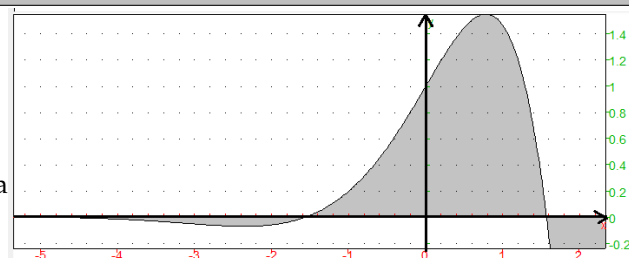


o0o ♡ Donnez l'intervalle contenant 0 le plus grand possible sur lequel $t \mapsto \cos(t) \cdot e^t$ est convexe.

On dérive deux fois. la condition porte sur le signe de la dérivée seconde. Ici : $t \mapsto -2 \cdot e^t \cdot \sin(t)$.
L'intervalle $[-\pi, 0]$ convient.



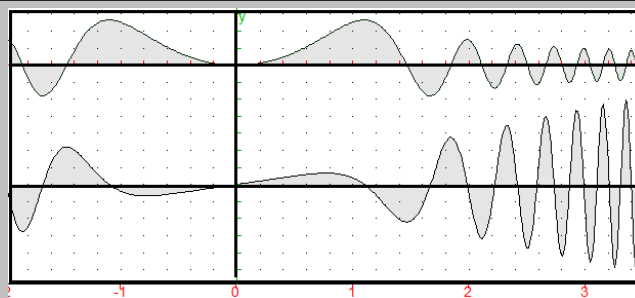
♡ On définit : $f = x \mapsto \frac{\sin(x^3)}{x}$. Prolongez la par continuité en 0.

Montrez qu'elle est dérivable, même en 0.

♡ Montrez que f est uniformément continue sur tout segment $[-a, a]$ et sur $\mathbb{R}$.

Montrez que f' n'est pas bornée.

(Rappel : on a montré $(f' \text{ bornée}) \Rightarrow (f \text{ lipschitzienne}) \Rightarrow (f \text{ uniformément continue})$ mais on voit ici qu'il n'y a pas de réciproque.



f n'est pas définie en 0. Mais $f(x)$ est équivalent à $\frac{x^3}{x}$ quand x tend vers 0.
 $f(x)$ tend vers 0 en 0. On posera $f(0) = 0$.

En toute rigueur, on dit qu'on définit une nouvelle application $\bar{f}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
par $\bar{f}(0) = 0$ et $\bar{f}(x) = f(x)$ pour x non nul.
Et c'est elle qui va être dérivable et tout et tout.

Pour ce qui est de la dériver en 0, il ne sert à rien de calculer f' ailleurs qu'en 0 et de regarder ensuite si f' a une limite en 0.

Déjà, ça conduit à des calculs moches (mais si vous préférez calculer plutôt que raisonner...).

Et ensuite, ça revient à dire « f' doit bien être continue en 0 ». Ce qui est une grosse question.

Non, simplement, pour dériver en 0, on calcule les taux d'accroissement : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Comme on a posé $f(0) = 0$, ce taux devient $\frac{\sin(x^3)}{x}$ c'est à dire $\frac{\sin(x^3)}{x^2}$.

Ce quotient (indéterminé) est équivalent à $\frac{x^3}{x^2}$. Il tend vers 0.

f est dérivable en 0 et $f'(0)$ vaut 0.

On a une tangente horizontale, ce qui était prévisible car l'application était paire.

Mais elle eut pû être paire et n'avoir pas de tangente (comme la valeur absolue).

Sur chaque segment $[-a, a]$, f est uniformément continue, puisqu'elle est continue.

C'est le théorème du mathématicien prussien de Göttingen, Berlin et Königsberg : Eduard Heine.

Pour la continuité uniforme sur $\mathbb{R}$ tout entier, on ne peut pas passer de uniformément continue sur tout segment à uniformément continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

En effet, il n'y a aucun résultat en ce sens.

Et même, $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur tout segment, mais pas sur $\mathbb{R}$ entier.¹

Mais ici, gros avantage : $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini.

Un exercice classique (inclus dans ce TD) dit si f est continue sur $] -\infty, +\infty[$

a une limite finie a en $-\infty$

a une limite finie b en $+\infty$

alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

On peut l'appliquer ici : f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Graphiquement, on sent qu'on peut utiliser des boîtes assez fines de hauteur ε .

On a une formule pour f' : $f'(x) = 3x \cdot \cos(x^3) - \frac{\sin(x^3)}{x^2}$.

Il suffit d'avoir dérivé proprement comme un produit, et tout vient en place très visiblement.

Sauf en 0 où on prend $f'(0) = 0$.

Ce qui ne se devinait d'ailleurs guère avec cette formule moche...

Ceci pour ceux qui pensent calculer une dérivée après prolongement par la limite de f' au lieu des taux d'accroissement de f ...

Pour montrer que cette dérivée n'est pas bornée, on va exploiter le terme en $3x \cdot \cos(x^3)$ puisque l'autre tend vers 0 à l'infini (et reste borné en 0).

On calcule f' là où le cosinus vaut 1 : $f'(\sqrt[3]{2k\pi}) = 3\sqrt[3]{2k\pi} - \text{dsp} \frac{0}{(2k\pi)^{2/3}}$.

Cette quantité tend vers l'infini quand k tend vers l'infini.

f' ne peut donc pas être bornée.

On a donc bien une application uniformément continue mais non lipschitzienne.

◦2◦

♥ Montrez que l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue de A dans B est une suite de Cauchy.

[H]	$\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon, \forall (p, q), (p \geq K_\varepsilon \text{ et } q \geq K_\varepsilon) \Rightarrow (a_p - a_q \leq \varepsilon)$
[H]	$\forall \varepsilon > 0, \exists \mu_\varepsilon, \forall (x, y), (y - a \leq \mu_\varepsilon) \Rightarrow (f(y) - f(x) \leq \varepsilon)$
[?]	$\forall \varepsilon > 0, \exists Q_\varepsilon, \forall (p, q), (p \geq Q_\varepsilon \text{ et } q \geq Q_\varepsilon) \Rightarrow (f(a_p) - f(a_q) \leq \varepsilon)$

Pour ε donné, on prend $Q_\varepsilon = K_{(\mu_\varepsilon)}$ et c'est fini.

◦3◦

♣ L'application f échange les deux premiers chiffres derrière la virgule et garde les autres chiffres ($f(1/2) = 0,05, f(\pi) = 3,41159\dots, f(4/7) = 0.751428571429\dots$). Donnez ses points de discontinuité. Calculez $\int_0^1 f(t).dt$ (allez, les plus fous, c'est pour vous !).

Finalement, on a une formule explicite pour l'application, et c'est ça qui fait tout marcher.

Pour récupérer juste la partie décimale de x : $x \mapsto x - [x]$.

Sur un exemple : $\pi \mapsto \pi - 3 = 0,1415\dots$

Pour pousser le premier chiffre et le récupérer : $x \mapsto [10.(x - [x])]$.

Sur un exemple : $\pi \mapsto \pi - 3 = 0,141592\dots \mapsto 1,41592\dots \mapsto 1$.

Pour pousser les deux premiers chiffres et les récupérer : $x \mapsto [100.(x - [x])]$.

Sur un exemple : $\pi \mapsto \pi - 3 = 0,141592\dots \mapsto 14,1592\dots \mapsto 14$.

Pour récupérer ce qui suit les deux premiers chiffres : $x \mapsto \frac{100.(x - [x]) - [100.(x - [x])]}{100}$.

Sur un exemple : $\pi \mapsto \pi - 3 = 0,141592\dots \mapsto 14,1592\dots \mapsto 0,1592\dots \mapsto 0,001592$.

Et la fonction qui échange les deux chiffres d'un entier à deux chiffres : $n \mapsto \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 10.(n - 10.\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor)$

1. oui, $\mathbb{R}$ n'est pas un segment ! c'est un intervalle non borné

Il ne reste qu'à mettre bout à bout tout ce qu'on a ici créé :

$$x \mapsto [x] + \frac{100 \cdot (x - [x]) - [100 \cdot (x - [x])]}{100} + \frac{10 \cdot [100 \cdot (x - [x])] - 99 \cdot \left[\frac{[100 \cdot (x - [x])]}{10} \right]}{100}$$

Sauf erreur de ma part. Mais je l'ai validé avec Python en découpant en terme à terme.

Où est elle discontinue ?

Partout où les parties entières le sont.

La partie entière est discontinue en toute abscisse entière.

Ici, l'application est discontinue en toute abscisse entière et en toute abscisse de la forme $\frac{n}{100}$ avec n entier.

A moins que les deux chiffres échangés ne soient les mêmes.

Pour le calcul, on peut utiliser la relation de Chasles, pour découper en intervalles sur lesquels la fonction est affine.

On peut aussi profiter de $f \circ f = Id$.

Finalement, on trouve $\int_0^1 f(t) \cdot dt = \frac{1}{2}$. On a la moitié de l'aire du carré.

Le vrai exercice est « f permute deux à deux tous les chiffres », avec plein de points de discontinuité...

◊4◊

Montrez que si f est uniformément continue sur $] -\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$ elle ne l'est plus forcément sur $\mathbb{R}$.

On suppose que f est uniformément continue sur $] -\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma_\varepsilon > 0, \forall (x, y) \in] -\infty, 0]^2, (|y - x| \leq \gamma_\varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon)$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, (|y - x| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon)$

On se donne ε strictement positif. Montrez que pour $|x - y| \leq \min(\gamma_{\varepsilon/2}, \delta_{\varepsilon/2})$, on a $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ dans chacun des cas suivants :

$x \leq y \leq 0$	$y \leq x \leq 0$	$x \leq 0 \leq y$	$y \leq 0 \leq x$	$0 \leq x \leq y$	$0 \leq y \leq x$
-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------	-------------------

Concluez.

Un classique.

On prend $x \mapsto \frac{|x|}{x}$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$. En fait, c'est $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Etant constante sur $]0, +\infty[$, elle est continue et même uniformément continue (η quelconque, on a toujours $|x - y| \leq \eta \Rightarrow |1 - 1| \leq \varepsilon$).

Le même argument la rend uniformément continue sur $] -\infty, 0[$.

Ensuite, sur $\mathbb{R}^*$ elle est continue. En tout point a elle est constante sur un voisinage $\left[a - \frac{|a|}{2}, a + \frac{|a|}{2} \right]$.

Mais sur $\mathbb{R}^*$ elle n'est pas uniformément continue.

Prenez $\varepsilon_0 = 1$. Vous aurez beau choisir un η tout petit pour faire plaisir au physicien, il y aura toujours un matheux pour vous dire « je prends $x = -\frac{\eta}{2}$ et $y = \frac{\eta}{2}$ ».

Et avec jubilation, il vous dit : $|y - x| \leq \eta$ (différence d'abscisse petite) et pourtant $|f(y) - f(x)|$ est grand (2 c'est quand même beaucoup).

La continuité reste le nez collé sur le grapho en tout point. Elle n'a pas le droit de se poser sur 0, elle ne voit pas le saut.

La continuité uniforme doit tout regarder en même temps.

Elle survole de loin et voit de part et d'autre de 0.

Mais si on raccorde en 0 ?

Alors là tout va bien.

Comme indiqué, prenons $|x - y| \leq \min(\gamma_{\varepsilon/2}, \delta_{\varepsilon/2})$ et étudions les différents cas

x et y négatifs. On a alors $|x - y| \leq \min(\gamma_{\epsilon/2}, \delta_{\epsilon/2}) \leq \gamma_{\epsilon/2}$.

La continuité uniforme sur $\mathbb{R}^-$ donne $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$

On ne dit pas tout de suite « f est uniformément continue dans ce cas ».

Il faut étudier tous les cas....

x et y positifs. On a alors $|x - y| \leq \min(\gamma_{\epsilon/2}, \delta_{\epsilon/2}) \leq \delta_{\epsilon/2}$.

La continuité uniforme sur $\mathbb{R}^+$ donne $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$

Mais il reste des cas....

x négatif et y positif. On a alors $|x - 0| \leq |x - y| \leq \min(\gamma_{\epsilon/2}, \delta_{\epsilon/2}) \leq \gamma_{\epsilon/2}$.

La continuité uniforme sur $\mathbb{R}^-$ donne $|f(x) - f(0)| \leq \frac{\epsilon}{2}$

Dans le même temps $|y - 0| \leq |y - x| \leq \min(\gamma_{\epsilon/2}, \delta_{\epsilon/2}) \leq \delta_{\epsilon/2}$.

La continuité uniforme sur $\mathbb{R}^+$ donne $|f(y) - f(0)| \leq \frac{\epsilon}{2}$

Il n'y a plus qu'à écrire

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(0) + f(0) - f(y)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0) - f(y)| \leq 2 \cdot \frac{\epsilon}{2}$$

On a transité par 0 et $f(0)$, puisque 0 est entre x et y .

Géométriquement, c'est « naturel ».

Les autres cas sont symétriques. On les a tous traités.

Le réel $\min(\gamma_{\epsilon/2}, \delta_{\epsilon/2})$ nous donne donc bien un module d'uniforme continuité...

◦5◦

Donnez l'intervalle le plus grand possible, contenant 0 sur lequel $x \mapsto x + 2 \cdot \cos(x)$ (notée φ) est un difféomorphisme (intervalle image ?). Calculez $\varphi^{-1}(2)$, $(\varphi^{-1})'(2)$, et $(\varphi^{-1})''(2)$.

L'application $x \mapsto x + 2 \cdot \cos(x)$ qu'on va noter φ a une dérivée qui s'annule et change de signe : $\varphi' = x \mapsto 1 - 2 \cdot \sin(x)$.

En 0 la dérivée positive. Débrouillons nous pour qu'elle le reste, histoire d'avoir une application strictement monotone.

C'est en $\frac{\pi}{6}$ que ça se passe mal à droite. Et en $-\frac{5\pi}{6}$ à gauche.

Si on se place sur $[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, on a une application continue strictement monotone.

Vous êtes pressés de dire « donc on a un homéomorphisme ».

Et là je hurle « NON ! vous n'avez toujours pas compris ! ».

Dès qu'il y a le mot surjectivité, bijectivité, homéomorphisme, il faut dire de quoi dans quoi... Ce n'est pourtant pas compliqué !

On reprend donc : φ est un homéomorphisme de $[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ sur $[-\frac{5\pi}{5} - \sqrt{3}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}]$

Et pour difféomorphisme ? • On demande que f soit dérivable :

pas de problème, elle l'est

• On demande que f^{-1} soit dérivable...

et là, il y a un problème quand f a une tangente horizontale

f^{-1} se mettrait à avoir une demi-tangente verticale

On restreint donc : φ est un homéomorphisme de $]-\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$ sur $]-\frac{7\pi}{5} - \sqrt{3}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}[$

Cette fois, encore, zéro calcul. Mais c'est justement en cela que les maths sont perfides. Elles ne demandent pas que vous appreniez des tonnes et des tonnes de choses. Elles demandent que vous compreniez ce que vous dites. Et que vous soyez précis. Je crois que c'est pour ça que le mardi matin, vous avez quatre heures en parfaite cohérence, même si les deux matières portent des noms différents.. Et c'est ça que les problèmes de maths du Bac ne mesurent pas : votre capacité à faire des maths, ils ne mesurent votre capacité à faire la partie purement technique de la physique.

Pour $\varphi^{-1}(2)$, on résout l'équation $\varphi(x) = 2$ d'inconnue x entre $-5\pi/6$ et $\pi/6$.

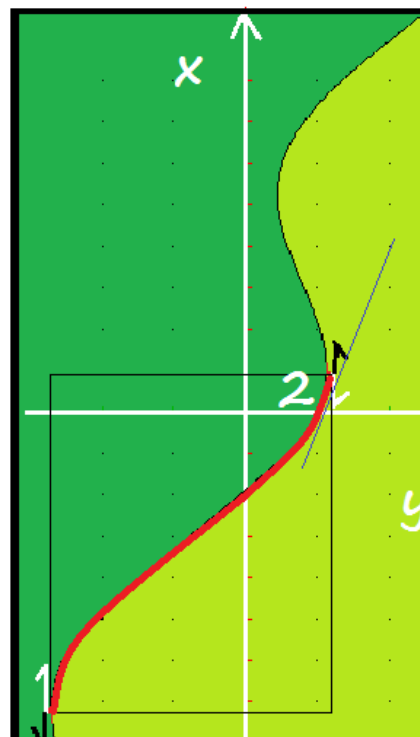
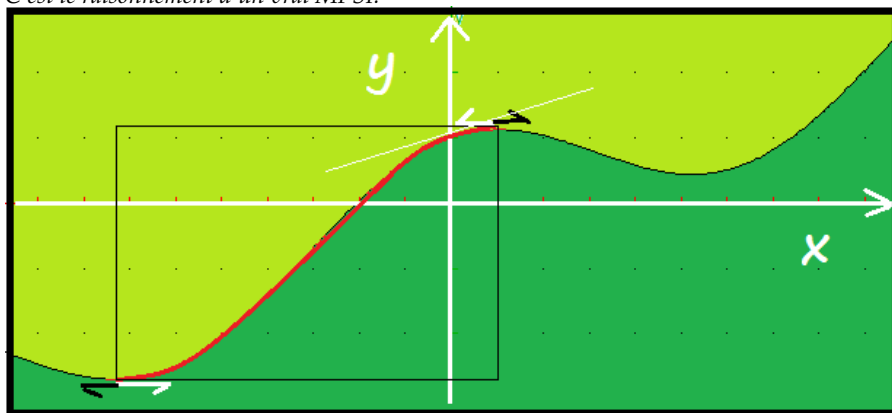
Je n'ai aucune formule toute prête pour vous aider à le faire. Regardez juste le graphe : $\varphi(0) = 2$! Donc $\varphi^{-1}(2) = 0$. C'est tout.

Et $(\varphi^{-1})'(2)$? Ça se fait graphiquement.

En 0, φ a pour dérivée 1. La tangente au graphe a pour pente 1.

Par renversement, la tangente au graphe de φ^{-1} en 2 aura pour pente 1 (au sens de $\frac{1}{1}$) : $(\varphi^{-1})'(2) = 1$.

C'est le raisonnement d'un vrai MPSI.



Et autrement que graphiquement ? Oui.

On sait : $\varphi(\varphi^{-1}(t)) = t$ pour tout t .

On dérive : $\varphi'(\varphi^{-1}(t)) \cdot ((\varphi^{-1})'(t)) = 1$ pour tout t .

On a donc : $\varphi'(\varphi^{-1}(2)) \cdot ((\varphi^{-1})'(2)) = 1$ et donc $1 \cdot (\varphi^{-1})'(2) = 1$.

C'est la même que l'autre. Et c'est le raisonnement d'un bon PCSI (si PCSI veut bien dire comme je le crois Permutations, Schwarz, Cauchy et Intégration).

Enfin, il reste la formule toute prête.

$$(\varphi^{-1})'(t) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} \text{ qui donne encore ici } (\varphi^{-1})'(2) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(2))} = \frac{1}{\varphi'(1)} = \frac{1}{1}.$$

C'est la même, encore et toujours. Et c'est le bon raisonnement d'un PCSI (si PCSI veut dire autre chose).

Et pour $(\varphi^{-1})''$? On a des formules toutes prêtes ? Non. Ça ne sert à rien. Il suffit de reprendre la même idée :

On sait : $\varphi(\varphi^{-1}(t)) = t$ pour tout t .

On dérive : $\varphi'(\varphi^{-1}(t)) \cdot ((\varphi^{-1})'(t)) = 1$ pour tout t .

On redérive et remplace : $\varphi''(\varphi^{-1}(t)) \cdot (((\varphi^{-1})'(t)))^2 + \varphi'(\varphi^{-1}(t)) \cdot ((\varphi^{-1})''(t)) = 0$

$$\varphi''(\varphi^{-1}(2)) \cdot (((\varphi^{-1})'(2)))^2 + \varphi'(\varphi^{-1}(2)) \cdot ((\varphi^{-1})''(2)) = 0$$

$$\varphi''(0) \cdot (1)^2 + \varphi'(0) \cdot ((\varphi^{-1})''(2)) = 0$$

$$-2 + (\varphi^{-1})''(2) = 0$$

La fonction est localement convexe avec dérivée seconde positive.

60

Montrez par théorème C^1 que $g = x \mapsto \frac{x-1}{\ln(x)}$ est C^1 sur $]0, +\infty[$ après l'avoir prolongée par continuité en 0 et en 1.

Déjà, elle n'est pas définie en 0 ni en 1.

En 0, le numérateur tend vers -1 et le dénominateur vers l'infini. On prolonge avec la valeur 0.

En 1, c'est l'inverse d'un taux d'accroissement du logarithme $\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1}$. On prolonge par la valeur 1.

Ensuite, sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ l'application est dérivable, de dérivée $x \mapsto \frac{x \cdot \ln(x) - x + 1}{x \cdot (\ln(x))^2}$.

Si la dérivée a une limite en 0, on saura que f est dérivable en 0. Hélas, le numérateur tend vers -1 et le dénominateur vers 0. On a une limite infinie. Et pas abus de langage une demi-tangente verticale.

On recommence en 1 avec plus d'espoir. Comme c'est en 1, on va poser $x = 1 + h$ puis habitué à trier les puissances de h .

$$\frac{x \cdot \ln(x) - x + 1}{x \cdot (\ln(x))^2} = \frac{(1+h) \cdot \ln(1+h) - h}{(1+h) \cdot \ln(1+h)^2}$$

Le dénominateur est équivalent à h^2 car $\ln(1+h) \sim h$ quand h tend vers 0.

Il faut donc un développement d'ordre 2 du numérateur, en utilisant $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$:

$$(1+h) \cdot \left(h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) - h = \left(h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) + \left(h^2 - \frac{h^3}{2} + o(h^3)\right) - h = \frac{h^2}{2} + o(h^2)$$

Il est inutile de préciser le terme en h^3 , il n'est plus visible à côté de $o(h^2)$, il en fait partie.

Le numérateur est équivalent à $\frac{h^2}{2}$ (premier terme non nul du développement limité).

Le quotient est équivalent à $\frac{1}{2}$. Il tend vers $\frac{1}{2}$.

L'application avoue être dérivable en 1 de dérivée $\frac{1}{2}$.

C'est bien « on déduit $f'(1) = \frac{1}{2}$. Et non pas : « je pose $f'(1) = \frac{1}{2}$.

On peut imposer une valeur à $f(1)$. Mais alors f est dérivable en 1 ou ne l'est pas, et ce n'est pas nous qui pouvons décider de placer sa tangente comme ci ou comme ça...

On définit par $f = x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$. Donnez son domaine de définition.

En notant φ une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ (qu'on ne sait pas exprimer à l'aide des fonctions usuelles), exprimez f à l'aide de φ et dérivez f .

Montrez que f est convexe sur chaque intervalle de son domaine.

Montrez que, pour tout x de $]1, +\infty[$: $\int_x^{x^2} \frac{x \cdot dt}{t \cdot \ln(t)} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2 \cdot dt}{t \cdot \ln(t)}$.

Donnez la limite de f en 1 (réponse : $\ln(2)$), et donnez la limite de f' en 1. Même question pour f'' .

Déduisez que f est C^2 sur $]0, +\infty[$ et qu'elle y est convexe.

Montrez que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Retrouvez : $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx = \ln(2)$.

On définit par $f = x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$. Donnez son domaine de définition.

Montrez que f est convexe sur chaque intervalle de son domaine.

Montrez que, pour tout x de $]1, +\infty[$: $\int_x^{x^2} \frac{x \cdot dt}{t \cdot \ln(t)} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2 \cdot dt}{t \cdot \ln(t)}$.

Donnez la limite de f en 1, et donnez la limite de f' en 1. Même question pour f'' .

Déduisez que f est C^2 sur $]0, +\infty[$ et qu'elle y est convexe.

$\frac{1}{\ln(t)}$ n'existe que pour t plus grand que 0, et différent de 1.

On va intégrer de x à x^2 . On ne peut pas prendre x négatif, sinon 0 est dans l'intervalle $[x, x^2]$.

Si x est positif, il faut quand même éviter que x et x^2 soient de part et d'autre de 1.

$x \in]0, 1[$	$x = 1$	$x \in]1, +\infty[$
alors $x^2 \in]0, 1[$	$x^2 = 1$	alors $x^2 \in]1, +\infty[$
$[x, x^2] \subset]0, 1[$ et $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ existe	bof	$[x, x^2] \subset]1, +\infty[$ et $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ existe
$\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \geq 0$ (fonction négative mais $x > x^2$)		$\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \geq 0$

Pour dériver (sur chaque intervalle), on définit $G = x \mapsto \int_{1/2}^x \frac{dt}{\ln(t)}$ dans le premier cas, et on dérive $x \mapsto G(x^2 - G(x))$ en $x \mapsto 2x \cdot G'(x^2) - G'(x)$ et on trouve $x \mapsto \frac{x-1}{\ln(x)}$.

Sur l'autre intervalle, on fait de même, mais avec $G = x \mapsto \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$.

Oui, $\frac{1}{2}$ et 2 c'est arbitraire. Mais ne tombez pas dans le piège de poser $G = x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\ln(t)}$ qui pose quand même problème pour son existence.

On redérive pour la convexité : $x \mapsto \frac{x \cdot \ln(x) - x + 1}{x \cdot (\ln(x))^2}$.

Le signe est celui de $x \cdot \ln(x) - x + 1$. Pas évident ?

Si ! La tangente est une application concave. Son graphe est sous ses tangentes. En particulier sous sa tangente en 1 : $\ln(x) \leq \frac{1}{x} \cdot (x-1) + \ln(1)$.

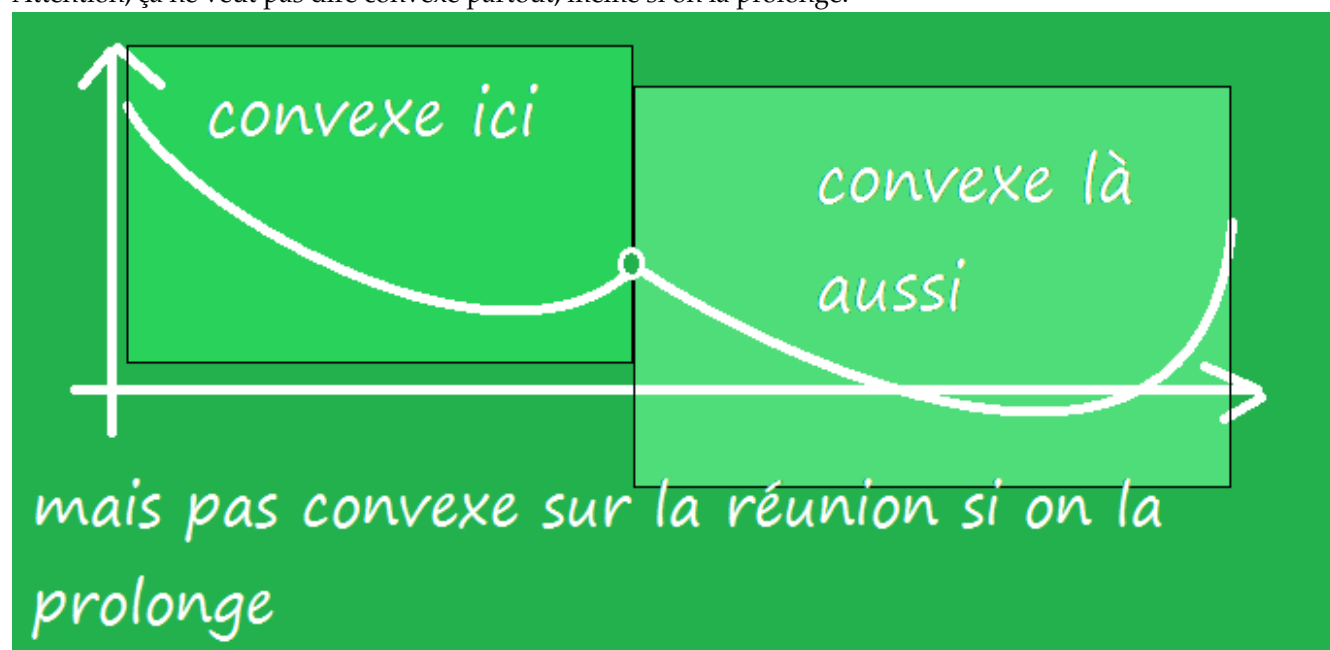
Et alors ? Je l'écris pour $\frac{1}{x}$: $-\ln(x) \leq \frac{1}{x} - 1$ puis je multiplie par x positif : $-x \cdot \ln(x) \leq 1 - x$ et donc $0 \leq x \cdot \ln(x) + 1 - x$.

Oui, c'est un peu trop joli pour que vous y pensiez spontanément.

Mais vous pouviez étudier $x \mapsto x \cdot \ln(x) - x + 1$, la dériver deux fois et étudier ses variations (minimum nul en 1).

La dérivée seconde est positive, l'application est convexe sur chaque intervalle de son domaine.

Attention, ça ne veut pas dire convexe partout, même si on la prolonge.



L'encadrement

$$\int_x^{x^2} \frac{x \cdot dt}{t \cdot \ln(t)} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2 \cdot dt}{t \cdot \ln(t)}$$

s'obtient en écrivant que pour t entre x et x^2 (dans l'ordre puisque $x > 1$), on a $\frac{x}{t} \leq 1 \leq \frac{x^2}{t}$. On multiplie par le logarithme positif, on intègre sur un intervalle pris dans le sens croissant et c'est joué, plié.

Avantage : le terme du milieu n'a pas de primitive simple, mais les encadrants si !

$$x \cdot [\ln(\ln(t))]_x^{x^2} = \int_x^{x^2} \frac{x \cdot dt}{t \cdot \ln(t)} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2 \cdot dt}{t \cdot \ln(t)} = x^2 \cdot [\ln(\ln(t))]_x^{x^2}$$

On récupère du $\ln(\ln(x^2)) - \ln(\ln(x))$ soit $\ln(2)$ (si si !).

On encadre donc la fonction par du $x \cdot \ln(2)$ et $x^2 \cdot \ln(2)$.

Par encadrement : $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ tend vers $\ln(2)$ quand x tend vers 1 (à droite).

Peut-on faire de même à gauche ? Cette fois, on aura des encadrements dans l'autre sens (attention au sens d'intégration...), mais le final sera le même.

On peut prolonger par continuité : $f(1) = \ln(2)$

La dérivée est en $x \mapsto \frac{x-1}{\ln(x)}$.

Elle admet une limite en 1.

Le théorème de la limite de la dérivée nous informe : l'application est dérivable en 1, de dérivée 1.

Et f est C^1 sur $]0, +\infty[$.

On fait de même avec la dérivée seconde, elle admet une limite en 1.

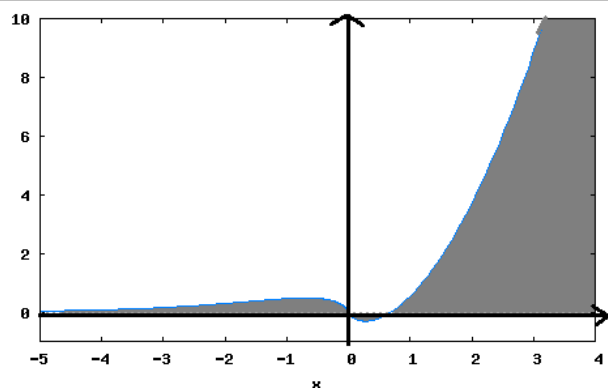
Le théorème de la limite de la dérivée donne f' dérivable même en 1 et C^1 .

f est C^2 à dérivée seconde positive ou nulle, elle est convexe.

L'application $t \mapsto t \cdot \ln(|e^t - 1|)$ se prolonge-t-elle par continuité en 0 ? Est-elle dérivable ?

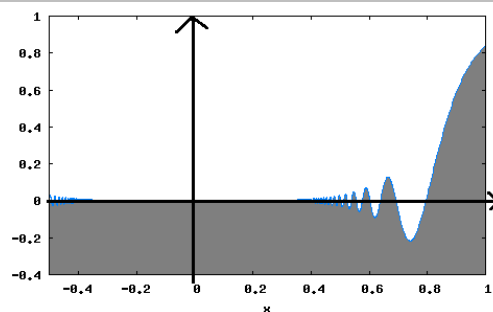
Donnez son développement limité d'ordre 2 en 1.

A faire.



Montrez le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto x^5 \cdot \sin(1/x^5)$ est $0 + 0.x + 0.x^2 + 0.x^3 + o(x^3)$ (pas par une formule de Taylor Young, ne soyez pas juste des bêtes de calcul, ayez un cerveau).

Montrez que la dérivée de cette application n'a même pas de développement limité en 0.



Pour le développement d'ordre 3, comme on nous le propose, il suffit de vérifier $x^5 \cdot \sin(1/x^5) = 0 + 0.x + 0.x^2 + 0.x^3 + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$, c'est à dire

$\frac{x^5 \cdot \sin(1/x^5)}{x^3}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. C'est le produit d'un $o(1)$ par un $O(1)$.

La dérivation va en revanche poser problème en 0.

L'application a un développement d'ordre 3, sa dérivée n'en a pas.

◦10◦

♠ 1- On dit que f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ est logarithmiquement convexe si $x \mapsto \ln(f(x))$ est convexe. Montrez que toute application logarithmiquement convexe est convexe. Donnez une application convexe qui ne soit pas logarithmiquement convexe.

2- Montrez que toute puissance positive d'une application logarithmiquement convexe l'est aussi.

3- Montrez que si f est logarithmiquement convexe, alors on a $\sqrt{f(x) \cdot f(y)} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ pour tout couple (x, y) .

4- Soit f continue. On suppose $\sqrt{f(x) \cdot f(y)} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ pour tout couple (x, y) . Montrez qu'on a alors $\ln(f((1-t)a + tb)) \leq (1-t) \cdot \ln(f(a)) + t \cdot \ln(f(b))$ pour tout couple (a, b) et tout t de la forme $k/2^n$ avec n entier naturel et k entier de 0 à 2^n . Déduez $\ln(f((1-t)a + tb)) \leq (1-t) \cdot \ln(f(a)) + t \cdot \ln(f(b))$ pour tout t de $[0, 1]$.

5- Déduez que f est logarithmiquement si et seulement si elle est continue et vérifie pour tout couple (x, y) : $\sqrt{f(x) \cdot f(y)} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

6- Montrez que $x \mapsto \int_0^1 \left(\ln(1/t)\right)^x \cdot dt$ (notée g) est logarithmiquement convexe sur $[0, +\infty[$. Calculez par récurrence $g(n)$ pour tout entier naturel n .

7- Montrez que la somme de deux applications logarithmiquement convexes l'est encore.

♠ 1- On dit que f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ est logarithmiquement convexe si $x \mapsto \ln(f(x))$ est convexe. Montrez que toute application logarithmiquement convexe est convexe. Donnez une application convexe qui ne soit pas logarithmiquement convexe.

La notion de convexité logarithmique est une notion plus forte que la convexité, plus exigeante.

Et utile.

C'est elle qui nous permettrait de dire « on connaît la factorielle pour des abscisses entières, peut on la définir pour des abscisses réelles ».

Évidemment, on peut le faire, par exemple affine par morceaux, en reliant les points (0,1), (1,1), (2,2), (3, 6), (4, 24) et ainsi e suite, les uns après les autres. mais il y a des points anguleux c'est moche. Alors on veut une courbe plutôt lisse passant par tous nos points.

Et l'exigence sera « convexe » et même « logarithmiquement convexe ».

Et sous cette exigence, il vient qu'il n'y a qu'une fonction qui étende la factorielle à tout $\mathbb{R}^+$ et c'est forcément celle en $x \mapsto \int_0^1 \left(\ln(1/t)\right)^x \cdot dt$.

L'idée rapide : si $\ln(f)$ est convexe, alors en composant par l'exponentielle (convexe croissante), alors f est convexe.

Proprement, on se donne x, y et t entre 0 et 1.

On écrit l'hypothèse de convexité de $\ln \circ f$ (vraie notation, à la place de $\ln(f)$ qui mélange les étages) :

$$\ln(f((1-t)x + ty)) \leq (1-t) \cdot \ln(f(x)) + t \cdot \ln(f(y))$$

on passe à l'exponentielle (croissant) : $f((1-t)x + ty) \leq e^{(1-t) \cdot \ln(f(x)) + t \cdot \ln(f(y))}$

On exploite la convexité de l'exponentielle : $f((1-t)x + ty) \leq e^{(1-t) \cdot \ln(f(x)) + t \cdot \ln(f(y))} \leq (1-t) \cdot e^{\ln(f(x))} + t \cdot e^{\ln(f(y))}$ et c'est fini.

On a envie de dire que $x \mapsto x$ est convexe alors qu'elle n'est pas logarithmiquement convexe ($x \mapsto \ln(x)$ n'est pas convexe). Mais on la veut de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$.

On veut la forcer à être positive : $x \mapsto x^2$.

Et même strictement positive : $x \mapsto x^2 + 1$. Elle est convexe.

Et son logarithme est $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ qui n'est pas convexe.

sa dérivée seconde est en effet $x \mapsto \frac{2 \cdot (1 - x^4)}{(1 + x^2)^2}$ dont le signe change.

Remarque : Un argument erroné trop souvent utilisé : l'application g n'est pas convexe, car elle est concave.

Ce n'est pourtant pas contradictoire... On peut être les deux à la fois.

Le vrai argument serait g n'est pas convexe car concave et non affine.

Conseil pour ne pas s'embrouiller dans ce type d'exercice : donnez un nom à $x \mapsto \ln(f(x))$, histoire de bien savoir ce que vous devez démontrer :

par exemple écrivez déjà $g\left(\frac{3x+y}{4}\right) \leq \frac{3g(x) + g(y)}{4}$ et seulement ensuite $\ln\left(f\left(\frac{3x+y}{4}\right)\right) \leq \frac{3 \cdot \ln(f(x)) + \ln(f(y))}{4}$.

En mathématiques, il n'est vraiment pas inutile de définir les objets en leur donnant des noms avant d'écrire des formules trop compliquées.

2- Montrez que toute puissance positive d'une application logarithmiquement convexe l'est aussi.

Si f associe $\ln(f(x))$ est convexe, alors pour tout exposant α strictement positif, $x \mapsto \ln((f(x))^\alpha)$ est convexe (multiplie positif d'une application convexe).

On notera qu'il faut vérifier que f^α existe bien (oui, $f^{1,73}$ c'est quoi ?). En effet, f est positive (on rappelle que $(f(x))^{1,73}$ c'est $e^{1,73 \times \ln(f(x))}$).

J'en profite pour citer une autre stabilité : le produit de deux applications logarithmiquement convexes est logarithmiquement convexe. En fait, c'est cadeau.

3- Montrez que si f est logarithmiquement convexe, alors on a $\sqrt{f(x) \cdot f(y)} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ pour tout couple (x, y) .

On écrit la petite inégalité de convexité et même le cas particulier $t = \frac{1}{2}$.

On a donc $\ln\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \leq \frac{\ln(f(x)) + \ln(f(y))}{2}$.

On passe à l'exponentielle (croissante) : $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq e^{\frac{\ln(f(x)) + \ln(f(y))}{2}} = \sqrt{e^{\ln(f(x)) + \ln(f(y))}} = \sqrt{f(x) \cdot f(y)}$.

Pour avoir les points aux concours : ne vous contentez pas d'écrire des formules, citez les argument « on passe à l'exponentielle ».

Et citez les en entier « on passe à l'exponentielle (croissante) ».

4- Soit f continue On suppose $\sqrt{f(x) \cdot f(y)} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ pour tout couple (x, y) . Montrez qu'on a alors $\ln(f((1-t)a + tb)) \leq (1-t) \cdot \ln(f(a)) + t \cdot \ln(f(b))$ pour tout couple (a, b) et tout t de la forme $k/2^n$ avec n entier naturel et k entier de 0 à 2^n . Déduisez $\ln(f((1-t)a + tb)) \leq (1-t) \cdot \ln(f(a)) + t \cdot \ln(f(b))$ pour tout t de $[0, 1]$.

Un lemme qui va passer de « c'est vrai pour le milieu,
donc pour le milieu du milieu et ainsi de suite
à c'est vrai pour plein de monde
puis à c'est vrai pour tout.

Je vous donne le début : $\sqrt{f(x) \cdot f(y)} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ et $\sqrt{f\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot f(y)} \geq f\left(\frac{x+3y}{4}\right)$ et aussi $\sqrt{f(x) \cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)} \geq f\left(\frac{3x+y}{4}\right)$.

On assemble :

$$\sqrt[4]{f(x)^3 \cdot f(y)} \geq f\left(\frac{3x+y}{4}\right)$$

et

$$\sqrt[4]{f(x) \cdot f(y)^3} \geq f\left(\frac{x+3y}{4}\right)$$

et toujours

$$\sqrt[4]{f(x)^2 \cdot f(y)^2} \geq f\left(\frac{2x+2y}{4}\right)$$

Si on assemble ceci avec les informations du type $\sqrt{f(a) \cdot f(b)} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ en des points convenables

(comme $\sqrt{f\left(\frac{3a+b}{4}\right) \cdot f\left(\frac{2a+2b}{4}\right)} \geq f\left(\frac{5a+3b}{8}\right)$),

on arrive à des choses comme

$$\sqrt[8]{f(a)^5 \cdot f(b)^3} \geq f\left(\frac{5a+3b}{8}\right)$$

Par récurrence sur n on montre des choses comme « pour tout k de 0 à 2^n :

$$\sqrt[2^n]{f(a)^k \cdot f(b)^{2^n-k}} \geq f\left(\frac{k \cdot a + (2^n - k) \cdot b}{2^n}\right)$$

Quitte à passer au logarithme, on a obtenu des

$$\ln(f((1-t)a + tb)) \leq (1-t) \cdot \ln(f(a)) + t \cdot \ln(f(b))$$

pour des t de la forme $\frac{k}{2^n}$ avec n quelconque et k entre 0 et 2^n .

Et si on se donne un t quelconque ? On l'écrit comme une suite de $\frac{k_n}{2^n}$ (explicitables avec une partie entière de $2^n \cdot t$ si vous y tenez).

Pour chaque n , on a donc

$$\ln(f((1-t_n).a + t_n.b)) \leq (1-t_n). \ln(f(a)) + t_n. \ln(f(b))$$

En faisant tendre n vers l'infini, avec la continuité de f on obtient

$$\ln(f((1-t).a + t.b)) \leq (1-t). \ln(f(a)) + t. \ln(f(b))$$

En gros, on est passé de $t = \frac{1}{2}$ à tous les t d'écriture binaire finie, puis à tous les t par densité.

5- Dédisez que f est logarithmiquement si et seulement si elle est continue et vérifie pour tout couple (x, y) :
 $\sqrt{f(x).f(y)} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

Le 3 a montré logarithmiquement convexe implique $\sqrt{f(x).f(y)} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ pour tout couple.

Ensuite, si elle est continue et vérifie la propriété pour tout couple, alors le 4 nous dit qu'elle vérifie $\ln(f((1-t).a + t.b)) \leq (1-t). \ln(f(a)) + t. \ln(f(b))$ pour tout couple et tout t de $[0, 1]$.

C'est la définition même de f est logarithmiquement convexe.

6- Montrez que $x \mapsto \int_0^1 (\ln(1/t))^x . dt$ (notée g) est logarithmiquement convexe sur $[0, +\infty[$. Calculez par récurrence $g(n)$ pour tout entier naturel n .

C'est là l'histoire de « la factorielle est logarithmiquement convexe ».

Déjà, l'existence de cette fonction pose un peu problème quand même, à cause de ce logarithme qu'on va intégrer près de 0.

Mais on va mettre ça de côté pour l'instant. En constatant que $\ln(1/t)$ est positif et peut être élevé à une puissance réelle sans problème.

On doit prouver la convexité logarithmique. On se donne x et y il faut établir

$$\int_0^1 (\ln(1/u))^{(1-t).x+t.y} . du \leq \left(\int_0^1 (\ln(1/u))^x . du \right)^{(1-t)} . \left(\int_0^1 (\ln(1/u))^y . du \right)^t$$

pour tout t entre 0 et 1.

C'est assez indigeste.

Et si on se contentait de la version « $t = \frac{1}{2}$ » ?

On doit juste établir

$$\left(\int_0^1 \left(\ln \left(\frac{1}{u} \right) \right)^{\frac{x+y}{2}} . du \right) \leq \sqrt{\left(\int_0^1 \left(\ln \left(\frac{1}{u} \right) \right)^x . du \right) . \left(\int_0^1 \left(\ln \left(\frac{1}{u} \right) \right)^y . du \right)}$$

Ça ne vous inspire pas ? Et si je vous disais

$$\left(\int_0^1 \left(\ln \left(\frac{1}{u} \right) \right)^{\frac{x+y}{2}} . du \right)^2 \leq \left(\int_0^1 \left(\ln \left(\frac{1}{u} \right) \right)^x . du \right) . \left(\int_0^1 \left(\ln \left(\frac{1}{u} \right) \right)^y . du \right)$$

Et si je vous rappelais

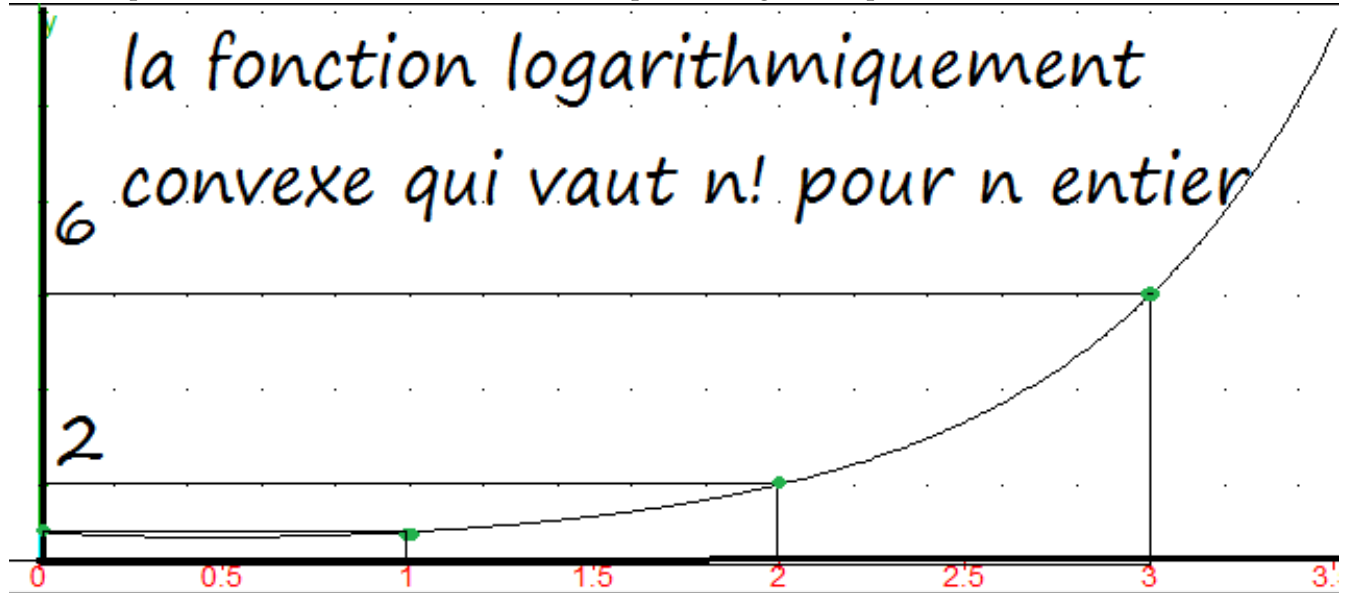
$$\int_0^1 (f(u).g(u)).dt)^2 \leq \int_0^1 (f(u))^2 . du . \int_0^1 (g(u))^2 . du$$

Oui, Cauchy-Schwarz...

En posant $\Gamma = x \mapsto \int_0^1 \left(\ln \left(\frac{1}{t} \right) \right)^x . dt$, on a bien

$$\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{\Gamma(x).\Gamma(y)}$$

On se dit que Γ doit bien être continue. Et on a alors que Γ est logarithmiquement convexe.



On calcule ensuite $\Gamma(n)$ pour n entier, et au départ pas trop gros.

$$\Gamma(0) = \int_0^1 1 \cdot dt = 1 \text{ (en se disant que } a^0 \text{ donne bien toujours 1).}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^1 \ln(1/t) \cdot dt = \left[t \cdot \ln\left(\frac{1}{t}\right) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t}{t} \cdot dt = 1. \text{ Oui, on a intégré par parties.}$$

Je vous le fais même pour n :

$$\Gamma(n) = \int_0^1 \left(\ln(1/t) \right)^n \cdot dt = \left[t \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{t}\right) \right)^n \right]_0^1 + n \cdot \int_0^1 \frac{\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right) \right)^{n-1}}{t} \cdot t \cdot dt$$

Le terme en $t \cdot (\ln(t))^n$ tend vers 0 quand t tend vers 0 (croissances comparées, posez $t = \frac{1}{X}$ si nécessaire, mais il est temps de savoir qu'en 0, t écrase le logarithme et ses puissances).

Il reste $\Gamma(n) = n \cdot \Gamma(n-1)$ et $\Gamma(0) = 1$.

Par récurrence immédiate : $\boxed{\Gamma(n) = n!}$

7- Montrez que la somme de deux applications logarithmiquement convexes l'est encore.

On l'avait pour le produit. c'est moins évident pour la somme.

On prend f et g logarithmiquement convexes. Il s'agit de prouver que $f + g$ l'est aussi

La formule générale avec des logarithmes, des t et des $f(x) + g(x)$ est à peu près impossible à gérer.

Si on se contentait de prouver

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{(f(x) + g(x)) \cdot (f(y) + g(y))}$$

Sachant qu'on a $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{f(x) \cdot f(y)}$ et $g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{g(x) \cdot g(y)}$ par convexité logarithmique de f et g .

On somme

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{f(x) \cdot f(y)} + \sqrt{g(x) \cdot g(y)}$$

Or, $\sqrt{f(x) \cdot f(y)} + \sqrt{g(x) \cdot g(y)} \leq \sqrt{(f(x) + g(x)) \cdot (f(y) + g(y))}$ (si si, ça doit marcher, sinon comment on y arriverait).

On met bout à bout :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{f(x) \cdot f(y)} + \sqrt{g(x) \cdot g(y)} \leq \sqrt{(f(x) + g(x)) \cdot (f(y) + g(y))}$$

Il faut encore dire que $f + g$ est continue comme somme d'applications continues.

Et on obtient que $f + g$ est logarithmiquement convexe.

Ah oui, je vous ai un peu arnaqué pour $\sqrt{f(x) \cdot f(y)} + \sqrt{g(x) \cdot g(y)} \leq \sqrt{(f(x) + g(x)) \cdot (f(y) + g(y))}$.

J'ai dit que c'était évident.

Disons plutôt que c'est de la forme $\sqrt{a \cdot b} + \sqrt{c \cdot d} \leq \sqrt{(a + c) \cdot (b + d)}$.

Et il suffit de comparer les carrés : $a \cdot b + c \cdot d + 2 \cdot \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$ face à $a \cdot b + a \cdot d + b \cdot c + c \cdot d$.

Il suffit de dire $\sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d} \leq \frac{a \cdot d + b \cdot c}{2}$. Et ça, on connaît c'est $\sqrt{\alpha \cdot \beta} \leq \frac{\alpha + \beta}{2}$. Les moyennes, encore.

Maintenant, on a bien tous les éléments.

L'espace des applications logarithmiquement convexes est stable par addition et multiplication.

ce que n'était pas l'espace des applications convexes...

◦11◦

Montrez que si f est convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors pour tout a , $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = a\}$ est de cardinal 0, 1, 2 ou infini.

Que peut signifier la question « $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = a\}$ est de cardinal 0, 1, 2 ou infini » ?

Qu'une valeur a sur l'axe des ordonnées peut :

• ne pas être atteinte	-1 pour exp
• être atteinte une fois	1 pour exp
• être atteinte deux fois	3 pour ch
• être atteinte une infinité de fois	fonction convexe constante sur un segment

Ce que dit alors cette propriété : si une fonction convexe atteint la même valeur trois fois, alors elle l'atteint une infinité de fois.

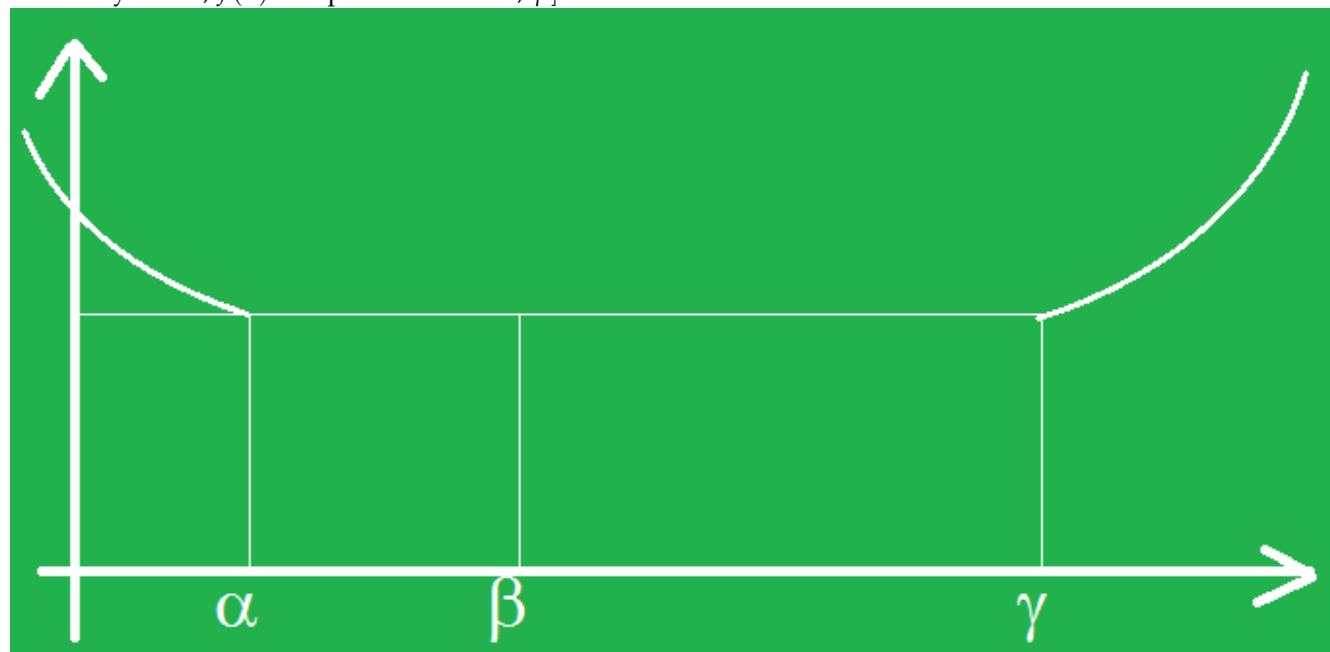
Et c'est vrai. Si la fonction convexe f atteint la même valeur a en α , β et γ , alors elle est constante sur $[\alpha, \gamma]$.

On l'obtient par l'inégalité des trois cordes pour tout réel x entre α et β (puis pour tout réel x entre β et γ).

Pour tout x entre α et β , on a $f(x) \leq a$ (sous la corde entre les deux pinces à linge $[\alpha, \beta]$)

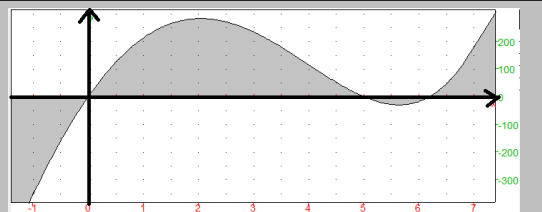
Pour tout x entre α et β , on a $f(x) \geq a$ (au dessus de la corde hors du segment $[\beta, \gamma]$)

Par antisymétrie, $f(x) = a$ pour tout x de $[\alpha, \beta]$.



◦12◦

f est un polynôme unitaire de degré 4 convexe exactement sur $[-3, 4]$. Son développement limité en 2 est $f(2+h) = a + 5 \cdot h + c \cdot h^2 + d \cdot h^3 + o(h^3)$ et son développement limité en 5 est $f(5+h) = 1 + \beta \cdot h + \gamma \cdot h^2 + \delta \cdot h^3 + o(h^3)$. Trouvez a , c , d , β , γ et δ .



On pose a priori le polynôme $X^4 + B \cdot X^3 + C \cdot X^2 + D \cdot X + E$ (on a dit « unitaire », son coefficient dominant vaut bien 1).

Sa dérivée seconde est $12 \cdot X^2 + 6 \cdot B \cdot X + 2 \cdot C$.

Elle doit s'annuler et changer de signe en -3 et en 4 . On a donc $-\frac{6.B}{12} = 1$ (somme des racines) et $\frac{2.C}{12} = -12$ (produit des racines).

$$12.X^2 + 6.B.X + 2.C = 12.(X - 4).(X + 3).$$

$$\text{A ce stade : } X^4 - 2.X^3 - 72.X^2 + D.X + E.$$

Mais qui sont ensuite les coefficients de son développement limité en 2 ? La valeur en 2 : $a = 16 - 2.8 - 72.4 + D.2 + E$

$$\text{La dérivée en } 2 : 5 = 4.2^3 - 6.2^2 - 144.2 + D$$

$$\text{On trouve } d : d = 285$$

$$\text{On recommence en } 5 : 1 = 625 - 2.125 - 72.25 + 285.5 + e \text{ et } e \text{ vaut } 1.$$

Finalement, le polynôme est $X^4 - 2.X^3 - 72.X^2 + 285.X + 1$

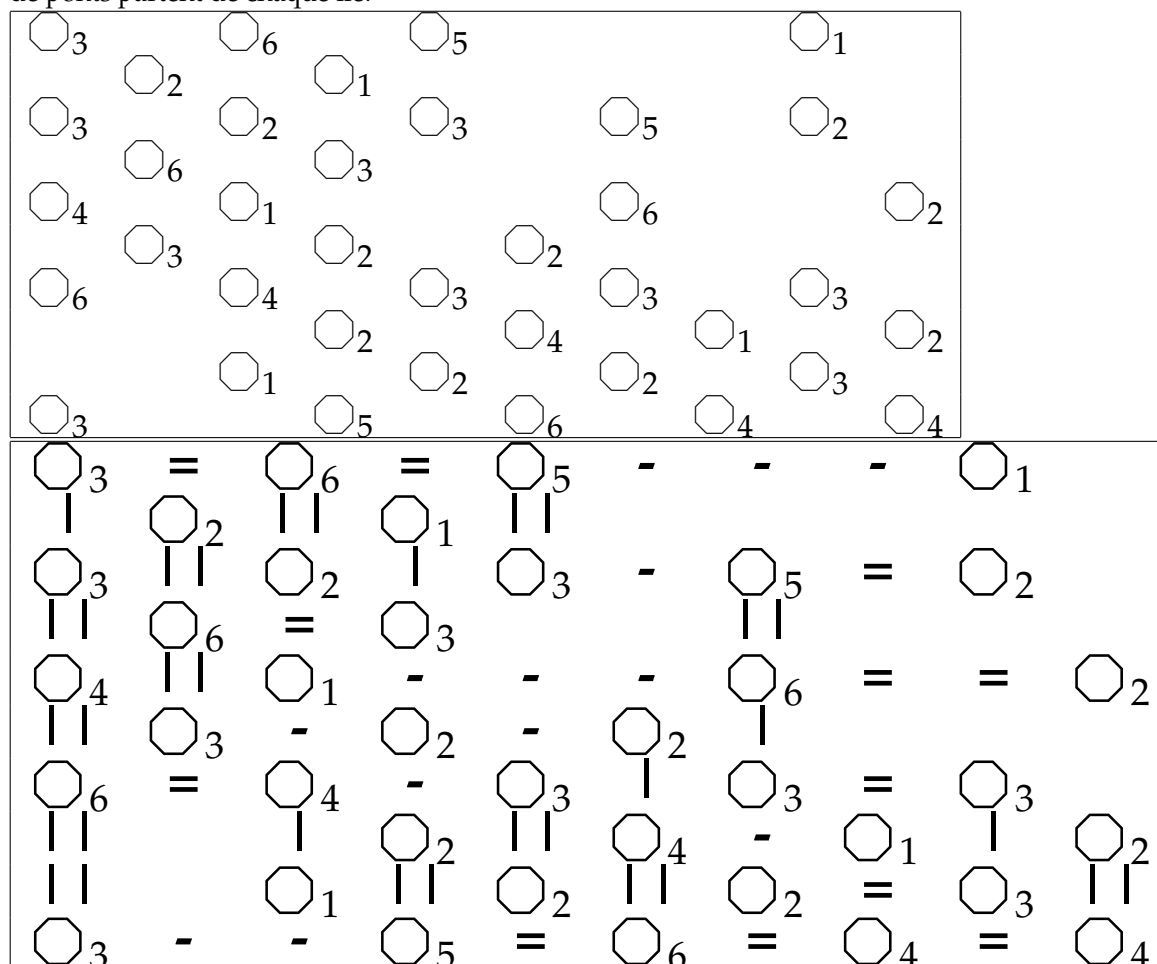
On redonne les développements limités demandés en calculant les dérivées :

$$\begin{aligned} f(2+h) &= 283 + 5.h - 60.h^2 + 6.h^3 + h^4 + o(h^4) \\ f(5+h) &= 1 - 85.h + 48.h^2 + 18.h^3 + h^4 + o(h^4) \end{aligned}$$

Mais en fait les deux $o(h^4)$ sont nuls, car f est un polynôme. Et les termes en h^4 sont connus. Le polynôme est de degré 4, unitaire.

13

Rappel des règles : Les îles sont reliées les unes aux autres par des traits « horizontaux » ou « verticaux » (pas de diagonale, pas plus de deux ponts entre deux îles). Les traits ne peuvent pas se croiser. On vous a indiqué combien de ponts partent de chaque île.



◦14◦

Montrez que toute fonction convexe vérifie $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ pour tout couple (a, b) .

On prend f qui vérifie $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ pour tout couple (a, b) et qui est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On se donne x et y . Montrez par récurrence sur n :

$$\forall k \in [0, 2^n] \cap \mathbb{N}, f\left(\frac{(2^n - k) \cdot x + k \cdot y}{2^n}\right) \leq \frac{(2^n - k) \cdot f(x) + k \cdot f(y)}{2^n}.$$

Soit t un réel de $[0, 1]$. Pour tout n , on pose $t_n = \frac{[2^n \cdot t]}{2^n}$.

$$\text{Montrez } f((1 - t_n) \cdot x + t_n \cdot y) \leq (1 - t_n) \cdot f(x) + t_n \cdot f(y).$$

$$\text{Dédisez } f((1 - t) \cdot x + t \cdot y) \leq (1 - t) \cdot f(x) + t \cdot f(y).$$

◦15◦

Les A_k sont des événements mutuellement indépendants. Montrez que la probabilité qu'aucun ne soit réalisé est majorée par $\exp\left(-\sum_{k=1}^n P(A_k)\right)$.

On utilisera une inégalité de convexité sur l'exponentielle.

Avec la notation « barre » pour le complémentaire², on nous demande d'estimer $P(\cap_{k=1}^n \overline{A_k})$.

Par indépendance des A_k entre eux (et donc de leurs complémentaires), c'est $\prod_{k=1}^n P(\overline{A_k})$.

On estime donc le produit de termes positifs $\prod_{k=1}^n (1 - p_k)$.

On majore $1 - p_k$ par e^{-p_k} (inégalité de convexité $1 - x \leq e^{-x}$ pour x réel). Tout est positif (j'insiste) et on multiplie membre à membre. Il reste à mettre en boucle la propriété de morphisme de l'exponentielle $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ pour arriver à la majoration par $\exp\left(-\sum_k p_k\right)$ (qui est utile car le majorant est plus petit que 1).

◦16◦

♥ Montrez, pour x et a positifs : $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{a} - \frac{x-a}{a^2}$ (cas d'égalité ?).

$$\text{Quoi de plus simple que de calculer la différence : } \frac{1}{x} - \frac{1}{a} + \frac{x-a}{a^2} = \frac{a^2 - x \cdot a + (x-a) \cdot x}{x \cdot a^2} = \frac{(x-a)^2}{x \cdot a^2}$$

Mais je le trouve plus joli par convexité.

L'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour dérivée seconde $x \mapsto \frac{2}{x^3}$, positive.

La formule de Taylor avec reste intégrale entre a et x donne

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + (x-a) \cdot \frac{-1}{a^2} + \frac{(x-a)^2}{1} \cdot \int_0^1 (1-t) \cdot \frac{2}{(a+t \cdot (x-a))^3} \cdot dt$$

Le terme $\frac{(x-a)^2}{1} \cdot \int_0^1 (1-t) \cdot \frac{2}{(a+t \cdot (x-a))^3} \cdot dt$ est positif, c'est ce qu'on voulait.

◦17◦

$\clubsuit^a$	A	B	C	D
	[0, 0, 4, 4, 4, 4]	[3, 3, 3, 3, 3, 3]	[2, 2, 2, 2, 6, 6]	[1, 1, 1, 5, 5, 5]

Ce sont des dés équilibrés à six faces (appelés dés de Bradley Effron).

Montrez que la probabilité que A batte B est 2/3.	Montrez que la probabilité que B batte C est 2/3.
Montrez que la probabilité que C batte D est 2/3.	Quelle est la probabilité que D batte A ?

a. pas pour la difficulté, mais pour le résultat obtenu à la fin

On fait se battre A contre B. A n'a que deux issues possibles, B n'en a qu'une : $P(A=0) = \frac{1}{3}$ $P(A=4) = \frac{2}{3}$ $P(B=3) =$

	A = 0	A = 4
B = 3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

	A = 0	A = 4
B = 3		$\frac{2}{3}$

On ne garde que le cas où A bat B :

2. pas de risque de confusion avec la barre de l'adhérence en topologie à ce stade

On commence à remplir

	A	B	C	D
A		$\frac{1}{3}$		
B	$\frac{2}{3}$			
C				
D				

pour dire que A bat B avec probabilité $\frac{2}{3}$ (et que B ne bat A qu'avec probabilité $\frac{1}{3}$).

En revanche, B bat C deux fois sur 3 (B a toujours 3, et C ne fait mieux qu'une fois sur trois).

	A	B	C	D
A		$\frac{1}{3}$		
B	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$	
C		$\frac{2}{3}$		
D				

Plus intéressant : C contre D :

	$C = 2$ ($p=2/3$)	$C = 6$ ($p=1/3$)
$D = 1$ ($p=1/2$)	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$
$D = 5$ ($p=1/2$)	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

3

Les variables aléatoires des dés sont indépendantes, donc les probabilités des cases sont des produits.

C gagne sur D :

	$C = 2$ ($p=2/3$)	$C = 6$ ($p=1/3$)
$D = 1$ ($p=1/2$)	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$
$D = 5$ ($p=1/2$)		$\frac{1}{6}$

Total : $P(C > D) = \frac{2}{3}$ (et par soustraction $P(D > C) = \frac{1}{3}$).

Bilan provisoire :

	A	B	C	D
A		$\frac{1}{3}$		
B	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$	
C		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$
D			$\frac{2}{3}$	

Jusque là, $A > B$ | $B > C$ | $C > D$ à chaque fois avec probabilité $\frac{2}{3}$.

Mais la surprise va venir de D contre A :

	$D = 1$ ($p=1/2$)	$D = 5$ ($p=1/2$)
$A = 0$ ($p=1/3$)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$A = 4$ ($p=2/3$)	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$

A gagne sur D :

	$D = 1$ ($p=1/2$)	$D = 5$ ($p=1/2$)
$A = 0$ ($p=1/3$)		
$A = 4$ ($p=2/3$)	$\frac{2}{6}$	

dans un cas sur trois.

C'est surprenant $A > B$ | $B > C$ | $C > D$ | $D > A$ à chaque fois avec probabilité $\frac{2}{3}$

A est meilleur que B

B est meilleur que C

C est meilleur que D

D est meilleur que A .

La relation « être meilleur que au moins une fois sur trois » n'est pas transitive.

3. j'ai laissé des sixièmes partout pour bien vérifier que la somme des probabilités vaut 1

Jouons vraiment : Les dés sont posés sur la table. Je vous laisse en choisir un, et j'en prend un à mon tour (je choisis bien évidemment^a).
 On lance plusieurs fois les dés.
 Je vous bats deux fois sur trois. Pas de bol pour vous.

Vous en avez marre, je vous dis « on change de dés ? ».
 Vous prenez le mien, et moi évidemment, je prend le suivant dans la liste.
 Et à nouveau, je vous bats deux fois sur trois.

Quel que soit le dé que vous choisissiez, je prendrai le bon pour vous battre deux fois sur trois.
 Le fait de vous laisser le choix est en fait un désavantage pour vous... Sympathique, non ?

a. si vous avez pris B et que je prends B aussi, ça va être assez peu intéressant comme jeu

Il existe d'autres modèles assez similaires à ces dés, avec d'autres faces et d'autres probabilités, mais toujours « non transitifs ».

◦18◦

Montrez : $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ (indication : non, pas de quantité conjuguées mais $x \mapsto \sqrt[x]{x}$).

Définissons comme suggéré l'application $x \mapsto \sqrt[x]{x}$. Enfin, non, écrivons la proprement $x \mapsto x^{1/x}$ et même $x \mapsto e^{\ln(x)/x}$.

Elle est C^1 sur $]0, +\infty[$ (et se prolonge même en 0 par la valeur 0).

On la dérive, afin de prouver qu'on avait raison de la qualifier de C^1 : $x \mapsto \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \cdot e^{\ln(x)/x}$.

On applique le théorème des accroissements finis entre n et $n+1$ (tout est C^1) :

$$\exists c_n \in]n, n+1[, \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = (n+1 - n) \cdot \frac{1 - \ln(c_n)}{(c_n)^2} \cdot e^{\ln(c_n)/c_n}$$

Ira-t-on jusqu'à dire qu'on a obtenu ce qu'on voulait ? Pas vraiment.

Mais comme n tend vers l'infini, c_n compris entre n et $n+1$ est équivalent à n .

On a donc par passage au logarithme (légitimé de multiples fois, même si ce n'est pas évident) : $\ln(c_n) \sim_{n \rightarrow +\infty}$

$\ln(n)$, et plus simplement $\frac{1}{(c_n)^2} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}$. Comme le logarithme tend vers l'infini, $\frac{\ln(c_n) - 1}{(c_n)^2} \sim_{n \rightarrow +\infty}$

$$\frac{\ln(c_n)}{(c_n)^2} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}.$$

Il reste le problème de $e^{\ln(c_n)/c_n}$. Mais par croissances comparées $\frac{\ln(c_n)}{c_n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$. Par continuité de l'exponentielle en 0 : $e^{\ln(c_n)/c_n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1$ et même $e^{\ln(c_n)/c_n} \sim_{n \rightarrow +\infty} 1$.

Il n'y a plus qu'à multiplier les équivalents, et on a la formule attendue.

Un exercice sans grande difficulté, mais dans lequel sera notée la rigueur de rédaction (on ne passe pas à la limite avant d'avoir prouvé qu'il y en a une, on ne confond pas limites et équivalents, on justifie $\ln(n) \sim \ln(c_n)$...).

J'irai jusqu'à dire que sur ces exercices, celles et ceux qui ont la fibre plus physicienne que mathématique rattrapent leur retard.

◦19◦

Un élève me dit « monsieur, si le développement limité de f en 0 est nul à tout ordre, c'est que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n et f doit être la fonction nulle ».

Je lui réponds : $t \mapsto e^{-\frac{1}{t^2}}$ et lui dis « prolonge la en 0 et donne moi son développement limité d'ordre $2n$ ».
 Il n'a pas le temps de faire les calculs, faites les pour lui.

Cette fonction se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0 (dit rapidement : exponentielle de moins l'infini).

Elle n'est pas facile à dériver. Et ses dérivées successives sont des horreurs... non définies en 0.

Mais son développement limité en 0 est toujours facile à calculer : $f(x) = 0 + 0.x + \dots + 0.x^n + o(x^n)_{x \rightarrow 0}$.

Le développement est toujours nul. Quel que soit l'ordre choisi.

Mais on n'a pas $f(x) = 0 + 0.x + \dots + 0.x^n$.

On a $f(x) = 0 + 0.x + \dots + 0.x^n + o(x^n)_{x \rightarrow 0}$. Et à chaque ordre, $f(x)$ va se cacher dans le $o(x^n)$.

Ah, mais au fait, je dois prouver $f(x) = 0 + 0.x + \dots + 0.x^{2n} + o(x^{2n})_{x \rightarrow 0}$.

Oui, je prouve donc $f(x) = o(x^{2n})_{x \rightarrow 0}$, c'est à dire $\frac{f(x)}{x^{2n}} \rightarrow_{x \rightarrow 0} 0$.

En effet, la limite de $\frac{e^{-1/x^2}}{x^{2n}}$ quand x tend vers 0 est celle de $X^n \cdot e^{-X}$ quand X tend vers $+\infty$. Et c'est 0.

Cette fonction fout en l'air le rêve de « si je connais toutes les dérivées en 0, je connais la fonction partout », qui est pourtant un joli rêve.

Mais c'est cette fonction qui le fait exprès.

L'an prochain, vous croiserez les fonctions développables en série entière (la grosse majorité), qui échappent à ce problème.

Elles vérifieront $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$.

◦20◦

Montrez pour tout a de $] -1, 1[$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1-a \cdot \cos(\theta)} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right) = \frac{\text{Arcsin}(a)}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{1-a^2}} \quad (\text{changement de variable classique et vous pourrez poser aussi } a = \cos(\alpha)).$$

L'existence est assurée, $a \cdot \cos(\theta)$ reste entre -1 et 1 , le dénominateur ne s'annule pas, l'application est continue.

On change de variable avec $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (C^1 difféomorphisme).

L'intégrale devient

$$\int_0^1 \frac{1}{1-a \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2 \cdot dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2-a+a \cdot t^2} \cdot dt = \frac{1}{1-a} \cdot \int_0^1 \frac{2}{1+\left(\frac{1+a}{1-a}\right) \cdot t^2} \cdot dt$$

tiens, on va le jouer changement de variable encore : $u = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \cdot t$ soit $t = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \cdot u$ et donc $dt = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \cdot du$.

L'intégrale devient

$$\frac{1}{1-a} \cdot \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}} \int_0^{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}} \frac{2}{1+u^2} \cdot du$$

On intègre en arctangente :

$$\frac{2}{1-a} \cdot \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}} \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right)$$

On simplifie des racines et on a la première.

Pour la seconde, on pose un instant $a = \cos(\alpha)$ (avec α entre 0 et π). En bref, $\alpha = \text{Arccos}(a)$. On a alors

$$\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \cos^2(\alpha/2)}{2 \cdot \sin^2(\alpha/2)}} = \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$$

avec $\frac{\alpha}{2}$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

On reconnaît $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$ avec $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ dans le bon intervalle...

On a donc à présent $\frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$ qui devient $\frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\text{Arccos}(a)}{2}\right)$.

Et après, vous vous souvenez de $\text{Arcsin}(a) + \text{Arccos}(a) = \frac{\pi}{2}$?

Ne me dites pas que vous avez osé oublier... Et tout se termine comme prévu.

◦21◦

Donnez la limite en π de $\frac{\sin(x/2) + \cos(x)}{1 + \sin^2(x) + \cos(x)}$ (posez $x = \pi + h$ et utilisez des développements limités).

Même si l'énoncé semble nous dire que la limite existe, on va juste travailler sur la fonction, en surveillant d'ailleurs que tout existe.

Comme x va tendre vers π (et en π on a bien une forme indéterminée), on va poser $x = \pi + h$ avec h qui va tendre vers 0.

$$\frac{\sin(x/2) + \cos(x)}{1 + \sin^2(x) + \cos(x)} = \frac{\cos(h/2) - \cos(h)}{1 + \sin^2(h) - \cos(h)}$$

S'il vous plaît, ne perdez pas de temps à rédiger $\cos(\pi + h) = -\cos(h)$.

Même si pour vous (à cause d'une pratique sclérosée dans le secondaire) ce n'est pas évident, pour le correcteur, c'est du cours.

Si vous passez par $\cos(\pi + h) = \cos(\pi) \cdot \cos(h) - \sin(\pi) \cdot \sin(h)$ écrit noir sur blanc sur votre copie, vous dites au correcteur « je suis encore en première, ne m'en veuillez pas, mais je veux quand même entrer à Centrale ».

Et d'ailleurs, si vous passez par de telles formules au lieu de passer par un dessin sur le cercle trigonométrique, vous lui répétez « en plus, je n'ai aucun sens pratique, mais ne m'en veuillez pas, je veux quand même entrer à Télécom ».

On développe et on garde le premier terme non nul : $\cos\left(\frac{h}{2}\right) = 1 - \frac{h^2}{8} + o(h^2)$ donc $\cos\left(\frac{h}{2}\right) - \cos(h) \sim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2}{8}$ (là, l'équivalent exprime des choses correctes, mais si vous avez écrit $\cos(h) \sim 1 - \frac{h^2}{2}$, retournez moisir en amphi 21).

$$1 + \sin^2(h) - \cos(h) = 1 - \cos(h) + \frac{1 - \cos(2h)}{2} = \frac{h^2}{2} + o(h^2) + h^2 + o(h^2) \sim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2}{2}$$

Le quotient est équivalent à un réel, il tend vers ce réel : $\frac{\sin(x/2) + \cos(x)}{1 + \sin^2(x) + \cos(x)} \xrightarrow{h \rightarrow \pi} \frac{1}{4}$ ou $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x/2) + \cos(x)}{1 + \sin^2(x) + \cos(x)} = \frac{1}{4}$

◦22◦

D'accord, la division suivant les puissances croissantes est interdite aux concours. Mais si on écrivait un script qui prend en entrée deux polynômes Numer et Denom (sous forme de listes de coefficients, dans l'ordre de leurs puissances) plus un entier naturel (ordre auquel on écrit la division) et retourne le quotient.

Exemple :

entrée	[2, 1, 1]	[1, 1, 0, 1]	4
sortie	[2, -1, 2, -4, 5]		

Et si vous êtes fou, gérez des coefficients rationnels et pas flottants et l'affichage de la division.

2	+X	+X ²				1	+X	+X ³			
-(2	+2.X		+2.X ³)			2	-X	+2.X ²	-4.X ³	+5.X ⁴	
	-X	+X ²	-2.X ³								
	-(-X	-X ²		-X ⁴)							
		2.X ²	-2.X ³	+X ⁴							
		-(2.X ²	+2.X ³		+o(X ⁴))						
			-4.X ³	+X ⁴	+o(X ⁴))						
			-(-4.X ³	-4.X ⁴	+o(X ⁴))						
				5.X ⁴	+o(X ⁴))						
				-(5.X ⁴	+o(X ⁴))						
					o(X ⁴))						

#division suivant les puissances croissantes

```
def Divi(Numer, Den, Ordre): #list, list, int -> list
...LenNum, LenDen = len(Numer), len(Den)
...while len(Numer) < Ordre+1: #on ajuste la taille du numerateur
...    Numer.append(0)
...Quotient = [0]*(Ordre+1) #a priori rien pour l'instant dans le quotient
...Degre = 0 #le degré va augmenter
...while Degre < Ordre+1: #tant qu'on n'a pas atteint l'ordre
...    Coeff = Numer[Degre]/Den[0] #calcul du coefficient dominant
...    for k in range(min(LenDen, Ordre-Degre+1)): #soustraction
...        Numer[k+Degre] -= Coeff*Den[k]
...    Quotient[Degre] = Coeff
...    Degre += 1
...return Quotient #retour
```

◦23◦

Calculez $\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right).dt$ (pas de problème, elle existe).

Par parties pour éliminer le logarithme.

1	$\leftrightarrow$	t
$\ln\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right)$	$\hookrightarrow$	$\frac{-1}{t+1} - \frac{1}{t+2}$

Pardon, c'est si facile à dériver ? Oui :

$$\ln\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right) = \ln\left(\frac{1}{(t+1).(t+2)}\right) = -\ln((t+1).(t+2)) = -\ln(t+1) - \ln(t+2)$$

On a donc un crochet : $\left[t.\ln\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right)\right]_0^1$ et une intégrale $\int_0^1 \left(\frac{t}{t+1} + \frac{t}{t+2}\right).dt$.

On l'écrit $\int_0^1 \left(\frac{t+1-1}{t+1} + \frac{t+2-2}{t+2}\right).dt = \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{t+1} - \frac{2}{t+2}\right).dt$.

On trouve alors $\left[2.t - \ln(1+t) - 2.\ln(2+t)\right]_0^1$.

Valeur finale : $2 - \ln(27)$. Négatif, mais c'est normal, l'application l'est.

o24o

Vrai ou Faux : « Un entier n est multiple de 6 si la somme de ses chiffres et son dernier chiffre sont multiples de 6 ».

On demande juste somme des chiffres multiple implique multiple de 6.

de 6

et chiffre des unités égal à 0

ou 6

On ne se pose pas la question de la réciproque.

Heureusement car sinon 12 est un parfait contre-exemple.

Passons au sens demandé.

Si la somme des chiffres de n est un multiple de 3, alors cette somme des chiffres est un multiple de 3. Et n est multiple de 3.

Si le chiffre des unités est 0 ou 6, alors n est pair (non réciproque).

Si n est à la fois multiple de 3 et pair, il est multiple de 6.

Donc VRAI.

Variante proposée par une élève :

On écrit notre nombre $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$.

On fait l'hypothèse $a_0 = 0$ [6] et $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = 0$ [6].

On écrit ensuite par définition $N = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \dots + a_1.10 + a_0$.

Or, modulo 6 :

	1	10	100	1000	10^n ($n > 0$)
modulo 6	1	4	4	4	4

(récurrence rapide qui ne commence qu'à 1).

On a donc $N = a_n.4 + a_{n-1}.4 + \dots + a_1.4 + a_0$ [6]

Et même $N = (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0).4 - 3.a_0$ [6].

Or, a_0 et la somme $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ sont multiple de 6, N est multiple de 6.

Et sous cette forme, on perçoit que la réciproque est fausse.

Peut on s'amuser avec des chiffres sans s'en blâmer, des lettres bien venues, des lignes à faire, des colonnes sur lesquelles se brancher... Les gens de Cayenne sont bien mouillés, surtout si ils habitent Laval. On a vu des les trains (de Bâle) pour l'Anjou sans cumin pour l'Anjou. Les vins des maris sont de souples anjou et les minettes goûtent l'anjou du matin. Dans cette histoire de Manche les gens indécis fuient des bougres de Saint-Lô qui provoquent des catas. On entend parfois : "Monsieur le Préfet, votre Manche attire bien des bras !" Mais aussi : "Ces deux Normands font partie des rares désignés."

Cette Borne est trop bonne pour Méluche !

A l'Éducation Nationale, on apprécie l'équipe en place. Il a un tennis prévisible. La prof prend un étudiant en lettres et le fait trimer. Pépé met son gant dès qu'il pleut. La joueuse de timbales attire les bis. Il manquera de recul si on l'en sort. Il manque d'humour dans bien des cas. Vos menus sont à cocher ? Pouront ils , en tant qu'unis, taquiner Mélanchon ?

◦25◦

Donnez une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1 - th(x)}$ ainsi que son domaine de définition.

$x \mapsto \frac{1}{1 - th(x)}$ est défini partout car $th(x)$ reste entre -1 et 1 (strictement).

On change de variable dans $\int_a^b \frac{2 \cdot dx}{1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$ en posant $t = e^x$ et $dx = \frac{dt}{t}$.

On trouve

$$\int_{x=a}^b \frac{dx}{1 - th(x)} = \int_{t=e^a}^{e^b} \frac{(t + \frac{1}{t})}{t + \frac{1}{t} - (t - \frac{1}{t})} \cdot \frac{dt}{t} = \int_{t=e^a}^{e^b} \frac{1}{2} \cdot (t + \frac{1}{t}) \cdot dt = \left[\frac{t^2}{4} - \frac{\ln(t)}{2} \right]_{e^a}^{e^b}$$

Comme on veut une primitive, on revient à la variable naturelle $x : \left(\frac{e^{2x}}{4} - \frac{x}{2} \right)$

On pouvait aussi passer par $\frac{1}{1 - th(x)} = \frac{ch(x)}{ch(x) - sh(x)} = \frac{ch(x)}{e^{-x}} = \frac{e^x + e^{-x}}{2 \cdot e^{-x}}$.

◦26◦

Déterminez le noyau de $f \mapsto f' - f$ de $C^\infty(\mathbb{R})$ dans lui même.
Déterminez le noyau de $P \mapsto P' - P$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui même.

Si on résout $f' - f = 0$, on trouve que f est un multiple de l'exponentielle (et pas de e^x , on est d'accord !).

Le noyau de $f \mapsto f' - f$ est $Vect(\exp)$.

Il est de dimension 1.

Mais avec des polynômes, on ne peut avoir $P' = P$ (degré), sauf avec $P = 0$.

Le noyau est réduit au vecteur nul. Et il est de dimension 0.

◦27◦

Combien y a-t-il d'applications injectives de $\text{range}(n)$ dans $\text{range}(N)$?
Combien y a-t-il d'applications non injectives de $\text{range}(n)$ dans $\text{range}(N)$?

Pour construire une application injective, il suffit de choisir l'image de chaque élément de $\text{range}(n)$. On a N choix pour l'image de 0, puis $N - 1$ choix ensuite pour l'image de 1. Ces choix se multiplient (*arbre des possibles*). On aboutit à $N \cdot (N - 1) \cdot (N - 2) \dots$ avec n termes. En version malpropre $N \cdot (N - 1) \cdot (N - 2) \dots (N - n + 1)$. En version propre

: $\prod_{k=0}^{n-1} (N - k)$ En version compacte : $\frac{N!}{(N - n)!}$ (si N est plus grand que n , 0 sinon⁵).

Pour les application non injectives, il suffit de soustraire : $N^n - N \cdot (N - 1) \cdot (N - 2) \dots (N - n + 1)$ (produit de n termes égaux à N face au produit de n termes qui décroissent).

◦28◦

♥ Montrez que $x \mapsto 2x + |x - 3|$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et explicitez sa réciproque.

x dans $] -\infty, 3]$	$x = 3$	x dans $[3, +\infty[$
$3 + x$	6	$3 \cdot x - 3$

Cette application est continue, strictement croissante. Elle réalise un homéomorphisme de l'intervalle de départ vers l'intervalle image qui est ici $] -\infty, +\infty[$.

N'étant pas dérivable en 3, ce ne sera pas un difféomorphisme.

x décrit $] -\infty, 3]$	$x = 3$	x décrit $[3, +\infty[$
$y = 3 + x$	$y = 6$	$y = 3 \cdot x - 3$
y décrit $] -\infty, 6]$		y décrit $[6, +\infty[$
$x = y - 3$	$x = 3$	$x = \frac{y + 3}{3}$

On affine en posant $y = f(x)$:

On a donc $f^{-1} = y \mapsto \begin{cases} \frac{y - 3}{3} & \text{si } y \leq 6 \\ \frac{y + 3}{3} & \text{si } y > 6 \end{cases}$

Un exercice très simple. mais il montre que vous avez compris qui est qui.

Pas de grosse formule, pas d'astuce atroce, pas de calcul de ouf !

Mais juste la vérification de vos neurones.

5. la formule $\prod_{k=0}^{n-1} (N - k)$ a l'avantage de donner 0 pour n plus grand que N , sans convention sur les factorielle, mais juste parce qu'un terme est nul

Et parfois, c'est ce qui fait le plus mal en maths...

29

♥ Montrez que pour tout x il existe un unique y vérifiant $\int_x^y e^{t^2} . dt = 1$ (on considèrera l'application $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} . dt$ notée F dont on montrera qu'elle réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On pose alors $y = \varphi(x)$. Montrez (sans chercher à déterminer φ) : $\varphi(-\varphi(x)) = -x$ pour tout x . Interprétez graphiquement.

Rappel capital : $\int_x^y e^{t^2} . dt$ ne se calcule pas. On n'a pas de primitive simple.

En effet, déjà $t \mapsto e^{t^2}$ n'est pas la même chose que $t \mapsto (e^t)^2$ qui, elle, est sympathique).

Et surtout, surtout, $t \mapsto e^{t^2}$ se dérive en $t \mapsto 2.t.e^{t^2}$, ça c'est vrai.

Mais $t \mapsto e^{t^2}$ ne s'intègre pas en $t \mapsto \frac{e^{t^2}}{2.t}$.

Je ne sais pas comment on peut en venir à proposer cette monstrueuse connerie.

Enfin, si, je sais. C'est parce qu'on n'a pas compris que quand on vous dit que $t \mapsto e^{\alpha.t}$

s'intègre en $t \mapsto \frac{e^{\alpha.t}}{\alpha}$ vous ne voyez pas que t est une variable et α une constante. Bref, toujours et encore le problème des variables.

Après, pour insister, $t \mapsto \frac{e^{t^2}}{2.t}$ n'est même pas définie en 0 alors que $t \mapsto e^{t^2}$ doit s'intégrer sur tout intervalle.

Bref, une fois encore, que vais je pouvoir faire d'un élève qui propose cette ânerie déjà écrite trois fois ? Rien.

Sans l'indication, on fait des choses lourdes en fixant x et en regardant comme $\int_x^y e^{t^2} . dt$ bouge.

Mais pour rendre tout propre, il suffit de donner un nom aux choses. On définit $F = x \mapsto \int_0^x e^{t^2} . dt$. C'est une application continue et même dérivable, de dérivée $x \mapsto e^{x^2}$ (positive).

Continue, strictement croissante, intervalle. On a tout pour parler d'homéomorphisme, de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle image. Et qui est l'intervalle image ? $\int_0^x e^{t^2} . dt$ tend vers l'infini, quand x tend vers l'infini (on minore par $\int_0^x 1 . dt$ et c'est joué).

De même quand x tend vers $-\infty$, $\int_0^x e^{t^2} . dt$ tend vers $-\infty$.

Bref, F réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, d'application réciproque F^{-1} .

Elle vient d'hériter d'un nom, l'exercice est comme fini.

L'équation $\int_x^y e^{t^2} . dt = 1$ (inconnue y) se ramène à $F(y) - F(x) = 1$ et a pour solution $y = F^{-1}(F(x) + 1)$.

On a donc $\boxed{\varphi = x \mapsto F^{-1}(F(x) + 1)}$

Sans aucun nouvel effort : $-\varphi(x) = -F^{-1}(F(x) + 1)$ et

$$\varphi(-\varphi(x)) = F^{-1}\left(F(-F^{-1}(F(x) + 1)) + 1\right)$$

Or, F est impaire (sa dérivée est paire et elle est nulle en 0). On simplifie donc

$$\varphi(-\varphi(x)) = F^{-1}\left(-F(F^{-1}(F(x) + 1)) + 1\right) = F^{-1}\left(-(F(x) + 1) + 1\right) = F^{-1}(-F(x)) = F^{-1}(F(-x)) = -x$$

La preuve ci dessus ne montre pas vraiment ce qu'il y a derrière.

On se donne x , on définit $y = \varphi(x)$, caractérisé par

$\int_{t=x}^y e^{t^2} . dt = 1$. On change de variable en $u = -t$:

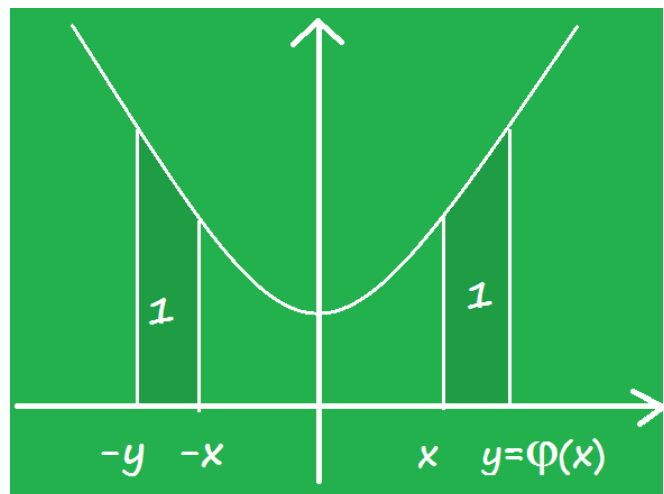
$$\int_{u=-x}^{-y} e^{u^2} . (-du) = 1.$$

On sort le signe moins, on rétablit les bornes :

$$\int_{u=-y}^{-x} e^{u^2} . du = 1.$$

On reconnaît la définition de $\varphi(-y) = -x$.

On retraduit : $\varphi(-\varphi(x)) = -x$.



◦30◦

♥ Montrez que $z \mapsto a.z + b.\bar{z}$ est linéaire de $(\mathbb{C}, +, .)$ dans lui même (vu comme $\mathbb{R}$ espace vectoriel). Trouvez a et b sachant que 1 a pour image $2 - i$ et que son spectre est $\{3, 5\}$.

$(\mathbb{C}, +, .)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 (base canonique $(1, i)$).

L'application va bien de $\mathbb{C}$ dans lui même.

On vérifie sa linéarité. On la nomme f_a et on calcule⁶ :

$$f_a(z) + f_a(z') = a.z + b.\bar{z} + a.z' + b.\bar{z}' = a.(z + z') + b.(\bar{z} + \bar{z}') = f_a(z + z')$$

$$\alpha.f_a(z) = \alpha.a.z + \alpha.b.\bar{z} = a.(\alpha z) + b.\overline{\alpha z}$$

et il était capital qu'ici α soit réel.

Oh, pour une fois, j'ai rédigé dans le bon sens !

On notera que a et b peuvent être complexes, et pas forcément réels.

On impose cette fois $a.1 + b.1 = 2 - i$. C'est sûr, a et b sont complexes.

On peut travailler matriciellement..

On calcule l'image de 1 et de i . Mais celle de 1 est connue : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Et celle de i va porter un nom avec deux composantes α et β .

La matrice de $f_{a,b}$ sur la base canonique est alors $\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ -1 & \beta \end{pmatrix}$.

Et on pense aux deux valeurs propres. cette matrice doit se diagonaliser en $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Comme deux matrices semblables ont même trace et même diagonale : $2 + \beta = 8$ et $2.\beta + \alpha = 15$.

La matrice cherchée est donc $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

Mais ça ne nous donne pas a et b .

Revenons quand même à ce que dit cette matrice : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ (voyez le en lisant le contenu des colonnes, ou en posant le vecteur sur la matrice c'est pareil).

On reformule en termes de vecteurs de $(\mathbb{C}, +, .)$: $1 \mapsto 2 - i$ et $i \mapsto -3 + 6.i$.

On revient à la définition : $a + b = 2 - i$ et $a.i - b.i = -3 + 6.i$.

On résout et on trouve $a = 4 - 2.i$ et $b = -2 + i$

On vérifie : • $z \mapsto (4 - 2.i).z + (-2 + i).\bar{z}$ est linéaire de $(\mathbb{C}, +, .)$ dans lui même

• $1 \mapsto (4 - 2.i).1 + (-2 + i).\bar{1} = 2 - i$

• $i \mapsto (4 - 2.i).i + (-2 + i).\bar{i} = 4.i + 2 + 2.i + 1 = 3 + 6.i$

• mais aussi • $1 + i \mapsto (4 - 2.i).(1 + i) + (-2 + i).(1 - i) = 5 + 5.i$

• $3 + i \mapsto (4 - 2.i).(3 + i) + (-2 + i).(3 - i) = 9 + 3.i$

avez vous reconnu les deux vecteurs propres ?

• Et on vérifie aussi $x + i.y \mapsto (4 - 2.i).(x + i.y) + (-2 + i).(x - i.y) = (2.x + 3.y) + (-x + 6.y).i$

d'où la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

◦31◦

♥ f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel $(E, +, .)$. On suppose $f \circ g = g \circ f$ (on dit que f et g sont permutables, et non pas que f et g commutent, mais l'erreur n'est pas grave). Montrez :

$$\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(g) \quad \forall \vec{u} \in \text{Ker}(f), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(f)$$

$$\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), g(\vec{u}) \in \text{Im}(g) \quad \forall \vec{u} \in \text{Im}(f), f(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$$

Rappel : un raisonnement du type $\forall \vec{b} \in \text{Im}(f)$ commence par « soit $\vec{b}$ dans $\text{Im}(f)$; alors il existe $\vec{a}$ dans E vérifiant $\vec{b} = f(\vec{a})$, etc ».

Je ne l'ai pas mis dans le cours, ça ?

Alors on y va. Tout ce qu'on pourra utiliser c'est $f \circ g = g \circ f$.

6. z et z' dans $\mathbb{C}$ et α dans $\mathbb{R}$ (oui, $\mathbb{R}$)

$\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(g)$	$\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(f)$
$\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), g(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$	$\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), f(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$

On prend $\vec{u}$ dans $\text{Ker}(g)$ (on traduit et on s'en servira : $f(\vec{u}) = \vec{0}$).

On regarde si $f(\vec{u})$ est encore dans $\text{Ker}(f)$. On calcule donc : $g(f(\vec{u})) = g \circ f(\vec{u}) = f \circ g(\vec{u}) = f(\vec{0}) = \vec{0}$.

On reconnaît $f(\vec{u}) \in \text{Ker}(g)$.

$\text{Ker}(g)$ est « stable par f ».

Le résultat $\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(g)$ résulte de la symétrie des rôles.

$\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(g)$	$\forall \vec{u} \in \text{Ker}(f), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(f)$
$\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), g(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$	$\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), f(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$

La question $\forall \vec{u} \in \text{Ker}(f), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(f)$ est idiote : si $\vec{u}$ est dans $\text{Ker}(f)$, alors $f(\vec{u})$ est égal à $\vec{0}$. Et $\vec{0}$ est dans $\text{Ker}(f)$!

$\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(g)$	$\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(f)$
$\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), g(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$	$\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), f(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$

On prend cette fois $\vec{u}$ dans $\text{Im}(g)$. On l'écrit $\vec{u} = g(\vec{a})$ pour au moins un $\vec{a}$ de $(E, +, \cdot)$.

On calcule $f(\vec{u}) = f(g(\vec{a})) = g(f(\vec{a}))$. Quitte à poser $\vec{b} = f(\vec{a})$, on vient d'écrire $f(\vec{u})$ sous la forme $g(\vec{b})$. Il est dans $\text{Im}(g)$.

$\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(g)$	$\forall \vec{u} \in \text{Ker}(g), f(\vec{u}) \in \text{Ker}(f)$
$\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), g(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$	$\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), f(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$

Quant à $\forall \vec{u} \in \text{Im}(g), g(\vec{u}) \in \text{Im}(g)$, c'est vrai. Que $\vec{u}$ soit dans $\text{Im}(g)$ ou pas...

◦32◦

♥ Montrez que pour tout x positif il existe un unique réel y vérifiant $y.e^y = x$ (pas de formule explicite). On pose alors $y = f(x)$. Calculez $f(0)$. Montrez que $f(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini, et montrez même $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)$.

C'est juste le théorème de l'homéomorphisme.

Notons g l'application $y \mapsto y.e^y$. Elle est continue, strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. Et même sur $[0, +\infty[$.

Elle réalise donc un homéomorphisme de $[0, +\infty[$ sur l'intervalle image $[0, +\infty[$. Et f est exactement son application réciproque sur ces deux domaines.

Et f est à son tour croissante et continue.

$f(0) = 0$ puisque $g(0) = 0$.

Je vous calcule une autre valeur ? $f(e) = 1$ puisque $g(1) = e$.

Encore : $f(2.\ln(2)) = \ln(2)$ car $g(\ln(2)) = 2.\ln(2)$.

Ensuite, les limites aux bornes donnent : $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Reste l'équivalent. On calcule $\frac{f(x)}{\ln(x)}$. Mais si on pose $y = f(x)$, alors on a $x = y.e^y$ et donc $\ln(x) = \ln(y) + y$.

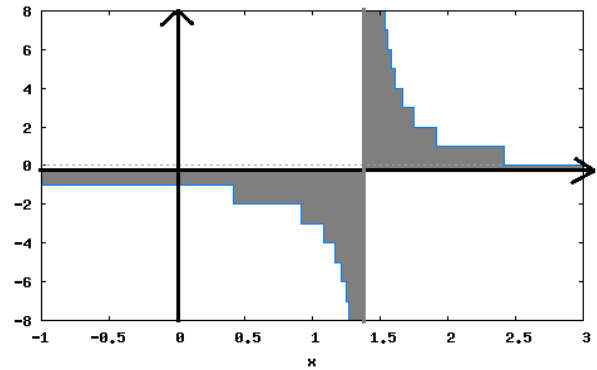
On revient à notre quotient :

$$\frac{f(x)}{\ln(x)} = \frac{y}{y + \ln(y)} = \frac{1}{1 + \frac{\ln(y)}{y}}$$

Quand x tend vers l'infini, y le fait aussi. par croissances comparées, $\frac{\ln(y)}{y}$ tend vers 0.

On peut passer à la limite dans le quotient : $\frac{f(x)}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. C'est la définition de l'équivalent.

♡ Montrez que $x \mapsto \frac{1}{x - \sqrt{2}}$ est continue sur $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue. Même question avec $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x - \sqrt{2}} \right\rfloor$ (partie entière).



L'application $x \mapsto \frac{1}{x - \sqrt{2}}$ est définie en tout point de $\mathbb{Q}$.
Et elle y est continue.

Le seul point qui poserait problème est $\sqrt{2}$. Et il n'est pas dans $\mathbb{Q}$.

Pour ce qui est de « pas uniformément continue », on va montrer une négation :

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in \mathbb{Q}^2, |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$$

On notera qu'il on écrit $\exists \varepsilon_0$ on lui donnant un nom avec indice, car il est particulier.

Bon, en fait, ça marcherait avec n'importe lequel, mais ici on va prendre 1.

En revanche, réfléchissez. dans l'uniforme continuité, on écrit $\forall \varepsilon, \exists \eta_{\varepsilon}$ car η se calcule à partir de ε . Il est « fonction de ε ».

On lui donne donc un nom qui tient compte de sa filiation (comme les noms russes en Ivanof, Petrof ou les noms anglais en Jackson, Richardson...)

En revanche, c'est n'avoir rien compris que d'écrire dans la négation $\exists \varepsilon, \forall \eta_{\varepsilon}, \dots$

En effet, pourquoi dire que η dépend de ε alors qu'il est quelconque.

Avoir compris cette distinction « qui dépend de qui », c'est faire des maths.

Recopier des formules par cœur sans comprendre le lien entre les variables, c'est faire... je sais pas moi, des « sciences » mais pas des maths.

On propose donc $\varepsilon_0 = 1$.

Pour tout η , on va prendre x et y autour de $\sqrt{2}$, proches à η près l'un de l'autre.

Dans $\left[\sqrt{2} - \frac{\eta}{2}, \sqrt{2} - \frac{\eta}{4}\right]$ on peut trouver un rationnel x (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Dans $\left[\sqrt{2} + \frac{\eta}{4}, \sqrt{2} + \frac{\eta}{2}\right]$ on peut trouver un rationnel y (densité ou même $\sqrt{2} + (x - \sqrt{2})$, comprenez vous?).

$\left[\sqrt{2} - \frac{\eta}{2}, \sqrt{2} - \frac{\eta}{4}\right]$	$\left[\sqrt{2} - \frac{\eta}{4}, \sqrt{2}\right]$	$\left[\sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{\eta}{4}\right]$	$\left[\sqrt{2} + \frac{\eta}{4}, \sqrt{2} + \frac{\eta}{2}\right]$
x			y
	$\eta/2$		
$\eta/2$		$\eta/2$	

La différence entre abscisses est plus petite que η .

La différence entre ordonnées se calcule

$$\left| \frac{1}{x - \sqrt{2}} - \frac{1}{y - \sqrt{2}} \right| = \left| \frac{y - x}{(x - \sqrt{2})(y - \sqrt{2})} \right|$$

On la minore : $|y - x|$ est plus grand que $\eta/2$.

$|x - \sqrt{2}|$ est plus petit que $\eta/2$

$|y - \sqrt{2}|$ est plus petit que $\eta/2$

le quotient est plus grand que $\frac{\eta/2}{\eta^2/4}$ ce qui fait $\frac{2}{\eta}$.

C'est plus grand que 1.

Sauf si η vaut plus que 2, mais ce sont les η petits qui nous concernent.

Sinon, on peut exploiter la suite de l'exercice. Si elle était uniformément continue sur $\mathbb{Q}$ elle se prolongerait en une application continue sur $\mathbb{R}$ tout entier par densité. Ce qui n'est pas le cas.

Passons à $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x - \sqrt{2}} \right\rfloor$.

Sur $\mathbb{R}$, on la devine non définie en $\sqrt{2}$ et discontinue chaque fois qu'on passe par une valeur qui fait sauter la partie entière.

On remonte : $\frac{1}{x - \sqrt{2}} = n$ dans $\mathbb{Z}$ donne $x = \frac{1}{n} + \sqrt{2}$ avec n dans $\mathbb{Z}^*$.

Coup de chance, ces points de discontinuité ne sont pas dans $\mathbb{Q}$.

Partout ailleurs, l'application est continue.

Inutile de se prendre la tête à distinguer « continue à droite/continue à gauche ».

Ici, la formule est la même à droite et à gauche.

Sinon, pour rendre les choses rigoureuses.

On se donne un rationnel $\frac{p}{q}$.

Il existe alors un intervalle $\left[\frac{p}{q} - \varepsilon, \frac{p}{q} + \varepsilon \right]$ ne contenant aucun $\frac{1}{n} + \sqrt{2}$ (chercher le plus proche, et s'en éloigner).

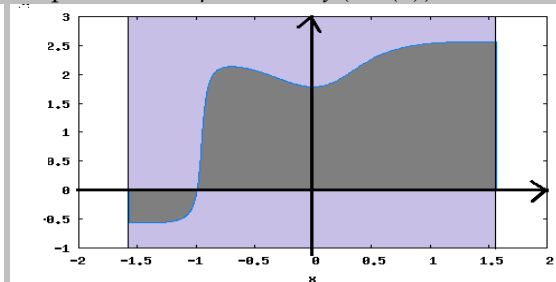
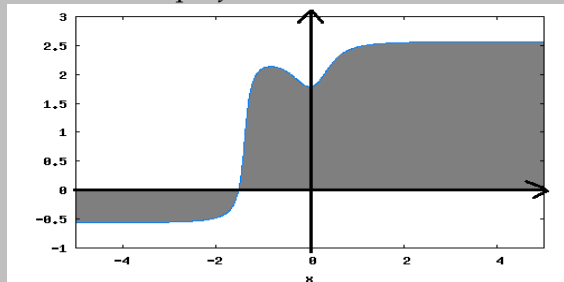
Sur cet intervalle, l'application $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x - \sqrt{2}} \right\rfloor$ est constante, donc continue.

Elle n'est pas uniformément continue.

Pour η strictement positif, aussi petit soit il, prendre à nouveau x et y de part et d'autre de $\sqrt{2}$. Comme tout à l'heure.

34

♥ Donnez une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas uniformément continue. Soit maintenant f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite a en $-\infty$ et une limite b en $+\infty$. Montrez que f est bornée. On veut montrer que f est uniformément continue. On pose alors : $\varphi = \theta \mapsto f(\tan(\theta))$.



Montrez que φ se prolonge par continuité en $-\pi/2$ et en $\pi/2$. Montrez que φ est alors uniformément continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$ puis sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Dédisez par composition que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Comme on peut aller de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que le $\mathbb{R}$ de départ n'est pas un segment, on peut trouver des applications continues (*en tout point*), qui ne sont pas uniformément continues.

Par exemple $x \mapsto x^2$. Continue en tout point.

Mais pour tout η proposé, on pourra trouver x et y vérifiant $|x - y| \leq \eta$ et pourtant $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| > 1$.

C'est bien $\exists \varepsilon_0 = 1, \forall \eta, \exists(x, y), |x - y| \leq \eta$ et (pourtant) $|f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$.

On prendra $x = a - \frac{\eta}{2}$ et $x = a + \frac{\eta}{2}$ (avec a à préciser). On a bien $|x| \leq \eta$.

Ensuite $|x^2 - y^2| = 2.a.\eta$ (calcul), et on avoue alors qu'on a choisi $a = \frac{1}{\eta}$.

Si maintenant f a une limite à l'infini (en fait à chaque infini), alors :

f est bornée sur un certain $] -\infty, A]$ (par $a - 1$ et $a + 1$)	Écrire $\forall \varepsilon, \exists G_\varepsilon, \forall x, x \leq G_\varepsilon \Rightarrow f(x) - a \leq \varepsilon$ et prendre $\varepsilon = 1$.
f est bornée sur un certain $[B, +\infty[$ (par $b - 1$ et $b + 1$)	Écrire $\forall \varepsilon, \exists H_\varepsilon, \forall x, x \geq H_\varepsilon \Rightarrow f(x) - b \leq \varepsilon$ et prendre $\varepsilon = 1$.
f est bornée sur ce qu'il reste (<i>on ne sait pas par quoi, mais elle l'est</i>)	On applique le premier théorème de compacité : f est continue de $[A, B]$ dans $\mathbb{R}$ donc elle est bornée. Ce théorème ayant tendance à s'appeler « théorème de bornes atteintes » au fil des ans. Je n'ai rien contre ça.

Globalement, f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Pour l'uniforme continuité, on peut ruser de la même façon.

Sur $[H_{\varepsilon/2}, +\infty[$, on a (que x et y vérifient ou non $|x - y| \leq \text{quelquechose}$: $|f(x) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
 et $|f(y) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
 d'où $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

De même, sur $] -\infty, G_{\varepsilon/2}]$ on a la même conclusion.

Et sur $[G_{\varepsilon/2}, H_{\varepsilon/2}]$, on applique le théorème de Heine. On a $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ à condition d'avoir $|x - y| \leq \eta_\varepsilon$.

Et au final, on recolle tout.

Mais on va faire mieux, en ramenant l'infini à portée de main avec tangente et arctangente...

C'est là que les maths c'est beau. De belles idées, lumineuses qui épargnent même les recours aux découpages d'épsilon en quatre.

On définit donc $\theta \mapsto f(\tan(\theta))$ de $] -\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ (oui, la tangente ne pose pas de problème, on s'approche du bord, mais on ne met pas le pied dessus).

Elle est continue, en tant que composée d'applications continues.

Mais elle se prolonge par continuité en $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$, par composition des limites : $\theta \rightarrow \frac{\pi^-}{2}$
 $\tan(\theta) \rightarrow +\infty$
 $f(\tan(\theta)) \rightarrow b$

De même, en $\left(\frac{-\pi}{2}\right)^+$ on prolonge par la valeur a .

Maintenant, quitte à l'appeler encore φ elle est définie et continue de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$.

Mais on est sur un segment⁸.

Elle est uniformément continue.

Par restriction de domaine, φ est encore uniformément continue sur l'intervalle ouvert.

Et pour retrouver f on compose : $f = \varphi \circ \text{Arctan}$ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en passant par $] -\pi/2, \pi/2[$).

Comme φ et Arctan sont uniformément continues, f l'est encore (Arctan est lipschitzienne donc uniformément continue).

o35o

Rappel des règles : sur chaque ligne et sur chaque colonne, il y a chacun des cinq entiers 1, 2, 3, 4 et 5. Et il des signes « plus grand que » et « plus petit que » ; bien entendu, ils doivent être corrects.

				>		5		>			
$\wedge$					$\wedge$						
	>	3	1	<	2		2	>	1		>
$\vee$	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$				$\wedge$				
		>	2	>	1	3				<	>
	$\vee$							$\wedge$			$\wedge$
1			4					<	5		<
							$\vee$		5		<
			>		>			<	4	5	<
									5		<
									3		

o0o

Soit f une application continue et périodique de période 1. Montrez que f est uniformément continue sur $[0, 2]$.
 Déduisez que f est uniformément continue sur tout $\mathbb{R}$.
 Pourquoi a-t-on pris $[0, 2]$ plutôt que $[0, 1]$ simplement ?

De $[0, 2]$ dans $\mathbb{R}$, f est continue, et $[0, 2]$ est un segment.

La voilà uniformément continue.

Après, en gros « par périodicité », elle est uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Mais il faut être précis.

Le théorème de Heine nous a donné $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon, \forall (a, b) \in [0, 2]^2, |b - a| \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq \varepsilon$.

On a envie de dire $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon$ (le même), $\forall (x, y) \in] -\infty, +\infty[^2, |x - y| \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

7. le petit moins pour dire « par valeur inférieure »

8. ce que $] -\pi/2, \pi/2[$ n'était pas, on est d'accord

Et c'est vrai. Ne suffit il pas de réduire modulo 1 : $a = x - [x]$ et $b = y - [y]$? (deux parties décimales).

Par périodicité : $f(x) = f(a)$ et $f(y) = f(b)$.

Si on a $|x - y| \leq \eta$ alors on a $|a - b| \leq \eta$ puis $|f(b) - f(a)| \leq \varepsilon$ et donc $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

C'est tentant... Mais il y a un problème.

Imaginez $x = 0,99$ et $y = 1,01$.

On a alors $|x - y| \leq 0,02$ (imaginons que ce soit ça η). Mais on a $a = 0,99$ et $b = 0,01$ et $|b - a|$ est plutôt grand !

On ne peut donc pas utiliser $|b - a| \leq \eta$.

Il faut en fait soustraire le même entier à x et y .

Pratiquement, prenons x et y vérifiant juste $|y - x| \leq \eta$.

L'un des deux est le plus petit. On va dire que c'est x sans perte de généralité.

On pose alors $a = x - [x]$ et $b = y - [x]$ (pas de faute de frappe, c'est bien $[x]$).

Par construction : $|b - a| = |x - [x] - (y - [x])| = |x - y| \leq \eta$.

a est entre 0 et 1 par construction.

b est entre 0 et $1 + \eta$, puisque c'est $(y - x) + (x - [x])$.

Il est donc entre 0 et 2.

On peut donc utiliser l'uniforme continuité de f sur $[0, 2]$ et conclure $|f(b) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Et on a bien $|f(y) - f(x)| = |f(b) - f(a)| \leq \varepsilon$ par périodicité.

Petit détail : la majoration $0 \leq b \leq 1 + \eta$ est correcte.

J'en fais $0 \leq b \leq 1 + \eta \leq 2$.

ceci revient à supposer que η est plus petit que 1.

On ne sait pas si c'est le cas (même si dans la pratique, η est qualifié de « petit »).

Mais si η dépasse 1 dans le résultat issu du théorème de Heine, on peut le remplacer par 1, et l'implication $|x - y| \leq 1 \leq \eta \Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq \varepsilon$ reste valable..

◦1◦

♥ Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On se donne a dans $\mathbb{R}$. Montrez par récurrence sur n que pour tout x de $[a + n.\mu_1, a + (n + 1).\mu_1]$, on a $|f(x) - f(a)| \leq n + 1$. Dédisez que f est encadrée par deux applications affines.

C'est quoi μ_1 ? C'est un réel qui vérifie $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |y - x| \leq \mu_1 \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq 1$. C'est l'uniforme continuité.

Ensuite, pas vraiment besoin de récurrence.

Prenons x dans $[a + n.\mu_1, a + (n + 1).\mu_1]$

et écrivons $f(a + n.\mu_1) - f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} f(a + (k + 1).\mu_1) - f(a + k.\mu_1)$

$$f(x) - f(a) = f(x) - f(a + n.\mu_1) + \sum_{k=0}^{n-1} f(a + (k + 1).\mu_1) - f(a + k.\mu_1)$$

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f(a + n.\mu_1)| + \sum_{k=0}^{n-1} |f(a + (k + 1).\mu_1) - f(a + k.\mu_1)|$$

$$|f(x) - f(a)| \leq 1 + n$$

Les $n + 1$ dernières majorations sont licites, puisque $|(a + n.\mu_1) - a|$ et tous les $|(a + (k + 1).\mu_1) - (a + k.\mu_1)|$ sont plus petits que μ_1 .

Pour n négatif, le résultat serait vrai aussi avec des valeurs absolues. Avec le même type de télescopage.

De fait, on avance intervalle par intervalle.

La majoration $|f(x) - f(a)| \leq n + 1$ devient un encadrement $-n - 1 \leq f(x) - f(a) \leq n + 1$ puis $f(a) - n - 1 \leq f(x) \leq f(a) + n + 1$.

D'accord, mais ça ne fait pas encore un encadrement affine...

Oui, mais on va encadrer n à son tour à l'aide de x (en gros : $n \simeq \frac{x - a}{\mu_1}$).

On a supposé : $a + n.\mu_1 \leq x \leq a + (n + 1).\mu_1$.

On bascule : $n.\mu_1 \leq x - a \leq (n + 1).\mu_1$

On arrange : $n.\mu_1 \leq x - a$ et $x - a - \mu_1 \leq n.\mu_1$

On regroupe : $x - a - \mu_1 \leq n.\mu_1 \leq x - a$

Et enfin : $\frac{x-a}{\mu_1} - 1 \leq n \leq \frac{x-a}{\mu_1}$ et aussi $-\frac{x-a}{\mu_1} + 1 \geq -n \geq \frac{x-a}{\mu_1}$.

On reporte : $f(a) - \frac{x-a}{\mu_1} - 1 \leq f(x) \leq f(a) + \frac{x-a}{\mu_1} + 1$.

C'est bien un encadrement par deux fonctions de la forme $x \mapsto \alpha.x + \beta$.

f est encadrée par deux fonctions affines.

C'est ce qui explique que $x \mapsto x^2$ ne puisse pas être uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

◦2◦

Soit f continue de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$. On se donne n dans $\mathbb{N}^*$ et k dans $\text{range}(n)$. Montrez qu'il existe α_k vérifiant

$$\int_{k.\pi/n}^{(k+1).\pi/n} f(t). \sin(t). dt = f(\alpha_k). \int_{k.\pi/n}^{(k+1).\pi/n} |\sin(n.t)|. dt \quad (\text{pensez à « } f \text{ est bornée et atteint ses bornes », et...}).$$

Déduisez que $\frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\pi f(t). |\sin(n.t)|. dt$ est compris entre les deux sommes de Darboux de f sur $[0, \pi]$.

Donnez la limite de $\frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\pi f(t). |\sin(n.t)|. dt$ quand n tend vers l'infini.

◦3◦

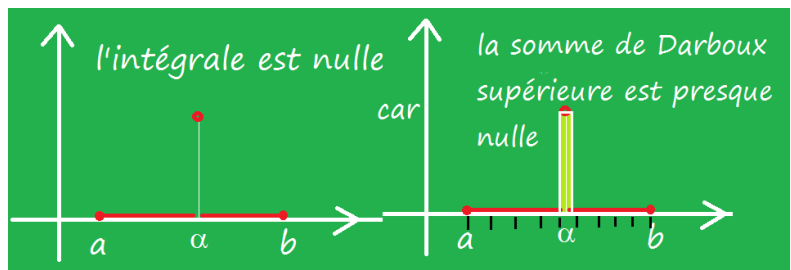
Pouvez vous trouver f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\int_0^1 f(t). dt = 0$ et qui ne soit pas identiquement nulle ?

Pouvez vous trouver f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\int_a^b f(t). dt = 0$ et qui ne soit pas identiquement nulle ?

Pour la première question, la réponse est « oui ».

Et une solution est « f est nulle partout... sauf en un point α ». On profite du fait que nul n'a demandé à f d'être continue.

Pourquoi l'intégrale existe et est nulle ? Facile ! Faites le avec les sommes de Darboux. les sommes de Darboux inférieures valent 0, et les sommes de Darboux supérieures valent $f(\alpha).\eta$ où η est la largeur de l'intervalle maudit qui contient α . Quand le pas des subdivisions tend vers 0, les sommes se rapprochent l'une de l'autre (et se rapprochent de 0).



Pour la seconde question, avec f positive et continue, la réponse sera « non » (même si dans un instant je vais vous dire le contraire).

Si f est continue, positive sur $[a, b]$ et si son intégrale est nulle, alors est est nulle partout.

J'ai deux démonstrations.

Je vous recommande la première : on définit $F = x \mapsto \int_a^x f(t). dt$.

F est continue, dérivable, de dérivée positive f .

Elle est donc croissante. (ce qui peut se prouver juste par relation de Chasles d'ailleurs)

Mais $F(a)$ est nul ($\int_a^a \dots$) et $F(b)$ aussi (hypothèse).

F est donc constante (écrire $F(a) \leq F(x) \leq F(b)$).

sa dérivée est donc nulle. Et sa dérivée c'est f .

Fini !

Plus dans l'esprit du programme d'analyse, la seconde preuve.

On suppose f positive continue, non identiquement nulle. On montre alors que $\int_a^b f(t). dt$ ne peut pas être nulle (contraposée, ou par l'absurde selon vos goûts).

Si f n'est pas identiquement nulle, il y a au moins un point c où elle est strictement positive.

Par continuité en c , il existe un intervalle $[c - \alpha, c + \alpha]$ sur lequel elle est plus grande que $\frac{f(c)}{2}$ (continuité avec

$\varepsilon = \frac{f(c)}{2}$, petit dessin).

Par comparaison avec un rectangle $\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(t).dt \geq 2.\alpha.\frac{f(c)}{2}$.

On ajoute $\int_a^{c-\alpha} f(t).dt$ et $\int_{c+\alpha}^b f(t).dt$, positif s par positivité de f .

On a donc $\int_a^b f(t).dt \geq \alpha.f(c) > 0$. L'intégrale ne peut pas être nulle.

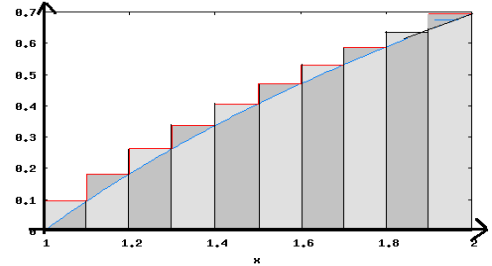
On a prouvé de deux façons (f continue, positive, $\int_a^b f(t).dt = 0$) implique $(\forall t \in [a, b], f(t) = 0)$.

Et en particulier (f continue, $\int_a^b (f(t))^2.dt = 0$) implique $(\forall t \in [a, b], f(t) = 0)$ (caractère « séparant » de la norme $\|\cdot\|$).

Et pourtant, non. On a oublié une hypothèse : $a \neq b$. Et c'est vrai qu'une intégrale de a à a est nulle sans pour autant que l'application soit nulle sur tout $[a, a]$.

♡ On considère l'application logarithme, sur le segment $[1, 2]$ dont on effectue une équisubdivision en n morceaux. Montrez que la somme de Riemann droite est alors

$$\ln\left(\left(\frac{(2.n)!}{n!}\right)^{1/n}\right) - \ln(n).$$



Les points de subdivision sont les $1 + \frac{k}{n}$. Et k va aller de 1 à n (droite).

La largeur des intervalles sera de $\frac{1}{n}$.

On se doit donc de calculer $\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+n}{n}\right)$ (notée R_n).

On fusionne tous les logarithmes en un seul :

$$R_n = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{k+n}{n}\right)\right)$$

On regroupe les n facteurs n ensemble :

$$R_n = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{\prod_{k=1}^n (k+n)}{n^n}\right)$$

On sépare le n^n en on tient compte du $\frac{1}{n}$ devant : $R_n = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\prod_{k=1}^n (k+n)\right) - \frac{1}{n} \cdot \ln(n^n)$.

Déjà, le $-\ln(n)$ est là.

Dans le produit $\prod_{k=1}^n (k+n)$ qu'on écrit $(n+1).(n+2) \dots (n+n)$, on identifie une factorielle incomplète $\frac{(2.n)!}{n!}$.

On entre le $\frac{1}{n}$ en puissance dans le logarithme et c'est fini.

♡ Calculez $\int_0^x \cos(t).dt$ en passant par la limite des sommes de Riemann.

$$R_n = \frac{x}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k.x}{n}\right) = \frac{x}{n} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2.n-1}{2}.\theta\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

avec $\theta = \frac{x}{n}$ sachant qu'il y a un 1 au lieu du $\frac{1}{2}$ du célèbre noyau).

Au numérateur, $\sin\left(\frac{2.n-1}{2}.x\right)$ converge vers $\sin(x)$.

Au dénominateur, la forme indéterminée $2.n \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ converge vers x .

Le réel x se simplifie entre le haut et le bas. Il reste $\int_0^x \cos(t).dt = \sin(x)$.

◦6◦

♥ Calculez $\int_a^b t^2 dt$ en passant par la limite des sommes de Riemann.

$$R_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right)^2 = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^2 + \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 2.a.k + \left(\frac{b-a}{n} \right)^3 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

$$R_n = a^2 \cdot (b-a) \cdot \frac{n}{n} + 2.a \cdot (b-a)^2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2.n^2} + (b-a)^3 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (2.n-1)}{6.n^3}$$

En utilisant des équivalents, la somme de Riemann converge vers $a^2 \cdot (b-a) + (b-a)^2 \cdot a + \frac{(b-a)^3}{3}$ et après simplification : $\frac{b^3 - a^3}{3}$ (variation de la primitive classique).

◦7◦

Montrez que l'application tangente est lipschitzienne sur $[-a, a]$ pour a strictement plus petit que $\pi/2$ (sans dériver, mais en pensant à $\frac{\sin(b-a)}{\cos(b) \cdot \cos(a)}$).

Lipschitzienne sur I c'est $\exists K \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq K \cdot |x - y|$.

Au fait, quelles applications vérifient $\exists K \in \mathbb{R}^+, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| < K \cdot |x - y|$?

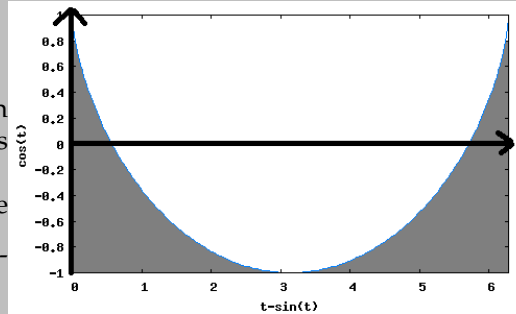
A faire.

◦8◦

On note φ l'application $x \mapsto x - \sin(x)$. Montrez que c'est un homéomorphisme de $[0, 2\pi]$ dans lui-même. On définit alors $f = x \mapsto \cos(\varphi^{-1}(x))$.

On mesure alors la longueur du graphe par la formule

$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$ en pensant à changer de variable par le C^1 difféomorphisme φ (en tout cas sur l'intervalle ouvert).



La continuité et la monotonie sont des cadeaux (dériver), et l'intervalle image est aussi un cadeau, il suffit de calculer les valeurs aux extrémités.

On trace donc $f = x \mapsto \cos(\varphi^{-1}(x))$ et on dérive : $f' = x \mapsto -\sin(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x)$.

On explicite $(\varphi^{-1})'(x)$: On part de $\varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$ et on dérive :

$$\varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = 1$$

$$(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$$

Puisque on nous donne la formule pour mesurer la longueur de l'arc, on l'utilise (on la justifiera dans le cours, même si elle n'est pas au programme, mais c'est si bien de mélanger sommes et Riemann et théorème de Pythagore) :

$$L = \int_{x=0}^{2\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{\sin(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \right)^2} dx = \int_{x=0}^{2\pi} \sqrt{1 + \left(\sin(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) \right)^2} dx$$

Sous cette forme, c'est une horreur. Mais on pense à changer de variable : $u = \varphi^{-1}(x)$, soit encore $x = \varphi(u)$.

On a $\frac{du}{dx} = (\varphi^{-1})'(x)$ et $dx = \frac{du}{(\varphi^{-1})'(x)}$.

On remplace :

$$L = \int_{u=0}^{2\pi} \sqrt{1 + \left(\sin(u) \cdot (\varphi^{-1})'(x) \right)^2} \cdot \frac{du}{(\varphi^{-1})'(x)} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(u) + \frac{1}{((\varphi^{-1})'(x))^2}} du$$

(oui, les bornes sont restées 0 et 2π).

Une chose me gêne, on a amené cette formule presque entièrement dans l'univers de u . Mais il reste un $\frac{1}{((\varphi^{-1})'(x))^2}$ qu'il faut exprimer avec des u et non des x .

Facile : $(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$ donc $\frac{1}{((\varphi^{-1})'(x))^2} = (\varphi'(\varphi^{-1}(x)))^2 = (\varphi'(u))^2$.

Cette fois, c'est plus agréable : $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(u) + (\varphi'(u))^2} du$

Remarque : En écrivant que la formule était $L = \int_a^b \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} . dt$ on y arrivait tout de suite.
 Il suffisait donc de laisser le cinématicien^a dire « pour calculer la distance parcourue, tu intègres la norme du vecteur vitesse ».
 On y parvenait aussi par d'autres chemins, avec quand même le même changement de variable.
 a. de mon temps, la cinématique était une partie du cours de maths, et puis on l'a laissée aux physiciens

On explicite φ' : $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(u) + (1 - \cos(u))^2} . du = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cdot \cos(u)} . du$.

Et là, on fait de la trigonométrie : $1 - \cos(\theta) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

C'est là qu'il faut avoir des réflexes en trigonométrie : Apprendre des formules par cœur ne sert à rien si on ne se dit pas quand on peut les appliquer.

Savoir qu'il existe des formules qui peuvent servir, et se dire qu'on saura les retrouver par un calcul rapide, c'est bien.

Connaître ses formules et savoir quand les utiliser, c'est le top.

Et le top, c'est le minimum attendu en Prépas.

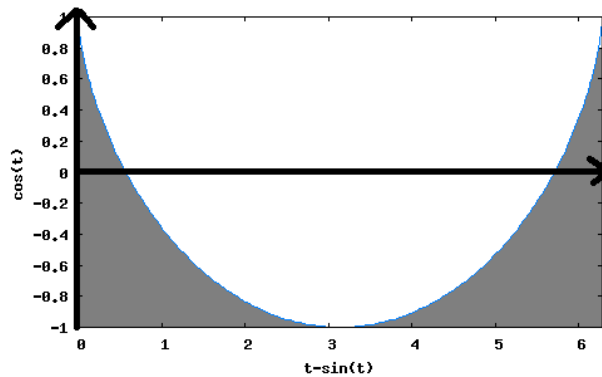
En plus, sur l'intervalle d'étude $\sqrt{2 - 2 \cdot \cos(u)} = \sqrt{4 \cdot \sin^2\left(\frac{u}{2}\right)} = 2 \cdot \sin\left(\frac{u}{2}\right)$ (quand je dis « sur l'intervalle » c'est pour dire « pas de valeur absolue »).

On termine : $L = \left[-4 \cdot \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right]_{u=0}^{u=2\pi} = 8$.

C'est cohérent : la flèche tracée sur le schéma a pour longueur 2π .

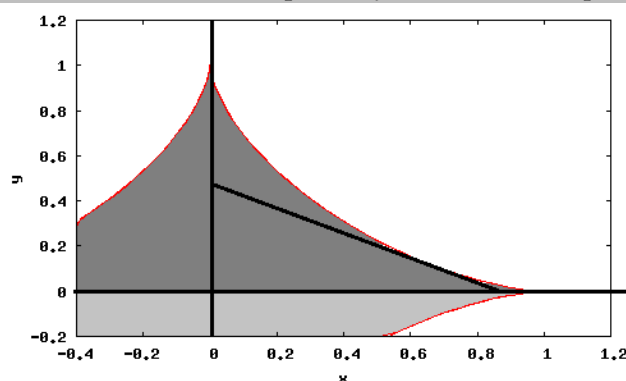
La longueur de la courbe est plus grande.

Il est amusant de voir que le centre de la roue parcourt une distance avec du π tandis que le bord parcourt une distance entière...



9.

On définit l'astroïde d'équation $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$ pour x décrivant $[0, 1]$.



Montrez que $x \mapsto (1 - x^{2/3})^{3/2}$ est un C^1 difféomorphisme de $]0, 1[$ dans $]0, 1[$ dont vous déterminerez l'application réciproque.

Calculez l'aire sous l'arche d'astroïde (changement de variable proposé : $x = \sin^3(t)$, mais aussi $x = \cos^3(t)$, il pourra alors être judicieux de calculer la demi-somme).

Calculez en tout point de l'astroïde la longueur du segment de tangente entre l'axe Ox et l'axe Oy .

Calculez la longueur de l'arc d'astroïde (rappel : intégrer $\sqrt{1 + (y')^2}$).

Difféomorphisme : continue, bijective et dérivable, de réciproque continue, bijective et dérivable.

L'application $x \mapsto (1 - x^{2/3})^{3/2}$ est

- définie sur $[0, 1]$ (l'exposant $3/2$ non entier va exiger que ce qu'il y a sous la racine soit positif, c'est le cas
- continue sur $[0, 1]$ par théorèmes algébriques
- dérivable, la preuve, je peux la dériver : $f'(x) = \frac{3}{2} \cdot (1 - x^{2/3})^{1/2} \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot x^{-1/3}\right)$.

La dérivée n'existe pas en 0, on va l'exclure du domaine : $]0, 1[$ dans $[0, 1]$.

La dérivée est nulle en 1, ce n'est pas un problème pour f , mais c'en est un pour f^{-1} .

Vous devez comprendre que la différence entre homéomorphisme et difféomorphisme dans vos réflexes ce sera « attention aux tangentes horizontales qui deviennent verticales ».

On se donne y entre 0 et 1 (*intervalle image*) et on cherche x vérifiant $f(x) = y$. On élève à la puissance $\frac{2}{3}$, on fait passer de l'autre côté... et on arrive à $x = \sqrt[2/3]{1 - y^{2/3}}$.
C'est simple : $f^{-1} = f$. Et ça se voit avec la symétrie du graphe par rapport à la bissectrice.

On doit ensuite calculer $\int_{x=0}^1 (1 - x^{2/3})^{3/2} . dx$ (existence : continuité).

On notera que l'application est continue, mais pas dérivable sur $[0, 1]$ (à cause de 0). Le « théorème » de Terminale « intégrable car dérivable » tomberait à plat.

Comme suggéré on change de variable en $x = \sin(t)$ qui va varier de 0 à 1. Et là, on a besoin de la notion de difféomorphisme pour faire notre changement de variable.

Ah non, $x = (\sin(t))^3$ pour que $x^{2/3}$ soit égal à $\sin^2(t)$ et $1 - x^{2/3}$ comme $\cos^2(t)$ et se simplifie avec la racine.

$$\int_{x=0}^1 (1 - x^{2/3})^{3/2} . dx = \int_{t=0}^{\pi/2} (1 - \sin^2(t))^{3/2} . 3 . \cos(t) . \sin^2(t) . dt$$

On simplifie sans mettre de valeurs absolue sur $\sqrt{\cos^2(t)}$ vu l'intervalle de travail :

$$\int_{x=0}^1 (1 - x^{2/3})^{3/2} . dx = \int_{t=0}^{\pi/2} . 3 . \cos^4(t) . \sin^2(t) . dt$$

Bon, ce n'est pas tout, mais il faut trouver une primitive de ça !

Et Bioche nous propose de passer par la tangente (invariance par $t \mapsto t + \pi$ et pas par les autres).

Mais on peut aussi passer en arc double :

$$3 . \cos^4(t) . \sin^2(t) = 3 . \cos^2(t) . (\cos^2(t) . \sin^2(t))^2 = 3 . \frac{1 + \cos(2.t)}{2} . \frac{\sin^2(2.t)}{4}$$

Et même recommencer :

$$3 . \cos^4(t) . \sin^2(t) = 3 . \left(\frac{1 - \cos(4.t)}{16} + \frac{\cos(2.t) . \sin^2(2.t)}{8} \right)$$

On intègre avec

$$\frac{t}{16} - \frac{\sin(4.t)}{64} + \frac{\sin^3(2.t)}{48}$$

On trouve finalement $\frac{3.\pi}{32}$ valeur dont on se contrefiche.

Mais on retient • l'idée du changement de variable

• pour intégrer des cosinus et sinus avec des puissances un peu élevées,

$$\text{on pense à } \cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2.t)}{2}$$

$$\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2.t)}{2}$$

$$\cos(t) . \sin(t) = \frac{\sin(2.t)}{2}$$

Sinon, il y a une autre idée assez jolie (des maths, des maths...) :

$$\text{on part de } I = \int_{x=0}^1 (1 - x^{2/3})^{3/2} . dx$$

on fait deux changements de variable tentants :

$x = \sin(t)$	$x = \cos(t)$
$I = 3 . \int_{t=0}^{\pi/2} 3 . \cos^4(t) . \sin^2(t) . dt$	$I = 3 . \int_{t=0}^{\pi/2} 3 . \sin^4(t) . \cos^2(t) . dt$

l'un a déjà été fait, et l'autre est du même modèle, avec petite manipulation $\int_{t=\pi/2}^{t=0} \dots (-dt) = \int_0^{\pi/2} \dots dt$.

Vous allez dire « et alors », aucune des deux n'est plus intelligente que l'autre.

$$\text{Beh on invite les deux : } I = \frac{3 . \int_{t=0}^{\pi/2} 3 . \cos^4(t) . \sin^2(t) . dt + 3 . \int_{t=0}^{\pi/2} 3 . \cos^2(t) . \sin^4(t) . dt}{2} .$$

$$\text{Et là, avec } \cos^2 + \sin^2 = 1, \text{ on y gagne : } I = \frac{3}{2} . \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) . \sin^2(t) . dt .$$

Et on continue quand même avec des $\frac{\sin^2(2.t)}{4}$.

Passons à la longueur du segment parce que là, c'est assez joli.

On se place en a . On connaît l'équation de la tangente en a : $\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

Ne venez pas m'embêter en disant : « d'où ça sort, je ne connaissais pas ça » ?

C'est exactement la même que $y = f'(a).(x - a) + f(a)$.

dans une déclinaison « taux d'accroissements ».

Je rappelle qu'en maths, la clef est de varier les points de vue.

On détermine les deux intersections avec les axes : $(0, f(a) - a.f'(a))$ et $(a - \frac{f(a)}{f'(a)}, 0)$.

En langage barbare :

pour l'intersection avec Oy, on fait $x = 0$,

pour l'intersection avec Ox, on fait $y = 0$.

On mesure la distance entre ces deux points : $\sqrt{(f(a) - a.f'(a))^2 + (a - \frac{f(a)}{f'(a)})^2}$ (Pythagore !).

Il est temps de tenir compte de qui est f : $f(a) = (1 - a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ et $f'(a) = -(1 - a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}.a^{-\frac{1}{3}}$

$$f(a) - a.f'(a) = (1 - a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} + (1 - a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{2}{3}} = (1 - a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}.((1 - a^{\frac{2}{3}}) + a^{\frac{2}{3}}) = \sqrt{1 - a^{\frac{2}{3}}}$$

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{f'(a).a - f(a)}{f'(a)} = \frac{-\sqrt{1 - a^{\frac{2}{3}}}}{-a^{-\frac{1}{3}}.\sqrt{1 - a^{\frac{2}{3}}}}$$

en profitant de ce qui a déjà été fait.

On simplifie encore $a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a^{\frac{1}{3}}$.

On élève au carré et on somme :

$$\sqrt{(f(a) - a.f'(a))^2 + (a - \frac{f(a)}{f'(a)})^2} = \sqrt{(1 - a^{\frac{2}{3}}) + a^{\frac{2}{3}}} = 1$$

Tous les morceaux de droite ont la même longueur !

L'astroïde correspond à « une échelle de longueur 1 qui glisse le long d'un mur ».

<https://www.youtube.com/watch?v=7U1Zr0QVayE>

<https://mathworld.wolfram.com/Astroid.html>

Et même

```
from math import sin, cos, pi
from tkinter import *
```

```
Ech=400
```

```
Fen=Tk()
```

```
Can=Canvas(Fen,width=Ech+20,height=Ech+20,bg="DarkGreen")
```

```
Can.pack()
```

```
Trait=Can.create_line(0,0,0,0,fill="White",width=2)
```

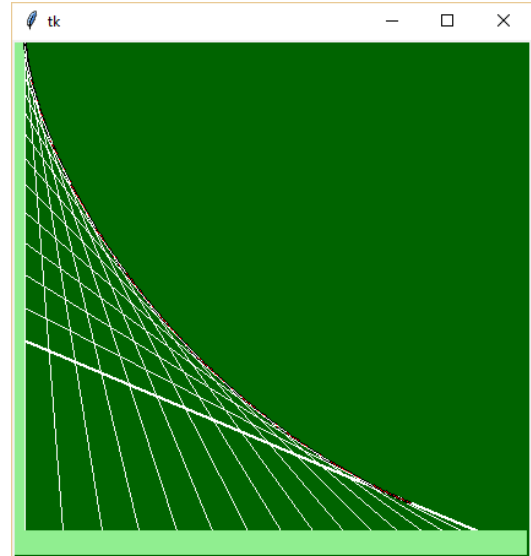
```
AxeOy=Can.create_rectangle(0,0,10,Ech+20,fill="LightGreen",width=0)
```

```
AxeOx=Can.create_rectangle(0,Ech,Ech+20,Ech+20,fill="LightGreen",width=0)
```

```

for k in range(400):
    ...angle = pi*k/800
    ...c, s = cos(angle), sin(angle)
    ...x, y = Ech*s, Ech*(1-c)
    ...xx, yy = Ech*s*s*s+10, Ech*(1-c*c*c)
    ...Can.create_oval(xx-1,yy-1,xx+1,yy+1)
    ...Can.coords(Trait,10,y,10+x,Ech)
    ...Can.update()
Fen.mainloop()

```



Et on n'en a pas fini avec l'astroïde, on va calculer sa longueur.

Avec la formule que je vous démontrerai par un Tableau Vert : $\int \sqrt{1 + (f'(t))^2} . dt$.

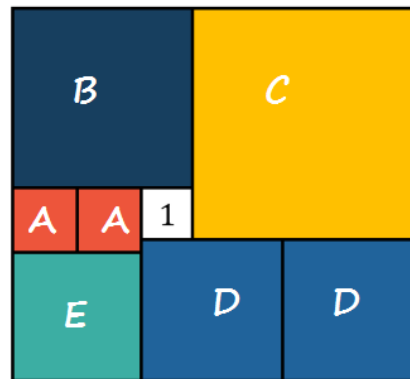
Ici, $f'(x) = -(1 - a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} . a^{-\frac{1}{3}}$ donc $(f'(x))^2 = (1 - a^{\frac{2}{3}}) . a^{-\frac{2}{3}} = a^{-\frac{2}{3}} - 1$.

On ajoute 1, on passe à la racine : $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = a^{-\frac{1}{3}}$.

On intègre ça, c'est trop facile $\left[\frac{3}{2} a^{\frac{2}{3}} \right]_0^1$. la longueur vaut $\frac{3}{2}$

Toutes les pièces du puzzle (rectangulaire) sont des carrés. Le plus petit a pour côté 1. On note x la longueur du carré A . Retrouvez en fonction de x toutes les longueurs puis trouvez x et enfin l'aire du rectangle.

On pose $f = x \mapsto \frac{1}{1 + |\sin(x/2)|}$. On constate $f(\pi) = f(3\pi)$. Pourquoi ne peut-on quand même pas appliquer le théorème de Rolle ?



Area = ?

squares



Toutes les pièces du puzzle (rectangulaire) sont des carrés. Mais de quelle taille ?

On décide de noter x le côté des deux carrés A .

Par juxtaposition horizontale : B a pour côté $2.x + 1$.

Par juxtaposition verticale : C a pour côté $(2.x + 1) + 1$ (ce qui fait $2.x + 2$).

Mais alors, horizontalement, les deux carrés D recouvrent $(2.x + 2) + 1$.

C'est donc que D a pour côté $x + \frac{3}{2}$.

Et le grand rectangle a pour hauteur $2.x + 2 + x + \frac{3}{2}$ (mesurée à droite sur le dessin)

largeur $(2.x + 1) + (2.x + 2)$ (mesurée en haut sur le dessin).

Mais le dernier carré E a pour côté $2.x$ (il est collé à deux carrés de type A).

Cette fois le grand rectangle a pour hauteur $(2.x) + x + (2.x + 1)$ (mesurée à gauche sur le dessin)

largeur $2.x + 2 . \left(x + \frac{3}{2} \right)$ (mesurée en bas sur le dessin).

On égalise : $3.x + \frac{7}{2} = 5.x + 1$ (hauteurs) et $4.x + 3 = 4.x + 3$.

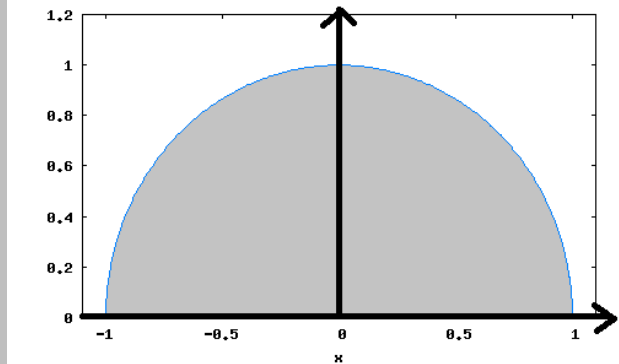
C'est cohérent : x vaut $\frac{5}{4} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & A & B & C & D & E \\ \hline 1 & \frac{5}{4} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & \frac{11}{4} & \frac{5}{2} \\ \hline \end{array}$

L'application $f = x \mapsto \frac{1}{1+|\sin(x/2)|}$ est continue... Mais pas dérivable (en 2π).
Le théorème de Rolle ne peut pas s'appliquer.

◦11◦

On note A l'ensemble des entiers dont l'écriture décimale ne contient aucun chiffre 2. Pour tout n , on définit la vaguetorielle : $n\} = \prod_{k=1}^n k^{k \in A}$ ($k \in A$ est un booléen, et $True = 1$, $False = 0$). Écrivez un script Python prenant n en entrée et calculant $n\}$.

Soit f une application de classe C^1 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. La longueur de l'arc de la courbe représentative de f est donnée par la formule $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$ (que l'on ne justifiera que plus tard dans l'année et qui était donnée et admise aussi dans le sujet de concours dont je me suis ici inspiré). Vérifiez la formule pour $f = t \mapsto \alpha \cdot t$ sur le segment $[a, b]$.
Vérifiez la formule pour $f = t \mapsto \sqrt{1 - t^2}$ sur le segment $[-1/2, 1/2]$ puis sur un segment $[a, b]$ inclus dans $[-1, 1]$.



◦12◦

On a intérêt à trouver la longueur d'un arc de cercle, puisque c'est ici l'équation d'un cercle.

Oui, je sais, pour vous, le cercle, centré sur l'origine, c'est $x^2 + y^2 = 1$. Et donc le demi cercle c'est $y = \sqrt{1 - x^2}$.

L'application est dérivable et on trouve $\sqrt{1 + (f'(t))^2} = \sqrt{1 + \frac{(-t)^2}{(\sqrt{1 - t^2})^2}} = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$.

Intégrer se fait sans difficulté :

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \text{Arcsin}(b) - \text{Arcsin}(a)$$

Ici, les bornes choisies donnent $\pi/3$, ce qui est bien le tiers de l'arc de cercle supérieur.

On est d'accord, le cercle est la ligne, le disque est la surface.

Faire des maths, c'est déjà nommer convenablement les objets, pour se comprendre !

Et sur $[-1, 1]$ entier, on trouve π .

Calculez la longueur du graphe du cosinus hyperbolique sur $[0, 1]$.

On a donc $y = ch(t)$, d'où $f'(t) = sh(t)$ et $\sqrt{1 + (f'(t))^2} = ch(t)$ grâce à la relation de Pythagore et à la positivité du cosinus hyperbolique.

On sait intégrer aisément : $\int_0^1 ch(t) dt = sh(1)$.

Et on sait intégrer entre deux points quelconques. C'est ce qui explique « à rebours » que le cosinus hyperbolique intervienne dans des problèmes physiques de corde qui pend entre deux points, sous le nom de chaînette.

Calculez la longueur du graphe de $t \mapsto t^2$ sur $[0, 1]$ (vous serez amené(e) à effectuer un changement de variable hyperbolique).

C'est étrange, mais avec une fonction aussi simple que $t \mapsto t^2$ (arc de parabole), le calcul est laborieux.

On doit calculer ici $\int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt$.

On va poser $2t = sh(u)$ pour retrouver le $\sqrt{1 + sh^2(t)}$ de tout à l'heure, si pratique à convertir.

Simplement, il faut changer les bornes (formule connue, avec des logarithmes), et l'élément différentiel : $dt = ch(u) du / 2$.

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \int_{u=0}^{\ln(2+\sqrt{1+2^2})} \sqrt{1 + sh^2(u)} \cdot \frac{ch(u) du}{2} = \int_{u=0}^{\ln(2+\sqrt{1+2^2})} \frac{ch^2(u) du}{2}.$$

On remplace $ch^2(u)$ par $\frac{1+ch(2u)}{2}$ et on intègre. Le terme en $sh(2u)$ va se simplifier en l'écrivant $\frac{(2+\sqrt{5})^2 - \left(\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right)^2}{2}$ et même $\frac{(2+\sqrt{5})^2 - (2-\sqrt{5})^2}{2}$.

Tous calculs (assez lourds) faits : $\int_0^1 \sqrt{1+4t^2} dt = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{4}$.

Une primitive de $t \mapsto \sqrt{1+4t^2}$ est $t \mapsto \frac{t\sqrt{1+4t^2}}{2} + \frac{\ln(2t+\sqrt{1+4t^2})}{4}$. On peut vérifier.

A suivre dans un problème plus long, avec des questions issues d'un sujet de concours.

◦13◦ Montrez : $\frac{\cos^4(\theta)}{a} + \frac{\sin^4(\theta)}{b} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{\cos^8(\theta)}{a^3} + \frac{\sin^8(\theta)}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$.

◦14◦ Un maraîcher regarde son stock de pommes :
les 24 pommes les plus légères, c'est 10 pour cent du poids
les 72 pommes les plus légères, c'est 30 pour cent du poids.
Combien a-t-il de pommes ?

◦15◦ Combien de solutions dans $\mathbb{N}^6$: $\frac{a^4+b^4+c^4}{a^4+\beta^4+\gamma^4} = 9$.

◦16◦ $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), D = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ Un élève dit que B est une base du sous-espace d'équation $x+y+z=t$ dans $\mathbb{R}^4$. Il dit ensuite que C est une base du sous-espace d'équation $2x+y=t$. Il déduit que l'intersection a pour base D . Trouvez l'erreur.

C'est vrai, B est de dimension 3 dans $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. C'est $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ en écrivant ses vecteurs sous

la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x+y+z \end{pmatrix}$.

Mais toute autre famille libre de trois vecteurs de B fait encore l'affaire. Et ici, c'est ce qu'on nous propose.

Sinon, on peut passer de ma base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ à la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ par un changement inversible :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui dit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et ainsi de suite.

On fait de même pour C qui est de dimension 3 aussi.

Certes le vecteur commun aux deux bases $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est dans $C \cap D$. Mais il n'est pas le seul.

$C \cap D$ est de dimension 2.

Il faut donc deux vecteurs pour en avoir une base.

Sous la forme équation, on peut trouver ça. Sous la forme « base », on ne cherche pas forcément du bon côté.

$x+y+z=t$ et $2x+y=t$

on a donc $t=2x+y$ et $z=x$ (équivalences).

On trouve que les vecteurs sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ 2x + y \end{pmatrix}$.

On a une base : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Et n'engendre qu'une droite dans ce plan.

Les vecteurs communs à deux sous-espaces ne sont pas les vecteurs communs à deux bases. Ce sont les vecteurs qui se décomposent suivant les deux bases à la fois...

Vos Miss m'ont déchu. Ils cherchent des taillis avec des sapins. Marine fait bien pire. Ils évacuent l'élue. C'est une bonne pause pour la Chine. Attention aux pires des canailles (circulaire). Ne vous battez plus, taisez vous ! Il faut éliminer l'écart des dus. Montrez moi vos pensions, je suis consultante. Ah, les luttes des crasses. Le traiteur colorie ses andouilles.

◦17◦

Soit la famille $(\vec{i}, \vec{i} + 5\vec{j}, 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{j} + 3\vec{k})$. Combien de familles libres peut-on en extraire ? Combien de familles génératrices de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ peut-on en extraire ?

$\vec{i}$	$\vec{i} + 5\vec{j}$	$2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$	$\vec{j} + 3\vec{k}$	
$\vec{i}$				libre car vide
	$\vec{i} + 5\vec{j}$			libre (un vecteur non nul)
		$2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$		libre (un vecteur non nul)
			$\vec{j} + 3\vec{k}$	
$\vec{i}$	$\vec{i} + 5\vec{j}$			libre (non colinéaires)
$\vec{i}$		$2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$		libre (non colinéaires)
				et ainsi de suite

On peut créer 2^4 (ce qui fait 16) familles.

Et une seule n'est pas libre, celle formée de tous les vecteurs (quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on sait que c'est fichu).

Mais sinon, les familles de trois sont libres $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ sont non nuls.

Total : 15 familles libres.

Pour les familles génératrices, il faut au moins trois vecteurs. Et chaque fois qu'on en prend trois, c'est bon, on a une base.

Et on peut y adjoindre la famille à quatre vecteurs.

D'où cinq familles génératrices de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Question : et si on s'autorise à prendre plusieurs fois le même ?

Et quatre bases. Avec six permutations pour chacune..

I~0) Pour f et g continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, on pose $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(t).g(t).dt$ et $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f | f \rangle}$.

Montrez : $\langle f | g \rangle \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ en étudiant $\int_{-1}^1 (\lambda.f(t) + g(t))^2 dt$.

I~1) Déduisez $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$.

I~2) On se donne h et on suppose $\int_{-1}^1 (h(t))^2 dt = 0$. On pose alors $H = x \mapsto \int_{-1}^x (h(t))^2 dt$. Montrez que H est croissante, calculez $H(-1)$ et $H(1)$, déduisez que h est constante, puis que h est nulle.

I~3) Retrouvez que $f \mapsto \|f\|_2$ est une norme sur $C_0([-1, 1], \mathbb{R})$.

I~4) Montrez que si f est non nulle, alors $\frac{f}{\|f\|_2}$ a pour norme 1.

II~0) Deux fonctions f et g sont dites orthogonales entre elles si on a $\langle f | g \rangle = 0$. Montrez que les applications paires sont orthogonales aux applications impaires.

II~1) On pose $L_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $L_1 = \frac{X \cdot \sqrt{6}}{2}$ et $H_2 = X^2 - \langle L_0 | X^2 \rangle \cdot L_0 - \langle L_1 | X^2 \rangle \cdot L_1$.

II~2) Vérifiez avec le minimum de calculs L_0 , L_1 et H_2 sont deux à deux orthogonales.

II~3) On pose alors $L_2 = \frac{H_2}{|H_2|_2}$ et $F = \mathbb{R}_2[X]$. Montrez que (L_0, L_1, L_2) est une base de $(F, +, \cdot)$ (orthonormée).

II~4) Si f est un élément de E , montrez que $\langle f | L_0 \rangle \cdot L_0 + \langle f | L_1 \rangle \cdot L_1 + \langle f | L_2 \rangle \cdot L_2$ (noté $\tilde{f}$) est dans F .

II~5) Montrez : $\langle f - \tilde{f} | L_i \rangle = 0$ pour tout i de $\{0, 1, 2\}$. Déduisez que $f - \tilde{f}$ est orthogonale à $\tilde{f}$ et à tous les P de E .

II~6) Déduisez $(|f|_2)^2 = (|\tilde{f}|_2)^2 + (|f - \tilde{f}|_2)^2$.

II~7) Déduisez pour tout p de F : $\int_{-1}^1 (f(t) - \tilde{f}(t))^2 \cdot dt \leq \int_{-1}^1 (f(t) - p(t))^2 \cdot dt$.

II~8) Trouvez a , b et c pour que $\int_{-1}^1 (e^t - (a \cdot t^2 + b \cdot t + c))^2 \cdot dt$ soit le plus petit possible (approximation de l'exponentielle par un trinôme sur $[-1, 1]$, optimale au sens des moindres carrés).

◊18◊

J'ai dans ma poche trois dés, chacun est un dé équilibré, numéroté de 1 à son nombre de faces,

- le premier a quatre faces (tétraèdre),
- le second en a six (cube)
- le dernier en a huit (octaèdre).

Je tire un dé au hasard (uniforme) et je le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir un 1 ?

Vous pouvez tracer un arbre. Mais l'horticulture c'est un cran au dessous de ce qu'on attend de vous.

Disons que l'arbre vous aidera à bien comprendre les choses (et même très bien les comprendre).

Mais la rédaction passera par trois théorèmes : probabilités totales, probabilités conditionnelles, formule de Bayes.

Vous devez utiliser la formule des probabilités totales.

On note Q l'événement « tétraèdre » (j'ai tiré le dé à quatre faces)

S l'événement « cube » (j'ai tiré le dé à six faces)

H l'événement « octaèdre » (j'ai tiré le dé à huit faces)

$$P(1) = P(1 \cap Q) + P(1 \cap S) + P(1 \cap H) = P_Q(1) \cdot P(Q) + P_S(1) \cdot P(S) + P_H(1) \cdot P(H) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}$$

Quelle est la probabilité d'obtenir un 8 ?

On calcule même chaque probabilité

$P(1) =$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$	$+$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}$	$+$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}$	$=$	$\frac{13}{72}$
$P(2) =$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$	$+$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}$	$+$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}$	$=$	$\frac{13}{72}$
$P(3) =$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$	$+$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}$	$+$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}$	$=$	$\frac{13}{72}$
$P(4) =$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$	$+$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}$	$+$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}$	$=$	$\frac{13}{72}$
$P(5) =$		$+$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}$	$+$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}$	$=$	$\frac{7}{72}$
$P(6) =$		$+$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}$	$+$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}$	$=$	$\frac{7}{72}$
$P(7) =$				$+$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}$	$=$	$\frac{3}{72}$
$P(8) =$				$+$	$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}$	$=$	$\frac{3}{72}$

Il est normal que 5 et 6 soient équiprobables.

Et sinon, on vérifie aussi $13 + 13 + 13 + 13 + 7 + 7 + 3 + 3 = 72$.

Quelle est la valeur moyenne du résultat obtenu ?

Pour ce qui est de l'espérance, on fait une moyenne pondérée. On a donc

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{72} + 2 \cdot \frac{13}{72} + 3 \cdot \frac{13}{72} + 4 \cdot \frac{13}{72} + 5 \cdot \frac{7}{72} + 6 \cdot \frac{7}{72} + 7 \cdot \frac{3}{72} + 8 \cdot \frac{3}{72} = \frac{252}{72} = \frac{7}{2}$$

On peut aussi faire une moyenne des espérances :

dé	tétraèdre	cube	octaèdre
espérance	$\frac{1+2+3+4}{4}$	$\frac{1+2+3+4+5+6}{6}$	$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8}$
pondération	$1/3$	$1/3$	$1/3$

On trouve $E(X) = E_T(X) \cdot P(T) + E_S(X) \cdot P(S) + E_H(X) \cdot P(H)$ et le résultat est le même.

Remarque :	Terminale	Prépas
	Arbres	Formule des probabilités totales

On recommence. Je tire un dé au hasard (uniforme) et je le lance. J'obtiens un 7. Quelle est la probabilité que j'aie tiré le tétraèdre ? Quelle est la probabilité que j'aie tiré l'octaèdre.

Quand on tire un dé au hasard, les probabilités a priori sont $P(Q) = P(S) = P(H) = \frac{1}{3}$.

Mais l'expérience « je lance un dé » modifie ces probabilités a priori en probabilités a posteriori.

Et si j'ai tiré un 7, on n'a pas le choix, c'est le dé octaèdre, avec probabilité 1.

Pareil si j'ai tiré un 8.

Si j'ai tiré un 6, je sais que j'ai tiré un octaèdre ou un cube, mais pas un tétraèdre. Ou alors je suis un menteur.

Et si je tire un 1, il est plus probable que j'ai tiré un tétraèdre (à quatre faces) qu'un octaèdre (à huit faces). Avec le tétraèdre, j'ai en effet deux fois plus souvent un 1 qu'avec l'octaèdre.

On recommence. Je tire un dé au hasard (uniforme) et je le lance. J'obtiens un 1. Quelle est la probabilité d'avoir tiré le dé à six faces ?

Soyons précis en étudiant l'événement « dé à six faces et j'ai un 1 ».

On y accède deux façons avec les probabilités conditionnelles $P(1 \cap S) = P_S(1) \cdot P(S)$

$$P(1 \cap S) = P_1(S) \cdot P(1)$$

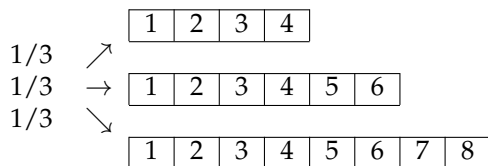
On a donc la probabilité du dé à six faces sachant qu'on a tiré un 1 : $P_1(S) = \frac{P_S(1) \cdot P(S)}{P(1)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{3}}{\frac{13}{72}} = \frac{4}{13}$.

$$P_1(Q) = \frac{P_Q(1) \cdot P(Q)}{P(1)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}}{\frac{13}{72}} = \frac{6}{13}$$

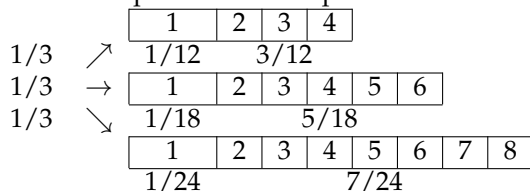
et

$$P_1(H) = \frac{P_H(1) \cdot P(H)}{P(1)} = \frac{\frac{1}{8} \times \frac{1}{3}}{\frac{13}{72}} = \frac{3}{13}$$

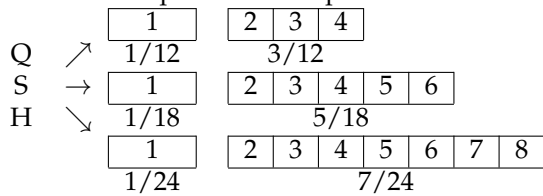
On a bien $P_1(Q) > P_S(1) > P_H(1)$ et $P_1(Q) > P_S(1) > P_H(1)$.



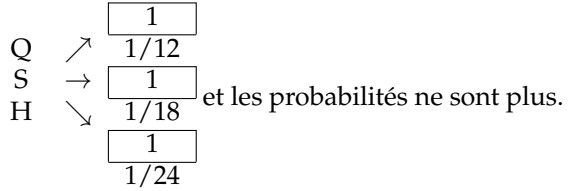
On écrit les probabilités cas par cas :



Puis on découpe l'univers a posteriori



maintenant que l'on a tiré un 1 il ne reste que



Avoir tiré un 1 renforce l'idée que ça puisse être le dé à quatre faces, il a quand même un 1 deux fois plus souvent que le dé à huit faces, non ? (1/12 face à 1/24).

On renormalise évidemment avec le facteur $\frac{13}{72}$ pour que la somme des probabilités vaille 1.