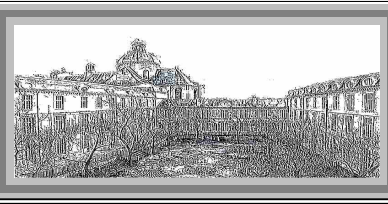
LYCEE CHARLEMAGNE
"Lundi 20" mai += 1
M.P.S.I.2

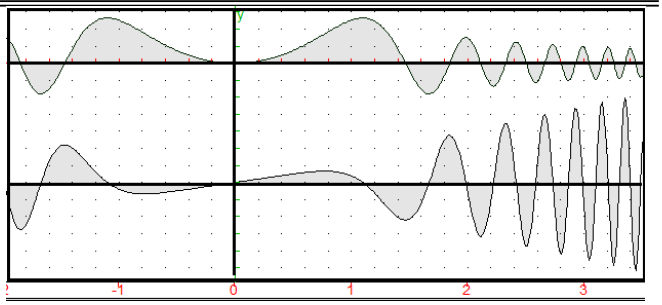


2023 2024

TD29

∘0∘ ♡ Donnez l'intervalle contenant 0 le plus grand possible sur lequel $t \longmapsto \cos(t).e^t$ est convexe.

♡ On définit : $f = x \longmapsto \dfrac{\sin(x^3)}{x}$. Prolongez la par continuité en 0.
Montrez qu'elle est dérivable, même en 0.
♡ Montrez que f est uniformément continue sur tout segment $[-a,\ a]$ et sur $\mathbb{R}$.



∘1∘ Montrez que f' n'est pas bornée.
(Rappel : on a montré $(f'\ bornee) \Rightarrow (f\ lipschitzienne) \Rightarrow (f\ uniformément\ continue)$ mais on voit ici qu'il n'y a pas de réciproque.

∘2∘ ♡ Montrez que l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue de A dans B est une suite de Cauchy.

∘3∘ ♣ L'application f échange les deux premiers chiffres derrière la virgule et garde les autres chiffres ($f(1/2) = 0,05$, $f(\pi) = 3,41159\ldots$, $f(4/7) = 0.75\overline{142857}1429\ldots$). Donnez ses points de discontinuité. Calculez $\displaystyle\int_0^1 f(t).dt$ (allez, les plus fous, c'est pour vous !).

∘4∘ Montrez que si f est uniformément continue sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $]0,\ +\infty[$ elle ne l'est plus forcément sur $\mathbb{R}$.
On suppose que f est uniformément continue sur $]-\infty,\ 0]$ et sur $[0,\ +\infty[$:
• $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \gamma_\epsilon > 0,\ \forall (x,\ y) \in]-\infty,\ 0]^2,\ (|y-x| \leqslant \gamma_\epsilon \Rightarrow |f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon)$
• $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0,\ \forall (x,\ y) \in [0,\ +\infty[^2,\ (|y-x| \leqslant \delta_\epsilon \Rightarrow |f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon)$
On se donne ε strictement positif. Montrez que pour $|x-y| \leqslant Min(\gamma_{\epsilon/2},\ \delta_{\epsilon/2})$, on a $|f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon$ dans chacun des cas suivants :

$x \leqslant y \leqslant 0$	$y \leqslant x \leqslant 0$	$x \leqslant 0 \leqslant y$	$y \leqslant 0 \leqslant x$	$0 \leqslant x \leqslant y$	$0 \leqslant y \leqslant x$

Concluez.

∘5∘ Donnez l'intervalle le plus grand possible, contenant 0 sur lequel $x \longmapsto x + 2.\cos(x)$ *(notée φ)* est un difféomorphisme *(intervalle image ?)*. Calculez $\varphi^{-1}(2)$, $(\varphi^{-1})'(2)$, et $(\varphi^{-1})''(2)$.

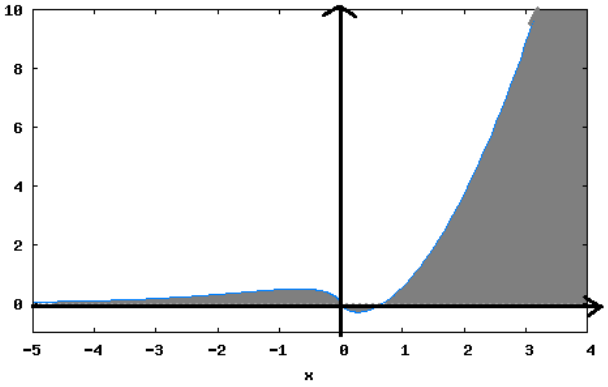
∘6∘ Montrez par théorème C^1 que $g = x \longmapsto \dfrac{x-1}{\ln(x)}$ est C^1 sur $]0,\ +\infty[$ après l'avoir prolongée par continuité en 0 et en 1.

On définit par $f = x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$. Donnez son domaine de définition.

En notant φune primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ (qu'on ne sait pas exprimer à l'aide des fonctions usuelles), exprimez f à l'aide de φ et dérivez f .
Montrez que f est convexe sur chaque intervalle de son domaine.
Montrez que, pour tout x de $]1,\ +\infty[$: $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{x.dt}{t.\ln(t)} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x^2.dt}{t.\ln(t)}$.
Donnez la limite de f en 1 (réponse : $\ln(2)$), et donnez la limite de f' en 1. Même question pour f''.
Déduisez que f est C^2 sur $]0,\ +\infty[$ et qu'elle y est convexe.

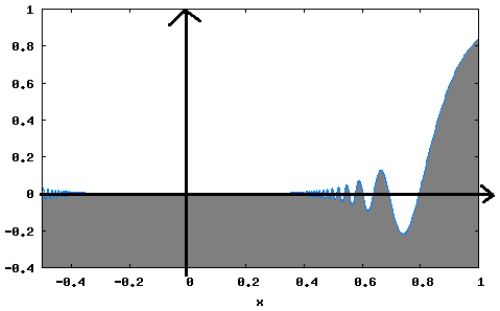
Montrez que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Retrouvez : $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}.dx = \ln(2)$.



L'application $t \longmapsto t.\ln(|e^t - 1|)$ se prolonge-t-elle par continuité en 0 ? Est elle dérivable ?

◦7◦ Donnez son développement limité d'ordre 2 en 1.



Montrez le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $x \longmapsto x^5.\sin(1/x^5)$ est $0 + 0.x + 0.x^2 + 0.x^3 + o(x^3)$ *(pas par une formule de Taylor Young, ne soyez pas juste des bêtes de calcul, ayez un cerveau)*.

◦8◦ Montrez que la dérivée de cette application n'a même pas de développement limité en 0.

◦9◦ ♠ 1- On dit que f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ est logarithmiquement convexe si $x \longmapsto \ln(f(x))$ est convexe. Montrez que toute application logarithmiquement convexe est convexe. Donnez une application convexe qui ne soit pas logarithmiquement convexe.

2- Montrez que toute puissance positive d'une application logarithmiquement convexe l'est aussi.

3- Montrez que si f est logarithmiquement convexe, alors on a $\sqrt{f(x).f(y)} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ pour tout couple $(x,\ y)$.

4- Soit f continue On suppose $\sqrt{f(x).f(y)} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ pour tout couple $(x,\ y)$. Montrez qu'on a alors $\ln(f((1-t).a + t.b)) \leqslant (1-t).\ln(f(a)) + t.\ln(f(b))$ pour tout couple $(a,\ b)$ et tout t de la forme $k/2^n$ avec n entier naturel et k entier de 0 à 2^n. Déduisez $\ln(f((1-t).a + t.b)) \leqslant (1-t).\ln(f(a)) + t.\ln(f(b))$ pour tout t de $[0,\ 1]$.

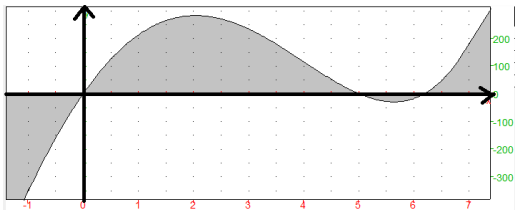
5- Déduisez que f est logarithmiquement si et seulement si elle est continue et vérifie pour tout couple $(x,\ y)$: $\sqrt{f(x).f(y)} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

6- Montrez que $x \longmapsto \int_0^1 \left(\ln(1/t)\right)^x.dt$ (notée g) est logarithmiquement convexe sur $[0,\ +\infty[$. Calculez par récurrence $g(n)$ pour tout entier naturel n.

7- Montrez que la somme de deux applications logarithmiquement convexes l'est encore.

◦10◦ Montrez que si f est convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors pour tout a, $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = a\}$ est de cardinal 0, 1, 2 ou infini.

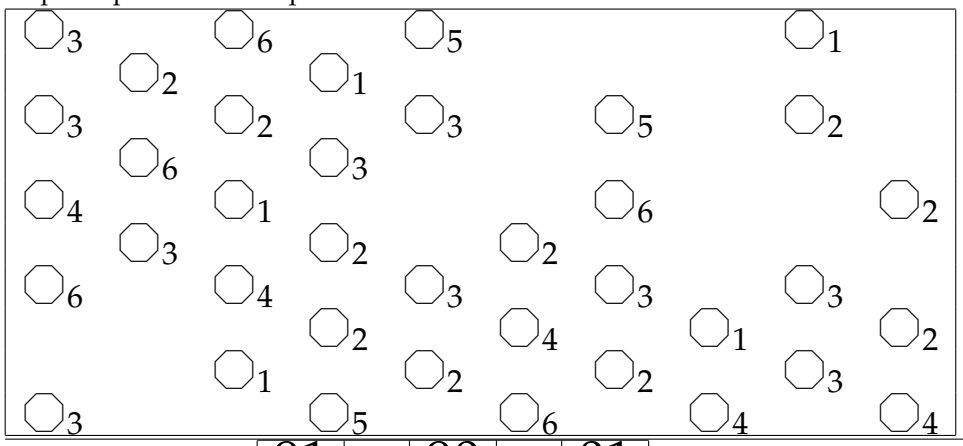
◦11◦



f est un polynôme unitaire de degré 4 convexe exactement sur $[-3,\ 4]$. Son développement limité en 2 est $f(2+h) = a + 5.h + c.h^2 + d.h^3 + o(h^3)$ et son développement limité en 5 est $f(5+h) = 1 + \beta.h + \gamma.h^2 + \delta.h^3 + o(h^3)$. Trouvez a, c, d, β, γ et δ.

◦12◦ **Rappel des règles :** Les iles sont reliées les unes aux autres par des traits « horizontaux » ou « verticaux » (pas de

diagonale, pas plus de deux ponts entre deux iles). Les traits ne peuvent pas se croiser. On vous a indiqué combien de ponts partent de chaque ile.



Palindrome numérique

91	=	90	+	01
10	+	06	=	16

∘13∘ Montrez que toute fonction convexe vérifie $f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$ pour tout couple $(a,\ b)$.

On prend f qui vérifie $f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$ pour tout couple $(a,\ b)$ et qui est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On se donne x et y. Montrez par récurrence sur n :
$\forall k \in [0,\ 2^n] \cap \mathbb{N},\ f\Big(\frac{(2^n-k).x+k.y}{2^n}\Big) \leqslant \frac{(2^n-k).f(x)+k.f(y)}{2^n}$.
Soit t un réel de $[0,\ 1]$. Pour tout n, on pose $t_n = \frac{[2^n.t]}{2^n}$.
Montrez $f((1-t_n).x+t_n.y) \leqslant (1-t_n).f(x)+t_n.f(y)$.
Déduisez $f((1-t).x+t.y) \leqslant (1-t).f(x)+t.f(y)$.

∘14∘ Les A_k sont des événements mutuellement indépendants. Montrez que la probabilité qu'aucun ne soit réalisé est majorée par $\exp\Big(-\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\Big)$.
On utilisera une inégalité de convexité sur l'exponentielle.

∘15∘ ♡ Montrez, pour x et a positifs : $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{a} - \frac{x-a}{a^2}$ (cas d'égalité ?).

∘16∘ ♣![1]

A	B	C	D
[0, 0, 4, 4, 4, 4]	[3, 3, 3, 3, 3, 3]	[2, 2, 2, 2, 6, 6]	[1, 1, 1, 5, 5, 5]

Ce sont des dés équilibrés à six faces *(appelés dés de Bradley Effron)*.

Montrez que la probabilité que A batte B est $2/3$.	Montrez que la probabilité que B batte C est $2/3$.
Montrez que la probabilité que C batte D est $2/3$.	Quelle est la probabilité que D batte A ?

∘17∘ Montrez : $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1} \sim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ *(indication : non, pas de quantité conjuguées mais* $x \longmapsto \sqrt[x]{x}$*).*

∘18∘ Un élève me dit « monsieur, si le développement limité de f en 0 est nul à tout ordre, c'est que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n et f doit être la fonction nulle ».
Je lui réponds : $t \longmapsto e^{-\frac{1}{t^2}}$ et lui dis « prolonge la en 0 et donne moi son développement limité d'ordre $2.n$ ».
Il n'a pas le temps de faire les calculs, faites les pour lui. Mais surtout, posez vous la bonne question, et ne dérivez rien, prouvez juste que le DL est le bon.

∘19∘ Donnez la limite en π de $\frac{\sin(x/2)+\cos(x)}{1+\sin^2(x)+\cos(x)}$ (posez $x = \pi + h$ et utilisez des développements limités)..

∘20∘ D'accord, la division suivant les puissances croissantes est interdite aux concours. Mais si on écrivait un script

1. pas pour la difficulté, mais pour le résultat obtenu à la fin

qui prend en entrée deux polynômes Numer et Denom (sous forme de listes de coefficients, dans l'ordre de leurs puissances) plus un entier naturel (ordre auquel on écrit la division) et retourne le quotient.

Exemple :

entrée	[2, 1, 1]	[1, 1, 0, 1]	4
sortie	[2, -1, 2, -4, 5]		

Et si vous êtes fou, gérez des coefficients rationnels et pas flottants et l'affichage de la division.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
2 & +X & +X^2 & & & & 1 \quad +X \quad +X^3 \\
\hline
-\big(2 & +2.X & & +2.X^3\big) & & & 2 \quad -X \quad +2.X^2 \quad -4.X^3 \quad +5.X^4 \\
\hline
 & -X & +X^2 & -2.X^3 & & & \\
 & -\big(-X & -X^2 & & -X^4\big) & & \\
\hline
 & & 2.X^2 & -2.X^3 & +X^4 & & \\
 & & -\big(2.X^2 & +2.X^3 & & +o(X^4)\big) & \\
\hline
 & & & -4.X^3 & +X^4 & +o(X^4) & \\
 & & & -\big(-4.X^3 & -4.X^4 & +o(X^4)\big) & \\
\hline
 & & & & 5.X^4 & +o(X^4) & \\
 & & & & -\big(5.X^4 & +o(X^4)\big) & \\
\hline
 & & & & & o(X^4) &
\end{array}
$$

∘21∘ Calculez $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right).dt$ (pas de problème, elle existe).

∘22∘ Vrai ou Faux : « Un entier n est multiple de 6 si la somme de ses chiffres et son dernier chiffre sont multiples de 6 ».

Peut on s'amuser avec des chiffres sans s'en blâmer, des lettres bien venues, des lignes à faire, des colonnes sur lesquelles se brancher... Les gens de Cayenne sont bien mouillés, surtout si ils habitent Laval. On a vu des les trains (de Bâle) pour l'Anjou sans cumin pour l'Anjou. Les vins des maris sont de souples anjou et les minettes goûtent l'anjou du matin. Dans cette histoire de Manche les gens indécis fuient des bougres de Saint-Lô qui provoquent des catas. On entend parfois : "Monsieur le Préfet, votre Manche attire bien des bras !" Mais aussi : "Ces deux Normands font partie des rares désignés."
Cette Borne est trop bonne pour Méluche !
A l'Éducation Nationale, on n'apprécie pas l'é**q**uipe en **p**lace. Il a un **t**ennis **p**révisible. La prof prend un étudiant en **l**ettres et le fait **tr**imer. Pépé met son gant dès qu'il p**l**eut. La joueuse de **t**imbales attire les bi**s**. Il manquera de re**cul** si on l'en **sort**. Il manque d'h**u**mour dans bien des c**a**s. Vos **m**enus sont à **c**ocher ? Pouront ils , en tant qu'u**nis**, taquiner Mé**lan**chon ?

∘23∘ Donnez une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-th(x)}$ ainsi que son domaine de définition.

∘24∘ Déterminez le noyau de $f \longmapsto f'-f$ de $C^\infty(\mathbb{R})$ dans lui même.
Déterminez le noyau de $P \longmapsto P'-P$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui même.

∘25∘ Combien y a-t-il d'applications injectives de `range(n)` dans `range(N)` ?
Combien y a-t-il d'applications non injectives de `range(n)` dans `range(N)` ?

∘26∘ ♡ Montrez que $x \longmapsto 2.x+|x-3|$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et explicitez sa réciproque.
Homéomorphisme de A sur B : application continue, bijective de A dans B, dont la réciproque est aussi contnue.

∘27∘ ♡ Montrez que pour tout x il existe un unique y vérifiant $\displaystyle\int_x^y e^{t^2}.dt = 1$ *(on considèrera l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}.dt$ notée F dont on montrera qu'elle réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)*. On pose alors $y=\varphi(x)$.
Montrez *(sans chercher à déterminer φ)* : $\varphi(-\varphi(x)) = -x$ pour tout x. Interprétez graphiquement.

∘28∘ ♡ Montrez que $z \longmapsto a.z+b.\bar{z}$ est linéaire de $(\mathbb{C},+,.)$ dans lui même *(vu comme $\mathbb{R}$ espace vectoriel)*. Trouvez a et b sachant que 1 a pour image $2-i$ et que son spectre est $\{3,\ 5\}$.

∘29∘ ♡ f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel $(E,+,.)$. On suppose $f\circ g = g\circ f$ *(on dit que f et g sont permutables, et non pas que f et g commutent, mais l'erreur n'est pas grave)*. Montrez :

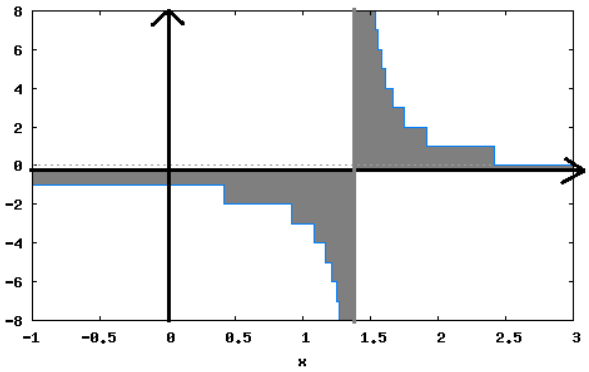
$\forall \overrightarrow{u} \in Ker(g),\ f(\overrightarrow{u}) \in Ker(g)$	$\forall \overrightarrow{u} \in Ker(f),\ f(\overrightarrow{u}) \in Ker(f)$
$\forall \overrightarrow{u} \in Im(g),\ g(\overrightarrow{u}) \in Im(g)$	$\forall \overrightarrow{u} \in Im(g),\ f(\overrightarrow{u}) \in Im(g)$

Rappel : un raisonnement du type $\forall \overrightarrow{b} \in Im(f)$ commence par « soit $\overrightarrow{b}$ dans $Im(f)$; alors il existe $\overrightarrow{a}$ dans E

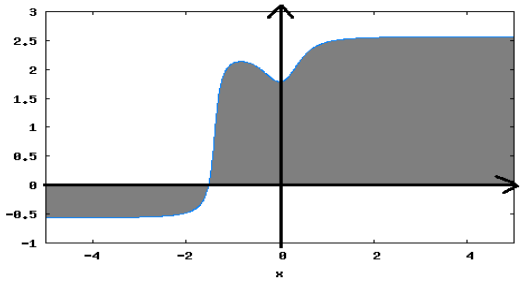
verifiant $\overrightarrow{b} = f(\overrightarrow{a})$, etc ».
Et endomorphisme, c'est « application linéaire d'un espace vectoriel dans lui même ».

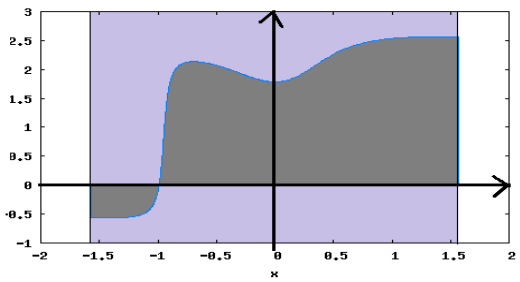
◦30◦ ♡ Montrez que pour tout x positif il existe un unique réel y vérifiant $y.e^y = x$ (pas de formule explicite). On pose alors $y = f(x)$. Calculez $f(0)$. Montrez que $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini, et montrez même $f(x) \sim_{x\to+\infty} \ln(x)$.

◦31◦ ♡ Montrez que $x \longmapsto \dfrac{1}{x-\sqrt{2}}$ est continue sur $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue. Même question avec $x \longmapsto \left[\dfrac{1}{x-\sqrt{2}}\right]$ *(partie entière)*.



◦32◦ ♡ Donnez une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas uniformément continue. Soit maintenant f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite a en $-\infty$ et une limite b en $+\infty$. Montrez que f est bornée. On veut montrer que f est uniformément continue. On pose alors : $\varphi = \theta \longmapsto f(\tan(\theta))$.





Montrez que φ se prolonge par continuité en $-\pi/2$ et en $\pi/2$. Montrez que φ est alors uniformément continue sur $[-\pi/2,\ \pi/2]$ puis sur $]-\pi/2,\ \pi/2[$. Déduisez par composition que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

◦33◦ **Rappel des règles :** sur chaque ligne et sur chaque colonne, il y a chacun des cinq entiers 1, 2, 3, 4et 5. Et il des signes « plus grand que » et « plus petit que » ; bien entendu, ils doivent être corrects.

				>					5		>			
	>	3	1	<	2				2	>	1		>	
			>	2	>	1	3	et				<	>	
1				4						<	5		<	4
			>		>					<	4	5	<	3

◦34◦ Soit f une application continue et périodique de période 1. Montrez que f est uniformément continue sur $[0,\ 2]$. Déduisez que f est uniformément continue sur tout $\mathbb{R}$.
Pourquoi a-t-on pris $[0,\ 2]$ plutôt que $[0,\ 1]$ simplement ?

◦35◦ ♡ Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On se donne a dans $\mathbb{R}$. Montrez par récurrence sur n que pour tout x de $[a+n.\mu_1,\ a+(n+1).\mu_1]$, on a $|f(x)-f(a)| \leqslant n+1$. Déduisez que f est encadrée par deux applications affines.

◦36◦ Soit f continue de $[0,\ \pi]$ dans $\mathbb{R}$. On se donne n dans $\mathbb{N}^*$ et k dans range(n). Montrez qu'il existe α_k vérifiant

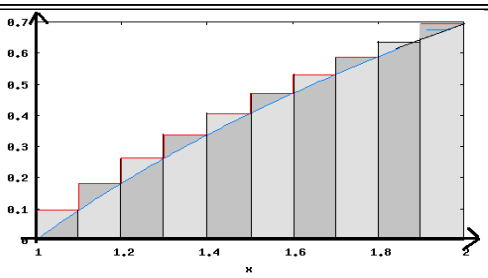
$\int_{k.\pi/n}^{(k+1).\pi/n} f(t).\sin(t).dt = f(\alpha_k).\int_{k.\pi/n}^{(k+1).\pi/n} |\sin(n.t)|.dt$ (pensez à « f est bornée et atteint ses bornes », et...).

Déduisez que $\frac{\pi}{2}.\int_0^{\pi} f(t).|\sin(n.t)|.dt$ est compris entre les deux sommes de Darboux de f sur $[0,\ \pi]$.

Donnez la limite de $\frac{\pi}{2}.\int_0^{\pi} f(t).|\sin(n.t)|.dt$ quand n tend vers l'infini.

◦37◦ Pouvez vous trouver f de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\int_0^1 f(t).dt = 0$ et qui ne soit pas identiquement nulle ?

Pouvez vous trouver f continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\int_a^b f(t).dt = 0$ et qui ne soit pas identiquement nulle ?



♡ On considère l'application logarithme, sur le segment $[1,\ 2]$ dont on effectue une équisubdivision en n morceaux. Montrez que la somme de Riemann droite est alors

◦38◦ $\ln\left(\left(\frac{(2.n)!}{n!}\right)^{1/n}\right) - \ln(n)$.

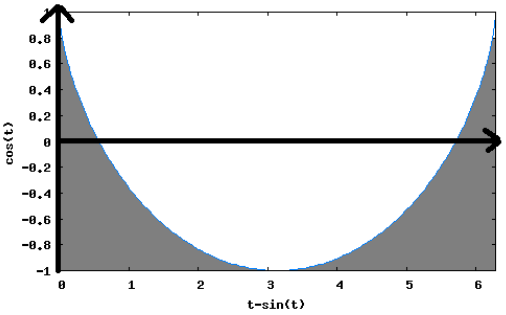
◦39◦ ♡ Calculez $\int_0^x \cos(t).dt$ en passant par la limite des sommes de Riemann.

◦40◦ ♡ Calculez $\int_a^b t^2.dt$ en passant par la limite des sommes de Riemann.

◦41◦ Montrez que l'application tangente est lipschitzienne sur $[-a,\ a]$ pour a strictement plus petit que $\pi/2$ *(sans dériver, mais en pensant à* $\frac{\sin(b-a)}{\cos(b).\cos(a)}$*)*.

Lipschitzienne sur I c'est $\exists K \in \mathbb{R}^+,\ \forall (x,\ y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant K.|x-y|$.

Au fait, quelles applications vérifient $\exists K \in \mathbb{R}^+,\ \forall (x,\ y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| < K.|x-y|$?

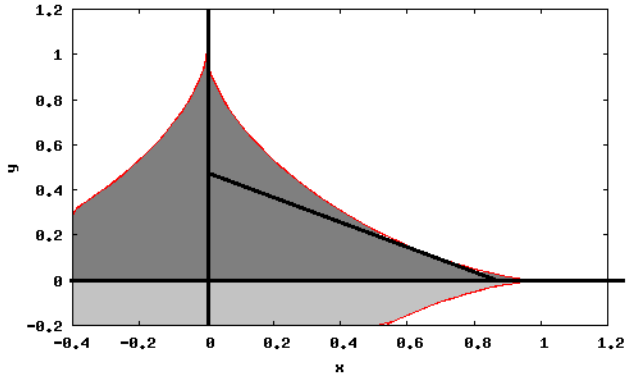


On note φ l'application $x \longmapsto x - \sin(x)$. Montrez que c'est un homéomorphisme de $[0,\ 2.\pi]$ dans lui même. On définit alors $f = x \longmapsto \cos(\varphi^{-1}(x))$.

On mesure alors la longueur du graphe par la formule $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}.dt$ en pensant à changer de variable par le C^1 difféomorphisme φ *(en tout cas sur l'intervalle ouvert)*.

◦42◦

◦43◦ On définit l'astroïde d'équation $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$ pour x décrivant $[0,\ 1]$.



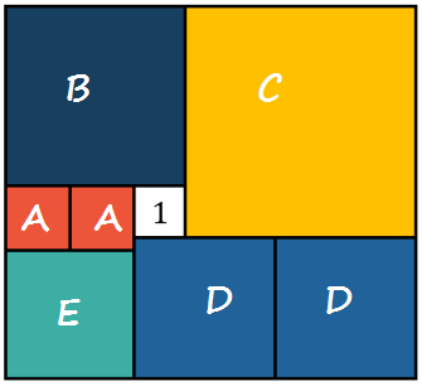
Montrez que $x \longmapsto (1 - x^{2/3})^{3/2}$ est un C^1 difféomorphisme de $]0,\ 1[$ dans $]0,\ 1[$ dont vous déterminerez l'application réciproque.

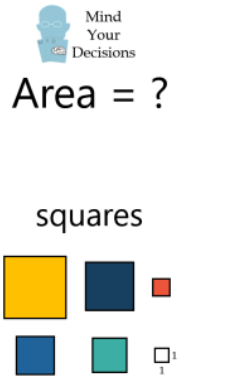
Calculez l'aire sous l'arche d'astroïde *(changement de variable proposé : $x = \sin^3(t)$, mais aussi $x = \cos^3(t)$, il pourra alors être judicieux de calculer la demi-somme)*.

Calculez en tout point de l'astroïde la longueur du segment de tangente entre l'axe Ox et l'axe Oy.

Calculez la longueur de l'arc d'astroïde *(rappel : intégrer* $\sqrt{1 + (y')^2}$*)*.

Difféomorphisme : continue, bijective et dérivable, de réciproque continue, bijective et dérivable.





Toutes les pièces du puzzle (rectangulaire) sont des carrés. Le plus petit a pour côté 1. On note x la longueur du carré A. Retrouvez en fonction de x toutes les longueurs puis trouvez x et enfin l'aire du rectangle.

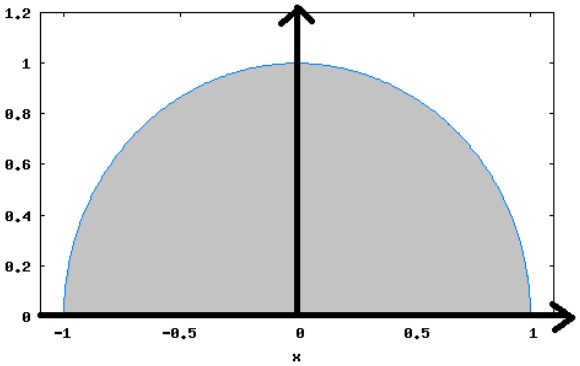
Toutes les pièces du puzzle (rectangulaire) sont des carrés. Mais de quelle taille ?

◦44◦ On pose $f = x \longmapsto \frac{1}{1+|\sin(x/2)|}$. On constate $f(\pi) = f(3.\pi)$. Pourquoi ne peut on quand même pas appliquer le théorème de Rolle ?

◦45◦ On note A l'ensemble des entiers dont l'écriture décimale ne contient aucun chiffre 2. Pour tout n, on définit la vaguetorielle : $n\wr = \prod_{k=1}^{n} k^{k\in A}$ ($k \in A$ est un booléen, et $True = 1$, $False = 0$). Écrivez un script `Python` prenant n en entrée et calculant $n\wr$.

Soit f une application de classe C^1 de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. La longueur de l'arc de la courbe représentative de f est donnée par la formule $\int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}.dt$ *(que l'on ne justifiera que plus tard dans l'année et qui était donnée et admise aussi dans le sujet de concours dont je me suis ici inspiré)*.
Vérifiez la formule pour $f = t \longmapsto \alpha.t$ sur le segment $[a,\ b]$.
Vérifiez la formule pour $f = t \longmapsto \sqrt{1-t^2}$ sur le segment $[-1/2,\ 1/2]$ puis sur un segment $[a,\ b]$ inclus dans $[-1,\ 1]$.

◦46◦



Calculez la longueur du graphe du cosinus hyperbolique sur $[0,\ 1]$.

Calculez la longueur du graphe de $t \longmapsto t^2$ sur $[0,\ 1]$ *(vous serez amené(e) à effectuer un changement de variable hyperbolique)*.

◦47◦ Montrez : $\frac{\cos^4(\theta)}{a} + \frac{\sin^4(\theta)}{b} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{\cos^8(\theta)}{a^3} + \frac{\sin^8(\theta)}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$.

◦48◦ Un maraicher regarde son stock de pommes :
les 24 pommes les plus légères, c'est 10 pour cent du poids
les 72 pommes les plus légères, c'est 30 pour cent du poids.
Combien a-t-il de pommes ?

◦49◦ Combien de solutions dans $\mathbb{N}^6$: $\frac{a^4+b^4+c^4}{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4} = 9$.

◦50◦ $B = (\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix})$, $C = (\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix})$, $D = (\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix})$ Un élève dit que B est une base du sous-espace d'équation $x+y+z=t$ dans $\mathbb{R}^4$. Il dit ensuite que C est une base du sous-espace d'équation $2.x+y=t$. Il déduit que l'intersection a pour base D. Trouvez l'erreur.

Vos Miss m'ont déchu. Ils cherchent des taillis avec des sapins. Marine fait bien pire. Ils évacuent l'élu. C'est une bonne pause pour la Chine. Attention aux pires des canailles (circulaire). Ne vous battez plus, taisez vous ! Il faut éliminer l'écart des dus. Montrez moi vos pensions, je suis consultante. Ah, les luttes des crassses. Le traiteur colorie ses andouilles.

∘51∘ Soit la famille $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}+5.\overrightarrow{j},\ 2.\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{j}+3.\overrightarrow{k})$. Combien de familles libres peut on en extraire ? Combien de familles génératrices de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ peut on en extraire ?
Famille libre : aucun vecteur n'est combinaison des autres.

∘52∘

I∼0) Pour f et g continues de $[-1,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$, on pose $< f \mid g >= \int_{-1}^{1} f(t).g(t).dt$ et $||f||_2 = \sqrt{< f \mid f >}$.

Montrez : $< f \mid g > \leqslant |f|_2.|g|_2$ en étudiant $\int_{-1}^{1} (\lambda.f(t)+g(t))^2.dt$.

I∼1) Déduisez $|f+g|_2 \leqslant |f|_2 + |g|_2$.

I∼2) On se donne h et on suppose $\int_{-1}^{1} (h(t))^2.dt = 0$. On pose alors $H = x \longmapsto \int_{-1}^{x} (h(t))^2.dt$. Montrez que H est croissante, calculez $H(-1)$ et $H(1)$, déduisez que h est constante, puis que h est nulle.

I∼3) Retrouvez que $f \longmapsto |f|_2$ est une norme sur $C_0([-1,\ 1],\ \mathbb{R})$.

I∼4) Montrez que si f est non nulle, alors $\dfrac{f}{|f|_2}$ a pour norme 1.

II∼0) Deux fonctions f et g sont dites orthogonales entre elles si on a $< f \mid g >= 0$. Montrez que les applications paires sont orthogonales aux applications impaires.

II∼1) On pose $L_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $L_1 = \dfrac{X.\sqrt{6}}{2}$ et $H_2 = X^2 - < L_0 \mid X^2 > .L_0 - < L_1 \mid X^2 > .L_1$.

II∼2) Vérifiez avec le minimum de calculs L_0, L_1 et H_2 sont deux à deux orthogonales.

II∼3) On pose alors $L_2 = \dfrac{H_2}{|H_2|_2}$ et $F = \mathbb{R}_2[X]$. Montrez que $(L_0,\ L_1,\ L_2)$ est une base de $(F,+,.)$ (orthonormée).

II∼4) Si f est un élément de E, montrez que $< f \mid L_0 > .L_0 + < f \mid L_1 > .L_1 + < f \mid L_2 > .L_2$ (noté $\tilde{f}$) est dans F.

II∼5) Montrez : $< f - \tilde{f} \mid L_i >= 0$ pour tout i de $\{0,\ 1,\ 2\}$. Déduisez que $f - \tilde{f}$ est orthogonale à $\tilde{f}$ et à tous les P de E.

II∼6) Déduisez $(|f|_2)^2 = (|\tilde{f}|_2)^2 + (|f-\tilde{f}|_2)^2$.

II∼7) Déduisez pour tout p de F : $\int_{-1}^{1} (f(t)-\tilde{f}(t))^2.dt \leqslant \int_{-1}^{1} (f(t)-p(t))^2.dt$.

II∼8) Trouvez a, b et c pour que $\int_{-1}^{1} (e^t - (a.t^2+b.t+c))^2.dt$ soit le plus petit possible (approximation de l'exponentielle par un trinôme sur $[-1,\ 1]$, optimale au sens des moindres carrés).

∘53∘ J'ai dans ma poche trois dés, chacun est un dé équilibré, numéroté de 1 à son nombre de faces,
• le premier a quatre faces (tétraèdre),
• le second en a six (cube)
• le dernier en a huit (octaèdre).

♣ 0 ♣ Je tire un dé au hasard (uniforme) et je le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir un 1 ?

♣ 1 ♣ Quelle est la probabilité d'obtenir un 8 ?

♣ 2 ♣ Quelle est la valeur moyenne du résultat obtenu ?

♣ 3 ♣ On recommence. Je tire un dé au hasard (uniforme) et je le lance. J'obtiens un 7. Quelle est la probabilité que j'aie tiré le tétraèdre ? Quelle est la probabilité que j'aie tire l'octaèdre.

♣ 4 ♣ On recommence. Je tire un dé au hasard (uniforme) et je le lance. J'obtiens un 1. Quelle est la probabilité d'avoir tiré le dé à six faces ?