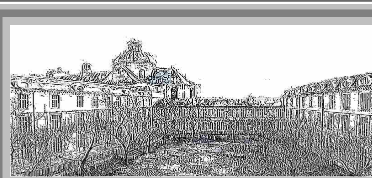
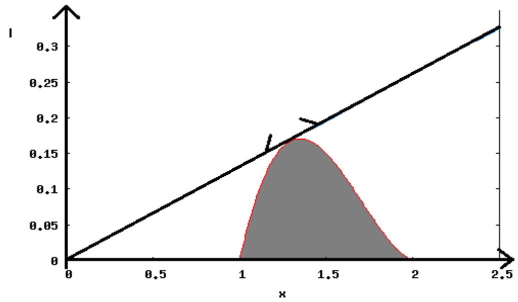
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 27 mai
M.P.S.I.2



2023 2024

TD30



∘0∘ ♡ Soit f dérivable de $[1,\ 2]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(1) = f(2) = 0$. On veut montrer qu'alors il existe un point c tel que la tangente au graphe de f en c passe par l'origine.
Donnez un polynôme de degré 2 vérifiant la condition $P(1) = P(2) = 0$ et trouvez le point c. Même question avec un polynôme de degré 3 *(choisissez le bien)*.
On passe au cas général. Montrez que la tangente au graphe de f en c passe par l'origine si et seulement si on a $f(c) = c.f'(c)$.
Choisissez bien une fonction auxiliaire φ qui, si vous lui appliquez le théorème de Rolle entre 1 et 2 donne justement le résultat indiqué.

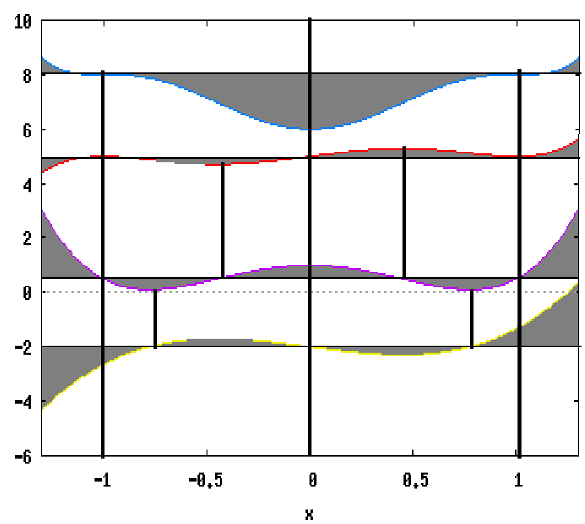
∘1∘ ♡ On pose : $f = x \longmapsto x^3 + (1-i).x^2 - (2+i).x + 2.i$. L'élève calcule $f(-2)$ et $f(1)$. Il déduit : $\exists c \in [-2,\ 1],\ f'(c) = 0$. Prouvez qu'il a tort. Alors, le théorème de Rolle n'est pas valable ?

∘2∘ Soit P un polynôme. Montrez que l'équation $P(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de racines *(en appliquant le théorème de Rolle en cascade)*.

∘3∘ **Théorème de Rolle "à l'infini".** Soit f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$ et une limite en $-\infty$, égales de surcroit. Montrez alors que la dérivée de f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
Indication : passez par $\theta \longmapsto f(\tan(\theta))$ que vous prolongez...

∘4∘ Pour tout n, on pose $H_n = (X^2-1)^n$ et $P_n = (H_n)^{(n)}$.
Calculez P_n pour n de 0 à 3 .
Montrez que chaque P_n est un polynôme, donnez son degré, son terme dominant et sa parité[a]
Montrez pour tout k de 0 à $n-1$: $(H_n)^{(k)}(1) = 0$.
Montrez que pour tout k de 0 à $n-1$, $(H_n)^{(k)}$ admet $k+2$ racines réelles distinctes entre -1 et 1.
Déduisez que les n racines du polynôme P_n sont entre -1 et 1. Calculez leur somme, et leur produit.
Écrivez un script **Python** qui pour n donné rend la liste des coefficients du polynôme P_n.

a. et surtout, surtout, ce n'est pas parce qu'on a calculé les premiers qu'il faut avoir le réflexe "je vais faire une récurrence"



Si le polynôme P de degré d admet d racines réelles, alors les racines du polynôme P' sont intercalées entre les racines de P.
Cette idée se généralise sur $\mathbb{C}$, sans pouvoir utiliser le théorème de Rolle (car il utilise l'ordre sur $\mathbb{R}$[1]). C'est dans une IS.

Le polynôme complexe P de degré 4 a pour racines a, b, c et d. P' a pour racines α, βet γ.
Montrez pour z dans $\mathbb{C} - \{a, b, c, d\}$: $\overline{\dfrac{P'(z)}{P(z)}} = \overline{\left(\dfrac{1}{z-a} + \dfrac{1}{z-b} + \dfrac{1}{z-c} + \dfrac{1}{z-d}\right)} = \dfrac{z-a}{|z-a|^2} + \dfrac{z-d}{|z-b|^2} + \dfrac{z-c}{|z-c|^2} +$

1. rappelons que $t \longmapsto e^{i.t}$ prend la même valeur en $-\pi$ et en π, est dérivable, mais sa dérivée ne s'annule pas sur $[-\pi,\ \pi]$ (la partie réelle s'annule une fois, la partie imaginaire aussi, mais pas en même temps)

$\dfrac{z-d}{|z-a|^2}$.

Déduisez qu'il existe quatre réels positifs λ_1 à λ_4 vérifiant $\alpha = \dfrac{\lambda_1.a+\lambda_2.b+\lambda_3.c+\lambda_4.d}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}$.
Déduisez que le triangle de sommets α,β et γ est inscrit dans le quadrilatère de sommets a, b, c et d.
Montrez que les deux racines de P'' et la racine de $P^{(3)}$ est aussi dans ce triangle.

Soit f n fois dérivable de I (intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$, admettant la même valeur en $n+1$ points, alors il existe au moins un point où $f^{(n)}$ s'annule.

On définit pour tout n : $P_n = \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$ Montrez que chaque $P_n$est un polynôme, donnez son degré, son terme dominant, sa parité, et montrez qu'il a n racines, toutes entre -1 et 1.

∘5∘ ♡♠ **Majoration de l'erreur dans la méthode de Simpson.** Soit g une application de classe C^4 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez qu'on peut ajuster A pour que $t \longmapsto \int_{-t}^{t} g(u).du - t.\dfrac{g(t)+4.g(0)+g(-t)}{3} - A.t^5$ (notée ϕ) soit nulle en 1 (et que vaut elle en 0 ?). Montrez que $\phi(-1)$ est nul aussi. Calculez $\phi'(0)$.
Déduisez que $\phi^{(3)}$ s'annule en au moins un point α de $]-1,\ 1[$ (Rolle and Rolle).
Exprimez alors A à l'aide de $g^{(3)}(\alpha)$, $g^{(3)}(-\alpha)$ et α.
Déduisez : $\left|\dfrac{g(-1)+4.g(0)+g(1)}{6} - \dfrac{1}{2}.\int_{-1}^{1} g(t).dt\right| \leqslant \dfrac{M_4(g)}{180}$ où $M_4(g)$ est la borne supérieure de $|g^{(4)}|$ sur $[-1,\ 1]$.

∘6∘ Déterminez la limite quand h tend vers 0 de $\dfrac{f(a+4.h)-4.f(a+3.h)+6.f(a+2.h)-4.f(a+h)+f(a)}{h^4}$ quand h tend vers 0 *(où f est une application de classe 4)*.

∘7∘ Soit f de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puis a, b et c trois réels distincts. On définit $\varphi = x \longmapsto (x-b).f(a)+(a-x).f(b)+(b-a).f(x)+(b-x).(x-a).A$. Ajustez A pour avoir $\varphi(a)=\varphi(b)=\varphi(c)$.
Déduisez : $\exists d \in \mathbb{R},\ \dfrac{f(a)}{(a-b).(a-c)} + \dfrac{f(b)}{(b-a).(b-c)} + \dfrac{f(c)}{(c-a).(c-b)} = \dfrac{f''(d)}{2}$.
Question subsidiaire : calculez la probabilité qu'un élève qui doit montrer la formule $\exists d \in \mathbb{R}, \ldots$ à l'oral des Mines pense à introduire la fonction φ.

∘8∘ ♡ Soit à présent f de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f et f'' bornées *(normes de la convergence uniforme notées M_0 et M_2)*. Montrez pour tout x : $f'(x) = f(x+1) - f(x) - \int_0^1 (1-t).f''(x+t).dt$. Déduisez que f' est aussi bornée.

∘9∘ Soit f une application dérivable de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ *($a < b$)*. On suppose $f'(a) = f'(b) = 0$. On définit : $\varphi = t \longmapsto \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$. Prolongez φ par continuité en a. Calculez $\varphi(b)$ et montrez $\varphi'(b) = \dfrac{f(a)-f(b)}{(b-a)^2}$. Déduisez, en appliquant le théorème des accroissements finis à φ : $\exists c \in]a,\ b[,\ \varphi'(c) = -\varphi'(b)$. Quel est le signe de $\varphi'(c).\varphi'(b)$? Déduisez : $\exists d \in]a,\ b[,\ f'(d) = \dfrac{f(d)-f(a)}{d-a}$.
Montrez que si l'on suppose maintenant $f'(a) = f'(b)$ et non plus $f'(a) = f'(b) = 0$, on a quand même $\exists d \in]a,\ b[,\ f'(d) = \dfrac{f(d)-f(a)}{d-a}$ *(on appliquera le résultat précédent à une application auxiliaire obtenue par soustraction de f et d'une application affine)*.

∘10∘ Pour f dérivable en a, déterminez la limite quand ε tend vers 0 de $\dfrac{3}{2.\varepsilon^3}.\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t.f(a+t).dt$ (Lanczos).

∘11∘ Le théorème de Darboux dit qu'une dérivée f' d'une application f de classe D_1 sur un intervalle I n'est pas forcément continue mais vérifie au moins le théorème des valeurs intermédiaires.
On prend donc f de classe D_1 *(pas forcément C_1)* sur un intervalle I. On se donne a et c dans I, on pose $f'(a) = \alpha$ et $f'(c) = \gamma$. On prend β entre α et γ, et on doit montrer qu'il existe un c vérifiant $f'(b) = \beta$.
Méthode 1. Montrez que $f - \beta.Id$ admet un maximum et un minimum sur $[a,\ c]$ (atteints en μ et ν). Montrez qu'il n'est pas possible que μ et ν soient en a et c (c'est à *dire qu'au moins μ ou ν est dans $]a,\ c[$*). Déduisez que $(f-\beta.Id)'$ est nulle en μ ou en ν. Concluez.

Méthode 2. On suppose qu'il n'existe aucun point b de $[a,\ c]$ vérifiant $f(b) = \beta$. Montrez alors que $f - \beta.Id$ est injective sur $[a,\ c]$. Déduisez qu'elle est monotone. Déduisez que $f' - \beta$ est de signe constant. Concluez.

Méthode 3. On pose $\varphi = x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $\phi = x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Prolongez φ par continuité en a. Prolongez ϕ par continuité en c. Montrez que l'image de $[a,\ b]$ par φ est un intervalle contenant $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$ et α, puis que l'image de $[a,\ b]$ par ϕ est un intervalle contenant $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$ et γ. Déduisez que β est dans $\varphi([a,\ c])$ ou dans $\phi([a,\ c])$. Déduisez qu'il existe c vérifiant $f'(b) = \beta$.

Montrez qu'il n'existe aucune application g vérifiant $g' = [.]$ *(partie entière)*.
Montrez qu'il n'existe aucune application g vérifiant $g' = 1_{\mathbb{Z}}$ *(indicatrice de $\mathbb{Z}$)*.
Montrez qu'il existe une infinité d'applications g vérifiant $g' = |.|$ *(valeur absolue)*.
Montrez que $x \longmapsto x^2.\sin(1/x)$ *(notée h)* se prolonge par continuité en 0, est alors dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que sa dérivée h' n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Montrez que h' vérifie le principe des valeurs intermédiaires.
Montrez que si une application φ vérifie le principe des valeurs intermédiaires sur $\mathbb{R}$ alors $|\varphi|$ le vérifie aussi.
Montrez qu'il existe S vérifiant $S' = |\sin'|$ et $S(0) = 0$. Calculez $S(\pi) - S(-\pi)$.

∘12∘ La superficie de la lune (à explorer), c'est l'Australie, la Chine, l'Afrique, l'océan Indien, l'océan Pacifique ?
Si la lune était un fromage, il faudrait combien de litres de lait ? La production des vaches pendant combien de siècles ?

∘13∘ ♠♡ On appelle “nombres conjugués” deux réels positifs p et q vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrez qu'ils dépassent 1. Qui est q pour $p = 2$?
On se donne deux réels a et b avec $a \leqslant b$. Dérivez deux fois $t \longmapsto (1-t).e^a + t.e^b - e^{(1-t).a+t.b}$. Déduisez que cette application est croissante puis décroissante sur $[0,\ 1]$. déduisez qu'elle est positive sur $[0,\ 1]$.
Déduisez pour tout couple $(u,\ v)$ de réels strictement positifs : $u.v \leqslant \dfrac{u^p}{p} + \dfrac{v^q}{q}$ *(que reconnait on pour $p = 2$?)*. Indication : $t = 1/q$, $e^a = u^p$.

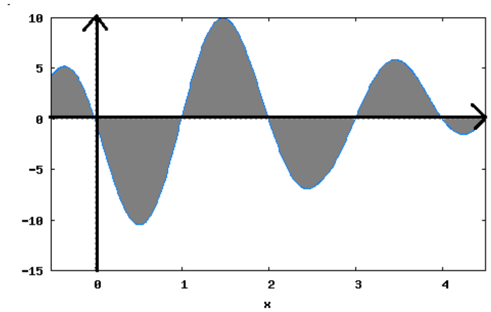
On se donne deux suites finies $(a_1, \dots a_n)$ et $(b_1, \dots b_n)$ de réels strictement positifs. On définit : $A = \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^p\right)^{1/p}$ et $B = \left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^q\right)^{1/q}$. Pour tout k, on pose $u_k = a_k/A$ et $v_k = b_k/B$.
Montrez $\sum_{k=1}^{n} a_k.b_k \leqslant \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^p}.\sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^q}$ *(inégalité de Hölder dite aussi de Minkowski)*.
Que retrouvez vous dans le cas $p = 2$?
Montrez pour f et g continues positives $\int_a^b f(t).g(t).dt \leqslant \sqrt[p]{\int_a^b (f(t))^p.dt}.\sqrt[q]{\int_a^b (g(t))^q.dt}$.

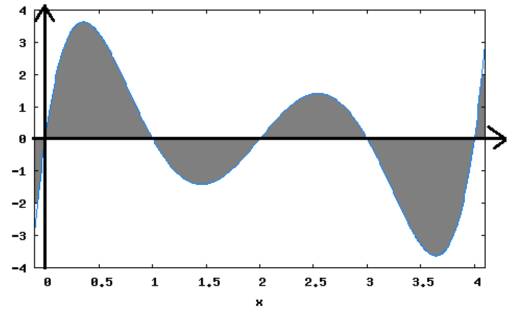
∘14∘ Vérifiez le lemme de Schwarz ($\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x}$) pour une fonction polynôme, par exemple $(x,\ y) \longmapsto x^3.y^2 + 4.x.y^3$ et plus généalement $(x,\ y) \longmapsto \sum_{i,k} a_{i,k}.x^i.y^k$.
Vérifiez le lemme de Schwarz pour $(x,\ y) \longmapsto \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ (remarque : serez vous assez stupide pour vous embarasser de la racine carrée ?).

∘15∘ Dans cette classe, il y a des garçons et des filles. Voici les moyennes

	moyenne de la classe	moyenne des garçons	moyenne des filles
mathématiques	11,4	10,6	12,5
physique	12,8		13,2

Retrouvez la moyenne qui manque.





∘16∘ ♡ Soit f une application de classe C^5, nulle en 0, 1, 2, 3 et 4.
On se donne a, ajustez A pour que $x \longmapsto f(x) - A.\prod_{k=0}^{4}(x-k)$ *(notée g)* soit nulle en a.
Déduisez que $g^{(5)}$ s'annule au moins une fois.
Déduisez $\exists c \in \mathbb{R}$,
$f(x) = \dfrac{x.(x-1).(x-2).(x-3).(x-4)}{5!}.f^{(5)}(c)$
Déterminez $Max(|x.(x-1).(x-2).(x-3)| \mid x \in [0,\ 4])$, noté S.
Montrez : $\forall x \in [0,\ 4],\ |f(x)| \leqslant S.M_5/5!$ avec $M_5 = Sup(|f^{(5)}(t)| \mid t \in \mathbb{R})$.

A défaut, je vous offre ceci, extrait du cours :
Soit F une application $n+1$ fois dérivable, s'annulant en n points a_1 à a_n d'un intervalle I (disons $\mathbb{R}$).
alors pour tout x, il existe c vérifiant $F(x) = \dfrac{(x-a_1).(x-a_2)\dots(x-a_n)}{n!}.F^{(n)}(c)$

∘17∘ Une application f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie : $\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ (a < b) \Rightarrow (\exists! c \in \mathbb{R},\ f(b) - f(a) = (b-a).f'(c))$.
Quelle est la différence avec le théorème des accroissements finis.
Montrez que les fonctions strictement convexes vérifient ce critère.
Montrez que seules les applications strictement convexes ou strictement concaves vérifient ce critère (on pourra raisonner par l'absurde et trouver un triplet $(a,\ b,\ c)$ avec $a < b < c$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} = 0$ puis conclure.

∘18∘

Soit f une application de classe C^2 de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. On définit

$I = \int_a^b f(t).dt$	$J = \int_a^b f'(t).\Big(t - \dfrac{a+b}{2}\Big)dt$	$K = \int_a^b f'\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big).\Big(t - \dfrac{a+b}{2}\Big)dt$

♡ 0 ♡ Calculez K.

♡ 1 ♡ Montrez : $I + J = (b-a).\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

♡ 2 ♡ Justifiez l'existence de $Sup\{|f''(t)| \mid t \in [a,\ b]\}$ *(notée M_2)*.

♡ 3 ♡ Montrez pour tout t de $[a,\ b]$: $\Big|f'(t) - f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big| \leqslant M_2.\Big|t - \frac{a+b}{2}\Big|$.

♡ 4 ♡ Déduisez : $\Big|I - \dfrac{f(a)+f(b)}{2}.(b-a)\Big| \leqslant \dfrac{M_2.(b-a)^3}{12}$.

♡ 5 ♡ Déduisez : $|I - T_n| \leqslant \dfrac{M_2.(b-a)^3}{12.n^2}$ où T_n est l'approximation de I par la méthode des trapèzes pour une équisubdivision de $[a,\ b]$ en n pas *(dont vous rappelerez la formule)*.

∘19∘ L'algorithme boustrophédon, c'est ça :

	1								
→	0	1							
	1	1	0	←					
→	0	1	2	2					
	5	5	4	2	0	←			
→	0	5	10	14	16	16			
	61	61	56	46	32	16	0	←	
→	0	61	122	178	224	256	272	272	
								272	

Quand on parcourt une ligne, on commence par 0, et ensuite, chaque terme est la somme du dernier terme calculé et d'un terme de la ligne au dessus (à vous de voir lequel), ou si vous préfèrerez le cumul des termes de la ligne au dessus. Ah oui, et à chaque bout de ligne, on change de sens.
Mettez le en place pour que, pour n donné, il donne la n^{ieme} ligne du boustrophédon.

A quoi sert cet algorithme ?

En bout de lignes, on a les coefficients du développement limité de la tangente en 0.
Et c'est utile, si si !
Surprise : $\tan(x) = 1.x + 0.\dfrac{x^2}{2} + 2.\dfrac{x^3}{6} + 0.\dfrac{x^3}{24} + 16.\dfrac{x^3}{120} + 0.\dfrac{x^3}{720} + 272.\dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)_{x\to 0}$

◦20◦ Existe-t-il une série numérique (non nulle) vérifiant $\forall n,\ a_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$?

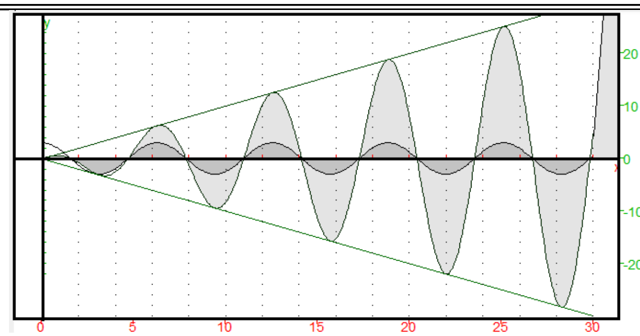
Même question pour $\forall n,\ a_n = -\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

◦21◦ Résolvez $16^{\cos^2(x)} + 16^{\sin^2(x)} = 10$ d'inconnue réelle x.

◦22◦ On pose $f = x \longmapsto \ln(\cos(x))$. Calculez $f^{(k)}(0)$ pour k de 0 à 4.
Donnez le développement limité de f en 0 à l'ordre 4.
Montrez que si on remplace f par son développement d'ordre 4 en 0 pour x entre $-\pi/4$ et$\pi/4$, l'erreur commise est inférieure ou égale à 10^{-1}.

◦23◦ Donner le domaine de définition de $x \longmapsto Arcsin(1-x^3)$.
Dérivez cette application sur $]0,\ \sqrt[3]{2}[$, et donnez la limite de sa dérivée en 0.
Montrez aussi que cette application est dérivable en 0 par la limite des taux d'accroissement *(on pourra poser $Arcsin(1-x^3) = \dfrac{\pi}{2} - h$ et étudier la limite quand h tend vers 0).*

◦24◦ ♡ Donnez toutes les matrices admettant $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteurs propres, de déterminant 10 et de trace 7.
(si vous commencez en posant quatre coefficients, c'est que vous n'êtes pas matheux, et si vous vous en tirez quand même, c'est que vous êtes...)



◦25◦ Ayant tracé le graphe de $x \longmapsto x.\cos(x)$, un élève dit « cette fonction atteint ses maxima en même temps que le cosinus : $k.\pi$ avec k entier) ». Montrez qu'il a tort.

◦26◦ ♡ Montrez que le développement limité de $x \longmapsto \ln\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120}\right)$ est $x - \dfrac{x^6}{720} + o(x^6)$.

◦27◦ Sur quel domaine est elle définie ? Sur quel domaine est elle continue ? Sur quel domaine est elle dérivable ?
$x \longmapsto \cos(\sqrt{x})$.
Mêmes questions avec $x \longmapsto \sqrt{\cos(x)}$.

◦28◦ ♡ Soit f de classe C^2 strictement convexe sur $\mathbb{R}$ ($f'' > 0$).
Montrez : $\forall a,\ \forall h,\ \exists!\theta \in]0,\ 1[,\ f(a+h) = f(a) + h.f'(a+\theta.h)$. (une moitié de la question, c'est juste du cours).
En comparant cette formule avec le développement limité d'ordre 2 de f en a et avec le développement limité d'ordre 1 de f' en a, montrez : $\theta \longrightarrow_{h\to 0} \dfrac{1}{2}$.

◦29◦ f est un C^1 difféomorphisme de $[a,\ b]$ sur $[c,\ d]$. Justifiez : $\int_a^b f(u).du + \int_c^d f^{-1}(v).dv = b.d - a.c$ *(on pourra dériver $\int_a^x f(u).du + \int_c^{f(x)} f^{-1}(v).dv$).*

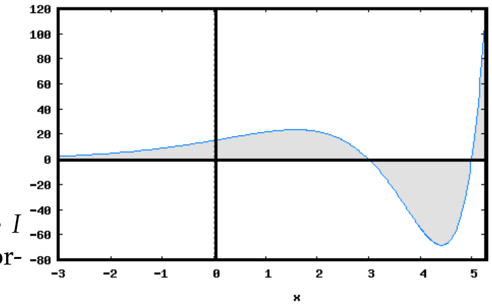
◦30◦ ♡ Soit f de classe C^2 strictement convexe sur $\mathbb{R}$ ($f'' > 0$).
Montrez : $\forall a,\ \forall h,\ \exists!\theta \in]0,\ 1[,\ f(a+h) = f(a) + h.f'(a+\theta.h)$. (une moitié de la question, c'est juste du cours).
En comparant cette formule avec le développement limité d'ordre 2 de f en a et avec le développement limité

d'ordre 1 de f' en a, montrez : $\theta \longrightarrow_{h\to 0} \dfrac{1}{2}$.

On prend cette fois f de classe C^3 avec $f^{(3)}$ strictement positive. Montrez :$\forall a,\ \forall h,\ \exists! \alpha \in]0,\ 1[,\ f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \dfrac{h^2}{2}.f''(a+\alpha.h)$.

Montrez : $\alpha \longrightarrow_{h\to 0} \dfrac{1}{3}$.

∘31∘ On pose : $f = x \longmapsto (x-3).(x-5).e^x$. Donnez un intervalle I contenant 2 le plus petit possible sur lequel f est un homéomorphisme *(de I vers quoi ?)*.



∘32∘ ♡ On rappelle : $\forall (a,\ h) \in \mathbb{R}^2,\ \exists \theta \in]0,\ 1[,\ f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \dfrac{h^2}{2}.f''(a+\theta.h)$ pour f deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminez θ pour les applications suivantes :

f	$x \longmapsto x^3$	exp	ln	sin
$\theta_{a,h}$				
$\lim_{h\to 0} \theta_{a,h}$				

∘33∘

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{Arctan(2.\sin(x)) - \frac{\pi}{4}}{\cos(3.x)}$	$\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\tan(x)}{1+th(x)}\right)^{\frac{1}{\sin^3(x)}}$	$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt[\frac{2}{x}]{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$

∘34∘ Développez $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ jusqu'à un terme en $o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

∘35∘ Donnez le développement limité d'ordre 3 en $t = 0$ de $Arctan(e^t)$ *(commencez par dériver)*.

∘36∘ Montrez que $x \longmapsto (1+e^x).x$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté f. Donnez le développement limité de f en 0 d'ordre 3 et celui de f^{-1} en 0 d'ordre 3.

Calculez $\displaystyle\int_0^{3.\ln(2)} f^{-1}(t).dt$.

∘37∘ ♡ Comparez le développement limité en 0 de $\dfrac{120+60.x+12.x^2+x^3}{120-60.x+12.x^2-x^3}$ et de e^x à l'ordre 7.

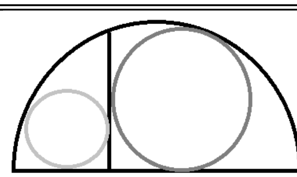
∘38∘ ♡ Montrez que $x \longmapsto x.e^{(x^2)}$ (notée f) réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Donnez le développement limité de f en 0 à l'ordre 5.
Montez que f^{-1} est impaire. Donnez le développement limité d'ordre 5 en 0 de f^{-1}.

∘39∘ a est un réel fixé. Donnez le développement limité d'ordre 6 en $h = 0$ de $e^{2.a.h}$, de e^{h^2}.
Déduisez le coéfficient de h^6 dans le développement limité d'ordre 6 en $h = 0$ de $e^{a^2}.e^{2.a.h}.e^{h^2}$.
Déduisez $f^{(6)}(a)$ pour $f = x \longmapsto e^{x^2}$.

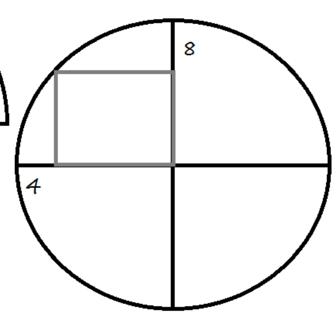
On veut calculer $I = \displaystyle\int_0^1 (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^\pi.dx$. On pose $t = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

Exprimez $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ à l'aide de t puis x lui même à l'aide de t.

∘40∘ Effectuez alors le changement de variable et calculez I.
Il n'y a pas de rapport entre les exercices.



rayon 2 rayon 4



Pour chacun des deux exercices, retrouvez le rayon du grand disque.

∘41∘ Donnez le développement limité d'ordre 3 en $x=0$ de $x \longmapsto \dfrac{3.x+7}{(x+3)^2}$ (et sans dériver, sinon je vous le demande à l'ordre 7).

∘42∘ Soit f continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f(t).dt = 0$. On pose $F = x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t).dt$ et $G = x \longmapsto \displaystyle\int_0^x t.f(t).dt$.
Montrez pour tout x de $[0,\ 1]$: $G(x) = \displaystyle\int_{t=0}^{x} (F(x) - F(t)).dt$.
Justifiez que F admet un maximum atteint en un point a de $[0,\ 1]$ et un minimum atteint en un point b de $[0,\ 1]$.
On suppose $(a,\ b) \in]0,\ 1[^2$ et $F(a) > 0 > F(b)$. Donnez le signe de $G(a)$ et $G(b)$.
Déduisez $\exists c \in]0,\ 1[,\ \displaystyle\int_0^c t.f(t).ft = 0$.
On suppose $F(a) > F(b) \geqslant 0$. Donnez le signe de $G(a)$ et $G(1)$. Déduisez $\exists c \in]0,\ 1[,\ \displaystyle\int_0^c t.f(t).ft = 0$.
On suppose $0 \geqslant F(a) \geqslant F(b)$. Montrez $\exists c \in]0,\ 1[,\ \displaystyle\int_0^c t.f(t).dt = 0$.

∘43∘ Montrez que $f \longmapsto |f(0)| + |f(1)| + Sup\{|f''(t)|\ |\ t \in [0,\ 1]\}$ est une norme sur $C^2([0,\ 1],\ \mathbb{R})$.
Montrez que $f \longmapsto |f(0) + f(1)| + Sup\{|f''(t)|\ |\ t \in [0,\ 1]\}$ n'est pas une norme sur $C^2([0,\ 1],\ \mathbb{R})$.

∘44∘ Le développement limité de $e^{\ln(x)}$ au voisinage de $x=e$ à l'ordre 3 est simple, donnez le moi.
Mais j'ai confondu, et je veux celui de $(\ln(x))^e$ au voisinage de $x=e$. Donnez le moi aussi *(à l'ordre 3)*[2].

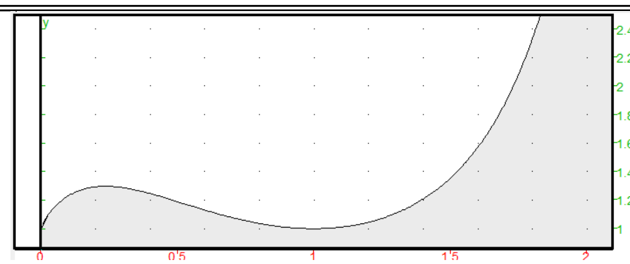
∘45∘ Justifiez pour toute application φcontinue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$: $\left(\displaystyle\int_a^b \varphi(t).dt\right)^2 \leqslant (b-a).\displaystyle\int_a^b \varphi(t)^2.dt$; dans quel cas a-t-on égalité ? Soit f dérivable de $[0,\ 8]$ dans $\mathbb{R}^*$ vérifiant $f(4) = \dfrac{1}{4} = (f(8))^2$ et $\displaystyle\int_4^8 \frac{(f'(t))^2}{(f(t))^4}.dt = 1$. Calculez $f(8)$ et $\displaystyle\int_4^8 \frac{f'(t)}{(f(t))^2}.dt$. Retrouvez le résultat de cet examen vietnamien cité par Presh Talwalkar : $f(6)$ vaut $\dfrac{1}{3}$ ou $\dfrac{1}{6}$.

∘46∘ Y a-t-il plus d'applications injectives de S_4 dans S_3 que de parties à 12 éléments dans S_4 *(rappel : $S_n$est l'ensemble des permutations d'un ensemble à n éléments)*.
S_3 est de cardinal 6 et S_4 est de cardinal 24.

∘47∘ Quelle est la limite en 1 de $\ln(x).\ln(1-x)$?

Donnez le développement limité en 1 de $\left(\frac{1}{x}\right)^{x^x}$.

Justifiez que le graphe de $x \longmapsto x^{x^2-x}$ a bien la forme indiquée ci contre *(limites aux bornes, sens de variations, pas forcément les coordonnées des extréma locaux)*.



∘48∘ Résolvez $\sqrt{666^{\sqrt{x}}} = 666^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ d'inconnue réelle x.

∘49∘ Montrez que $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$ se prolonge par continuité aux trois extrémités de son domaine de définition (d'ailleurs, c'est quoi ce domaine ?).

∘50∘ Quelle est la dimension de l'ensemble des fonctions polynômes lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

∘51∘ Combien l'équation $\log_7(x) + \log_8(x) = 1$ a-t-elle de solutions ? Calculez leur somme.

∘52∘ Résolvez : $2 - \cfrac{1}{\cfrac{1}{3} - \cfrac{1}{\cfrac{1}{4} - \cfrac{1}{x}}} = 5$ d'inconnue complexe x.

2. à défaut, l'ordre 2 c'est déjà bien, et l'ordre 1 c'est mieux que rien, et l'ordre 0, c'est mieux que de taper sur Sucri

◦53◦ On donne comme hypothèse : $\dfrac{u_{n+2}}{u_n} \mapsto_{n\mapsto+\infty} \dfrac{1}{4}$. Un élève prétend en déduire : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \mapsto_{n\mapsto+\infty} \dfrac{1}{2}$. Prouvez lui qu'il a tort.

◦54◦ Un élève prétend qu'on a
$\dim(F+G+H) = \dim(F)+\dim(G)+\dim(H) - \big(\dim(F\cap G)+\dim(F\cap G)+\dim(F\cap G)\big) + \dim(F\cap G\cap H)$
Montrez par un simple contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ qu'il a tort *(et pas seulement parce qu'il est élève)*.

◦55◦ Construisez (u_n) qui converge, tandis que $([u_n])$ diverge.

◦56◦ ♡ Sachant que M a pour polynôme caractéristique $X^4 - 5.X^3 + 2.X^2 - X + 1$, donnez le polynôme caractéristique de $M + I_4$, $2.M$ et M^2.
Rappel : $\det(X.I_n - M)$.

◦57◦ **Rappel des règles :**
Mettre dans le grille tous les entiers de 1 à 9 (certains sont déjà placés) pour que les trois additions en ligne et en colonne soient correctes :

		7	=	24
			=	11
4			=	10
=	=	=		
15	20	10		

et

			=	20
			=	10
	1		=	15
=	=	=		
22	.7	16		

◦0◦ ♡ Montrez $\sqrt[n]{n!} \sim \dfrac{n}{e}$ en utilisant le théorème de Cesàro sur $\dfrac{n^n}{n!}$.

◦1◦ ♡ Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(2.x-1)$ *(pourquoi pas ?)*. Montrez alors pour tout x, $f\left(\frac{x-1}{2^n}+1\right) = f(x)$. Montrez que $f\left(\frac{x-1}{2^n}+1\right)$ tend vers $f(1)$ quand n tend vers l'infini. Déduisez que f est constante.
Montrez que l'application $1_{\mathbb{Q}}$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(2.x-1)$ sans pour autant être constante.

◦2◦ On rappelle que pour un emprunt d'une somme de S euros au taux τ[3] d'une durée de n mois avec des mensualités d'un montant μ, on a les formules suivantes :

$\mu = \dfrac{\tau.S}{1-(1+\tau)^{-n}}$ et $n = -\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{\tau.S}{\mu}\right)}{\ln(1+\tau)}$ *(redémontrez les)*.
Donnez les limites de ces quantités quand τ tend vers 0. Est ce cohérent ?

◦3◦ On prend quatre chiffres distincts a, b, c et d. On crée tous les nombres à trois chiffres *(combien y en a-t-il ?)*. On les somme tous. On divise le résultat par $a+b+c+d$. Que trouve-t-on ?

◦4◦ Soit f une application continue de $[0,\ 1]$ dans $]0,\ 1]$. Montrez que pour tout n de $\mathbb{Z}$, f^n est bornée.
Attention, j'ai bien écrit $\mathbb{Z}$.

◦5◦ An old exercise from the Mathematical Gazette (1952) : Four members of my club -Messrs Albert, Charles, Frederick and Dick- have recently been knighted, so now their friends have to learn their Christian names. These are a bit troublesome : for it transpires that the surname of each of the four knights is the Christian name of one of the others.
Dick is not the Christian name of the member whose surname is Albert.
There are three of the knights related as follows : the Christian name of the member whose surname is Frederick is the surname of the member whose Christian name is the surname of the member whose Christian name is Charles.
Whats is Mr. Dick's first name ?

3. le taux τ, voilà une blague !