On rappelle $f_n(t) = e^t.t^{n-t-\frac{1}{2}} = \exp\Big(t.\ln(t) - t + n - \dfrac{1}{2}\Big) = \exp(\phi_{n-\frac{1}{2}}(t))$ puisque f_n est de la forme ϕ_λ avec λ égal à $n - \dfrac{1}{2}$.

Mais en plus, on prend $t = \mu_n.\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)$.

C'est donc la formule $\phi_\lambda(\alpha_\lambda.(1+u))$ du IV...[6]

On a

$$\phi_{n-\frac{1}{2}}(\alpha_{n-\frac{1}{2}}.(1+u)) = \phi_{n-\frac{1}{2}}(\alpha_{n-\frac{1}{2}}) + \Big(\alpha_{n-\frac{1}{2}} - n + \frac{1}{2}\Big).(u - \ln(1+u)) - \alpha_{n-\frac{1}{2}}.u.\ln(1+u)$$

Et celui qu'on a appelé $\alpha_{n-\frac{1}{2}}$ est celui qu'on a appelé ensuite μ_n.

$$\phi_{n-\frac{1}{2}}(\mu_n.(1+u)) = \phi_{n-\frac{1}{2}}(\mu_n) + \Big(\mu_n - n + \frac{1}{2}\Big).(u - \ln(1+u)) - \mu_n.u.\ln(1+u)$$

Il faut mettre ceci dans une exponentielle (et ce ne sera pas fini), et diviser par $f_n(\mu_n)$. C'est à dire par $\exp(\phi_{n-\frac{1}{2}}(\mu_n))$.

On voit donc une simplification :

$$\frac{f_n(\mu_n.(1+u))}{f_n(\mu_n)} = \exp\Big(\Big(\mu_n - n + \frac{1}{2}\Big).(u - \ln(1+u)) - \mu_n.u.\ln(1+u)\Big)$$

Mais il faut encore remplacer u par $\dfrac{x}{\sqrt{n}}$.

$$g_n(x) = \frac{f_n\Big(\mu_n.\big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\big)\Big)}{f_n(\mu_n)} = \exp\Big(\Big(\mu_n - n + \frac{1}{2}\Big).\Big(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big) - \mu_n.\frac{x}{\sqrt{n}}.\ln\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)$$

Quand n tend vers l'infini, $\dfrac{x}{\sqrt{n}}$ tend vers 0.

On peut utiliser le développement limité du logarithme : $\ln(1+u) = u + o(u)$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

6. et on prendra ensuite u égal à $x/\sqrt{n}$

$g_n(x) = \dfrac{f_n\Big(\mu_n.\big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\big)\Big)}{f_n(\mu_n)} = \exp\Big(\Big(\mu_n - n + \dfrac{1}{2}\Big).\Big(\dfrac{x}{\sqrt{n}} - \dfrac{x}{\sqrt{n}} + \dfrac{x^2}{2.n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)\Big) - \mu_n.\dfrac{x}{\sqrt{n}}.\dfrac{x}{\sqrt{n}} + \mu_n.\dfrac{x}{\sqrt{n}}.o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big)\Big)$

$g_n(x) = \exp\Big(\Big(\mu_n - n + \dfrac{1}{2}\Big).\Big(\dfrac{x^2}{2.n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)\Big) - \mu_n.\dfrac{x^2}{n} + \mu_n.\dfrac{x}{\sqrt{n}}.o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big)\Big)$

$g_n(x) = \exp\Big(- \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\mu_n.}{2.n}.x^2 + + \dfrac{x^2}{4.n} + n.o\Big(\dfrac{1}{n}\Big) + \mu_n;\Big(\dfrac{1}{n}\Big) - \mu_n.\dfrac{x^2}{n} + \mu_n.o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)$

Comme $n.o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ tend vers 0 (définition)

$\mu_n.o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ tend aussi vers 0 (car $\mu_n = o(n)$)

il ne reste que $g_n(x) = \exp\Big(- \dfrac{x^2}{2} + o(1)\Big)$ et il tend vers $e^{-x^2/2}$.

On a donc : $g = x \longmapsto e^{-x^2/2}$, la célèbre gaussienne...

Remarque : *On a travaillé sans se préoccuper de la partie nulle du graphe de g_n.*
En effet, quand n est trop petit et x négatif, $\mu_n.\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)$ est négatif. Et on a donc $f_n\Big(\mu_n.\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big) = 0$.
Mais dès que n est assez grand, $\dfrac{x}{\sqrt{n}}$ est dans $]-1,\ 1[$ et $\mu_n.\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)$ est positif. On est donc en droit d'utiliser la formule.

Question : *Quel élève se sera douté que c'est à cette question qu'il fallait utiliser la formule du IV1*
$\phi_\lambda(\alpha_\lambda.(1+x)) = \phi_\lambda(\alpha_\lambda) + (\alpha_\lambda - \lambda).(x - \ln(1+x)) - \alpha_\lambda.x.\ln(1+x)$ *avec* $\lambda = n - \dfrac{1}{2}$ *?*
Et même, quel professeur ?

VI∼3) Montrez qu'il existe un rang n_0 à partir duquel on a pour tout x de $]-\sqrt{n},\ +\infty[$:

$$g_n(x) \leqslant \exp\Big(- \dfrac{n}{2}.\Big(\dfrac{x}{\sqrt{n}} - \ln\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)\Big)$$

Pour x plus grand que $-\sqrt{n}$, la formule à utiliser pour $g_n(x)$ est bien celle obtenue plus haut :

$$g_n(x) = \exp\Big(\Big(\mu_n - n + \dfrac{1}{2}\Big).\Big(\dfrac{x}{\sqrt{n}} - \ln\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big) - \mu_n.\dfrac{x}{\sqrt{n}}.\ln\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)$$

On majore dans l'exponentielle :

$$g_n(x) \leqslant \exp\Big(\Big(\mu_n - n + \dfrac{1}{2}\Big).\Big(\dfrac{x}{\sqrt{n}} - \ln\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)\Big)$$

car μ_n est positif, et $\dfrac{x}{\sqrt{n}}.\ln\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)$ positif.

Pardon ? Pourquoi $\dfrac{x}{\sqrt{n}}.\ln\Big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\Big)$ est positif ?

Si x est positif, le logarithme est positif, le terme devant aussi.
Si x est négatif, c'est le logarithme d'un réel de $]0,\ 1[$, il est négatif,
mais le x devant aussi.

On approche quand même de la forme attendue par l'énoncé en $g_n(x) \leqslant \exp\Big(- \frac{n}{2}.\Big(\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)\Big)$.

On a juste besoin de $\Big(\mu_n - n + \dfrac{1}{2}\Big) \leqslant -\dfrac{n}{2}$.

Et c'est vrai parce que $\dfrac{\Big(\mu_n - n + \dfrac{1}{2}\Big)}{n} \leqslant -\dfrac{n}{2}$ tend vers -1. A partir d'un certain rang, il est donc plus petit que $\dfrac{-1}{2}$.

Remarque : *Reste à savoir ce qu'on fera ensuite de ça.*

VII∼0) On définit $\boxed{u = x \longmapsto \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}}$
Prolongez u par continuité en 0 pour qu'elle soit définie continue sur $]-1,\ +\infty[$. L'est elle sur $[-1,\ +\infty[$.

$\dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$ n'est pas définie en 0, ni pour x plus petit que -1.

En 0, il n'est pas utile de séparer « à droite/à gauche ». C'est la même formule des deux côtés... Ce serait idiot de faire deux fois la même chose !
Mais on a quand même une belle forme indéterminée. Et il n'est pas aisé d'y voir des taux d'accroissement et une limite car justement, on a x^2 et non x au dénominateur.

Toutefois on peut écrire un développement de Taylor :

$$\ln(1+x) = \ln(1) + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{2!}.\int_{t=0}^{1}(1-t)^2.\frac{2}{(1+t.x)^3}.dt$$

puisque $x \longmapsto \ln(1+x)$ a pour dérivées $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, $x \longmapsto -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ et $x \longmapsto \dfrac{2}{(1+x)^3}$
La différence $x - \ln(x)$ devient $x^2 + \dfrac{x^3}{2}.\displaystyle\int_{t=0}^{1}(1-t)^2.\frac{2}{(1+t.x)^3}.dt$.
On divise par x^2 : $u(x) = 1 + \dfrac{x}{2}.\displaystyle\int_{t=0}^{1}(1-t)^2.\frac{2}{(1+t.x)^3}.dt$.
On borne le contenu de l'intégrale (il dépend de x mais ça va), et on fait tendre x vers 0.

L'application u se prolonge en 1 par la valeur 1.

En -1, le logarithme tend vers $-\infty$ et le quotient tend vers $+\infty$ grâce au signe moins.

VII∼1) Démontrez que u est décroissante, et donnez son signe.
Pour le sens de variations de u, on la dérive.
On écrit $u' = \left(x \longmapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}.\ln(1+x)\right)' = \left(x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}.\ln(1+x) - \dfrac{1}{x^2.(1+x)}\right)$.
On réduit au dénominateur commun à la recherche du signe : $u' = \left(x \longmapsto \dfrac{2.(1+x).\ln(1+x) - x - x.(1+x)}{x^3.(1+x)}\right)$.
Le signe est celui du numérateur : $2.(1+x).\ln(1+x) - x^2 - 2.x$.
Bon, il serait négatif ce truc ?
Moi ça ne me dit rien. Alors on pose $v = x \longmapsto 2.(1+x).\ln(1+x) - x^2 - 2.x$ et on l'étudie sur $]-1, +\infty[$.
$v' = (x \longmapsto 2 + 2.\ln(1+x) - 2.x - 2)$.
Gagné : $v' = x \longmapsto 2.(\ln(1+x) - x)$.
v' est négatif. C'est une inégalité de convexité. Sinon, on re-dérive et on dresse un tableau de variations.
v est décroissante. Et nulle en 0.
v est donc d'abord positive, puis négative.

On divise par $x^2.(1+x)$ qui est d'abord négatif, puis positif.

Le quotient $\dfrac{2.(1+x).\ln(1+x) - x - x.(1+x)}{x^3.(1+x)}$ est donc toujours négatif.

L'application u aune dérivée négative. Elle décroit.

Et vers $+\infty$ elle tend vers 0.

C'est donc qu'elle reste positive.

Remarque : *L'idée de « une application/suite croissante qui tend vers* 0 *est forcément négative » est quand même un classique !*

VII∼2) Déduisez pour tout n supérieure ou égal à n_0 défini plus haut : $g_n(x) \leqslant \exp\left(-\dfrac{x^2}{4}\right)$ pour tout x négatif
et $g_n(x) \leqslant \exp\left(-\dfrac{x-\ln(1+x)}{2}\right)$ pour tout x positif.

Si vous voulez la suite et même tout le reste de l'énoncé, c'est Mines-Ponts 2002 MP épreuve 1.
Le sujet est disponible sur le serveur de l'UPS, ainsi que des corrigés.

Au final, après encore une partie, le sujet Mines-Ponts arrive à $\boxed{B_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\mu_n}}{\mu_n.\sqrt{n}}.\left(\dfrac{\mu_n}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}}}$

Mais j'ai ajouté la partie Python, et étiré quelques questions pour vous, faute de matériel et de théorèmes.