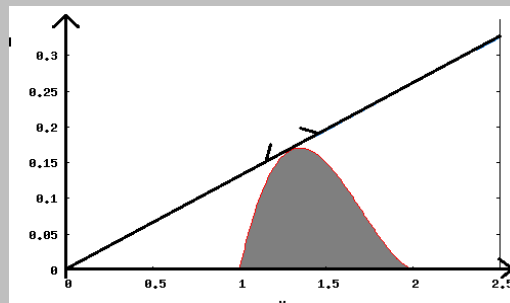


♡ Soit f dérivable de $[1, 2]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(1) = f(2) = 0$. On veut montrer qu'alors il existe un point c tel que la tangente au graphe de f en c passe par l'origine.

Donnez un polynôme de degré 2 vérifiant la condition $P(1) = P(2) = 0$ et trouvez le point c . Même question avec un polynôme de degré 3 (choisissez le bien).

On passe au cas général. Montrez que la tangente au graphe de f en c passe par l'origine si et seulement si on a $f(c) = c.f'(c)$.

Choisissez bien une fonction auxiliaire φ qui, si vous lui appliquez le théorème de Rolle entre 1 et 2 donne justement le résultat indiqué.



Un classique celui là.

Bon, un polynôme nul en 1 et en 2 : on le factorise en $\lambda.(X-1).(X-2)$ et même on se contente de $(X-1).(X-2)$. Maintenant, la vraie question : ça veut dire quoi que la tangente en c au graphe de f passe par l'origine.

Méthode Terminale (et Sup, mais décevante) : on écrit l'équation de la tangente en c : $y = f'(c).(x - c) + f(c)$.

On dit qu'elle passe par $(0, 0)$: $f(c) - f'(c).c = 0$.

Méthode Sup (et Terminale, mais bien) : on écrit que la droite OC a pour coefficient directeur $f'(c)$:

$$\frac{f(c) - 0}{c - 0} = f'(c)$$

C'est quand même plus clair à exposer ? Non ?

Mais le système français vous pousse à tout mettre en équations.

On doit donc résoudre ici $(c-1).(c-2) = c.(2c-3)$.

On trouve $\sqrt{2}$ (et aussi $-\sqrt{2}$ mais il n'est pas dans l'intervalle).

Pour le degré 3, on prend par exemple $(X-1).(X-2)^2$. Pourquoi ? parce que comme ça, déjà la tangente en 2 passe par l'origine, puisqu'elle se confond avec Ox.

L'équation devient $2.c^3 - 5.c^2 + 4 = 0$, avec la racine 2 évidente. Et en résolvant, on trouve $(c-2).(2.c^2 - c - 2) = 0$.

La nouvelle racine est $\frac{\sqrt{17}+1}{2}$, entre 1 et 2.

En général, l'exercice est posé directement dans le cas général.

On doit donc trouver, sous les seules hypothèses $f(1) = f(2) = 0$ (et f dérivable), c vérifiant $\frac{f(c)}{c} = f'(c)$.

Le théorème des valeurs intermédiaires ? On n'a pas d'hypothèse de continuité sur f' . On ne peut rien dire.

On regarde droit dans les yeux $c.f'(c) - f(c)$.

Ça vous fait penser à la dérivée de $c.f(c)$ à un signe près ? Bravo.

Ça vous fait penser à $u'.v - u.v'$? Encore mieux.

C'est le numérateur de la dérivée de $c \mapsto \frac{f(c)}{c}$? Gagné !

Considérons justement $g = x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.

Cette application est continue sur $[1, 2]$, dérivable sur $]1, 2[$ (et peut être plus).

Elle prend la même valeur nulle aux deux extrémités.

On peut lui appliquer le théorème de Rolle : $\exists c \in]1, 2[, \frac{c.f'(c) - 1.f(c)}{c^2} = 0$.

Et c'est fini. Tout reposait dans l'idée d'introduire $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ dont la dérivée nous donnait ce qu'on voulait. Un peu subtil, mais finalement « naturel ».

◦1◦

♥ On pose : $f = x \mapsto x^3 + (1 - i).x^2 - (2 + i).x + 2.i$. L'élève calcule $f(-2)$ et $f(1)$. Il déduit : $\exists c \in [-2, 1], f'(c) = 0$. Prouvez qu'il a tort. Alors, le théorème de Rolle n'est pas valable ?

C'est vrai : $f(1) = f(-2) = 0$ (le fait que ça fasse 0 n'a aucune importance).

Mais la dérivée n'a pas de racine entre -2 et 1 .

La dérivée c'est $3.x^2 + (2 - 2.i).x - (2 + i)$, et ses racines se calculent, et sont très laides, mais pas réelles.

Le théorème de Rolle n'est pas utilisable sur $\mathbb{C}$.

Il repose sur le lemme qui étudie le signe de la dérivée quand a fonction atteint un maximum. mais sur $\mathbb{C}$, il n'y a pas d'inégalités, de maximum, ni de signe...

Mais qu'est ce qu'il y a derrière en fait ?

Si on décompose : $f = x \mapsto \begin{matrix} x^3 & +x^2 & -2.x \\ -i.(& x^2 & +x & -2) \end{matrix}$. On a bien $f(-2) = \begin{matrix} 0 \\ +i.0 \end{matrix} = f(1)$.

Les deux fonctions $\Re(f)$ et $\Im(f)$ vérifient le théorème de Rolle

$\Re = (x \mapsto x^3 + x^2 - 2.x)$	$\Re(-2) = \Re(1) = 0$	$\exists c \in]-2, 1[, \Re'(c) = 0$	$c = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}$ et $c = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}$
$\Im = (x \mapsto x^2 + x - 2)$	$\Im(-2) = \Im(1) = 0$	$\exists c' \in]-2, 1[, \Im'(c) = 0$	$c' = \frac{-1}{2}$

Eh, oui ! Pas le même c pour la partie réelle et la partie imaginaire.

Parfois un « contre-exemple » permet de mieux encore cerner la propriété et ses tenants et aboutissants, et évite de dire des bêtises par la suite.

◦2◦

Soit P un polynôme. Montrez que l'équation $P(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de racines (en appliquant le théorème de Rolle en cascade).

Notons n le degré du polynôme, il va avoir un rôle fondamental pour limiter le nombre de racines.

Par exemple déjà, l'équation $P(x) = a$ ne peut pas avoir plus de n racines.

Je vous le refais d'ailleurs d'une autre façon.

Si P prend la même valeur 0 en $n + 1$ point (voire plus), on les ordonne : $a_0 < a_1 < \dots < a_n$.

On a n intervalles successifs sur lesquels appliquer le théorème de Rolle.

P' s'annule donc en n points

racines de P	a_0	$<$	a_1	$<$	a_2	$<$	$\dots$	a_{n-1}	$<$	a_n
racines de P'	α_0		α_1		α_2					α_{n-1}

On recommence : P'' s'annule en $n - 1$ point.

Jusqu'à $P^{(n)}$ s'annule en au moins un point.

Mais P' est un polynôme constant non nul. C'est contradictoire.

On va utiliser la même idée pour $P - \exp$.

Imaginons qu'il admette $n + 2$ racines qu'on ordonne (d'où $n + 1$ intervalles).

Alors $P' - \exp$ admet $n + 1$ racines.

Puis $P'' - \exp$ admet n racines.

Jusqu'à $P^{(n+1)} - \exp$ qui admet une racine.

Mais à trop dérivée, on est arrivé sur $-\exp$ toute seule. Et l'exponentielle ne s'annule pas.

◦3◦

Théorème de Rolle "à l'infini". Soit f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite en $+\infty$ et une limite en $-\infty$, égales de surcroît. Montrez alors que la dérivée de f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Indication : passez par $\theta \mapsto f(\tan(\theta))$ que vous prolongez...

Visuellement, ça se comprend. La même limite aux deux bornes, on doit avoir un point où le maximum (ou le minimum) est atteint, et en ce point, la tangente est horizontale.

Mais on va refaire le coup de « j'attrape l'infini et je le ramène à distance finie par la tangente ».

On définit donc $g = \theta \mapsto f(\tan(\theta))$.

C'est la composée de deux application continues, elle est continue sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et même dérivable.

On la prolonge par continuité aux bornes $\lim_{\theta \rightarrow (\pi/2)^-} f(\tan(\theta)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \alpha$.

$$\lim_{\theta \rightarrow (-\pi/2)^+} f(\tan(\theta)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \alpha$$

g est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, et prend la même valeur aux deux extrémités.

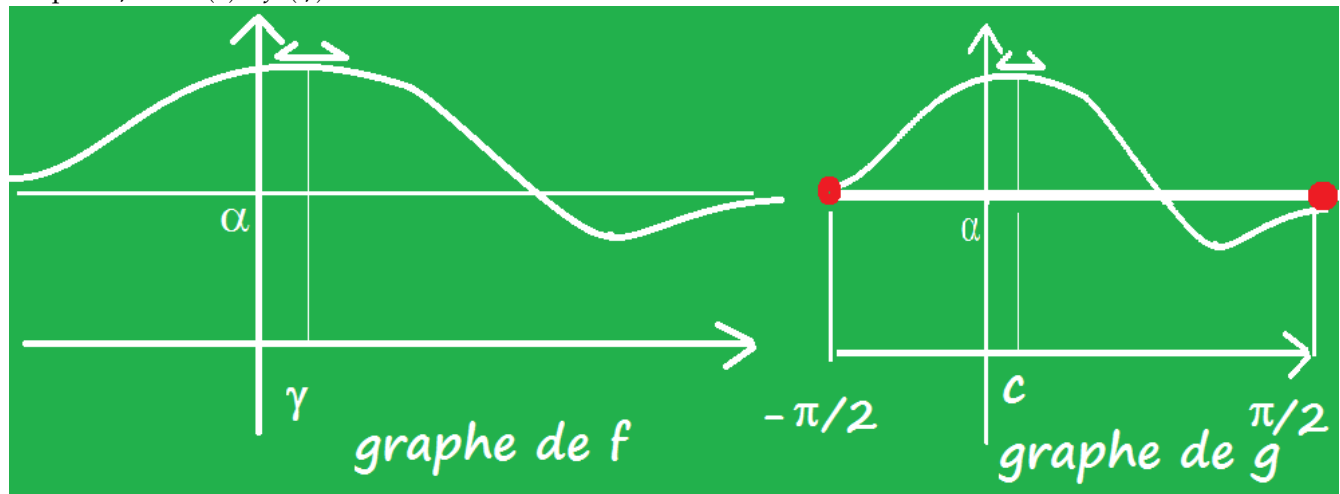
On est en plein dans le cadre d'application du théorème de Rolle (*dérivabilité sur l'intervalle ouvert, ouf !*).

Il existe c vérifiant $g'(c) = 0$.

On a alors $(1 + \tan^2(c)) \cdot f'(\tan(c)) = 0$.

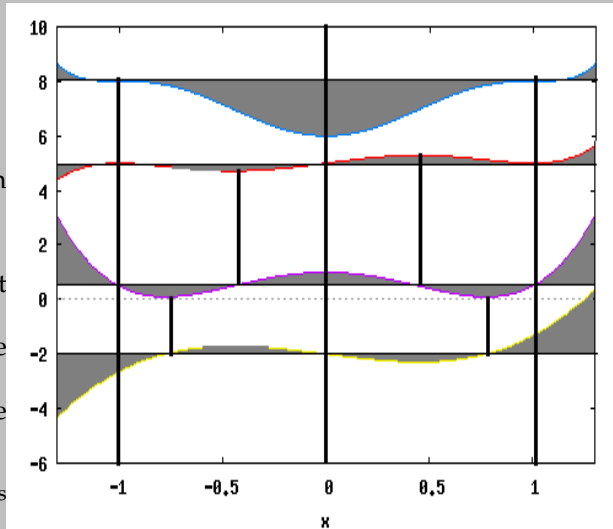
On simplifie par $(1 + \tan^2(c))$ non nul (*plus je croise cet exercice, plus je l'aime*).

On pose $\gamma = \tan(c) : f'(\gamma) = 0$. Fini.



Pour tout n , on pose $H_n = (X^2 - 1)^n$ et $P_n = (H_n)^{(n)}$.
 Calculez P_n pour n de 0 à 3.
 Montrez que chaque P_n est un polynôme, donnez son degré, son terme dominant et sa parité^a.
 Montrez pour tout k de 0 à $n - 1$: $(H_n)^{(k)}(1) = 0$.
 Montrez que pour tout k de 0 à $n - 1$, $(H_n)^{(k)}$ admet $k + 2$ racines réelles distinctes entre -1 et 1 .
 Déduisez que les n racines du polynôme P_n sont entre -1 et 1 . Calculez leur somme, et leur produit.
 Écrivez un script Python qui pour n donné rend la liste des coefficients du polynôme P_n .

^a. et surtout, surtout, ce n'est pas parce qu'on a calculé les premiers qu'il faut avoir le réflexe "je vais faire une récurrence"



40

Un classique encore, j'en profite pour livrer un bout de cours :

Déjà, au premier rang, on refait ce que raconta déjà Rolle :

si le polynôme P de degré d admet d racines réelles, alors les racines du polynôme P' sont intercalées entre les racines de P .

En effet quitte à ordonner les racines de P , on a $r_1 < r_2 < \dots < r_d$.

Sur les $d - 1$ intervalles $[r_k, r_{k+1}]$, on applique le théorème de Rolle : P est continu de $[r_k, r_{k+1}]$ dans $\mathbb{R}$

P est dérivable sur $]r_k, r_{k+1}[$

$P(r_k) = P(r_{k+1})$

Il existe donc un certain c_k tel vérifiant $P'(c_k)$.

De plus $r_1 < c_1 < r_2 < c_2 < r_3 < c_3 < \dots < c_{d-1} < r_d$, les c_k sont tous distincts.

On a trouvé $d - 1$ racines pour P' . On les a toutes.

Vocabulaire : si P est scindé, alors P' est scindé.

Un polynôme scindé est un polynôme qui s'écrit comme produit de polynômes de degré 1 : $P(X) =$

$$\lambda \cdot \prod_{k=1}^d (X - r_k).$$

C'est ce qui est utile pour les formules de Viète.

On sait déjà depuis la seconde que le sommet de la parabole est juste au milieu des deux racines. mais le résultat

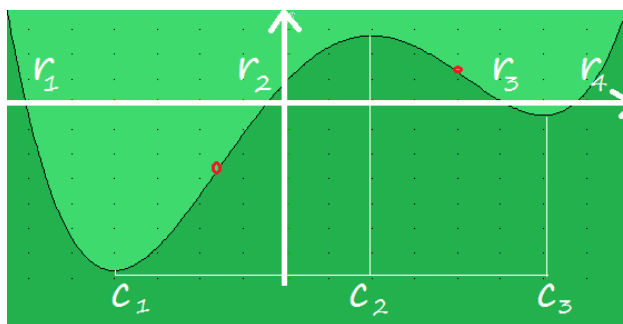
s'étend aux degrés plus élevés.

Petit détail supplémentaire : la moyenne $\frac{c_1 + \dots + c_{d-1}}{d-1}$ est égale à la moyenne $\frac{r_1 + r_2 + \dots + r_k}{k}$ (facile ! Viète).

On notera qu'on peut recommencer et insérer les racines de P'' entre les racines de P' .

Sur ce schéma, on a marqué en rouge les racines de P'' , qui sont des points d'inflexion.

Et on localise encore les racines de $P^{(3)}$. Et ainsi de suite.



Cette idée se généralise sur $\mathbb{C}$, sans pouvoir utiliser le théorème de Rolle (car il utilise l'ordre sur $\mathbb{R}^1$). C'est dans une IS.

Le polynôme complexe P de degré 4 a pour racines a, b, c et d . P' a pour racines α, β et γ .

$$\text{Montrez pour } z \text{ dans } \mathbb{C} - \{a, b, c, d\} : \frac{P'(z)}{P(z)} = \left(\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b} + \frac{1}{z-c} + \frac{1}{z-d} \right) = \frac{z-a}{|z-a|^2} + \frac{z-b}{|z-b|^2} + \frac{z-c}{|z-c|^2} + \frac{z-d}{|z-d|^2}.$$

Déduisez qu'il existe quatre réels positifs λ_1 à λ_4 vérifiant $\alpha = \frac{\lambda_1.a + \lambda_2.b + \lambda_3.c + \lambda_4.d}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}$.

Déduisez que le triangle de sommets α, β et γ est inscrit dans le quadrilatère de sommets a, b, c et d .

Montrez que les deux racines de P'' et la racine de $P^{(3)}$ est aussi dans ce triangle.

Maintenant, on généralise, même quand l'application n'est pas un polynôme.

Rolle en cascade.

Soit f n fois dérivable de I (intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$, admettant la même valeur en $n+1$ points, alors il existe au moins un point où $f^{(n)}$ s'annule.

☺ Le cas $n=1$ correspond exactement au théorème de Rolle : la fonction dérivable qui prend la même valeur en deux points a une dérivée qui s'annule au moins une fois.

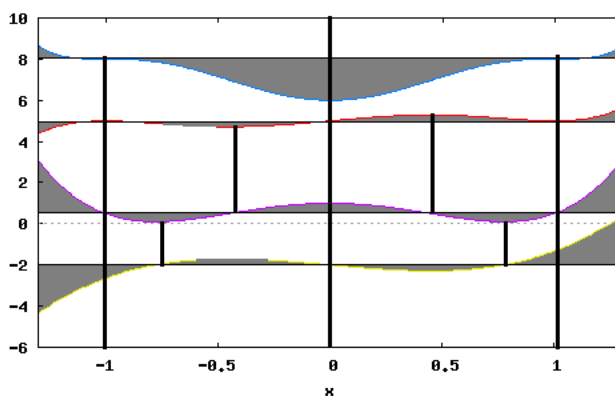
Pour l'hérédité, on suppose que toute application numérique qui prend la même valeur en $n+1$ points d'un intervalle a sa dérivée $n^{\text{ème}}$ qui s'annule au moins une fois. On prend alors une application f ($n+1$ fois dérivable) qui prend la même valeur en $n+2$ points d'un intervalle, qu'on va noter a_0 jusqu'à a_{n+1} , et qu'on va supposer triés par ordre croissant.

On applique le théorème de Rolle sur chacun des intervalles $[a_k, a_{k+1}]$ (f y est continue, dérivable, et prend la même valeur aux deux extrémités). Pour chacun, il existe au moins un point α_k de l'intervalle ouvert $]a_k, a_{k+1}[$ où f' s'annule :

$$a_0 < \alpha_0 < a_1 < \alpha_1 < a_2 \dots < \alpha_n < a_{n+1}$$

L'application f' est alors $n+1$ fois dérivable et prend la même valeur (nulle) en $n+1$ points distincts (les α_k pour k de 0 à n). Par hypothèse de récurrence, sa dérivée $n^{\text{ème}}$ s'annule au moins une fois. ☺

Et on va faire mieux avec l'exercice proprement dit : quand Rolle rencontre Leibniz.



1. rappelons que $t \mapsto e^{i.t}$ prend la même valeur en $-\pi$ et en π , est dérivable, mais sa dérivée ne s'annule pas sur $[-\pi, \pi]$ (la partie réelle s'annule une fois, la partie imaginaire aussi, mais pas en même temps)

Ce qui suit est classique, dans des sujets de concours et dans des oraux.

On définit pour tout n : $P_n = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$ Montrez que chaque P_n est un polynôme, donnez son degré, son terme dominant, sa parité, et montrez qu'il a n racines, toutes entre -1 et 1 .

Attention, pour définir P_n , on doit d'abord calculer $(X^2 - 1)^n$ puis le dériver n fois.

n	$(X^2 - 1)^n$	P_n
0	1	0
1	$X^2 - 1$	$2.X$
2	$X^4 - 2.X^2 + 1$	$12.X^2 - 4$
3	$X^6 - 3.X^4 + 3.X^2 - 1$	$120.X^3 - 72.X$

On fait tout de suite tomber les résultats évidents, en introduisant une notation : $Q_n(X) = (X^2 - 1)^n$. Et donc $P_n = (Q_n)^{(n)}$. C'est en créant cette notation qu'on commence à rendre les choses plus faciles à raconter.

- Chaque Q_n est un polynôme à coefficients entiers, donc chaque P_n est un polynôme à coefficients entiers.
- Q_n est de degré $2.n$, on le dérive n fois : P_n est de degré n .
- Le terme dominant de Q_n est $X^{2.n}$, donc P_n est de degré $2.n - n$
le terme dominant de P_n est $(2.n).(2.n - 1) \dots (n + 1).X^{2.n - n}$ c'est à dire $\frac{(2.n)!}{n!}.X^n$
- Q_n est pair ($Q_n(-x) = Q_n(x)$), donc
 - les dérivées de Q_n sont alternativement paires et impaires
 - P_n est pair pour n pair ($P_n(-x) = P_n(x)$)
 - P_n est impair pour n impair ($P_n(-x) = -P_n(x)$)
 - P_n a la même parité que n ($P_n(-x) = (-1)^n.P_n(x)$)
 - tous les termes de P_n ont des exposants de même parité

Maintenant, il faut identifier les racines de P_n .

On commence par Q_n prend la même valeur en -1 et en 1 (parité).

Donc, il existe un réel entre -1 et 1 où $(Q_n)'$ s'annule (en fait c'est en 0).

Mais ensuite ? Eh bien ensuite, $(Q_n)'$ est encore nul en -1 et 1 : $Q'_n(X) = n.2.X.(X^2 - 1)^{n-1}$.

Ainsi, Q'_n admet trois racines au moins : -1 , la racine « Rolle » et 1 .

On a trois racines, donc deux intervalles, donc deux racines pour sa dérivée Q_n'' , on les note $r_{2,0}$ et $r_{2,1}$.

D'accord, ça donne une racine pour $Q_n^{(3)}$. Mais mieux encore. Aux deux bornes de l'intervalle, il surgit encore deux racines :

$$Q_n''(X) = n.2.(X^2 - 1)^{n-1} + 4.n.(n - 1).X^2.(X^2 - 1)^{n-2}$$

est nul en -1 et 1 .

On sent venir la généralisation : à chaque étape, $(Q_n)^{(k)}$ a k racines venant du théorème de Rolle, mais il en gagne aussi deux en -1 et 1 .

Il a donc $k + 2$ racines successives.

Entre ces racines, il y a $k + 1$ intervalles, et donc $k + 1$ fois où l'on peut appliquer le théorème de Rolle.

Ce qui donne pour sa dérivée $k + 1$ racines.

Et c'est ce qu'on voulait !

Reste à rendre ceci rigoureux. C'est à vous de prendre l'initiative d'introduire des notations.

n est fixé pour tout l'exercice, ce n'est pas sur lui qui porte la récurrence, mais sur le nombre k de dérivations².

On va donc au rang k dire que $(Q_n)^{(k)}$ admet k racines. On va les nommer.

Il faut alors un double indice, pour dire « $i^{\text{ème}}$ racine de la dérivée $k^{\text{ième}}$ de Q_n » :

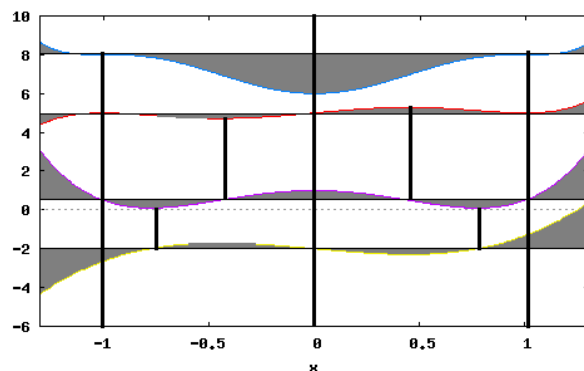
$$r_{k,1} < r_{k,2} < \dots < r_{k,k}.$$

On n'a que $k - 1$ intervalles, mais le coup de génie est de dire : $(Q_n)^{(k)}$ s'annule aussi en -1 et 1 .

On a donc maintenant :

$$-1 < r_{k,1} < r_{k,2} < \dots < r_{k,k} < 1$$

On applique le théorème de Rolle sur les $k + 1$ intervalles de $[-1, r_{k,1}]$ à $[r_{k,k}, 1]$ en passant par les $[r_{k,i}, r_{k,i+1}]$.

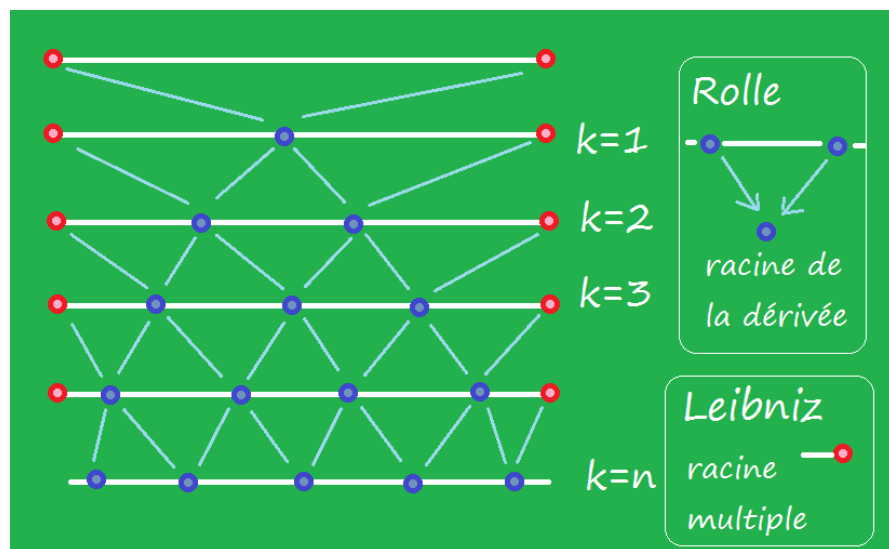


2. depuis le temps que vous vous tannez pour que vous disiez sur qui porte la récurrence !

Sur chaque intervalle $(Q_n)^{(k)}$ est continue, dérivable, et prend la même valeur (en l'occurrence 0) aux deux extrémités ; les théorème s'applique, et donne une racine de $(Q_n)^{(k+1)}$ qu'on note donc $r_{k+1,i}$.
On a donc pour $(Q_n)^{(k+1)}$:

$$-1 < r_{k+1,1} < r_{k,1} < r_{k+1,2} < r_{k,2} < r_{k+1,3} < \dots < r_{k,k} < r_{k+1,k+1} < 1$$

C'est le bon nombre de racines.



En colle où à un oral de concours, l'usage de craies de couleur semble s'imposer pour visualiser ceci.

Avec une couleur pour indiquer les racines obtenues par théorème de Rolle, et une couleur pour les racines qui reviennent en -1 et 1 par calcul des dérivées.

Petit détail quand même : on va jusqu'où comme ça ? Jusqu'à $(Q_n)^{(n)}$ qui admet alors n racines $-1 < r_{n,1} < r_{n,2} < \dots < r_{n,n} < 1$ (ici, n et k se rejoignent).

Ce qui devrait vous inquiéter : si on continue, on va avoir trop de racines !

Qu'est ce qui fait que le phénomène s'arrête au rang $k = n$?

cette fois ci, on n'a plus $(Q_n)^{(n)}(-1) = (Q_n)^{(n)}(1) = 0$ à rajouter aux bouts...

Mais on s'en moque, car $(Q_n)^{(n)}$ vient d'avouer qu'il avait n racines. Or, il est de degré n . On les a donc toutes. C'est le genre de détail qu'il faut surveiller pour bien dire qu'on a compris toute la question qui a été posée.

Et ensuite, on se dit qu'il reste quand même un problème :

il faut quand même justifier la formule $(Q_n)^{(k)}(-1) = (Q_n)^{(k)}(1) = 0$ qui fait resurgir une source à chaque bout du champ.

Et ce n'est pas si évident. Surtout si on se dit que les premières dérivées de Q_n sont $Q'_n(X) = n.2.X.(X^2 - 1)^{n-1}$ et

$$Q''_n(X) = n.2.(X^2 - 1)^{n-1} + 4.n.(n-1).X^2.(X^2 - 1)^{n-2}$$

Mais quel nom ai-je cité au début ? Leibniz. C'est une histoire de polynôme qui s'annule en -1 et en 1 .

On factorise $Q(X) = (X - 1)^n.(X + 1)^n$. Et on voit que -1 et 1 sont racines « très multiples » de Q_n . Les termes $(X - 1)$ et $(X + 1)$ vont rester en facteur même après plusieurs dérivations :

$$(Q_n)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \frac{k!(k)}{i!.(k-i)!} \cdot ((X+1)^n)^{(i)} \cdot ((X-1)^n)^{(k-i)}$$

tant que k et i sont assez petits, on sait dériver ces puissances :

$$((X+a)^n)^{(i)} = n.(n-1) \dots (n-i-1).(X+a)^{n-i}$$

(récurrence ? oui, sur qui ? sur i).

$$\text{et même } ((X+a)^n)^{(i)} = \frac{n!}{(n-i)!} \cdot (X+a)^{n-i}.$$

On reporte :

$$(Q_n)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \frac{k!(n!)^2}{i!.(k-i)!.(n-i)!.(n-k+i)!} \cdot (X+1)^{n-i} \cdot (X-1)^{n-k+i}$$

tant que k est plus petit que n (donc i aussi), les exposants sont restés strictement positifs, et on a bien $(Q_n)^{(k)}(1) = 0$, et $(Q_n)^{(k)}(-1) = 0$.

On est bien d'accord, c'est bien $(Q_n)^{(k)}(1) = 0$ et pas $(Q_n(1))^{(k)}$.

Un exercice assez dense, mais sans difficulté particulière.

◐5◐

♥♠ **Majoration de l'erreur dans la méthode de Simpson.** Soit g une application de classe C^4 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez qu'on peut ajuster A pour que $t \mapsto \int_{-t}^t g(u).du - t \cdot \frac{g(t) + 4g(0) + g(-t)}{3} - A.t^5$ (notée ϕ) soit nulle en 1 (et que vaut elle en 0?). Montrez que $\phi(-1)$ est nul aussi. Calculez $\phi'(0)$. Déduisez que $\phi^{(3)}$ s'annule en au moins un point α de $] -1, 1[$ (Rolle and Rolle). Exprimez alors A à l'aide de $g^{(3)}(\alpha)$, $g^{(3)}(-\alpha)$ et α .
Déduisez : $\left| \frac{g(-1) + 4g(0) + g(1)}{6} - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 g(t).dt \right| \leq \frac{M_4(g)}{180}$ où $M_4(g)$ est la borne supérieure de $|g^{(4)}|$ sur $[-1, 1]$.

On définit $t \mapsto \int_{-t}^t g(u).du - t \cdot \frac{g(t) + 4g(0) + g(-t)}{3} - A.t^5$ parce qu'il faut bien le faire

(spontanément, comment y penser?).

Comme g est continue, ϕ est dérivable. En notant G une primitive (dérivable) de g , on a $\Phi(t) = G(t) - G(-t) - t \cdot \frac{g(t) + 4g(0) + g(-t)}{3} - A.t^5$.

A va venir d'une équation bien laide : $\int_{-1}^1 g(u).du + 1 \cdot \frac{g(1) + 4g(0) + g(-1)}{3} = A$.

Contentons nous de l'appeler A .

On calcule $\phi(0) = 0$.

On constate directement que ϕ est impaire :

$$\phi(-t) = \int_t^{-t} g(u).du + t \cdot \frac{g(-t) + 4g(0) + g(t)}{3} + A.t^5 = - \int_t^t g(x).dx + t \cdot \frac{g(-t) + 4g(0) + g(t)}{3} + A.t^5$$

Si nécessaire, on dérive quelques fois :

$\phi(t) =$	$G(t) - G(-t) - t \cdot \frac{g(t) + 4g(0) + g(-t)}{3} - A.t^5$
$\phi'(t) =$	$g(t) + g(-t) - t \cdot \frac{g'(t) - g'(-t)}{3} - \frac{g(t) + 4g(0) + g(-t)}{3} - 5.A.t^4$
$\phi''(t) =$	$g'(t) - g'(-t) - t \cdot \frac{g''(t) + g''(-t)}{3} - \frac{g'(t) - g'(-t)}{3} - \frac{g'(t) - g'(-t)}{3} - 40.A.t^3$
$\phi^{(3)}(t) =$	$g''(t) + g''(-t) - t \cdot \frac{g^{(3)}(t) - g^{(3)}(-t)}{3} - \frac{g''(t) + g''(-t)}{3} - \frac{g''(t) + g''(-t)}{3} - \frac{g''(t) + g''(-t)}{3} - 120.A.t^2$
	$= -t \cdot \frac{g^{(3)}(t) - g^{(3)}(-t)}{3} - 120.A.t^2$
$\phi^{(4)}(t) =$	$-t \cdot \frac{g^{(4)}(t) + g^{(4)}(-t)}{3} - \frac{g^{(3)}(t) - g^{(3)}(-t)}{3} - 240.A.t$

On calcule au passage

$$\phi'(0) = g(0) + g(0) - 0 \cdot \frac{g'(0) - g'(0)}{3} - \frac{g(0) + 4g(0) + g(0)}{3} - 5.A.0^4 = 0$$

On va appliquer le théorème de Rolle à ϕ sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$, puis à ϕ' sur deux intervalles.

$\phi(-1) = 0$		$\phi(0) = 0$		$\phi(1) = 0$
	$\exists a \in]-1, 0[, \phi'(a) = 0$	$\phi'(0) = 0$	$\exists b \in]-1, 0[, \phi'(b) = 0$	
	$\exists c \in]a, 0[, \phi''(c) = 0$		$\exists d \in]0, 1[, \phi''(d) = 0$	
	$\exists \alpha, \phi^{(3)}(\alpha) = 0$			

On regarde ce que nous dit cette ligne $\phi^{(3)}(\alpha) = 0 : 0 = -t \cdot \frac{g^{(3)}(t) - g^{(3)}(-t)}{3} - 120.A.t^2$.

A suivre et à rectifier.

◐6◐

Déterminez la limite quand h tend vers 0 de $\frac{f(a+4h) - 4f(a+3h) + 6f(a+2h) - 4f(a+h) + f(a)}{h^4}$ quand h tend vers 0 (où f est une application de classe 4).

$f(a + 4.h)$	=	$f(a)$	$+4.h.f'(a)$	$+ \frac{16}{2}.h^2.f''(a)$	$+ \frac{64}{6}.f^{(3)}(a)$	$+ \frac{256}{24}.h^4.f^{(4)}(a)$	$+o(h^4)$
$-4.f(a + 3.h)$	=	$-4.f(a)$	$-12.h.f'(a)$	$-4.\frac{2}{3}.h^2.f''(a)$	$-4.\frac{27}{6}.f^{(3)}(a)$	$-4.\frac{81}{24}.h^4.f^{(4)}(a)$	$+o(h^4)$
$6.f(a + 2.h)$	=	$+6.f(a)$	$+12.h.f'(a)$	$+6.\frac{2}{3}.h^2.f''(a)$	$+6.\frac{8}{6}.f^{(3)}(a)$	$+6.\frac{16}{24}.h^4.f^{(4)}(a)$	$+o(h^4)$
$-4.f(a + h)$	=	$-4.f(a)$	$-4.h.f'(a)$	$-4.\frac{1}{2}.h^2.f''(a)$	$-4.\frac{1}{6}.f^{(3)}(a)$	$-4.\frac{1}{24}.h^4.f^{(4)}(a)$	$+o(h^4)$
$f(a)$	=	$f(a)$					
somme	=	0	$+0.h$	$+0.h^2$	$+0.h^3$	$+h^4$	$+o(h^4)$

La limite vaut $f^{(4)}(a)$.

Trop fort !

◊7◊

Soit f de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ puis a, b et c trois réels distincts. On définit $\varphi = x \mapsto (x - b).f(a) + (a - x).f(b) + (b - a).f(x) + (b - x).(x - a).A$. Ajustez A pour avoir $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c)$.

Déduisez : $\exists d \in \mathbb{R}, \frac{f(a)}{(a - b).(a - c)} + \frac{f(b)}{(b - a).(b - c)} + \frac{f(c)}{(c - a).(c - b)} = \frac{f''(d)}{2}$.

Question subsidiaire : calculez la probabilité qu'un élève qui doit montrer la formule $\exists d \in \mathbb{R}, \dots$ à l'oral des Mines pense à introduire la fonction φ .

On définit donc $\varphi = x \mapsto (x - b).f(a) + (a - x).f(b) + (b - a).f(x) + (b - x).(x - a).A$.

On calcule	$\varphi(a) = 0$
	$\varphi(b) = 0$
	$\varphi(c) = (c - b).f(a) + (a - c).f(b) + (a - b).f(c) + A.(b - c).(c - a)$

On pose donc $A = \frac{(c - b).f(a) + (a - c).f(b) + (a - b).f(c)}{(c - b).(c - a)}$ "tout naturellement".

L'application φ est de classe D^2 sur $\mathbb{R}$ et prend la même valeur en trois points distincts.

En appliquant le théorème de Rolle sur $[a, b]$ puis sur $[b, c]$ si les trois points sont dans cet ordre (continue, dérivable), on déduit que φ' s'annule en deux points distincts (distincts car intervalles ouverts, donc les deux nombres sont séparés par b).

On ré applique le théorème de Rolle à φ' (dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle entre les deux racines) : il existe au moins un point où φ'' s'annule.

On calcule : $\varphi'' = x \mapsto (b - a).f''(x) - 2.A$ (les fonctions affines ont disparu).

En notant d le point où φ'' s'annule, on a alors $A = \frac{f''(d).(b - a)}{2}$.

Classiquement, on reporte dans l'information $\varphi(c) = 0$:

$$(c - b).f(a) + (a - c).f(b) + (b - a).f(c) + (b - c).(c - a).\frac{f''(d).(b - a)}{2} = 0.$$

On fait passer d'un même côté : $(c - b).f(a) + (a - c).f(b) + (b - a).f(c) = (c - b).(c - a).\frac{f''(d).(b - a)}{2}$.

On divise par $(c - b).(c - a).(b - a)$ (non nul) :

$$\frac{1}{(c - a).(b - a)}.f(a) + \frac{-1}{(c - b).(b - a)}.f(b) + \frac{1}{(c - b).(c - a)}.f(c) = \frac{f''(d)}{2}$$

C'est la formule attendue.

Et la probabilité qu'un élève pense à introduire φ est égale à la probabilité qu'il vienne d'un lycée où on distribue en Spé les listes d'exercices d'oraux du concours Commun Mines-Ponts. A une époque, les élèves de Ginette disposaient de cette banque d'exercices et avaient pour consigne de ne la céder à personne. Depuis, le Concours Commun a tourné l'injustice en forçant ses examinateurs d'oral à renouveler leurs exercices d'une année sur l'autre. Pareil pour l'X, avec diffusion des exercices posés. mais les élèves de Ginette continuent de piquer quinze à vingt pour cent des places ☺.

◊8◊

♥ Soit à présent f de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f et f'' bornées (normes de la convergence uniforme notées M_0 et M_2). Montrez pour tout x : $f'(x) = f(x + 1) - f(x) - \int_0^1 (1 - t).f''(x + t).dt$. Déduisez que f' est aussi bornée.

On écrit simplement une formule de Taylor entre x et $x + 1$ (donc $h = 1$) :

$$f(x + 1) = f(x) + 1.f'(x) + \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - t).f''(x + t).dt$$

On fait juste passer un terme de l'autre côté et c'est bon.

On passe aux valeurs absolues et on majore :

$$|f'(x)| \leq |f(x)| + |f(x+1)| + \int_0^1 (1-t) \cdot |f''(x+t)| \cdot dt$$

Comme on a supposé f et f'' bornées, on nomme même les bornes supérieures de leurs valeurs absolues :

$$|f'(x)| \leq \|f\| + \|f\| + \int_0^1 (1-t) \cdot \|f''\| \cdot dt = 2\|f\| + \frac{\|f''\|}{2}$$

Comme ceci est vrai pour tout f , f' est bornée, et on a même $\|f'\| \leq 2\|f\| + \frac{\|f''\|}{2}$.

On a même des variantes pour encadrer encore plus finement la dérivée première par une combinaison de $\|f\|$ et $\|f''\|$.

9.

Soit f une application dérivable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ ($a < b$). On suppose $f'(a) = f'(b) = 0$. On définit : $\varphi = t \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$. Prolongez φ par continuité en a . Calculez $\varphi(b)$ et montrez $\varphi'(b) = \frac{f(a) - f(b)}{(b-a)^2}$. Déduisez, en appliquant le théorème des accroissements finis à $\varphi : \exists c \in]a, b[, \varphi'(c) = -\varphi'(b)$. Quel est le signe de $\varphi'(c) \cdot \varphi'(b)$? Déduisez : $\exists d \in]a, b[, f'(d) = \frac{f(d) - f(a)}{d - a}$. Montrez que si l'on suppose maintenant $f'(a) = f'(b)$ et non plus $f'(a) = f'(b) = 0$, on a quand même $\exists d \in]a, b[, f'(d) = \frac{f(d) - f(a)}{d - a}$ (on appliquera le résultat précédent à une application auxiliaire obtenue par soustraction de f et d'une application affine).

Comme f est dérivable sur $[a, b]$, elle l'est entre autres en a , les taux d'accroissement en a ont donc une limite. $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers $f'(a)$ quand x tend vers a .

On pose donc $\varphi(a) = f'(a) = 0$.

Et on calcule $\varphi(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

D'autre part, tant que le dénominateur ne s'annule pas, par théorème φ est dérivable sur $]a, b[$: $\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{x - a} - \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2}$.

On calcule en b : et justement $f'(b)$ est nul par hypothèse.

D'après le théorème des accroissements finis (φ est continue sur $[a, b]$ car prolongée par continuité, φ est dérivable sur $]a, b[$ (et même en b).

Il existe c entre a et b vérifiant $\varphi'(c) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}$.

Or, $\varphi(a)$ est nul. Et $\varphi(b)$ vaut $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On a donc : $\varphi'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)^2}$.

Le hasard (mais en est-ce un ?) fait bien les choses le membre de droite est $\varphi'(b)$ au signe près.

On a bien obtenu $\varphi'(c) = -\varphi'(b)$ pour un c de $]a, b[$.

Les deux réels $\varphi'(c)$ et $\varphi'(b)$ sont de signes opposés.

φ va donc changer de signe. Par continuité (si φ est de classe C^1 ce qui revient à demander f de classe C^1)

Par théorème de Darboux qui dit qu'une dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

φ' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[c, b]$ inclus dans $]a, b[$.

On note d un tel point : en d on a $0 = \varphi'(d) = \frac{f'(d)}{d - a} - \frac{f(d) - f(a)}{(d - a)^2}$.

On fait passer de l'autre côté, on simplifie : $f'(d) = \frac{f(d) - f(a)}{d - a}$.

Doit-on interpréter géométriquement ? Il existe un point où la tangente passe par $A(a, f(a))$.

On se laisse guider par les questions, mais on est en droit de se demander comment on aurait pu penser à ça spontanément. rassurez vous, aux concours, on vous guide pour inviter ne fonction telle que φ et introduire c et d .

Passons à « Montrez que si l'on suppose maintenant $f'(a) = f'(b)$ et non plus $f'(a) = f'(b) = 0$, on a quand même $\exists d \in]a, b[, f'(d) = \frac{f(d) - f(a)}{d - a}$ ».

Là, c'est classique, ce que vous devrez faire.

On a $f'(a) = f'(b)$. On note α ce réel, et on veut une application vérifiant $F'(a) = F'(b)$?

On définit $F = x \mapsto f(x) - \alpha \cdot x$.

On a cette fois $F'(a) = f'(a) - \alpha = 0$ et $F'(b) = f'(b) - \alpha = 0$.

On peut lui appliquer le théorème précédent : il existe d vérifiant $F'(d) = \frac{F(d) - F(a)}{d - a}$.

On remplace : $f'(d) - \alpha = \frac{f(d) - f(a) - \alpha \cdot (d - a)}{d - a}$. Les α se simplifient. Et on a $f'(d) = \frac{f(d) - f(a)}{d - a}$.

Ce coup de $f(x) - \alpha \cdot x$ me fait vraiment penser au passage du théorème de Rolle à celui des Accroissements Finis.

◦10◦ Pour f dérivable en a , déterminez la limite quand ε tend vers 0 de $\frac{3}{2 \cdot \varepsilon^3} \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t \cdot f(a + t) \cdot dt$ (Lanczos).

Comme ε va tendre vers 0, t va le faire aussi, et on va pouvoir utiliser un développement limite pour $f(a + t)$: $f(a + t) = f(a) + t \cdot f'(a) + o(t)$.

On remplace dans l'intégrale $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t \cdot f(a + t) \cdot dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t \cdot f(a) \cdot dt + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t^2 \cdot f'(a) \cdot dt + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} o(t^2) \cdot dt$ par linéarité.

Le premier terme est nul (fonction impaire sur un intervalle symétrique, ou calcul $f(a) \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon}$).

Le second donne $f'(a) \cdot \frac{2 \cdot \varepsilon^3}{3}$.

Le dernier donne $o(\varepsilon^3)$.

On multiplie par 3, on divise par $2 \cdot \varepsilon^3$: $\frac{3}{2 \cdot \varepsilon^3} \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t \cdot f(a + t) \cdot dt = f'(a) + o(1)$.

Et quand ε tend vers 0, il ne reste que $f'(a)$.

C'est une astuce utilisée pour calculer la dérivée d'une fonction en passant par des intégrales.

Et les calculs d'intégrales sont moins sensibles aux erreurs d'arrondis.

C'est utile en physique quand votre fonction est en fait un graphe issu d'un très grand tableau de mesures.

◦11◦ Le théorème de Darboux dit qu'une dérivée f' d'une application f de classe D_1 sur un intervalle I n'est pas forcément continue mais vérifie au moins le théorème des valeurs intermédiaires.

On prend donc f de classe D_1 (pas forcément C_1) sur un intervalle I . On se donne a et c dans I , on pose $f'(a) = \alpha$ et $f'(c) = \gamma$. On prend β entre α et γ , et on doit montrer qu'il existe un b vérifiant $f'(b) = \beta$.

Méthode 1. Montrez que $f - \beta \cdot Id$ admet un maximum et un minimum sur $[a, c]$ (atteints en μ et ν). Montrez qu'il n'est pas possible que μ et ν soient en a et c (c'est à dire qu'au moins μ ou ν est dans $]a, c[$). Déduisez que $(f - \beta \cdot Id)'$ est nulle en μ ou en ν . Concluez.

Posons $g = f - \beta \cdot Id$.

On va montrer que g' s'annule en au moins un point c , et ce point c sera le point où g atteint son minimum.

Visuellement, on part de a avec dérivée négative, on part donc vers le bas, on arrive en b en « montant », donc le minimum était entre les deux.

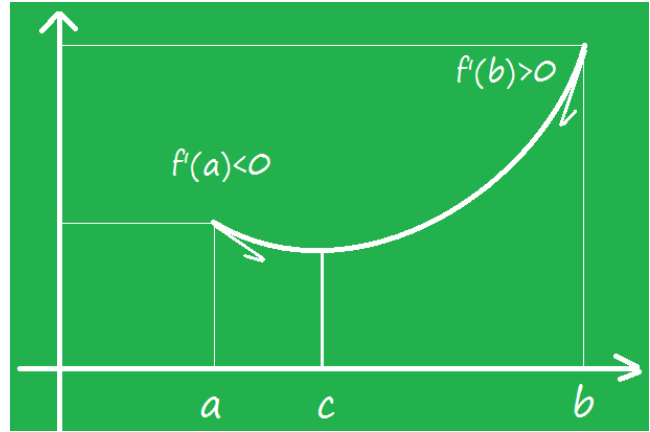
Mais cette vision est trop naïve ($g'(a) < 0$ n'implique pas « g est décroissante sur un voisinage de a » si on n'a pas d'hypothèse de continuité sur f' , ne soyez pas trop naïfs).

On y va : g est continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, elle admet un minimum, atteint en un point c .

c pourrait il être en a ? Si le minimum est en a , pour tout x plus grand que a on a $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{\oplus}{\oplus}$, et par passage à la limite $g'(a) \geq 0$. C'est contraire à l'hypothèse.

c pourrait il être en b ? Si le minimum est en b , pour tout x plus petit que b on a $\frac{g(x) - g(b)}{x - b} = \frac{\oplus}{\ominus}$, et par passage à la limite $g'(b) \leq 0$. C'est contraire à l'hypothèse.

Le minimum est atteint en un point c de l'ouvert $]a, b[$. En bougeant à droite et à gauche de c , on a $0 \geq g'(c) \geq 0$ et donc $g'(c) = 0$.



La démonstration n'a jamais essayé d'appliquer le principe des valeurs intermédiaires à f' .

Et n'a jamais cherché non plus à dire « plaçons nous sur un intervalle sur lequel f est croissante ». Ces intervalles d'existence peut être pas forcément, à cause des applications un peu tordues qui ne manquent pas d'exister et ne sont pas de gentils polynômes, fractions ou fonctions simplistes.

Tout raisonnement du type « on commence par le cas f croissante
on continue par le cas f décroissante
et par intervalle, on est toujours dans un de ces cas »
est voué à l'échec en mathématiques.

Méthode 2. On suppose qu'il n'existe aucun point b de $[a, c]$ vérifiant $f(b) = \beta$. Montrez alors que $f - \beta.Id$ est injective sur $[a, c]$. Déduisez qu'elle est monotone. Déduisez que $f' - \beta$ est de signe constant. Concluez.

g est injective. Sinon, il existerait x et y (distincts) vérifiant $g(x) = g(y)$.

En effet, si tel était le cas, par théorème de Rolle, il existerait c vérifiant $g'(c) = 0$ c'est à dire $f'(c) = \beta$.

Un théorème du cours utilisant les mots clefs continuité, valeurs intermédiaires et intervalle dit alors : « g est monotone sur $[a, b]$ ».

Le cas « g est croissante » conduit à g' est positive (croissante et dérivable implique dérivée positive). Mais ceci donne en b : $g'(b) \geq 0$, ce qui contredit l'hypothèse sur la position de β par rapport à $f'(b)$.

De même, le cas g décroissante conduit à une absurdité en a . les deux cas sont contradictoires.

C'est donc qu'il y a une contradiction dès le début.

Méthode 3. On pose $\varphi = x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et $\phi = x \mapsto \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Prolongez φ par continuité en a . Prolongez ϕ par continuité en c . Montrez que l'image de $[a, b]$ par φ est un intervalle contenant $\frac{f(c) - f(a)}{c - a}$ et α , puis que l'image de $[a, b]$ par ϕ est un intervalle contenant $\frac{f(c) - f(a)}{c - a}$ et γ . Déduisez que β est dans $\varphi([a, c])$ ou dans $\phi([a, c])$. Déduisez qu'il existe c vérifiant $f'(b) = \beta$.

Cette preuve ci, est assez jolie, il y a des profs qui l'adorent, moi je la trouve artificielle.

Montrez qu'il n'existe aucune application g vérifiant $g' = [.]$ (partie entière).

Montrez qu'il n'existe aucune application g vérifiant $g' = 1_{\mathbb{Z}}$ (indicateur de $\mathbb{Z}$).

Montrez qu'il existe une infinité d'applications g vérifiant $g' = |.]$ (valeur absolue).

Montrez que $x \mapsto x^2 \cdot \sin(1/x)$ (notée h) se prolonge par continuité en 0, est alors dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que sa dérivée h' n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Montrez que h' vérifie le principe des valeurs intermédiaires.

Montrez que si une application φ vérifie le principe des valeurs intermédiaires sur $\mathbb{R}$ alors $|\varphi|$ le vérifie aussi.

Montrez qu'il existe S vérifiant $S' = |\sin'|$ et $S(0) = 0$. Calculez $S(\pi) - S(-\pi)$.

La partie entière fait des sauts, elle ne peut être la dérivée de qui que ce soit.

On aurait $g'(0) = 1$ et $g'(1) = 1$ mais aucun point vérifiant $g'(c) = 1/2$.

Même type d'argument pour $1_{\mathbb{Z}}$ qui vaut 0 en $\frac{1}{2}$ et 1 en 1 mais ne vaut jamais 1 entre temps.

L'application $t \mapsto \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{si } t > 0 \\ -\frac{t^2}{2} & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est continue, même en 0.

On la dérive en $t \mapsto \begin{cases} t & \text{si } t > 0 \\ -t & \text{si } t < 0 \end{cases}$. Et en 0, sa dérivée est nulle (les deux formules donnent la même valeur de dérivée en 0, on a bien deux demi tangentes horizontales).

On a une primitive de la valeur absolue (qu'on peut écrire $x \mapsto \frac{x \cdot |x|}{2}$). On a autant qu'on veut en ajoutant n'importe quel réel arbitraire (le même sur $] -\infty, 0]$ et $]0, +\infty[$).

$x \mapsto x^2 \cdot \sin(1/x)$ se prolonge par la valeur 0 en 0, quoi que s'acharne à faire le sinus (bornée fois infiniment petite).

On la dérive $x \mapsto 2 \cdot x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$.

En 0, il faut en revenir aux taux d'accroissement : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Ils tendent vers 0. On a donc $f'(0) = 0$.

Pour la non continuité de f' en 0, on constate que la suite $\left(\frac{1}{2 \cdot n \cdot \pi}\right)$ tandis que la suite $\left(f'\left(\frac{1}{2 \cdot n \cdot \pi}\right)\right)$ converge vers -1 , qui n'est pas $f'(0)$.

On note aussi que $f'(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Néanmoins, cette application vérifie bien le théorème des valeurs intermédiaires.

Toute valeur comprise entre $f'(a)$ et $f'(b)$ est atteinte au moins une fois entre a et b .

Il y a plusieurs possibilités pour a et b .

$0 < a \leq b$: Ici, f' est continue sur $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$. Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique par continuité.

$0 = a < b$: Plus original.

On se donne une valeur γ entre 0 et $f'(b) = 2 \cdot b \cdot \sin(1/b) - \cos(1/b)$.

Mais il existe un point d entre 0 et b où f' s'annule (et même une infinité).

Le réel γ est alors entre $f'(d)$ et $f'(b)$.

Sachant que f' est continue sur $[d, b]$ (inclus dans $]0, +\infty[$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f' .

$a \leq b < 0$: Similaire au premier cas.

$a \leq b = 0$: Similaire au second cas.

$a < 0 < b$: On se donne γ entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Mais la valeur $f'(a)$ est atteinte en $-a$.

γ est donc entre $f'(-a)$ et $f'(b)$.

Il est donc atteint une fois entre $-a$ et $-b$ par continuité de f' .

Et comme on a $[-a, b] \subset [a, b]$, il est atteint une fois entre a et b .

Avec un dessins, tout ça passe mieux.

On suppose que φ vérifie le principe des valeurs intermédiaires : pour tout couple (a, b) , toute valeur entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ est atteinte au moins une fois entre a et b .

Regardons ce qu'il est pour $|\varphi|$. On se donne a et b quelconques, et un certain γ entre $|\varphi(a)|$ et $|\varphi(b)|$.

Raisonnons par disjonction de cas.

$\varphi(a) \geq 0$	$\varphi(b) \geq 0$	γ est donc entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ et il est positif. Il est donc atteint au moins une fois entre a et b . $\exists c \in [a, b], \varphi(c) = \varphi(c) = \gamma$.
$\varphi(a) \leq 0$	$\varphi(b) \geq 0$	γ est donc entre $-\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ et il est positif. Il est donc a fortiori entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. Pour vous situer, prenez $\varphi(a) = -2$, $\gamma = 3$ et $\varphi(b) = 5$. Il est donc atteint au moins une fois entre a et b . $\exists c \in [a, b], \varphi(c) = \varphi(c) = \gamma$.
$\varphi(a) \leq 0$	$\varphi(b) \leq 0$	γ est donc entre $-\varphi(a)$ et $-\varphi(b)$ et il est positif. $-\gamma$ est donc entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. Il est donc atteint au moins une fois entre a et b . $\exists c \in [a, b], \varphi(c) = -\varphi(c) = \gamma$.
$\varphi(a) \geq 0$	$\varphi(b) \leq 0$	Reprendre les idées du deuxième cas.

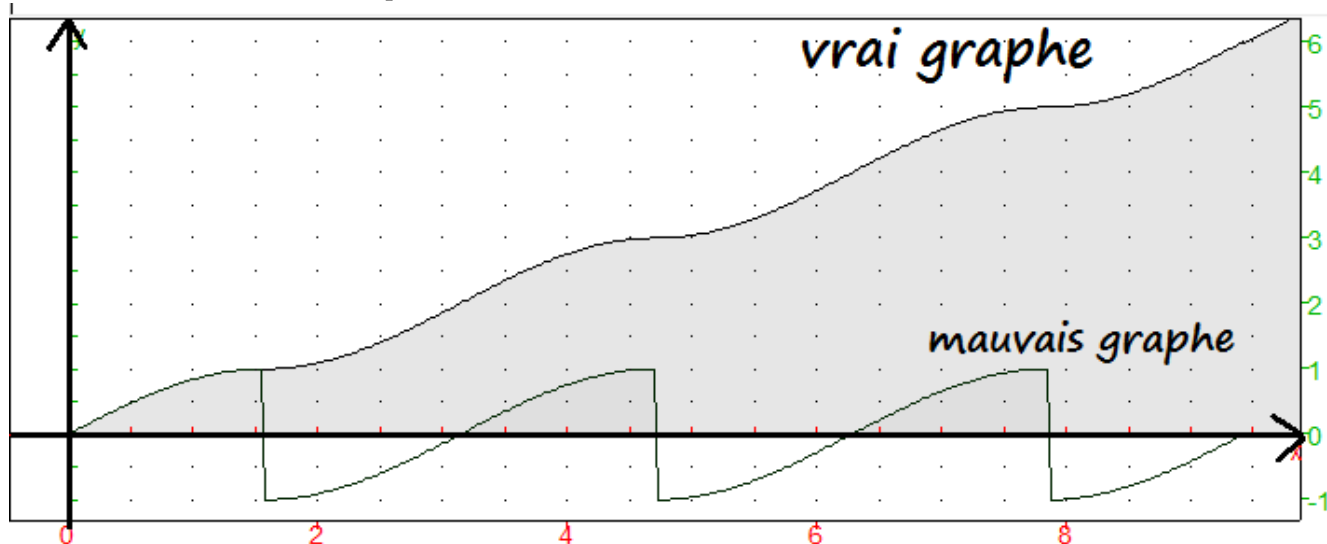
On veut cette fois $S' = |\sin'|$ et $S(0) = 0$.

C'est à dire $S' = |\cos|$. Facile : $x \mapsto \int_0^x |\cos(t)|.dt$. Elle se dérive bien en $x \mapsto |\cos(x)|$.

Je vous la « trace » si vous voulez :

sur $[0, \pi/2]$	$\int_0^x \cos(t).dt$	$= \sin(x)$
sur $[\pi/2, 3\pi/2]$	$\int_0^{\pi/2} \cos(t).dt + \int_{\pi/2}^x (-\cos(t)).dt$	$= 2 - \sin(x)$
sur $[3\pi/2, 5\pi/2]$	$\int_0^{\pi/2} \cos(t).dt + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\cos(t)).dt + \int_{3\pi/2}^x \cos(t).dt$	$= 4 + \sin(x)$
sur $[5\pi/2, 7\pi/2]$	$\int_0^{5\pi/2} \cos(t) .dt + \int_{5\pi/2}^x (-\cos(t)).dt$	$= 6 - \sin(x)$

et ainsi de suite. Certes, ce n'est pas encore un dessin, mais ça aide. Et on doit voir si elle se raccorde.



Par relation de Chasles bien exploitée, $S(\pi) - S(-\pi)$ vaut 4.

◦12◦

La superficie de la lune (à explorer), c'est l'Australie, la Chine, l'Afrique, l'océan Indien, l'océan Pacifique ?
Si la lune était un fromage, il faudrait combien de litres de lait ? La production des vaches pendant combien de siècles ?

Oui, j'ai fini par poser des questions étranges durant le confinement de 2020 !

◻13◻

♠♥ On appelle “nombres conjugués” deux réels positifs p et q vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrez qu’ils dépassent 1.

Qui est q pour $p = 2$?

On se donne deux réels a et b avec $a \leq b$. Dérivez deux fois $t \mapsto (1-t).e^a + t.e^b - e^{(1-t).a+t.b}$. Dédisez que cette application est croissante puis décroissante sur $[0, 1]$. déduisez qu’elle est positive sur $[0, 1]$.

Dédisez pour tout couple (u, v) de réels strictement positifs : $u.v \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$ (que reconnait on pour $p = 2$?).

Indication : $t = 1/q, e^a = u^p$.

On se donne deux suites finies $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ de réels strictement positifs. On définit : $A = \left(\sum_{i=1}^n (a_i)^p \right)^{1/p}$ et $B = \left(\sum_{i=1}^n (b_i)^q \right)^{1/q}$. Pour tout k , on pose $u_k = a_k/A$ et $v_k = b_k/B$.

Montrez $\sum_{k=1}^n a_k.b_k \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n (a_i)^p} \cdot \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n (b_i)^q}$ (inégalité de Hölder dite aussi de Minkowski).

Que retrouvez vous dans le cas $p = 2$?

Montrez pour f et g continues positives $\int_a^b f(t).g(t).dt \leq \sqrt[p]{\int_a^b (f(t))^p .dt} \cdot \sqrt[q]{\int_a^b (g(t))^q .dt}$.

Par positivité de q : $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} < 1$.

On passe à l’inverse (positivité) : $p > 1$.

De même pour q .

Pour p égal à 2, q est aussi égal à 2.

On va prouver une inégalité de convexité en introduisant $t \mapsto (1-t).e^a + t.e^b - e^{(1-t).a+t.b}$ qu’on va noter φ .

t	0		1
$\varphi''(t) = -(b-a)^2.e^{(1-t).a+t.b}$		—	
$\varphi'(t) = e^b - e^a - (b-a).e^{(1-t).a+t.b}$	$\varphi'(t) = e^b - e^a - (b-a).e^a$	$\searrow$	$\varphi'(t) = e^b - e^a - (b-a).e^b$
$\varphi(t) = (1-t).e^a + t.e^b - e^{(1-t).a+t.b}$	0	$\nearrow \searrow$	0

Peut on trouver facilement le signe de $\varphi'(0)$ et $\varphi'(1)$ pour déduire que φ va s’annuler une fois entre 0 et 1 par continuité (et une seule par monotonie) ?

Finalement, pas besoin, même si c’est faisable.

φ' est décroissante. Imaginons qu’elle ne s’annule pas. Elle reste alors de signe constant. Et φ est strictement monotone.

Alors qu’elle prend la même valeur aux deux extrémités de l’intervalle $[0, 1]$. C’est impossible.

φ' s’annule donc une fois, et une seule.

On l’a aussi par $\varphi(0) = \varphi(1)$ et le théorème de Rolle...

φ' est donc positive, puis négative.

φ est donc croissante, puis décroissante.

Par croissance, on a $\varphi(t) \geq \varphi(0) = 0$ au début.

Par décroissance, on a $\varphi(t) \geq \varphi(1) = 0$ à la fin.

Par recouvrement, on a $\varphi(t) \geq 0$ tout le temps.

On a donc obtenu $(1-t).e^a + t.e^b - e^{(1-t).a+t.b} \geq 0$ pour tout t de $[0, 1]$. On traduit :

$$(1-t).e^a + t.e^b \geq e^{(1-t).a+t.b}$$

Prenons alors $t = \frac{1}{q}$ avec nos p et q de tout à l’heure.

Ce t est entre 0 et 1, on peut utiliser le résultat précédent. mais alors $1-t = \frac{1}{p}$.

L’inégalité³ devient

$$\frac{1}{p}.e^a + \frac{1}{q}.e^b \geq e^{\frac{a}{p} + \frac{b}{q}} = e^{\frac{a}{p}}.e^{\frac{b}{q}} = (e^a)^{\frac{1}{p}}.(e^b)^{\frac{1}{q}}$$

3. inégalité, et non inéquation ; une inégalité est vraie toujours, une inéquation est une question « pour quelles valeurs de l’inconnue a-t-on... »

Si u et v sont deux réels strictement positifs, on pose donc $a = \ln(u^p)$ et $b = \ln(v^q)$.

La formule devient $\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \geq u.v$.

Attention, le bon sens de rédaction est « on se donne u et v ,
on pose $a = \ln(u^p)$ et $b = \ln(v^q)$
on a le droit d'utiliser la formule précédente.

En effet, notre objectif est une proposition en $\forall(u, v), \dots$

C'est donc que u et v sont donnés, et ensuite on choisit a et b .

Mais il faut s'assurer que u et v peuvent être quelconques.

L'élève qui écrit « a et b quelconques donnés

$$\text{on a prouvé } \frac{1}{p}.e^a + \frac{1}{q}.e^b \geq (e^a)^{\frac{1}{p}}.(e^b)^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{on pose } u^p = e^a \text{ et } v^q = e^b$$

$$\text{on a donc } \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \geq (u^p)^{\frac{1}{p}}.(v^q)^{\frac{1}{q}} = u.v$$

commet une erreur mathématique. Non pas une erreur de calcul, mais une erreur de variables (la pire pour le mathématicien).

En effet, qui lui dit que son u et son v sont quelconques ?

Certes, ici, ça « saute aux yeux » que comme on a posé $u^p = e^a$ avec a quelconque, u est quelconque strictement positif.

Mais on écrit tellement vite des bêtises avec ça.

On sait pour tout x de $\mathbb{R} : x^2 \geq 0$.

On pose $x^2 = u$.

On a donc pour tout u de $\mathbb{R} : u \geq 0$.

Vu comme ça, c'est totalement crétin⁴. mais en êtes vous si loin quand vous n'introduisez pas vos variables dans le bon ordre ?

Pour p égal à 2 (et donc q aussi), on trouve $\frac{\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt{\alpha.\beta}$ pour α et β réels strictement positifs. Un classique.

$A = \left(\sum_{i=1}^n (a_i)^p\right)^{1/p}$ et $B = \left(\sum_{i=1}^n (b_i)^q\right)^{1/q}$ existent et sont strictement positifs. On peut les lacer au dénominateur.

On peut définir les quotients $u_k = \frac{a_k}{A}$ et $v_k = \frac{b_k}{B}$ et appliquer à chacun le résultat précédent :

$$\frac{(u_k)^p}{A^p.p} + \frac{(v_k)^q}{B^q.q} \geq u.v = \frac{u_k.v_k}{A.B}$$

On somme de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{(u_k)^p}{A^p.p} + \frac{(v_k)^q}{B^q.q} \right) \geq \sum_{k=1}^n \frac{u_k.v_k}{A.B} = \frac{1}{A.B} \cdot \sum_{k=1}^n a_k.b_k$$

Intéressons nous au premier membre. Il est fait de deux termes, le premier suffira, puisque les deux sont du même modèle :

$$\sum_{k=1}^n \frac{(u_k)^p}{A^p.p} = \frac{1}{A^p.p} \cdot \sum_{k=1}^n (u_k)^p = \frac{1}{\sum_{k=1}^n (u_k)^p.p} \cdot \sum_{k=1}^n (u_k)^p$$

puisque A est une racine $p^{\text{ième}}$.

On simplifie par la somme qui s'est reconstruite en haut comme somme en bas comme puissance : $\sum_{k=1}^n \frac{(u_k)^p}{A^p.p} = \frac{1}{p}$.

La seconde somme vaut $\frac{1}{q}$.

La somme des deux sommes vaut $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ce qui fait 1.

4. j'espère que vous en êtes conscient

On a donc $1 \geq \frac{1}{A.B} \cdot \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k$.

Par produit en croix : $\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \leq A.B$ c'est à dire

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n (a_k)^p} \cdot \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n (b_k)^q}$$

Pour p et q égaux à 2 (donc conjugués) :

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n (b_k)^2}$$

C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Mais dans une démonstration généralisable à d'autres exposants :

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n (a_k)^{3/2} \right)^{2/3} \cdot \left(\sum_{k=1}^n (b_k)^3 \right)^{1/3}$$

Pour les intégrales, on démontre la même formule initiale : $\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \geq u \cdot v$.

On l'applique à $u = \frac{|f(t)|}{I}$ et $v = \frac{|g(t)|}{J}$ avec $I = \left(\int_0^1 |f(t)|^p \cdot dt \right)^{1/p}$ et $J = \left(\int_0^1 |g(t)|^q \cdot dt \right)^{1/q}$.

On intègre la majoration $\frac{|f(t)|^p}{I^p \cdot q} + \frac{|g(t)|^q}{J^q \cdot q} \geq u \cdot v$ de 0 à 1.

Le premier membre finit par donner 1.

Et le second : $\frac{1}{\sqrt[p]{\int_a^b (f(t))^p \cdot dt} \cdot \sqrt[q]{\int_a^b (g(t))^q \cdot dt}} \cdot \int_a^b |f(t)| \cdot |g(t)| \cdot dt$.

14

Vérifiez le lemme de Schwarz ($\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x}$) pour une fonction polynôme, par exemple $(x, y) \mapsto x^3 \cdot y^2 + 4 \cdot x \cdot y^3$ et plus généralement $(x, y) \mapsto \sum_{i,k} a_{i,k} \cdot x^i \cdot y^k$.

Vérifiez le lemme de Schwarz pour $(x, y) \mapsto \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ (remarque : serez vous assez stupide pour vous embarrasser de la racine carrée ?).

On calcule toutes les dérivées, même celles inutiles, et on vérifie surtout pour la case du milieu en dernière colonne.

		$6 \cdot x^2 \cdot y^2$
	$3 \cdot x^2 \cdot y^2 + 4 \cdot y^3$	
$x^3 \cdot y^2 + 4 \cdot x \cdot y^3$		$6 \cdot x^2 \cdot y + 12 \cdot y^3$
	$2 \cdot x^3 \cdot y + 12 \cdot x \cdot y^2$	
		$2 \cdot x^3 + 24 \cdot x \cdot y$

Pour un polynôme en toute généralité, il n'est pas utile de traiter la somme. Par linéarité, il suffit de prouver le résultat pour un « monome » $x^i \cdot y^k$.

C'est à cette approche que je qualifierai de flemmarde dans le cours et d'efficace sur vos copies qu'on reconnaît le vrai matheux.

	$i \cdot (i-1) \cdot x^{i-2} \cdot y^k$
$x^i \cdot y^k$	$i \cdot k \cdot x^{i-1} \cdot y^{k-1}$
	$k \cdot (k-1) \cdot x^i \cdot y^{k-2}$

Évidemment $\ln(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{2}$, et on dérive

$$\frac{\ln(x^2 + y^2)}{2} \quad \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$-\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

◦15◦

Dans cette classe, il y a des garçons et des filles. Voici les moyennes

	moyenne de la classe	moyenne des garçons	moyenne des filles
mathématiques	11,4	10,6	12,5
physique	12,8		13,2

Retrouvez la moyenne qui manque.

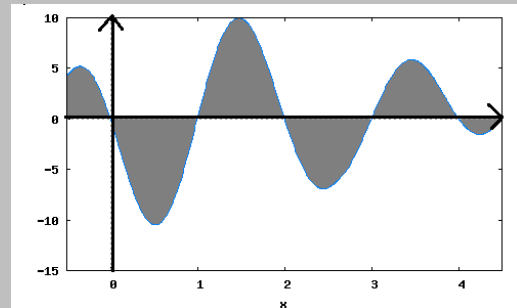
Sous des hypothèses simples (*pas d'absents d'une moyenne à l'autre, pas de théorie du genre qui fait qu'on est garçon en cours de maths et fille en cours de physique, et vice versa*).

On note G le nombre de garçons et F le nombre de filles, on a $\frac{10,6 \times G + 12,5 \times F}{G + F} = 11,4$.

On ne peut pas en déduire G ni F mais le rapport $\frac{G}{F}$: il vaut $\frac{11}{8}$ (il y a onze garçons pour huit filles).

On reporte alors dans la formule $\frac{\mu \times G + 13,2 \times F}{G + F} = 12,8$.

On trouve un nombre rationnel (*alors que c'est une moyenne de physique ?*) : $\frac{688}{55}$.



♥ Soit f une application de classe C^5 , nulle en 0, 1, 2, 3 et 4.

On se donne a , ajustez A pour que $x \mapsto f(x) - A \cdot \prod_{k=0}^4 (x - k)$ (notée g) soit nulle en a .

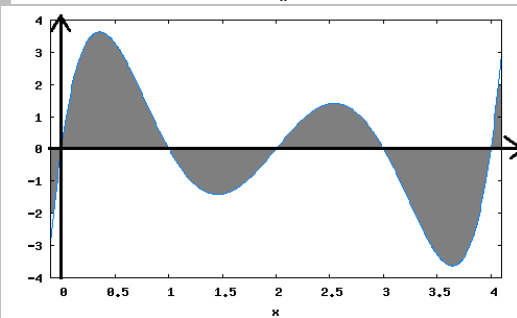
Déduisez que $g^{(5)}$ s'annule au moins une fois.

Déduisez $\exists c \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)}{5!} \cdot f^{(5)}(c)$$

Déterminez $\text{Max}(|x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)| \mid x \in [0, 4])$, noté S .

Montrez : $\forall x \in [0, 4], |f(x)| \leq S \cdot M_5 / 5!$ avec $M_5 = \text{Sup}(|f^{(5)}(t)| \mid t \in \mathbb{R})$.



◦16◦

A défaut, je vous offre ceci, extrait du cours :

soit F une application $n + 1$ fois dérivable, s'annulant en n points a_1 à a_n d'un intervalle I (disons $\mathbb{R}$).

alors pour tout x , il existe c vérifiant $F(x) = \frac{(x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n)}{n!} \cdot F^{(n)}(c)$

Pour n égal à 1, c'est $F(x) = F(a) + (x - a_1) \cdot F'(c)$, reconnu

Pour n égal à 2, c'est faisable.

Pour n quelconque... on dit que si x est l'un des a_i , on peut prendre c comme on veut.

Sinon, on définit $g = t \mapsto F(t) - A \cdot (t - a_1) \cdot (t - a_2) \cdot \dots \cdot (t - a_n)$ et on ajuste A pour avoir $g(x) = 0$ (équation du premier degré).

L'application g est nulle en $n + 1$ points (les a_k et aussi x lui même).

L'application g' est donc nulle en n points (n intervalles sur lesquels appliquer le théorème de Rolle).

On poursuit « en cascade » jusqu'à $g^{(n)}$ qui s'annule au moins une fois en un point qu'on va noter c .

En ce point c , il reste $F^{(n)}(c) - n! \cdot A = 0$ (le polynôme de degré $n(x - a_1) \dots (x - a_n)$ a presque tout perdu à la dérivation, sauf la dérivée de son terme dominant x^n).

On a donc $A = \frac{F^{(n)}(c)}{n!}$. On reporte dans l'information $g(x) = 0$ et on a la formule souhaitée.

Que fait on de ça ensuite ? Si on nous donne f quelconque et n points a_1 à a_n , on construit le polynôme de degré strictement inférieur à n qui coïncide avec f en a_1, a_2 jusqu'à a_n .

C'est le polynôme de Lagrange $P = x \mapsto \sum_{k=1}^n \left(\prod_{i \neq k} \frac{X - a_i}{a_k - a_i} \right) \cdot f(a_k)$.

Vérifiez, il est construit pour.

Je vous le refais pour trois racines a_1, a_2 et a_3

	$x = a_1$	$x = a_2$	$x = a_3$
$\frac{(X - a_2) \cdot (X - a_3)}{(a_1 - a_2) \cdot (a_1 - a_3)}$	1	0	0
$\frac{(X - a_1) \cdot (X - a_3)}{(a_2 - a_1) \cdot (a_2 - a_3)}$	0	1	0
$\frac{(X - a_1) \cdot (X - a_2)}{(a_3 - a_1) \cdot (a_3 - a_2)}$	0	0	1

puis

	$x = a_1$	$x = a_2$	$x = a_3$
$\frac{(X - a_2) \cdot (X - a_3)}{(a_1 - a_2) \cdot (a_1 - a_3)} \cdot f(a_1)$	$f(a_1)$	0	0
$\frac{(X - a_1) \cdot (X - a_3)}{(a_2 - a_1) \cdot (a_2 - a_3)} \cdot f(a_2)$	0	$f(a_2)$	0
$\frac{(X - a_1) \cdot (X - a_2)}{(a_3 - a_1) \cdot (a_3 - a_2)} \cdot f(a_3)$	0	0	$f(a_3)$
la somme	$f(a_1)$	$f(a_2)$	$f(a_3)$

La différence $F = f - P$ est alors nulle en n points. On peut lui appliquer le lemme précédent :

$$\forall x, \exists c, F(x) = \frac{(x - a_1) \cdot (x - a_2) \dots (x - a_n)}{n!} \cdot F^{(n)}(c).$$

Mais comme P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$, sa dérivée $n^{ième}$ est nulle.

$$\forall x, \exists c, f(x) - P(x) = \frac{(x - a_1) \cdot (x - a_2) \dots (x - a_n)}{n!} \cdot f^{(n)}(c)$$

Ceci permet de montrer que la différence entre la fonction et son interpolateur de Lagrange se majore par $\frac{|(x - a_1) \cdot (x - a_2) \dots (x - a_n)|}{n!} \cdot \|f^{(n)}\|$.

Il reste encore du travail, mais c'est l'objet des problèmes de concours justement...

◦17◦

Une application f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a < b) \Rightarrow (\exists! c \in \mathbb{R}, f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c))$. Quelle est la différence avec le théorème des accroissements finis.

Montrez que les fonctions strictement convexes vérifient ce critère.

Montrez que seules les applications strictement convexes ou strictement concaves vérifient ce critère (on pourra

raisonner par l'absurde et trouver un triplet (a, b, c) avec $a < b < c$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} = 0$ puis conclure.

Dans le théorème des accroissements finis, on ne suppose pas $a < b$. Mais comme les rôles sont symétriques, ça ne change rien.

Dans le théorème des accroissements finis, il existe un c , mais ce c n'est pas forcément unique. Ici, il l'est.

La quantification dit que le point où la tangente est parallèle à la corde est unique.

Quelle est l'utilité de l'hypothèse $a < b$? C'est qu'on veut éviter $a = b$ qui serait possible dans $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \exists! c \in \mathbb{R}, f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$ et conduirait à une absurdité sur l'unicité dans le cas $a = b$ (on pourrait alors prendre c n'importe où).

Ah, oui, un détail : le théorème des accroissements finis dit qu'il existe un c entre a et b .

Mais si il n'y en a qu'un, c'est forcément celui donné par le théorème, et il est donc entre a et b .

On note que si f' est injective, alors l'équation $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ donne l'unicité de c .

Et ceci correspond au cas des fonctions où f' strictement monotone.

On reconnaît f strictement convexe (ou strictement concave).

On va montrer que notre hypothèse conduit à f est convexe sur tout $\mathbb{R}$ ou f est concave sur tout $\mathbb{R}$.

On va comme suggéré raisonner par l'absurde, ou plutôt par contraposée.

On va montrer que si f n'est pas strictement convexe ou strictement concave, alors il n'y a plus unicité du c dans le théorème des accroissements finis.

Comment traduite « pas strictement convexe ou strictement concave » ?

On note T l'ensemble des triplets de la forme (a, b, c) avec $a < b < c$.

On note F l'application $(a, b, c) \mapsto \begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

La stricte convexité c'est F reste strictement positive sur T .

La stricte concavité c'est F reste strictement négative sur T .

Le changement de concavité, c'est F change de signe sur T .

Mais alors par continuité, F va s'annuler au moins une fois.

Il existe donc un triplet (a, b, c) de T vérifiant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

On traduit : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$ (manipulation classique en développant $\begin{vmatrix} a - b & b & c - b \\ f(a) - f(b) & f(b) & f(c) - f(b) \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$).

Géométriquement : les trois points $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ et $C(c, f(c))$ sont alignés.

Le théorème des accroissements finis appliqué entre a et b donne

$$\exists \gamma \in]a, b[, \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\gamma)$$

et le même entre b et c donne

$$\exists \gamma' \in]b, c[, \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = f'(\gamma')$$

On a alors l'existence de deux réels distincts (car séparés par b) γ et γ' vérifiant

$$f'(\gamma) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = f'(\gamma')$$

Il n'y a plus unicité dans le théorème des accroissements finis. C'est la conclusion attendue.

◦18◦

Soit f une application de classe C^2 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On définit

$$I = \int_a^b f(t) dt \quad J = \int_a^b f'(t) \cdot \left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt \quad K = \int_a^b f''(t) \cdot \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 dt$$

♥ 0 ♥ Calculez K .

♥ 1 ♥ Montrez : $I + J = (b - a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

♥ 2 ♥ Justifiez l'existence de $\sup\{|f''(t)| \mid t \in [a, b]\}$ (notée M_2).

♥ 3 ♥ Montrez pour tout t de $[a, b]$: $\left|f'(t) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq M_2 \cdot \left|t - \frac{a+b}{2}\right|$.

♥ 4 ♥ Déduisez : $\left|I - \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b - a)\right| \leq \frac{M_2 \cdot (b - a)^3}{12}$.

♥ 5 ♥ Déduisez : $|I - T_n| \leq \frac{M_2 \cdot (b - a)^3}{12 \cdot n^2}$ où T_n est l'approximation de I par la méthode des trapèzes pour une équisubdivision de $[a, b]$ en n pas (dont vous rappellerez la formule).

Rappelons tout de suite la formule pour l'aire d'un trapèze : base fois moyenne des hauteurs.

Dans le cas d'un trapèze de largeur $(b - a)$ et de hauteurs $f(a)$ et $f(b)$, on trouve comme par hasard $(b - a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

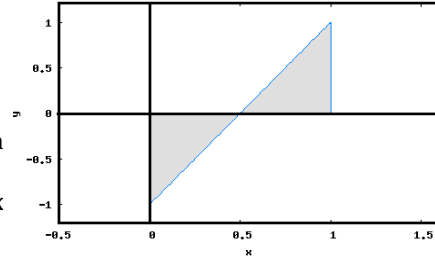
Dans le cas d'une somme de trapèzes pour la méthode du même nom, on trouve

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(a + k \cdot \frac{b-a}{n}) + f(a + (k+1) \cdot \frac{b-a}{n})}{2} \quad \text{On peut aussi regrouper en}$$

$$2.T_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) + \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

(moyenne des deux sommes de Riemann).

Pour le calcul de $K = \int_a^b f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \cdot \left(t - \frac{a+b}{2} \right) dt$, on sort $f' \left(\frac{a+b}{2} \right)$ par linéarité, et il reste $\int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2} \right) dt$. Cette intégrale est nulle. On l'a en intégrant explicitement avec $\frac{1}{2} \cdot \left(t - \frac{a+b}{2} \right)^2$ ou en voyant **deux triangles d'aires opposées**.



Quand on calcule $I + J$, on fusionne par linéarité en $\int_a^b \left(f(t) + \left(t - \frac{a+b}{2} \right) \cdot f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) dt$.

On reconnaît une forme en $u' \cdot v + u \cdot v'$ avec f et $t \mapsto t - \frac{a+b}{2}$.

On trouve donc $\left[f(t) \cdot \left(t - \frac{a+b}{2} \right) \right]_{t=a}^{t=b}$. En a et en b , le terme $\left(t - \frac{a+b}{2} \right)$ donne $(b-a)/2$ et son opposé. Les termes vont plutôt "s'additionner". Il reste $I + J = (b-a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$.

On pouvait aussi intégrer **par parties**.

Pour ce qui est de l'existence de M_2 , on rappelle que f'' existe et est continue sur un segment. Il ne reste qu'à utiliser un théorème de **compacité** : existence de la **norme de la convergence uniforme**.

On se donne t dans $[a, b]$ et on écrit une **formule de Taylor** pour f' entre $\frac{a+b}{2}$ et t :

$f'(t) = f' \left(\frac{a+b}{2} \right) + \text{reste}$, avec $\text{reste} = \left(t - \frac{a+b}{2} \right) \cdot \int_{u=0}^1 (1-u)^0 \cdot f'' \left(\frac{a+b}{2} + u \cdot \left(t - \frac{a+b}{2} \right) \right) du$ en sachant que notre variable d'intégration dans la formule de Taylor ne peut pas s'appeler t comme d'habitude.

On passe à la valeur absolue et on majore par inégalité triangulaire :

$$|\text{reste}| \leq \left| t - \frac{a+b}{2} \right| \cdot \int_0^1 |f'' \left(\frac{a+b}{2} + u \cdot \left(t - \frac{a+b}{2} \right) \right)| du$$

On majore ensuite :

$$|\text{reste}| \leq \left| t - \frac{a+b}{2} \right| \cdot \int_0^1 M_2 du = M_2 \cdot \left| t - \frac{a+b}{2} \right|$$

C'est l'inégalité souhaitée.

On pouvait aussi l'obtenir par l'inégalité des accroissements finis.

Ce qu'il ne fallait pas faire, c'est invoquer une histoire de développement limité. Un développement limité n'est qu'une limite, et jamais une majoration.

Partant de $I + J = (b-a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$, on trouve $I - (b-a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} = -J$.

On remplace $-J$ par $K + (J - K)$. Comme K est nul, il reste $\int_a^b \left(f'(t) - f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) \cdot \left(t - \frac{a+b}{2} \right) dt$.

On passe à la valeur absolue avec inégalité triangulaire : $|J| \leq \int_a^b \left| f'(t) - f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \cdot \left| t - \frac{a+b}{2} \right| dt$.

On exploite le résultat précédent :

$$|J| \leq \int_a^b M_2 \cdot \left| t - \frac{a+b}{2} \right|^2 dt$$

La valeur absolue ne sert plus à rien avec le carré. On peut intégrer $\int_a^b M_2 \cdot \left(t - \frac{a+b}{2} \right)^2 dt$ en $\frac{1}{3} \cdot \left[t - \frac{a+b}{2} \right]_{t=a}^{t=b}$. On trouve précisément $\frac{(b-a)^3}{12}$.

On écrit cette inégalité pour a égal à $a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ (qu'on va noter a_k) et b égal à $a + (k+1) \cdot \frac{b-a}{n}$ (qu'on va noter a_{k+1}). La différence $b - a$ devient $\frac{b-a}{n}$.

On a donc

$$M_2 \frac{(b-a)^3}{12.n^3} \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t).dt - \frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2} \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12.n^3}$$

On somme ces n inégalités pour k de 0 à $n-1$. Les n termes en $M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{12.n^3}$ donnent $M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{12.n^2}$.

Le terme du milieu télescope par relation de Chasles en $I - T_n$.

On aboutit à l'inégalité exigée.

Elle nous renseigne sur la qualité de l'approximation d'intégrale par la formule des trapèzes.

19

L'algorithme boustrophédon, c'est ça :

→	1							
→	0	1						
	1	1	0					
→	0	1	2	2				
	5	5	4	2	0			
→	0	5	10	14	16	16		
	61	61	56	46	32	16	0	
→	0	61	122	178	224	256	272	272
								272

Quand on parcourt une ligne, on commence par 0, et ensuite, chaque terme est la somme du dernier terme calculé et d'un terme de la ligne au dessus (à vous de voir lequel), ou si vous préférez le cumul des termes de la ligne au dessus. Ah oui, et à chaque bout de ligne, on change de sens.

Mettez le en place pour que, pour n donné, il donne la $n^{\text{ième}}$ ligne du boustrophédon.

→	1							
→	0	1						
	1	1	0					
→	0	1	2	2				
	5	5	4	2	0			
⇒								

déjà

→	1							
→	0	1						
	1	1	0					
→	0	1	2	2				
	5	5	4	2	0			
⇒	0							

puis

→	1							
→	0	1						
	1	1	0					
→	0	1	2	2				
	5	5	4	2	0			
⇒	0	5						

→	1							
→	0	1						
	1	1	0					
→	0	1	2	2				
	5	5	4	2	0			
⇒	0	5	10					

puis

→	1							
→	0	1						
	1	1	0					
→	0	1	2	2				
	5	5	4	2	0			
⇒	0	5	10	14				

puis

→	1							
→	0	1						
	1	1	0					
→	0	1	2	2				
	5	5	4	2	0			
⇒	0	5	10	14	16			

et enfin

→	1							
→	0	1						
	1	1	0					
→	0	1	2	2				
	5	5	4	2	0			
⇒	0	5	10	14	16	16		

la ligne est complète, on change de sens.

→	1							
→	0	1						
	1	1	0					
→	0	1	2	2				
	5	5	4	2	0			
→	0	5	10	14	16	16		
							0	

donc

→	1							
→	0	1						
	1	1	0					
→	0	1	2	2				
	5	5	4	2	0			
→	0	5	10	14	16	16		
							16	0

et par exemple

→	1							
→	0	1						
	1	1	0					
→	0	1	2	2				
	5	5	4	2	0			
→	0	5	10	14	16	16		
			56	46	32	16	0	

jusqu'à

→	1							
→	0	1						
	1	1	0					
→	0	1	2	2				
	5	5	4	2	0			
→	0	5	10	14	16	16		
	61	61	56	46	32	16	0	

```
#algorithmme boustrophedon
```

```
def Boustro(n) :
....L = [1]
....for k in range(n) :
.....NewLine = [0]
.....if k %2 == 0 :
.....for i in range(len(L)) :
.....NewLine.append(NewLine[-1]+L[i])
.....else :
.....for i in range(len(L)) :
.....NewLine=[NewLine[0]+L[-i-1]]+NewLine #ajout à gauche
.....L = NewLine[:]
.....print('nouvelle',L)
....return L
```

Boustro(8)

```
nouvelle [0, 1]
nouvelle [1, 1, 0]
nouvelle [0, 1, 2, 2]
nouvelle [5, 5, 4, 2, 0]
nouvelle [0, 5, 10, 14, 16, 16]
nouvelle [61, 61, 56, 46, 32, 16, 0]
nouvelle [0, 61, 122, 178, 224, 256, 272, 272]
nouvelle [1385, 1385, 1324, 1202, 1024, 800, 544, 272, 0]
nouvelle [0, 1385, 2770, 4094, 5296, 6320, 7120, 7664, 7936, 7936]
nouvelle [50521, 50521, 49136, 46366, 42272, 36976, 30656, 23536, 15872, 7936, 0]
nouvelle [0, 50521, 101042, 150178, 196544, 238816, 275792, 306448, 329984, 345856, 353792, 353792]
```

A quoi sert cet algorithme ?

En bout de lignes, on a les coefficients du développement limité de la tangente en 0.

Et c'est utile, si si !

Surprise : $\tan(x) = 1.x + 0.\frac{x^2}{2} + 2.\frac{x^3}{6} + 0.\frac{x^3}{24} + 16.\frac{x^3}{120} + 0.\frac{x^3}{720} + 272.\frac{x^7}{5040} + o(x^7)_{x \rightarrow 0}$

ne prouvez rien, mais énoncez le résultat qui semble vrai (et il l'est).

Cherchez le développement limité en 0 de $\frac{1}{\cos(\theta)}$ à l'ordre 7. Trouvez le rapport avec le tableau.

◦20◦

Existe-t-il une série numérique (non nulle) vérifiant $\forall n, a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$?

Même question pour $\forall n, a_n = - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Je l'ai posé en en connaissant déjà une : $u_n = 2^{-n}$. On sait que la série converge, et on estime le reste à tout ordre :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{N+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

Mais est ce la seule ? Déjà, une telle suite est définie à constante multiplicative près.

En effet, si la suite (a_n) vérifie $\forall n, a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ alors la suite $(\lambda.a_n)$ vérifie aussi $\forall n, \lambda.a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda.a_k$.

On peut se permettre de poser $a_0 = 1$.

On a alors $1 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ et

$$a_1 = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k - a_1 = 1 - a_1$$

On trouve $a_1 = \frac{1}{2}$ et on peut recommencer de même

$$a_{n+1} = \sum_{k=n+2}^{+\infty} a_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k - a_{n+1} = a_n - a_{n+1}$$

On trouve pour tout n : $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$. La suite est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
La condition est nécessaire et suffisante. On a toutes les solutions.

L'autre exercice conduit de la même façon à

$$a_{n+1} = - \sum_{k=n+2}^{+\infty} a_k = - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k - a_{n+1} \right) = -(-a_n - a_{n+1})$$

Seule la suite nulle convient.

◦21◦

Résolvez $16^{\cos^2(x)} + 16^{\sin^2(x)} = 10$ d'inconnue réelle x .

Déjà, il va y avoir des solutions. En effet, en 0, la fonction $x \mapsto 16^{\cos^2(x)} + 16^{\sin^2(x)}$ prend la valeur 17, tandis qu'en $\pi/4$ elle prend la valeur $2\sqrt{16}$ qui vaut 8. Le théorème des « valeurs par lesquelles on passe » assure l'existence d'au moins une solution (et de plusieurs par parité/périodicité).

On commence par remplacer $\sin^2(x)$ par $1 - \cos^2(x)$ et on change de variable : $X = 10^{\cos^2(x)}$.
L'équation $X + 16.X^{-1} = 10$ a deux racines : 2 et 8.

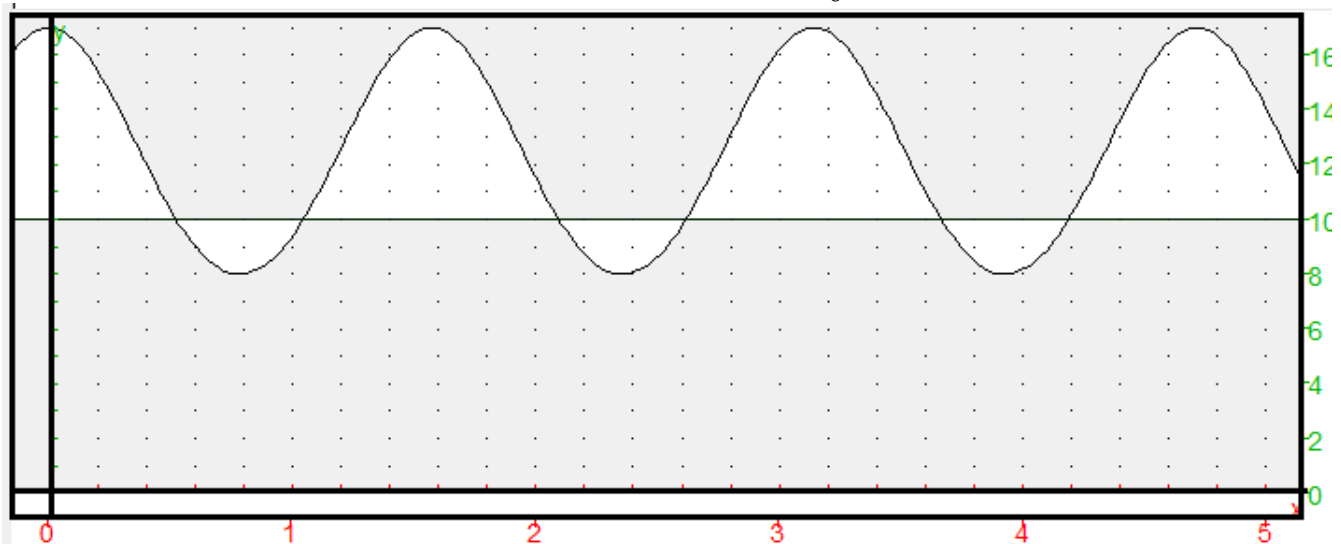
On résout les deux : $16 = 2$ donne $\cos^2(x) = \frac{\ln(2)}{\ln(16)}$ et même $\cos^2(x) = \frac{1}{4}$:

$$\frac{\pi}{3} + 2.k.\pi, \frac{2.\pi}{3} + 2.k.\pi, \frac{4.\pi}{3} + 2.k.\pi, \frac{5.\pi}{3} + 2.k.\pi$$

Et l'autre équation, par symétrie sinus/cosinus donne des

$$\frac{\pi}{6} + 2.k.\pi, \frac{5.\pi}{6} + 2.k.\pi, \frac{7.\pi}{6} + 2.k.\pi, \frac{11.\pi}{6} + 2.k.\pi$$

On peut ensuite regrouper les solutions en un bloc compact avec des $\frac{k.\pi}{6}$ avec quelques contraintes sur k .



◦22◦

On pose $f = x \mapsto \ln(\cos(x))$. Calculez $f^{(k)}(0)$ pour k de 0 à 4.

Donnez le développement limité de f en 0 à l'ordre 4.

Montrez que si on remplace f par son développement d'ordre 4 en 0 pour x entre $-\pi/4$ et $\pi/4$, l'erreur commise est inférieure ou égale à 10^{-1} .

n	0	1	2	3	4	5
$f^{(n)}(x)$	$\ln(\cos(x))$	$\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$	$-1 - \tan^2(x)$	$-2 \cdot \tan(x) \cdot (1 + \tan^2(x)) = -2t - 2t^3$	$(-2 - 6t^2) \cdot (1 + t^2)$	$-(16t + 40t^3 + 24t^5)$
$f^{(k)}(0)$	0	0	-1	0	-2	

Le développement limité d'ordre 4 en 0 ne contient que peu de termes non nuls :

$$f(0+h) = f(0) + h \cdot f'(0) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(0) + \frac{h^3}{6} \cdot f^{(3)}(0) + \frac{h^4}{24} \cdot f^{(4)}(0) + \text{reste} = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \text{reste}$$

Suivant votre humeur ou l'exigence du correcteur, le reste est

$o(h^4)$ quand h tend vers 0	$O(h^5)$ quand h tend vers 0	dominé par $\frac{h^5}{120} \cdot M_5$	$\frac{h^5}{24} \cdot \int_0^1 (1-t)^4 \cdot f^{(5)}(t \cdot h) \cdot dt$
--------------------------------	--------------------------------	--	---

Le dernier explique que j'aie pris la peine de calculer plus haut $f^{(5)}$.

L'avant dernier vient d'une majoration du dernier :

$$\left| \frac{h^5}{24} \cdot \int_0^1 (1-t)^4 \cdot f^{(5)}(t \cdot h) \cdot dt \right| \leq \frac{|h|^5}{24} \cdot \int_0^1 (1-t)^4 \cdot |f^{(5)}(t \cdot h)| \cdot dt \leq \frac{|h|^5}{24} \cdot \int_0^1 (1-t)^4 \cdot M_5 \cdot dt = \frac{|h|^5}{24} \cdot M_5 \cdot \frac{1}{5}$$

Notre travail va donc être de majorer la dérivée cinquième sur l'intervalle $[-\pi/4, \pi/4]$.

Mais on a $-(16t + 40t^3 + 24t^5)$ avec $t = \tan(x)$

La tangente reste entre -1 et 1 quand x reste entre $-\pi/4$ et $\pi/4$. Cette dérivée se majore donc en valeur absolue par $24 + 40 + 16$.

Le reste intégrale est donc majoré par $\frac{|h|^5}{120} \cdot 80$.

Mais $\left(\frac{\pi}{4}\right)^4$ est de l'ordre de 0,3 (honte à moi : calculatrice).

Ceci permet de majorer l'erreur commise comme promis.

23

Donner le domaine de définition de $x \mapsto \text{Arcsin}(1 - x^3)$.

Dérivez cette application sur $]0, \sqrt[3]{2}[$, et donnez la limite de sa dérivée en 0.

Montrez aussi que cette application est dérivable en 0 par la limite des taux d'accroissement (on pourra poser

$$\text{Arcsin}(1 - x^3) = \frac{\pi}{2} - h \text{ et étudier la limite quand } h \text{ tend vers } 0).$$

Il faut et il suffit que $1 - x^3$ reste entre -1 et 1 (domaine de définition de l'Arc-sinus).

Comme par hasard, on trouve $[0, \sqrt[3]{2}]$.

Sur cet ensemble, elle est continue, comme composée d'applications continues.

Sur presque ce domaine elle est dérivable, comme composée d'applications dérivables.

« Presque » parce que Arcsin est définie sur $[-1, 1]$

continue sur $[-1, 1]$

dérivable sur $] -1, 1[$.

Oui, en -1 et en 1 on a visuellement une demi tangente verticale

calculatoirement un problème avec $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

La dérivée est alors $x \mapsto -3x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^3)^2}}$, en tant que produit de deux dérivées :

x	$\mapsto$	$1 - x^3$	$\mapsto$	$\text{Arcsin}(1 - x^3)$
		$-3x^2$		$\frac{1}{\sqrt{1-(\dots)^2}}$

On simplifie en $x \mapsto -3x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2x^3 - x^6}}$

Et que ce soit en 0 ou en $\sqrt[3]{2}$, on a un problème.

En 0 (à droite seulement), on peut regarder si la dérivée a une limite.

$$\frac{-3x^2}{\sqrt{2x^3 - x^6}} = \frac{-3x^2}{(x^3 \cdot (2 - x^3))^{1/2}} = \frac{-3x^2}{x^{3/2} \cdot (2 - x^3)^{1/2}} = \frac{-3 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{2 - x^3}}$$

Ainsi simplifiée, la dérivée a une limite, et c'est 0.

Mais attention, en quoi le fait que la dérivée ait une limite dit elle que la dérivée va exister en 0 ?

Rien.

Où alors un théorème qu'il faudra démontrer.

Et qu'on démontrera.

Ce qui fait qu'ensuite, vous ferez n'importe quoi en affirmant « dérivable en 0 car la dérivée a une limite en 0 » sans préciser le gros théorème utilisé.

Mais quand même, dérivable en 0 c'est $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ a une limite.

Et « dérivée a une limite en 0 » c'est $f'(x)$ tend vers λ quand x tend vers 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = \lambda$$

Maintenant, il faut regarder si la fonction est dérivable en 0. Par la seule définition possible : la limite des taux d'accroissement.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\text{Arcsin}(1 - x^3) - \text{Arcsin}(1)}{x} = \frac{\text{Arcsin}(1 - x^3) - \frac{\pi}{2}}{x}$$

Sous cette forme, je ne vois pas trop ce qu'il advient quand on passe à la limite. Enfin, si, je vois une forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Alors, le bon réflexe est de changer de variable.

On va poser $\theta = \text{Arcsin}(1 - x^3) - \frac{\pi}{2}$ (le numérateur, qui va tendre vers 0).

On a donc $\text{Arcsin}(1 - x^3) = \theta + \frac{\pi}{2}$ puis $1 - x^3 = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$ (trigonométrie élémentaire).

Et enfin $x^3 = 1 - \cos(\theta)$ et $x = \sqrt[3]{1 - \cos(\theta)}$.

Le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\text{Arcsin}(1 - x^3) - \frac{\pi}{2}}{x}$$

devient $\frac{\theta}{\sqrt[3]{1 - \cos(\theta)}}$

Quand θ tend vers 0, c'est encore une forme indéterminée, c'est vrai.

Mais on peut utiliser un développement limité du cosinus : $1 - \cos(\theta) \sim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^2}{2}$.

$\frac{\theta}{\sqrt[3]{1 - \cos(\theta)}}$ est équivalent à $\frac{\theta}{\left(\frac{\theta^2}{2}\right)^{1/3}}$ puis $2^{1/3} \cdot \theta^{1-2/3}$. Ceci tend vers 0.

Si vous êtes équivalent à quelque chose qui tend vers 0, alors vous tendez aussi vers 0.⁵

Finalement, f est dérivable en 0 de dérivée 0 : $f'(0) = 0$.

Et la dérivée en 0 est bien la limite en 0 de la dérivée.

Si vous préférez, la dérivée est continue en 0.

◦24◦

♥ Donnez toutes les matrices admettant $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme vecteurs propres, de déterminant 10 et de trace 7.
(si vous commencez en posant quatre coefficients, c'est que vous n'êtes pas matheux, et si vous vous en tirez quand même, c'est que vous êtes...)

On peut évidemment poser la matrice sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, imposer la trace : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 7-a \end{pmatrix}$ et le déterminant : $A = \begin{pmatrix} a & (7a - a^2 - 10)/c \\ c & 7-a \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à dire que $A \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$. Mais c'est évidemment la pire des approches⁶.

On regarde le polynôme caractéristique de la matrice : $X^2 - 7X + 10$ (degré 2, c'est gentil). On le factorise : $(X - 2) \cdot (X - 5)$.

Le spectre est formé de deux valeurs propres réelles distinctes en dimension 2, la matrice est diagonalisable et semblable à $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ (et aussi à $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$).

5. ne me faites pas dire ce que je n'ai pas dit ; je n'ai dit nulle part « équivalent à 0 », je connais mon cours, moi !

6. après celle de l'élève qui ne traite même pas l'exercice ou se demande déjà quelle peut être la taille de la matrice et ce qu'est sa trace dans le sable ou la boue

Mais la donnée de vecteurs propres nous donne aussi une matrice de passage pour diagonaliser : $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Ce n'est évidemment pas la seule, il y a aussi $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ou même $\begin{pmatrix} 25 & -7 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} 5\sqrt{3} & \pi \\ 2\sqrt{3} & 3\pi/7 \end{pmatrix}$. Mais ça ne changera rien au résultat.

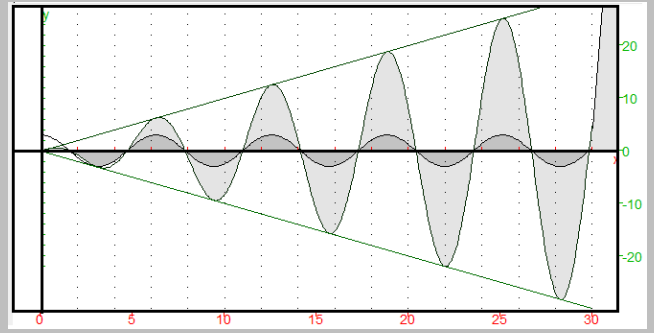
On "dé-diagonalise" :

$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -40 & 105 \\ -18 & 47 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 47 & -105 \\ 18 & -40 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -40 & 105 \\ -18 & 47 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 47 & -105 \\ 18 & -40 \end{pmatrix}$

Il n'y a que deux matrices possibles, avec les bons couples (vecteur propre, valeur propre) :

$\begin{pmatrix} -40 & 105 \\ -18 & 47 \end{pmatrix}$	$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda = 2$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \mu = 5$
$\begin{pmatrix} 47 & -105 \\ 18 & -40 \end{pmatrix}$	$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda = 5$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \mu = 2$

Ayant tracé le graphe de $x \mapsto x \cdot \cos(x)$, un élève dit « cette fonction atteint ses maxima en même temps que le cosinus : $k \cdot \pi$ avec k entier ». Montrez qu'il a tort.



En $k \cdot \pi$, le cosinus vaut 1 ou -1 . Le graphe frôle une bissectrice.

Mais ce n'est pas les endroits où on atteint le maximum.

Pour les maxima (ou maximums suivant votre âge), on dérive, c'est tout :

$$(x \mapsto x \cdot \cos(x))' = (x \mapsto \cos(x) - x \cdot \sin(x)).$$

Cette dérivée ne s'annule pas en $k \cdot \pi$.

◦26◦ Montrez que le développement limité de $x \mapsto \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}\right)$ est $x - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$.

La clef : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$.

Donc $f(x) = \ln(e^x + o(x^5))$ (oui, je sais : $f(x) = \ln(x - o(x^5))$), mais ça change quoi ?

On poursuit : $f(x) = \ln(e^x \cdot (1 + o(x^5) \cdot e^{-x})) = x + \ln(1 + o(x^5 \cdot e^{-x}))$.

Mais $\ln(1 + u) = u + o(u)$ et $e^{-u} = 1 + o(1)$.

On a donc $f(x) = x + o(x^5)$.

Poussons plus loin : $f(x) = \ln\left(e^x - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\right)$.

De même $f(x) = x + \ln\left(1 - \frac{x^6}{6!} \cdot e^{-x} + o(x^6 \cdot e^{-x})\right)$

Avec $\ln(1 + u) : f(x) = x - \frac{x^6}{6!} \cdot (1 + o(1)) + o(x^5 + o(x^5))$.

C'est le résultat attendu en regroupant.

◦27◦ Sur quel domaine est elle définie ? Sur quel domaine est elle continue ? Sur quel domaine est elle dérivable ?
 $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$.

Mêmes questions avec $x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$.

$x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est définie sur $[0, +\infty[$.

En tant que composée, elle est dérivable, sauf peut être en 0.

Rappelons en effet que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 (demi-tangente verticale, limite des $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0}$ qui est infinie).

Mais peut être est elle quand même dérivable, car le cosinus va compenser des choses.

En 0 elle vaut 0. On calcule un taux d'accroissement : $\frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x}$.

On effectue un développement limité ($u = \sqrt{x}$ tend bien vers 0 et $o(u^2) = o(x)$) : $\frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} = \frac{1 - \frac{x}{2} + o(x) - 1}{x}$.

L'ensemble vaut $-\frac{1}{2} + o(1)$. Les taux ont une limite en 0 (en 0^+ en fait), et elle vaut $-\frac{1}{2}$.

L'application est dérivable, même en 0.

Et ailleurs, $f' = x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin(\sqrt{x})$.

Seuls ceux qui aiment gaspiller leur énergie avec de gros théorèmes passeront par la limite de la dérivée en 0 pour dire que cette application est bien dérivable en 0.

Pour $\sqrt{\cos(x)}$, il faut que le cosinus soit défini et positif.

On a une réunion d'intervalles construits sur le modèle de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

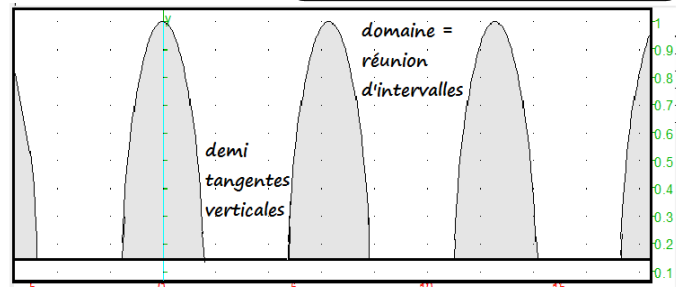
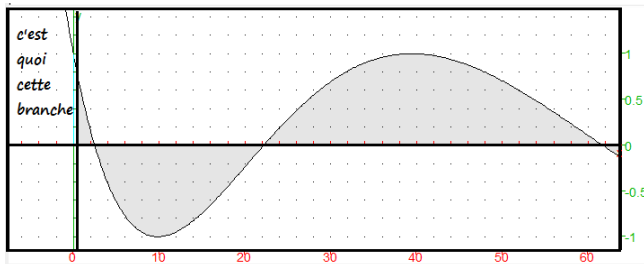
Proprement : $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{2} + 2.k.\pi, \frac{\pi}{2} + 2.k.\pi]$

Pour le prof et les bons élèves, cette écriture est une trivialité.

Il reste encore des élèves pour qui c'est le bout du monde de comprendre et même d'avoir l'initiative d'écrire ceci sans s'embrouiller entre les $\cup$ et les variables.

Et c'est normal. C'est plus subtil que le calcul d'une dérivée partielle, c'est vérifier que vous avez l'esprit clair et propre.

L'application est dérivable partout, sauf en ces extrémités d'intervalles cette fois $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{2} + 2.k.\pi, \frac{\pi}{2} + 2.k.\pi]$



Par un phénomène étrange, le logiciel de calcul formel Xcas travaille sur $\mathbb{C}$ et réussit à calculer $\cos(\sqrt{x})$ même pour x négatif.

Comprenez vous pourquoi il trouve plus que 1. Et pourquoi le raccord en 0 est lisse ?

28

♥ Soit f de classe C^2 strictement convexe sur $\mathbb{R}$ ($f'' > 0$).

Montrez : $\forall a, \forall h, \exists ! \theta \in]0, 1[, f(a+h) = f(a) + h.f'(a+\theta.h)$. (une moitié de la question, c'est juste du cours).

En comparant cette formule avec le développement limité d'ordre 2 de f en a et avec le développement limité d'ordre 1 de f' en a , montrez : $\theta \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}$.

Mais, on connaît $\forall a, \forall h, \exists \theta \in]0, 1[, f(a+h) = f(a) + h.f'(a+\theta.h)$!

C'est le théorème des accroissements finis. Il existe un élément entre a et $a+h$, qu'on écrit $a+\theta.h$.

On l'appelle aussi formule de Taylor Lagrange.

D'accord, ça assure l'existence (comme un salaire, et donc plus que le RSA). Mais qu'en est il de l'unicité ?

f'' est strictement positive. Donc f' est strictement croissante. Donc injective.

Le réel $a+\theta.h$ est donc unique. Et θ aussi.

Petit détail qui me fait tiquer⁷ : si h est nul, on peut prendre ce qu'on veut....

La vraie question est donc

$$\forall a, \forall h \in \mathbb{R}^*, \exists ! \theta \in]0, 1[, f(a+h) = f(a) + h.f'(a+\theta.h)$$

Mais pour en revenir à l'unicité, on a par exemple pour l'application sinus avec $a = 0$ et $h = 2.\pi$:

$$\exists \theta, \sin(0 + 2.\pi) = \sin(0) + 2.\pi.\cos(0 + \theta.2.\pi) \text{ et on peut prendre } \theta = \frac{1}{4} \text{ ou } \theta = \frac{3}{4}.$$

Mais le sinus ne vérifie pas l'hypothèse de stricte convexité.

Pour a donné, on écrit donc trois formules les unes sous les autres :

$$\begin{aligned} \forall h, \exists \theta \in]0, 1[, f(a+h) &= f(a) + h.f'(a+\theta.h) \\ f(a+h) &= f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2}.f''(a) + o(h^2)_{h \rightarrow 0} \\ &\quad f'(a+\theta.h) = f'(a) + \theta.h.f''(a) + o(\theta.h)_{h \rightarrow 0} \\ f(a+h) &= f(a) + h.f'(a) + h^2.\theta.h.f''(a) + o(h^2)_{h \rightarrow 0} \quad 8 \\ \text{On reporte la troisième dans la première :} \\ f(a+h) &= f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2}.f''(a) + o(h^2)_{h \rightarrow 0} \end{aligned}$$

On compare les deux formules :

$$h^2.\frac{f''(a)}{2} + o(h^2)_{h \rightarrow 0} = h^2.\theta.h.f''(a) + o(h^2)_{h \rightarrow 0}$$

$$\text{On divise par } h^2 : \frac{f''(a)}{2} + o(1)_{h \rightarrow 0} = \theta.h.f''(a) + o(1)_{h \rightarrow 0}$$

On divise par la constante numérique $f''(a)$ (non nulle)⁹ :

$$\frac{1}{2} + o(1)_{h \rightarrow 0} = \theta.h + o(1)_{h \rightarrow 0}$$

Quand h tend vers 0, $\theta.h$ tend vers $\frac{1}{2}$.

Pour une fonction convexe, quand l'accroissement est « petit »¹⁰ c'est au milieu du segment que la tangente est parallèle à la corde.

On avait vu que c'était toujours au milieu pour les trinômes du second degré¹¹

Pour une fonction quelconque, ce n'est pas exactement le cas, mais quand on prend un intervalle de plus en plus court, ça le devient.

◦29◦

f est un C^1 difféomorphisme de $[a, b]$ sur $[c, d]$. Justifiez : $\int_a^b f(u).du + \int_c^d f^{-1}(v).dv = b.d - a.c$ (on pourra dériver $\int_a^x f(u).du + \int_c^{f(x)} f^{-1}(v).dv$).

7. les grands crus vous font ils tiquer ?

8. θ reste borné, un $o(\theta.h)$ est donc un $o(h)$

9. dois je rappeler des choses comme $\lambda.o(h^2) = o(h^2)$ et aussi $\frac{o(h^3)}{\mu} = o(h^3)$?

10. au sens de « tend vers 0 »

11. $f(b) - f(a) = (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ si f est de la forme $x \mapsto \alpha.x^2 + \beta.x + \gamma$

On définit $\Phi = x \mapsto \int_a^x f(u).du + \int_c^{f(x)} f^{-1}(v).dv$ en se demandant quand même si ça a un sens. La première intégrale est celle d'une application continue sur un segment, elle existe.

La seconde est la composée de $x \mapsto f^{-1}(x)$ (f^{-1} existe puisque f est un C^1 difféomorphisme) et de $y \mapsto \int_c^y (f^{-1}(v)).dv$; c'est aussi l'intégrale d'une application continue, et tant que $f(x)$ reste entre c et d , c'est calculable. Or, justement, $f(x)$ varie et décrit $[c, d]$, comme l'énoncé nous le dit.

On dérive une intégrale fonction de la borne du haut et une composée : $F' = x \mapsto f(x) + f'(x).f^{-1}(f(x))$.

On simplifie par bijectivité : $F' = x \mapsto f(x) + x.f'(x)$.

Si on a un peu d'habitude, on reconnaît $F' = (x \mapsto x.f(x))'$.

Et si on a de l'habitude mais un cerveau en pâte à modeler ramolli, on écrit $F' = (x.f(x))'$ ou autre insanité, et on retourne au fond de l'amphi 21 faire des applications numériques.

Ayant cette dérivée, on remonte par théorème fondamental qui relie intégrales et primitives :

$$F(b) - F(a) = b.f(b) - a.f(a).$$

Et encore une fois, si on a le cerveau ramolli, on écrit des choses loudres comme $F(x) = x.f(x) + C^te$ et on dit qu'on détermine la constante en regardant la valeur en a , puis on retourne faire des mesures en salle de T.P. de biochimie.

Il reste juste à dire que que $F(a)$ est nul (intégrales de a à a et de c à c), et que $f(a)$ vaut c tandis que $f(b)$ vaut d . Pourquoi ? Mais juste parce que on a dit que f était un difféomorphisme croissant de $[a, b]$ sur $[c, d]$; on n'a donc pas juste dit "de $[a, b]$ dans $[c, d]$ ". C'est donc que c et d sont atteints. Par croissance, sur a peut atteindre c et seul b peut atteindre d .

Sinon, si vous avez reconnu dans $b.d - a.c$ l'aire d'un rectangle, vous avez mille fois raison. Géométriquement, c'est une évidence. D'ailleurs, le résultat s'étend aux fonctions continues et pas forcément dérivables, en découpant l'intervalle initial $[a, b]$ et l'intervalle image $[c, d]$ avec des subdivisions associées, et en calculant l'intégrale par des sommes d'aires de trapèzes.

30.

♥ Soit f de classe C^2 strictement convexe sur $\mathbb{R}$ ($f'' > 0$).

Montrez : $\forall a, \forall h, \exists! \theta \in]0, 1[, f(a+h) = f(a) + h.f'(a+\theta.h)$. (une moitié de la question, c'est juste du cours).

En comparant cette formule avec le développement limité d'ordre 2 de f en a et avec le développement limité d'ordre 1 de f' en a , montrez : $\theta \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}$.

Mais, on connaît $\forall a, \forall h, \exists \theta \in]0, 1[, f(a+h) = f(a) + h.f'(a+\theta.h)$!

C'est le théorème des accroissements finis. Il existe un élément entre a et $a+h$, qu'on écrit $a+\theta.h$.

On l'appelle aussi formule de Taylor Lagrange.

D'accord, ça assure l'existence (comme un salaire, et donc plus que le RSA). Mais qu'en est il de l'unicité ? f'' est strictement positive. Donc f' est strictement croissante. Donc injective.

Le réel $a+\theta.h$ est donc unique. Et θ aussi.

Petit détail qui me fait tiquer¹² : si h est nul, on peut prendre ce qu'on veut....

La vraie question est donc $\forall a, \forall h \in \mathbb{R}^*, \exists! \theta \in]0, 1[, f(a+h) = f(a) + h.f'(a+\theta.h)$.

Mais pour en revenir à l'unicité, on a par exemple pour l'application sinus avec $a = 0$ et $h = 2.\pi$:

$$\exists \theta, \sin(0 + 2.\pi) = \sin(0) + 2.\pi.\cos(0 + \theta.2.\pi)$$

et on peut prendre $\theta = \frac{1}{4}$ ou $\theta = \frac{3}{4}$.

Mais le sinus ne vérifie pas l'hypothèse de stricte convexité.

Pour a donné, on écrit donc trois formules les unes sous les autres :

$$\begin{aligned} \forall h, \exists \theta \in]0, 1[, \quad f(a+h) &= f(a) + h.f'(a+\theta.h) \\ f(a+h) &= f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2}.f''(a) + o(h^2)_{h \rightarrow 0} \\ &\quad f'(a+\theta.h) = f'(a) + \theta.h.f''(a) + o(\theta.h)_{h \rightarrow 0} \end{aligned}$$

12. les grands crus vous font ils tiquer ?

On reporte la troisième dans la première :
$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + h.f'(a) + h^2.\theta_h.f''(a) + o(h^2)_{h \rightarrow 0} \\ f(a+h) &= f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2}.f''(a) + o(h^2)_{h \rightarrow 0} \end{aligned}$$
 13

On compare les deux formules :

$$h^2 \cdot \frac{f''(a)}{2} + o(h^2)_{h \rightarrow 0} = h^2 \cdot \theta_h \cdot f''(a) + o(h^2)_{h \rightarrow 0}$$

On divise par h^2 :

$$\frac{f''(a)}{2} + o(1)_{h \rightarrow 0} = \theta_h \cdot f''(a) + o(1)_{h \rightarrow 0}$$

On divise par la constante numérique $f''(a)$ (non nulle) 14 : $\frac{1}{2} + o(1)_{h \rightarrow 0} = \theta_h + o(1)_{h \rightarrow 0}$.

Quand h tend vers 0, θ_h tend vers $\frac{1}{2}$.

Pour une fonction convexe, quand l'accroissement est « petit » 15 c'est au milieu du segment que la tangente est parallèle à la corde.

On avait vu que c'était toujours au milieu pour les trinômes du second degré 16

Pour une fonction quelconque, ce n'est pas exactement le cas, mais quand on prend un intervalle de plus en plus court, ça le devient.

On prend cette fois f de classe C^3 avec $f^{(3)}$ strictement positive. Montrez : $\forall a, \forall h, \exists! \alpha \in]0, 1[, f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2}.f''(a + \alpha.h)$.
Montrez : $\alpha \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{3}$.

Cette fois, l'existence de α vient encore du théorème de Taylor avec reste de Lagrange.

Et l'unicité vient de la croissance stricte de f'' (positivité de $f^{(3)}$).

Dans la formule $f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2}.f''(a + \alpha.h)$ on fait un développement limité de $f''(a + \alpha.h)$ entre a et $a + \alpha.h$:

$$f''(a + \alpha.h) = f''(a) + (\alpha.h).(f'')'(a) + o(\alpha.h)_{h \rightarrow 0} \text{ (là, j'ai mis les points sur les } i \text{ et les primes sur les } f).$$

On reporte :

$$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2}.f''(a) + \frac{h^2}{2}.\alpha_h.h.f^{(3)}(a) + o(h^3)_{h \rightarrow 0}$$

On compare avec

$$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2}.f''(a) + \frac{h^3}{6}.f^{(3)}(a) + o(h^3)_{h \rightarrow 0}$$

qui s'appelle Taylor-Young. Il vient

$$\frac{h^2}{2}.\alpha_h.h.f^{(3)}(a) + o(h^3)_{h \rightarrow 0} = \frac{h^3}{6}.f^{(3)}(a) + o(h^3)_{h \rightarrow 0}$$

On divise par h^3 puis par $f^{(3)}(a)$ (non nul) : $\frac{\alpha_h}{2} + o(1)_{h \rightarrow 0} = \frac{1}{6} + o(1)_{h \rightarrow 0}$.

α_h converge vers $\frac{1}{3}$ quand h tend vers 0.

La formule de Taylor à l'ordre 3 va plutôt chercher un point au premier tiers de l'intervalle.

Si vous avez envie de généraliser l'exercice, faites le...

13. θ reste borné, un $o(\theta.h)$ est donc un $o(h)$

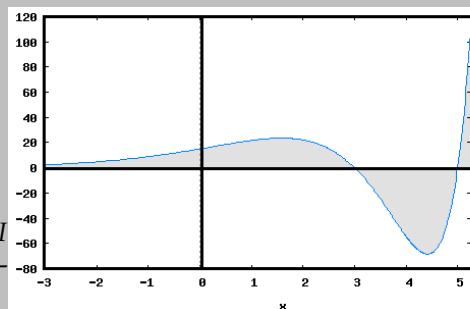
14. dois je rappeler des choses comme $\lambda.o(h^2) = o(h^2)$ et aussi $\frac{o(h^3)}{\mu} = o(h^3)$?

15. au sens de « tend vers 0 »

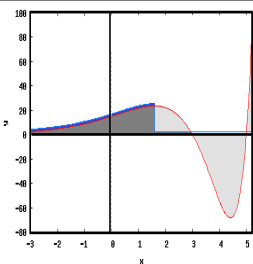
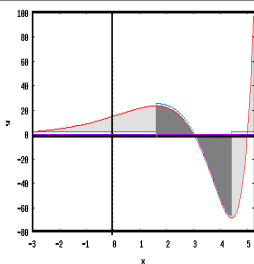
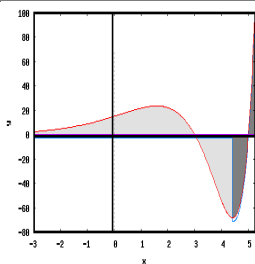
16. $f(b) - f(a) = (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$ si f est de la forme $x \mapsto \alpha.x^2 + \beta.x + \gamma$

◦31◦

On pose : $f = x \mapsto (x-3).(x-5).e^x$. Donnez un intervalle I contenant 2 le plus petit possible sur lequel f est un homéomorphisme (de I vers quoi ?).



On dérive cette application pour en connaître le sens de variation $f' = x \mapsto (x^2 - 6x + 7).e^x$.

x	$] -\infty, 3 - \sqrt{2}[$	$3 - \sqrt{2}$	$]3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}[$	$3 + \sqrt{2}$	$]3 + \sqrt{2}, +\infty[$
$f'(x)$	$\oplus$	0	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$	$0 \nearrow$		$\searrow$		$\nearrow +\infty$
					
			contient 2		

On peut donc définir un homéomorphisme de $[3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}]$ sur l'intervalle image $[2.(1 - \sqrt{2}).e^{2+\sqrt{2}}, 2.(1 + \sqrt{2}).e^{3-\sqrt{2}}]$.

Pour « difféomorphisme » : $]3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}[$ sur l'intervalle image $]2.(1 - \sqrt{2}).e^{2+\sqrt{2}}, 2.(1 + \sqrt{2}).e^{3-\sqrt{2}}[$.

Mais là où l'exercice est tordu, c'est qu'on veut un intervalle « le plus petit possible ». Alors quoi ? $[2, 2]$?

Mais que signifie la continuité si la fonction est juste définie... en un point... Et la dérivabilité ?

◦32◦

♥ On rappelle : $\forall (a, h) \in \mathbb{R}^2, \exists \theta \in]0, 1[, f(a+h) =$

$f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2}.f''(a + \theta.h)$ pour f deux fois dérivable

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminez θ pour les applications suivantes

:

f	$x \mapsto x^3$	exp	ln	sin
$\theta_{a,h}$				
$\lim_{h \rightarrow 0} \theta_{a,h}$				

$x \mapsto x^3$, on se donne a et h et on veut :

$$(a+h)^3 = a^3 + h.(3.a^2) + \frac{h^2}{2}.(6.(a+\theta.h))$$

On identifie très vite $\theta = \frac{1}{3}$, la seule valeur qui convienne.

On note qu'ici, θ ne dépend ni de a ni de h .

On veut sa limite quand h tend vers 0, c'est $\frac{1}{3}$, je ne vois pas quoi dire d'autre.

$x \mapsto e^x$, on se donne a et h et on veut :

$$e^{a+h} = e^a + h.e^a + \frac{h^2}{2}.e^{a+\theta.h}$$

On simplifie par e^a (le résultat ne dépendra pas de h) :

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2}.e^{\theta.h}$$

On isole $\theta = \frac{1}{h} \cdot \ln \left(2. \frac{e^h - 1 - h}{h^2} \right)$ dont on ne se doute pas qu'il est entre 0 et 1 (mais Lagrange nous le dit).

Et pour la limite quand h tend vers 0 ? On fait un développement limité

$$\theta = \frac{1}{h} \cdot \ln \left(2 \cdot \frac{1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+o(h^3)-1-h}{h^2} \right) = \frac{1}{h} \cdot \ln \left(1 + \frac{h}{3} + o(h) \right)$$

L'équivalent $\ln(1+u) \sim u$ (quand $u = \frac{h}{3} + o(h)$ tend vers 0) donne

$$\theta \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{3}$$

$x \mapsto \ln(x)$, on se donne a et h (a et $a+h$ positif) et on veut :

$$\ln(a+h) = \ln(a) + \frac{h}{a} + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{-1}{(a+\theta.h)^2}$$

On extrait

$$\theta = \frac{\frac{h}{\sqrt{2 \cdot \frac{h}{a} - 2 \cdot \ln \left(\frac{a+h}{a} \right)} - a}}{h}$$

Cette cochonnerie de forme indéterminée a une limite en 0 et c'est $\frac{1}{3}$ là encore.

A finir.

33

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{Arctan}(2 \cdot \sin(x)) - \frac{\pi}{4}}{\cos(3 \cdot x)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \tan(x)}{1 + th(x)} \right)^{\frac{1}{\sin^3(x)}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[2]{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$$

Quand x tend vers $\frac{\pi}{6}$, $\cos(3 \cdot x)$ tend vers 0 et $\operatorname{Arctan}(\sin(2 \cdot x))$ tend vers $\operatorname{Arctan}(1)$ c'est à dire $\frac{\pi}{4}$.

On a bien une forme indéterminée en $\frac{0}{0}$ avec des notations malpropres (et $\frac{o(1)}{o(1)}$ avec des notations propres).

On va poser $x = \frac{\pi}{6} + h$ avec h qui tend vers 0.

On a alors $2 \cdot \sin(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos(h) + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin(h) = \cos(h) + \sqrt{3} \cdot \sin(h)$.

On développe sinus et cosinus : $2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + h\right) = 1 + \sqrt{3} \cdot h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$.

Et si on se contentait de $2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + h\right) = 1 + \sqrt{3} \cdot h + o(h)$?

On poursuit avec $\operatorname{Arctan}(1+u) = \operatorname{Arctan}(1) + \frac{1}{1+1^2} \cdot u + o(u)$.

On s'arrête à l'ordre 1 : $\operatorname{Arctan}\left(2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + h\right)\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3} \cdot h}{2} + o(h)$.

Le numérateur de notre fraction est équivalent à $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot h$.

Passons au dénominateur : $\cos\left(3 \cdot \left(\frac{\pi}{6} + h\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3 \cdot h\right) = -\sin(3 \cdot h)$.

On a un équivalent : $-3 \cdot h$.

On passe au quotient des équivalents : $\frac{\sqrt{3} \cdot h/2}{-3 \cdot h}$.

On a une limite (purement numérique) : $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \right)$

$\left(\frac{1 + \tan(x)}{1 + th(x)} \right)^{\frac{1}{\sin^3(x)}}$ est de la forme $1^{+\infty}$. Forme indéterminée.

On passe au logarithme :

$$\frac{1}{\sin^3(x)} \cdot \left(\ln(1 + \tan(x)) - \ln(1 + th(x)) \right)$$

Le sinus est tout seul au dénominateur, on pourra se contenter pour lui d'un équivalent : $\sin^3(x) \sim x^3$.

$\tan(x)$ et $th(x)$ ont des développements qui se ressemblent. On craint de voir partir des termes de même ordre. On

va donc développer les deux à l'ordre 3 : $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $th(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Le développement limité de th en 0 est le même que pour $\tan$ aux signes près.

En effet, si on les imagine issus de la formule de Taylor Young, on utilise pour une $\tan' = 1 + \tan^2$ et pour l'autre $th' = 1 - th^2$.

On compose : $\ln(1 + \tan(x)) = \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(x + o(x^2)\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(x + o(x^2)\right)^3 + o(x^3)$.

On simplifie : $\ln(1 + \tan(x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$.

On fait de même avec un hyper coup de bol : $\ln(1 + th(x)) = x - \frac{x^2}{2} + 0 \cdot x^3 + o(x^3)$.

On soustrait : $\ln(1 + \tan(x)) - \ln(1 + th(x)) = \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$.

On peut flouter en équivalent : $\ln(1 + \tan(x)) - \ln(1 + th(x)) \sim \frac{2x^3}{3}$.

Le quotient $\frac{\ln(1 + \tan(x)) - \ln(1 + th(x))}{\sin^3(x)}$ est équivalent à $\frac{2}{3}$.

Telle sera donc sa limite. Et par retour à l'exponentielle : $\left(\frac{1 + \tan(x)}{1 + th(x)}\right)^{\frac{1}{\sin^3(x)}} \text{ tend vers } e^{2/3}$

Pour $\sqrt[2]{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ on va passer au logarithme. On rappelle $\sqrt[a]{b} = b^{1/a}$.

On a donc

$$\ln\left(\sqrt[2]{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\right) = \frac{x}{2} \cdot \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

C'est bien une forme indéterminée puisque le contenu de la parenthèse tend vers 1.

On met le 1 en valeur : $\frac{x}{2} \cdot \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \frac{x}{2} \cdot \ln\left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)$.

On fait usage d'un équivalent :

$$\frac{x}{2} \cdot \ln\left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right) \sim \frac{x}{2} \cdot \frac{-2}{x^2+1} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

L'équivalent tend vers 0. La fonction tend aussi vers 0.

Par retour à exponentielle, $\sqrt[2]{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ converge vers 1.

◦34◦

Développez $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ jusqu'à un terme en $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Bon, une forme indéterminée par soustraction.

Mais un peu de conjugaison. Du classique.

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}$$

Le numérateur est équivalent à $\sqrt{n}$. Le dénominateur est fait de deux termes équivalents à $\sqrt{n}$ donc il est lui même équivalent à $2\sqrt{n}$.

Le quotient est équivalent à $\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$.

Il est équivalent à une constante, il tend vers cette constante.

On a donc $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{1}{2} + o(1)_{n \rightarrow +\infty}$$

Et si vous m'inventez des « la limite tend vers...

la suite est presque égale à

je ne sais pas ce que vous avez fait en Terminale... Mais en tout cas, arrêtez ces conneries avant les concours. Il y a des épreuves de maths.

Maintenant, un $o(1)$ ce n'est pas assez. Il faut voir ce qu'il reste derrière ce terme.

On le soustrait : $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} - \frac{1}{2}$. Ceci tend vers 0, mais comme quoi ? Comme $\frac{1}{n}$ ou $\frac{-1}{\sqrt{n}}$ ou $\frac{2}{n^2}$.

On conjugue encore :

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} - \frac{1}{2} = \frac{n + \sqrt{n} - \left(\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n} + \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{4}}{2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})}$$

(équivalent du dénominateur).

Cette fois, la différence est équivalente à $\frac{-1}{8\sqrt{n}}$.

On peut écrire $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{8\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \rightarrow +\infty}$

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \rightarrow +\infty}$$

et aucune formule avec une limite... sauf peut être $\sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} - \frac{1}{2}\right) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{8}$ qui est une forme très indéterminée...

Et si on en veut plus ?

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{n}} = \frac{n + \sqrt{n} - \left(\sqrt{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{n}}\right)^2}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{n}}}$$

Au numérateur $n + \sqrt{n} - \left(\sqrt{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{n}}\right)^2$, le terme visible après simplification est $\frac{1}{8\sqrt{n}}$ (et on abandonne lâchement $\frac{1}{64n}$).

Au dénominateur, c'est toujours $2\sqrt{n}$.

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{n}} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{8\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{16n}.$$

On en refait une histoire de développement :

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{n}} + \frac{1}{16n} + o\left(\frac{1}{n}\right)_{n \rightarrow +\infty}$$

Et surtout pas $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{n}} + \frac{1}{16n}$ dans lequel tout après le $\frac{1}{2}$ est perdu à cause d'une rédaction de physicien.

Et un de plus ?

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{n}} - \frac{1}{16n} = \frac{n + \sqrt{n} - \left(\sqrt{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{n}} + \frac{1}{16n}\right)^2}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n} + \dots}$$

Ah non, on va écrire $2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$ pour le dénominateur, au lieu de ce truc imprécis.

Au numérateur, les termes s'en vont peu à peu :

$$\left(\sqrt{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{n}} + \frac{1}{16n}\right) \cdot \left(\sqrt{n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{n}} + \frac{1}{16n}\right) = \begin{array}{cccc} n & + \frac{\sqrt{n}}{2} & - \frac{1}{8} & + \frac{1}{16\sqrt{n}} \\ & + \frac{\sqrt{n}}{2} & + \frac{1}{4} & - \frac{1}{16\sqrt{n}} \\ & & - \frac{1}{8} & - \frac{1}{16\sqrt{n}} \\ & & & + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{array} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Le numérateur est équivalent à $\frac{-5}{64\sqrt{n}}$ et le dénominateur est équivalent à $2\sqrt{n}$ depuis le début.

$$\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{n}} + \frac{1}{16n} - \frac{5}{128n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)_{n \rightarrow +\infty}$$

◻35◻

Donnez le développement limité d'ordre 3 en $t = 0$ de $\text{Arctan}(e^t)$ (commencez par dériver).

L'application $t \mapsto \text{Arctan}(e^t)$ est de classe C^∞ en tout point de $\mathbb{R}$ et y admet donc des développements limités à tous ordres. En 0, la valeur est $\text{Arctan}(1)$ c'est à dire $\frac{\pi}{4}$. En notant f cette application, elle a pour dérivée

$$f = x \mapsto \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \text{ et même } f = x \mapsto \frac{1}{2\text{ch}(x)} \text{ en divisant haut et bas par } e^x.$$

On fait un développement limité de f en 0 à l'ordre 4 : $f'(x) = \frac{1}{2(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4))}$. En utilisant la formule

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2) \text{ avec } u \text{ qui tend bien vers } 0, \text{ on trouve } f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right).$$

On rassemble les morceaux et on intègre : $\text{Arctan}(e^t) - \text{Arctan}(e^0) = \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^t \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\right) dx$.

$$\text{On recolle : } \boxed{\text{Arctan}(e^t) = \frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} - \frac{t^3}{12} + \frac{t^5}{48} + o(t^5)_{t \rightarrow 0}}$$

◻36◻

Montrez que $x \mapsto (1 + e^x).x$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté f . Donnez le développement limité de f en 0 d'ordre 3 et celui de f^{-1} en 0 d'ordre 3.

$$\text{Calculez } \int_0^{3 \cdot \ln(2)} f^{-1}(t) dt.$$

L'application $x \mapsto (1 + e^x).x$ a pour dérivée $x \mapsto 1 + (1 + x).e^x$ dont on cherche le signe.

Pas évident, on va donc redériver pour voir : $x \mapsto (x + 2).e^x$.

La dérivée seconde s'annule et change de signe en -2 (du négatif au positif).

La dérivée première a un extremum (minimum) en -2 , de valeur $1 - e^{-2}$, positive. La dérivée première reste positive sur $\mathbb{R}$ (strictement), on a un difféomorphisme.

On précise quand même l'ensemble image avec les limites aux bornes : $f(x) \sim_{x \rightarrow -\infty} x$ et $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

$$\text{En 0, par simple développement et produit (ou même avec Young) : } \boxed{(1 + e^x).x = 2x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)_{x \rightarrow 0}}$$

Aucune formule ne nous permet d'extraire x fonction de y dans la relation $(1 + e^x).x = y$.

Mais la théorie nous dit que x est fonction C^∞ de y . On peut donc écrire a priori un développement limité d'ordre 3 : $f^{-1}(y) = a + b.y + c.y^2 + d.y^3 + o(y^3)_{y \rightarrow 0}$.

Ce qu'on sait déjà : $a = f^{-1}(0)$. Mais la relation $f(0) = 0$ donne par symétrie $0 = f^{-1}(0)$. a est nul.

On sait aussi en dérivant $f^{-1}(f(x)) = x : (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$ (géométriquement cohérent, par symétrique par rapport à la première bissectrice).

La méthode la plus logique pour moi est la méthode a priori : $f^{-1}(f(x)) = x$ donc

$$\frac{1}{2} \cdot \left(2x + x^2 + \frac{x^3}{2}\right) + b \cdot \left(2x + x^2\right)^2 + c \cdot (2x)^3 + o(x^3) = x.$$

$$\text{On développe et on identifie : } \begin{array}{rcl} \frac{1}{2} \cdot 2 & = & 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 2x + 4b & = & 0 \\ \frac{1}{4} \cdot 2x^2 + 4b + 8c & = & 0 \end{array}$$

$$\text{On trouve nos coefficients : } \boxed{f^{-1}(y) = \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{32} + o(y^3)_{y \rightarrow 0}}$$

Le calcul de l'intégrale est géométrique. On prend un rectangle et on enlève l'intégrale de f .

◻37◻

♥ Comparez le développement limité en 0 de $\frac{120 + 60x + 12x^2 + x^3}{120 - 60x + 12x^2 - x^3}$ et de e^x à l'ordre 7.

On connaît bien celui de l'exponentielle, avec ses factorielles au dénominateur.

Mais l'autre ? Comment faire ?

$ \begin{array}{rrrr} 120 & +60.x & +12.x^2 & +x^3 \\ -(120 & -60.x & +12.x^2 & -x^3) \\ \hline 120.x & & & +2.x^3 \\ -(120.x & -60.x^2 & +12.x^2) & \\ \hline & 60.x^2 & -10.x^3 & \\ & -(60.x^3 & -30.x^3) & \\ \hline & & 20.x^3 & \\ & & -(20.x^3) & \\ \hline & & & o(x^3) \end{array} $	$ \begin{array}{rrrr} 120 & -60.x & +12.x^2 & -x^3 \\ \hline 1 & +x & +\frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{6} \end{array} $
---	---

Moi j'aime assez. Et il y a égalité des développements limités. A l'ordre 3.

Mais si on avait posé la division à l'ordre 7 :

$$\frac{120 + 60.x + 12.x^2 + x^3}{120 - 60.x + 12.x^2 - x^3} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{4800} + o(x^7).$$

La coïncidence se prolonge jusqu'à $\frac{x^6}{6!}$ mais se plante ensuite.

On peut aussi écrire $\frac{120 + 60.x + 12.x^2 + x^3}{120 - 60.x + 12.x^2 - x^3} = \frac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{10} + \frac{x^3}{120}}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{10} + \frac{x^3}{120}\right)}$ et utiliser $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + o(u^6)$ (série géométrique).

Mais si finalement on se dit que $e^x - \frac{120 + 60.x + 12.x^2 + x^3}{120 - 60.x + 12.x^2 - x^3}$ est destinée à être petite (juste équivalente à $A.x^7$ avec A à déterminer), on peut montrer de manière équivalente que $(120 - 60.x + 12.x^2 - x^3).e^x - (120 + 60.x + 12.x^2 + x^3)$ est bien une $120.A.x^7 + o(x^7)$.

Et là on a juste un produit à calculer (puis une différence) :

	1	+x	$\frac{x^2}{2}$	$+\frac{x^3}{6}$	$+\frac{x^4}{24}$	$+\frac{x^5}{120}$	$+\frac{x^6}{720}$
120							
-60.x							
+12.x ²							
-x ³							

Je vous laisse compléter et voir presque tout disparaître.

Pour information : pour calculer une valeur approchée de e^x pour x petit, votre calculatrice n'utilise pas les développements limités, mais les approximantes de Padé, ces fonctions qui ont finalement le même développement limité mais moins de termes à calculer pour le même effet.

◦38◦

♥ Montrez que $x \mapsto x.e^{(x^2)}$ (notée f) réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Donnez le développement limité de f en 0 à l'ordre 5.

Montez que f^{-1} est impaire. Donnez le développement limité d'ordre 5 en 0 de f^{-1} .

f est définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Elle est continue, et même de classe C^∞ .

Elle est dérivable de dérivée $x \mapsto e^{(x^2)}.(1 + 2.x^2)$.

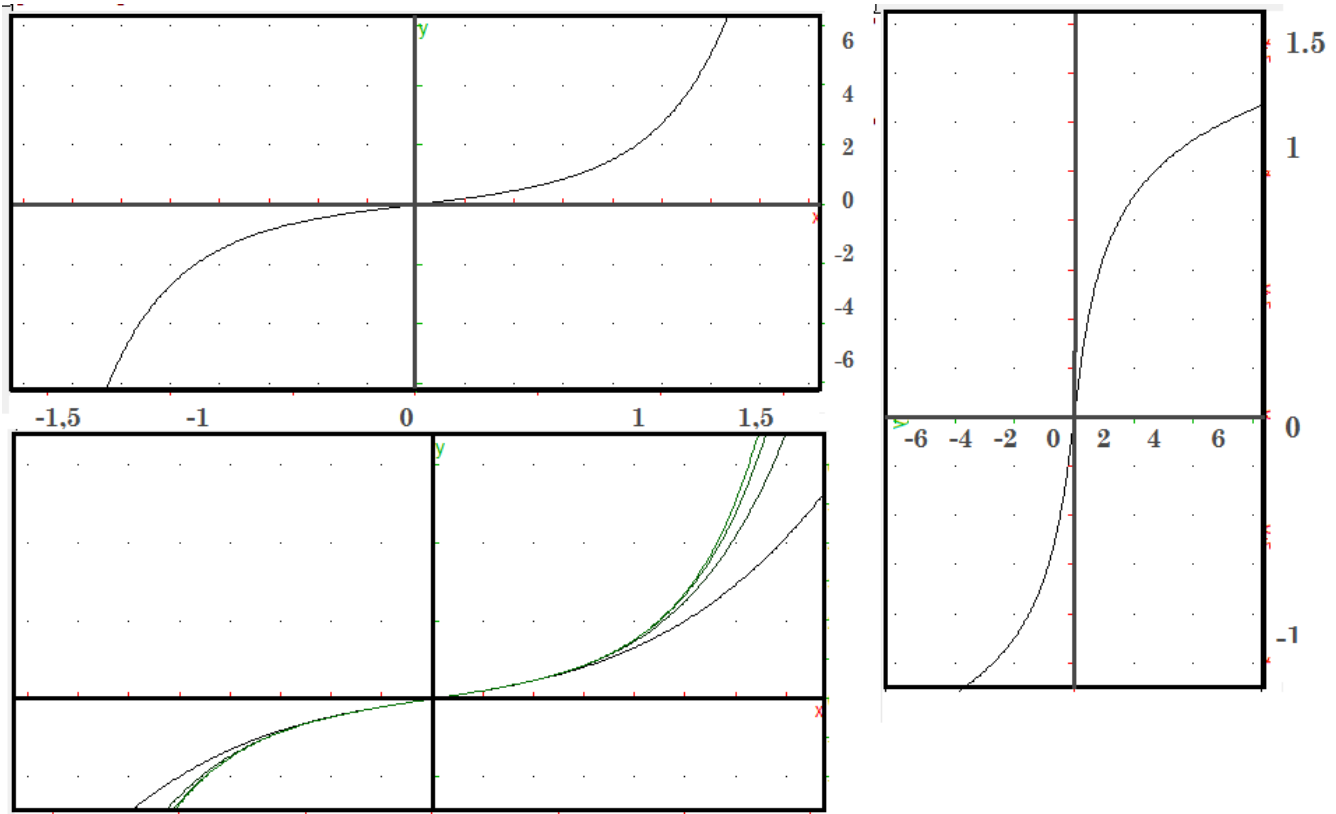
Sa dérivée est strictement positif, f est strictement croissante.

Elle réalise donc une bijection de son intervalle de départ $] -\infty, +\infty[$ vers son intervalle image $] -\infty, +\infty[$ (limites aux bornes).

Cette bijection admet une réciproque continue aussi (homéomorphisme).

Cette réciproque est dérivable (formule $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$).

Et cette réciproque est de classe C^∞ (mise en boucle et récurrence sur le degré de dérivabilité).



f admet un développement limité à n'importe quel ordre en 0 (et même un développement en série entière de rayon infini).

Il suffit de prendre x^2 à la place de x dans le développement limité en 0 (x^2 tend vers 0, c'est bon), puis de multiplier par x .

$$x.e^{x^2} = x \cdot \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + o(x^8)\right)$$

par exemple.

Comme f est impaire, sa réciproque l'est aussi.

En effet, si x_0 est la solution de $f(x) = y_0$ alors $-x_0$ est la solution de $f(x) = -y_0$.

Comme f^{-1} est impaire, son développement limité d'ordre 5 en 0 ne contient que cinq termes :

$$f^{-1}(y) = \alpha.y + \beta.y^3 + \gamma.y^5 + o(y^5)$$

et même $o(y^6)$. On a évidemment $f^{-1}(0) = 0$ en résolvant $x.e^{x^2} = 0$.

L'équivalent $f(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$ donne tout de suite par changement de variable $y \sim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f^{-1}(y)$. Le coefficient α vaut 1.

En écrivant $f^{-1}(f(x)) = x$ on trouve

$$x = f^{-1}\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right) = 1 \cdot \left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right) + \beta \cdot \left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right)^3 + \gamma \cdot \left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right)^5 + o(x^5)$$

On efface ce qu'on pourra effacer avec les $o(x^5)$

$$x = f^{-1}\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right) = 1 \cdot \left(x + x^3 + \frac{x^5}{2}\right) + \beta \cdot (x + x^3)^3 + \gamma \cdot (x)^5 + o(x^5)$$

On ordonne et on va pouvoir identifier

$$x = x + x^3 \cdot (1 + \beta) + x^5 \cdot \left(\frac{1}{2} + 3\beta + \gamma\right) + o(x^5)$$

Ceci nous livre β puis γ . On confirme :

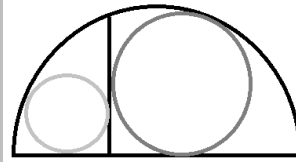
$$f^{-1}(y) = y - y^3 + \frac{5.y^5}{2} + o(y^5)$$

On veut calculer $I = \int_0^1 (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^\pi dx$. On pose $t = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

Exprimez $\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ à l'aide de t puis x lui-même à l'aide de t .

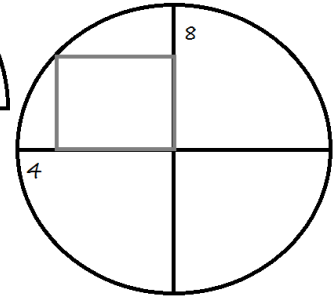
◻39◻

Effectuez alors le changement de variable et calculez I .



rayon 2 rayon 4

Pour chacun des deux exercices, retrouvez le rayon du grand disque.



L'intégrale existe (argument de continuité).

Partant de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = t$ on trouve aussi $\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = t$ par conjugaison.

On passe à l'inverse : $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = \frac{1}{t}$.

On résout un système 2 sur 2 : $\sqrt{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - t \right)$.

On vérifie $x = 0 \Leftrightarrow t = 1$ et $x = 1 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} - 1$.

On extrait $x = \left(\frac{t - t^2}{2t} \right)^2$.

On différentie : $dx = \left(\frac{t^4 - 1}{2t^3} \right) dt$.

On reporte : $I = -\frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}-1} \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2t^3} \right) t^\pi dt$ (oh, juste des puissances de t !).

On intègre après avoir remis les bornes dans le bon ordre : $\frac{1}{2} \left[\frac{t^{\pi+2}}{\pi+2} - \frac{t^{\pi-2}}{\pi-2} \right]_1^{\sqrt{2}-1}$.

On termine avec mention « calculable » en maths, ou par une application numérique aussi inutile en physique.

Pour celui de droite, le calcul est facile.

On note R le rayon (inconnu) du cercle.

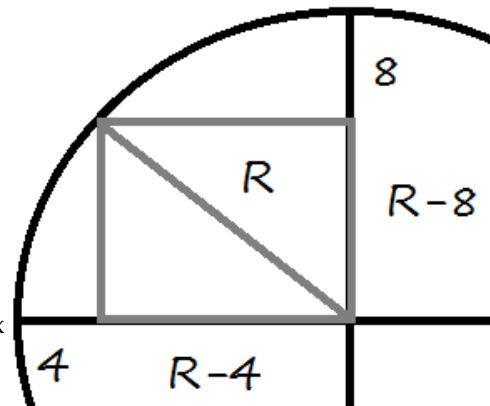
Le rectangle a alors pour côtés $R-4$ et $R-8$.

Mais sa diagonale vaut R .

Le théorème de Pythagore donne alors $R^2 = (R-4)^2 + (R-8)^2$.

On développe et simplifie : $R^2 - 24R + 80 = 0$. On trouve deux solutions : $R = 4$ et $R = 20$.

Mais seule $R = 20$ est cohérente.



◻40◻

Donnez le développement limité d'ordre 3 en $x = 0$ de $x \mapsto \frac{3x+7}{(x+3)^2}$ (et sans dériver, sinon je vous le demande à l'ordre 7).

Déjà, $\frac{1}{(x+3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+\frac{x}{3})} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} + o(x^3) \right)_{x \rightarrow 0}$ par « série géométrique ».

On décale d'un cran, ou on multiplie par elle-même

$$\frac{1}{(x+3)^2} = \frac{1}{9} - \frac{2x}{27} + \frac{3x^2}{81} - \frac{4x^3}{243} + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

On multiplie par $3x + 7$ et on regroupe

$$\frac{3x+7}{(x+3)^2} = \frac{7}{9} - \frac{5x}{27} + \frac{x^2}{27} - \frac{x^3}{243} + o(x^3)_{x \rightarrow 0}$$

On pouvait aussi, dès le début, décomposer en éléments simples.

◦41◦

Soit f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\int_0^1 f(t).dt = 0$. On pose $F = x \mapsto \int_0^x f(t).dt$ et $G = x \mapsto \int_0^x t.f(t).dt$.
 Montrez pour tout x de $[0, 1]$: $G(x) = \int_{t=0}^x (F(x) - F(t)).dt$.
 Justifiez que F admet un maximum atteint en un point a de $[0, 1]$ et un minimum atteint en un point b de $[0, 1]$.
 On suppose $(a, b) \in]0, 1[$ et $F(a) > 0 > F(b)$. Donnez le signe de $G(a)$ et $G(b)$.
 Déduisez $\exists c \in]0, 1[$, $\int_0^c t.f(t).dt = 0$.
 On suppose $F(a) > F(b) \geq 0$. Donnez le signe de $G(a)$ et $G(1)$. Déduisez $\exists c \in]0, 1[$, $\int_0^c t.f(t).dt = 0$.
 On suppose $0 \geq F(a) \geq F(b)$. Montrez $\exists c \in]0, 1[$, $\int_0^c t.f(t).dt = 0$.

L'application F de la forme $x \mapsto \int_0^x f(t).dt$ est une primitive de f (la primitive nulle en 0).

Partons de $G(x) = \int_0^x t.f(t).dt$ et intégrons par parties $\begin{matrix} f(t) & \leftarrow & F(t) \\ t & \hookrightarrow & 1 \end{matrix}$

$$G(x) = \left[t.F(t) \right]_0^x - \int_0^x 1.F(t).dt = x.F(x) - \int_0^x F(t).dt$$

$$D'autre part, \int_0^x (F(x) - F(t)).dt = \int_0^x F(x).dt - \int_0^x F(t).dt = x.F(x) - \int_0^x F(t).dt.$$

Il y a bien égalité.

Et je colle trois baffes à qui écrira des $\int_0^x \left(\int_0^x f(t).dt - \int_0^t f(t).dt \right).dt$ qui l'ont plus aucun sens.

F est continue (et même dérivable), sur un segment. Elle est bornée et atteint ses bornes.

Sa borne inférieure en b et sa borne supérieure en a . C'est directement le théorème de compacité.

On calcule $G(a) = \int_{t=0}^a (F(a) - F(t)).dt$. Comme $F(a)$ est la maximum, la fonction intégrée est positive, l'intervalle est dans le bon sens. L'intégrale est positive.

$G(b) = \int_{t=0}^b (F(b) - F(t)).dt$ Cette fois, l'application intégrée est négative ($F(t) \geq F(b)$). L'intégrale est négative.

Avec $G(a) \geq 0 \geq G(b)$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires entre a et b et trouver que G s'annule au moins une fois.

Comme a et b sont strictement entre 0 et 1, c y est aussi.

On suppose cette fois que F est de signe constant sur $[0, 1]$: $F(a) \geq F(x) \geq F(b) \geq 0$. On note que comme on sait qu'on a $F(0) = 0$, $F(b)$ vaut vraiment 0 (0 est une valeur atteinte par F).

D'ailleurs, on a aussi $F(1) = 0$.

On a toujours $G(a)$ positif.

On calcule ensuite $G(1)$ (et pas $G(b)$). Mais $G(1) = \int_0^1 (F(1) - F(t)).dt = - \int_0^1 F(t).dt$ puisque $F(1)$ est négatif.

Mais comme F est positive, $G(1)$ est donc strictement négatif.

Il y a donc là encore (T.V.I.) un c entre a et 1 vérifiant $G(c) = 0$.

L'autre cas est celui où F est négative. On applique le résultat à $-F$, et c'est fini.

Il pourrait rester le cas où F est constante, nulle. mais alors f est nulle aussi, et c peut être mis n'importe où pour avoir $\int_0^1 t.f(t).dt = 0$.

◦42◦

Montrez que $f \mapsto |f(0)| + |f(1)| + \sup\{|f''(t)| \mid t \in [0, 1]\}$ est une norme sur $C^2([0, 1], \mathbb{R})$.
 Montrez que $f \mapsto |f(0) + f(1)| + \sup\{|f''(t)| \mid t \in [0, 1]\}$ n'est pas une norme sur $C^2([0, 1], \mathbb{R})$.

Existence Si f est C^2 , sa dérivée seconde est continue, bornée et atteint ses bornes sur le segment $[0, 1]$. $\text{Sup}\{|f''(t)| \mid t \in [0, 1]\}$ existe et on peut lui ajouter deux termes positifs.

Positivité La somme des trois termes est même positive.

Homogénéité Si on remplace f par $\lambda.f$, on a trois $|\lambda|$ qui sortent et qu'on peut factoriser.

Inégalité en forme de triangle On se donne deux fonctions, l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ donne $|(f+g)(0)| \leq |f(0)| + |g(0)|$ et $|(f+g)(1)| \leq |f(1)| + |g(1)|$.
celle sur les réels donne aussi $|(f+g)''(t)| \leq |f''(t)| + |g''(t)| \leq \|f''\|_\infty + \|g''\|_\infty$ pour tout t , et par passage à la borne supérieure $\|(f+g)''\|_\infty \leq \|f''\|_\infty + \|g''\|_\infty$.
Il n'y a plus qu'à tout additionner.

Séparation On se donne f et on suppose que la somme des trois termes $|f(0)|$, $|f(1)|$ et $\|f''\|_\infty$ est nulle. Comme ce sont des réels positifs, par antisymétrie, chacun est nul. La nullité de $\|f''\|_\infty$ entraîne la nullité de f'' sur tout $[0, 1]$. En intégrant, f' est constante et f est affine.
Mais les deux autres informations donnent « affine nulle en 0 et en 1 donc constante égale à 0 ». C'est fini.

Ce qui manque à le seconde pour faire une norme ?

La séparation. On peut avoir $|f(0) + f(1)| + \text{Sup}\{|f''(t)| \mid t \in [0, 1]\} = 0$ sans que f soit la fonction nulle.

Si on reprend notre approche pour la norme, on arrive juste à f affine et $f(0) + f(1) = 0$.

Mais alors l'application $t \mapsto 2.t - 1$ vérifie cette propriété.

◦43◦

Le développement limité de $e^{\ln(x)}$ au voisinage de $x = e$ à l'ordre 3 est simple, donnez le moi.
Mais j'ai confondu, et je veux celui de $(\ln(x))^e$ au voisinage de $x = e$. Donnez le moi aussi (à l'ordre 3)^a.

a. à défaut, l'ordre 2 c'est déjà bien, et l'ordre 1 c'est mieux que rien, et l'ordre 0, c'est mieux que de taper sur Sucr

Pour ce qui est de $e^{\ln(x)}$, c'est x . Et son développement limité en $x = e$ est $e + h = e + 1.h + 0.h^2 + 0.h^3 + o(h^3)_{h \rightarrow 0}$.

Passons à $(\ln(e+h))^e$ qu'on écrit $\left(\ln(e) + \ln\left(1 + \frac{h}{e}\right)\right)^e$ pour commencer.

On développe dans la parenthèse : $\ln(e) + \ln\left(1 + \frac{h}{e}\right) = 1 + \frac{h}{e} - \frac{h^2}{2.e^2} + \frac{h^3}{3.e^3} + o(h^3)$.

Je ne vois pas d'inconvénient à poser $u = \frac{h}{e} - \frac{h^2}{2.e^2} + \frac{h^3}{3.e^3} + o(h^3)$ et à vérifier qu'il tend vers 0 quand h tend vers 0.

On est alors en présence de $(1+u)^e$.

L'exposant e est fixe. On peut utiliser la formule du binôme :

$(1+u)^e = 1 + e.u + \frac{e.(e-1)}{2}.u^2 + \frac{e.(e-1).(e-2)}{6}.u^3 + o(u^3)$, sachant que $o(u^3)$ est aussi un $o(h^3)$.

$u =$	$\frac{h}{e}$	$-\frac{h^2}{2.e^2}$	$\frac{h^3}{3.e^3}$	$+o(h^3)$
$u^2 =$		$\frac{h^2}{e^2}$	$-\frac{h^3}{e^3}$	$+o(h^3)$
$u^3 =$			$\frac{h^3}{e^3}$	$+o(h^3)$

Courageusement, on développe :

Et on multiplie par e , par $\frac{e^2 - e}{2}$ et par $\frac{e^3 - 3.e^2 + 2.e}{6}$.

On regroupe finalement proprement :

$$(\ln(e+h))^e = 1 + h + \left(\frac{1}{2} - e^{-1}\right).h^2 + \left(\frac{1}{6} - e^{-1} + \frac{7}{6}.e^{-2}\right).h^3 + o(h^3)$$

◦44◦

Justifiez pour toute application φ continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$: $\left(\int_a^b \varphi(t).dt\right)^2 \leq (b-a) \cdot \int_a^b \varphi(t)^2.dt$; dans quel cas a-t-on égalité ? Soit f dérivable de $[0, 8]$ dans $\mathbb{R}^*$ vérifiant $f(4) = \frac{1}{4} = (f(8))^2$ et $\int_4^8 \frac{(f'(t))^2}{(f(t))^4}.dt = 1$. Calculez $f(8)$ et $\int_4^8 \frac{f'(t)}{(f(t))^2}.dt$. Retrouvez le résultat de cet examen vietnamien cité par Presh Talwalkar : $f(6)$ vaut $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{6}$.

L'inégalité $\left(\int_a^b \varphi(t).dt\right)^2 \leq (b-a) \cdot \int_a^b \varphi(t)^2.dt$ est un cas particulier de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_a^b \psi(t).\varphi(t).dt\right)^2 \leq \int_a^b \psi(t)^2.dt \cdot \int_a^b \varphi(t)^2.dt$$

appliquée ici à ψ constante égale à 1.

Il y a égalité si et seulement si les deux applications sont proportionnelles.

On nous dit que f est dérivable (donc continue) de $[0, 10]$ dans $\mathbb{R}^*$ (réunion de deux intervalles).

Par contraposée du théorème des valeurs intermédiaires, f est de signe constant sur l'intervalle $[0, 10]$.

Comme sa valeur en 4 est positive, celle en 8 l'est aussi.

On n'a donc pas le choix : $f(8) = \frac{1}{2}$ (pour que son carré vaille $\frac{1}{4}$).

Ensuite, on peut calculer

$$\int_4^8 \frac{f'(t)}{f(t)^2}.dt = \left[\frac{-1}{f(t)}\right]_{t=4}^{t=8} = \frac{-1}{1/2} - \frac{-1}{1/4} = -2 + 4 = 2$$

Une hypothèse dit $\int_4^8 \frac{(f'(t))^2}{(f(t))^4}.dt = 1$. On reporte dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $\varphi = \frac{f'}{f^2}$:

$$4 = 2^2 = \left(\int_4^8 \frac{f'(t)}{f(t)^2}.dt\right)^2 \leq (8-4) \cdot \int_4^8 \frac{(f'(t))^2}{(f(t))^4}.dt = 4.1 = 4$$

L'inégalité est une égalité ! C'est donc que $\frac{f'}{f^2}$ (l'une des fonctions) est proportionnelle à 1 (l'autre fonction).

Mais quelle est la valeur de cette constante ? Si on écrit $\frac{f'(t)}{(f(t))^2} = a$ pour tout t , on doit avoir par le calcul précédent

$$\int_4^8 a = 2.$$

C'est donc que a vaut $\frac{1}{2}$.

Notre problème d'analyse se spécialise alors en problème d'équation différentielle : $\frac{f'(t)}{(f(t))^2} = \frac{1}{2}$ pour tout t .

On intègre de $t = 4$ à $t = 6$:

$$\int_4^6 \frac{f'(t)}{(f(t))^2}.dt = \int_4^6 \frac{dt}{2}$$

On effectue : $\left[\frac{-1}{f(t)}\right]_{t=4}^{t=6} = 1$ puis $\frac{1}{f(4)} - \frac{1}{f(6)} = 1$.

Connaissant $f(4)$, il reste $f(6) = \frac{1}{3}$

◻45◻

Y a-t-il plus d'applications injectives de S_4 dans S_3 que de parties à 12 éléments dans S_4 (rappel : S_n est l'ensemble des permutations d'un ensemble à n éléments).

S_3 est de cardinal 6 et S_4 est de cardinal 24.

De A vers B il y a b^a application (b choix pour chacun des a éléments, d'où $b.b \dots b$).

Mais les applications injectives ? Le premier élément de A a b choix.

Le second élément n'en a plus que $b - 1$.

Le suivant en a $b - 2$.

Et ainsi de suite, jusqu'au dernier (sauf si $a > b$!).

On a donc 24.23.22.21.20.19 applications injectives de S_6 dans S_4 (et aucune de S_4 dans S_3).

Ensuite, on compte les parties à 12 éléments dans S_4 :

$$\binom{24}{12} = \frac{24.23.22.21.19.18.17.16.15.14.13}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}$$

On les compare en effectuant un quotient :

$$\frac{24.23.22.21.20.19}{24.23.22.21.19.18.17.16.15.14.13} = \frac{12!}{13.14.15.16.17.18} = \frac{(12!)^2}{18!}$$

Plus grand que 1 après simplification en $\frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11}{13 \cdot 17}$

◦46◦

Quelle est la limite en 1 de $\ln(x) \cdot \ln(1-x)$?

La forme est indéterminée, un logarithme tend vers 0 l'autre vers l'infini négatif.

A fait, x tend vers 1 par valeur inférieure.

Comme tout se passe en 1, on pose $x = 1 + h$ et c'est h qui va tendre vers 0 (question d'habitude).
Et justement, $\ln(1+h) \cdot \ln(-h)$ est équivalent quand h tend vers 0 à $h \cdot \ln(-h)$.

Si nécessaire, on fait un second changement de variable en $X = -\frac{1}{h}$ pour revenir à une forme indéterminée du secondaire.

Mais sinon, c'est la forme indéterminée du supérieur : $h \cdot \ln(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

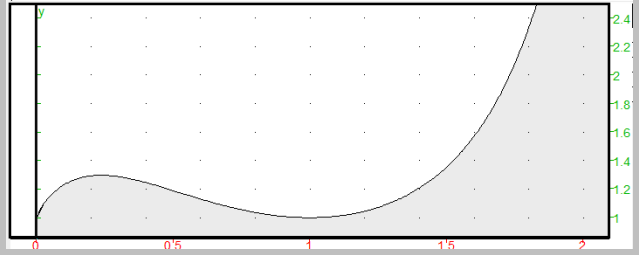
Attention, on n'ira pas écrire

$$\ln(x) \cdot \ln(1-x) = \ln(1+h) \cdot \ln(-h) \sim h \cdot \ln(-h) \sim 0$$

La dernière « équivalence » n'a aucun sens.

Donnez le développement limité en 1 de $\left(\frac{1}{x}\right)^{x^x}$.

Justifiez que le graphe de $x \mapsto x^{x^2-x}$ a bien la forme indiquée ci contre (limites aux bornes, sens de variations, pas forcément les coordonnées des extréma locaux).



◦47◦

Résolvez $\sqrt{666\sqrt{x}} = 666^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ d'inconnue réelle x .

Posons $c = 666$ et résolvons $\sqrt{c\sqrt{x}} = c^{1/\sqrt{x}}$ en passant au logarithme : $\frac{1}{2} \cdot \ln(c\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln(c)$.

On pousse encore plus loin : $\frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \ln(c) = \frac{\ln(c)}{\sqrt{x}}$. On simplifie car $\ln(666)$ n'est pas nul : $\frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

La solution est $x = 2$

◦48◦

Montrez que $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}$ se prolonge par continuité aux trois extrémités de son domaine de définition (d'ailleurs, c'est quoi ce domaine ?).

Pour définir $\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}$, il faut (et il suffit) que x soit strictement positif (existence du logarithme), différent de 1 (non annulation des deux dénominateurs).

Le domaine est donc $]0, 1[\cup]1, +\infty[$

La limite en 0 vaut 1 ($\frac{1}{\ln(x)}$ tend vers 0 puisque son dénominateur tend vers l'infini).

La limite en $+\infty$ vaut 0 car les deux dénominateurs tendent vers l'infini.

Reste le problème de 1. On pose $x = 1 + h$ et on ne distingue en rien la droite de la gauche, puisque c'est la même définition des deux côtés.

On étudie $\frac{1}{\ln(1+h)} - \frac{1}{h}$ (deux équivalents de même ordre, mais on ne sait pas ce qu'il reste ensuite). On réduit au dénominateur commun, on passe aux développements limités (numérateur) et aux équivalents (dénominateur) :

$$\frac{1}{\ln(1+h)} - \frac{1}{h} = \frac{h - \ln(1+h)}{h \cdot \ln(1+h)} = \frac{h - h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)}{h \cdot \ln(1+h)} \sim \frac{\frac{h^2}{2}}{h^2} = \frac{1}{2}$$

L'équivalence à une constante numérique donne la convergence vers ladite limite.

On prolongera par continuité en 1 avec la valeur $\frac{1}{2}$.

◦49◦ Quelle est la dimension de l'ensemble des fonctions polynômes lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Les fonctions polynômes ne sont pas souvent lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Sachant qu'elles sont dérivables, le critère se ramène à « dérivée bornée ».

Mais un polynôme n'est pas borné sur $\mathbb{R}$ sauf s'il est constant.

Si la dérivée est constante, l'application elle-même est affine, de la forme $x \mapsto a.x + b$.

On a un espace vectoriel de dimension 2, engendré par $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1$.

◦50◦ Combien l'équation $\log_7(x) + \log_8(x) = 1$ a-t-elle de solutions ? Calculez leur somme.

Chaque application $x \mapsto \log_a(x)$ est croissante, de même que leur somme. On aura au plus une solution à l'équation $\log_7(x) + \log_8(x) = 1$. De plus les limites en 0 et en $+\infty$ donnent par théorème des valeurs intermédiaires une solution.

La question « somme des solutions » se ramène à « la solution ».

On applique le cours : $\frac{\ln(x)}{\ln(7)} + \frac{\ln(x)}{\ln(8)} = 1$.

On trouve $\ln(x) = \frac{\ln(7) \cdot \ln(8)}{\ln(7) + \ln(8)}$. Pas tellement plus simple que $x = e^{\frac{\ln(7) \cdot \ln(8)}{\ln(56)}}$

◦51◦ Résolvez : $2 - \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{x}}} = 5$ d'inconnue complexe x .

On transforme $2 - \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{x}}} = 5$ en $\frac{1}{3} - \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{x}} = -\frac{1}{3}$ puis $\frac{1}{4} - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$ et enfin $x = -\frac{4}{5}$ (dans $\mathbb{R}$ donc a fortiori dans

C).

◦52◦ On donne comme hypothèse : $\frac{u_{n+2}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}$. Un élève prétend en déduire : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$. Prouvez lui qu'il a tort.

L'autre sens aurait été correct : si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\frac{1}{2}$
alors $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\frac{1}{4}$

Mais sinon, que pensez vous de la suite

$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7	...	$2.p$	$2.p + 1$	...
1	$-\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{\sqrt{3}}{16}$	$\frac{1}{64}$	$-\frac{\sqrt{3}}{64}$		$\frac{1}{4^p}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4^p}$	

Chaque rapport $\frac{u_{n+2}}{u_n}$ vaut $\frac{1}{4}$ (que n soit pair ou impair).

Mais le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vaut $-\sqrt{3}$ ou $\frac{-4}{\sqrt{3}}$ suivant la parité de n .

Il y a d'autres exemples possibles évidemment, avec l'entrelacement de deux suites « presque géométriques ».

◦53◦ Un élève prétend qu'on a
 $\dim(F + G + H) = \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) - (\dim(F \cap G) + \dim(F \cap H) + \dim(G \cap H)) + \dim(F \cap G \cap H)$
Montrez par un simple contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ qu'il a tort (et pas seulement parce qu'il est élève).

Prenons dans le plan les trois droites $\text{Vect}(\vec{i})$, $\text{Vect}(\vec{j})$ et $\text{Vect}(\vec{i} + \vec{j})$.

$F + G + H$	F	G	H	$F \cap G$	$F \cap H$	$G \cap H$	$F \cap G \cap H$
$\mathbb{R}^2$	droite	droite	droite	$\{\vec{0}\}$	$\{\vec{0}\}$	$\{\vec{0}\}$	$\{\vec{0}\}$
2	1	1	1	0	0	0	0

◦54◦ Construisez (u_n) qui converge, tandis que $([u_n])$ diverge.

La suite $\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)_n$ converge (vers 0).

Mais $\left(\left[\frac{(-1)^n}{n+1}\right]\right)_n$ diverge.

Les termes d'indice pair valent 0 et ceux d'indice impair valent -1 .

On sautille ici de part et d'autre du point de discontinuité $x = 1$.

◦55◦

♥ Sachant que M a pour polynôme caractéristique $X^4 - 5.X^3 + 2.X^2 - X + 1$, donnez le polynôme caractéristique de $M + I_4$, $2.M$ et M^2 .

Par définition : $\det(M - X.I_4) = X^4 - 5.X^3 + 2.X^2 - X + 1$ (car on n'a pas le choix sur le format).

On a alors

$$\det((M + I_4) - X.I_4) = \det(M - (X - 1).I_4) = (X - 1)^4 - 5.(X - 1)^3 + 2.(X - 1)^2 - (X - 1) + 1$$

On trouve $X^4 - 9.X^3 + 23.X^2 - 624.X + 10$.

Et on constate que la trace est passée de 5 à 9.

On a aussi

$$\det(2.M - X.I_4) = \det\left(2.\left(M - \frac{X}{2}.I_4\right)\right) = 16.\det\left(M - \frac{X}{2}.I_4\right) = 16.\left(\left(\frac{X}{2}\right)^4 - 5.\left(\frac{X}{2}\right)^3 + 2.\left(\frac{X}{2}\right)^2 - \left(\frac{X}{2}\right) + 1\right)$$

On a cette fois $X^4 - 10.X^3 + 8.X^2 - 8.X + 16$.

Et on constate que la trace est passée de 5 à 10 et le déterminant de 1 à 16.

On termine avec $\det(M^2 - X.I_4) = \det((M - \sqrt{X}.I_4).(M + \sqrt{X}.I_4)) = \det(M - \sqrt{X}.I_4).\det(M + \sqrt{X}.I_4)$.

Cette fois, en calcul assez formel : $(X^2 - 5.\sqrt{X}^3 + 2.X - \sqrt{X} + 1).(X^2 + 5.\sqrt{X}^3 + 2.X + \sqrt{X} + 1)$

On a une forme en $(A + B).(A - B)$ et les racines s'en vont à la fin : $X^4 - 21.X^3 - 4.X^2 + 3.X + 1$.

Le déterminant de M^2 est bien le carré du déterminant de M .

◦56◦

Rappel des règles :

Mettre dans la grille tous les entiers de 1 à 9 (certains sont déjà placés) pour que les trois additions en ligne et en colonne soient correctes :

		7
4		

 $=$

24
11
10

et

	1	

 $=$

20
10
15

15	20	10
----	----	----

 $=$

22	.7	16
----	----	----

◦57◦

♥ Montrez $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$ en utilisant le théorème de Cesàro sur $\frac{n^n}{n!}$.

Ce n'est pas directement le théorème de Cesàro dans sa forme (a_n) converge vers α implique $\frac{a_0 + \dots + a_n}{n+1}$ converge vers α .

On a des formules qui passent par logarithme et exponentielle.

Si $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ tend vers α alors $\ln(b_{n+1}) - \ln(b_n)$ converge vers $\ln(\alpha)$

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (\ln(b_{k+1}) - \ln(b_k)) \text{ converge vers } \ln(\alpha)$$

$$\frac{\ln(b_n) - \ln(b_0)}{n} \text{ converge vers } \ln(\alpha)$$

$$\frac{\ln(b_n) - \ln(b_0)}{n} + \frac{\ln(b_0)}{n} \text{ converge vers } \ln(\alpha)$$

$$\exp\left(\frac{\ln(b_n)}{n}\right) \text{ converge vers } e^{\ln(\alpha)}$$

$$\sqrt[n]{b_n} \text{ converge vers } \alpha$$

Qui va être ici b_n et qui va être α ?

On se laisse guider et on pose $b_n = \frac{n^n}{n!}$ dont la limite ne saute pas aux yeux.
Mais ce qu'on doit regarder c'est le quotient :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}$$

Il reste

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{1}{(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Grand classique : ceci tend vers e (passez au logarithme et reconnaissez $\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln(1)}{\frac{1}{n}}$ et surtout, connaissez votre cours !).

Le théorème peut s'appliquer : $\sqrt[n]{b_n}$ converge à son tour vers e .

Mais qui est $\sqrt[n]{b_n}$? C'est $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

La formule $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ tend vers e est équivalente à $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ tend vers 1.

Et c'est la définition de « deux suites équivalentes ».

◻58◻

♥ Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x - 1)$ (pourquoi pas ?). Montrez alors pour tout $x, f\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right) = f(x)$. Montrez que $f\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right)$ tend vers $f(1)$ quand n tend vers l'infini. Déduisez que f est constante.

Montrez que l'application 1_Q vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x - 1)$ sans pour autant être constante.

On fait une hypothèse sur f un peu comme une équation différentielle. Enfin, non, un peu comme de la parité.

On va voir que ça ne laisse guère de choix à f .

La relation $f\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right) = f(x)$ se démontre par récurrence sur n (x fixé).

Pour n nul, c'est $f(x) = f(x)$.

On se donne n et on suppose $f\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right) = f(x)$.

On veut étudier $f\left(\frac{x-1}{2^{n+1}} + 1\right)$. On sait $f(t) = f(2t - 1)$, pour tout t ,

en particulier $f\left(\frac{x-1}{2^{n+1}} + 1\right) = f\left(2 \cdot \left(\frac{x-1}{2^{n+1}} + 1\right) - 1\right) = f\left(\frac{x-1}{2^n} + 2 - 1\right) = f\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right) = f(x)$.

La récurrence s'achève.

Remarque : On a renversé la relation $f(x) = f(2x - 1)$ en $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x)$ puis on l'a mise en boucle.
Il n'y a rien de magique dans cette récurrence.
Auriez vous dû la deviner sans qu'on vous la donne ?

On fait tendre n vers l'infini (x fixé) : $\frac{x-1}{2^n} + 1$ converge vers 1.

Et $f\left(\frac{x-1}{2^n} + 1\right)$ converge vers $f(1)$ par continuité de f .

Mais cette suite est constante égale à $f(x)$ (x est fixé, je le rappelle, c'est n qui bouge, les variables !).

Par unicité de la limite $f(x) = f(1)$ pour tout x .

C'est la définition de « f est constante ». ¹⁷

L'application $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ vérifie $f(x) = f(2x - 1)$.

En effet, x est dans $\mathbb{Q}$ si et seulement si $2x - 1$ est dans $\mathbb{Q}$.

Et elle ne contredit en rien notre exercice. Elle n'est pas continue en 1.

¹⁷. combien d'entre vous estiment que la définition de « f est constante » est « f' est nulle ? »... En version moderne, je dirais « bon en Spé maths, pas bon en maths expertes ».

Bonus : L'application $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad x \in \mathbb{Z} \quad \left| \right. \text{ ne vérifie pas } f(x) = f(2x-1), \text{ saurez vous trouver le problème ?}$

◦59◦

On rappelle que pour un emprunt d'une somme de S euros au taux τ^a d'une durée de n mois avec des mensualités d'un montant μ , on a les formules suivantes :

$$\mu = \frac{\tau.S}{1 - (1 + \tau)^{-n}} \text{ et } n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{\tau.S}{\mu}\right)}{\ln(1 + \tau)} \text{ (redémontrez les).}$$

Donnez les limites de ces quantités quand τ tend vers 0. Est ce cohérent ?

a. le taux τ , voilà une blague !

Notons S la somme empruntée et fabriquons la formule qui dit quelle est votre dette mois après mois vis à vis de la banque.

C'est une suite u_n qui vérifie $u_0 = S$ et $u_{n+1} = (1 + \tau).u_n - \mu$.¹⁸

Expliquons cette formule avec des versions de banque plus ou moins accommodantes :

la banque ne vous fait rien payer, mais vous ne remboursez rien	$u_{n+1} = u_n$
la banque ne vous fait rien payer, et vous remboursez μ chaque mois	$u_{n+1} = u_n - \mu$
la banque vous facture des intérêts chaque mois à un taux τ et vous ne remboursez rien	$u_{n+1} = u_n + \tau.u_n$
la banque vous facture des intérêts, mais vous pensez aussi à rembourser	$u_{n+1} = (1 + \tau).u_n - \mu$

C'est cette formule arithmético-géométrique que l'on retient.

On note que suivant les lignes, la suite (u_n) décroît (vous devez de moins en moins, c'est bon, elle finira par vous être redevable).

la suite (u_n) croît (et ne croyez pas que la banque vous laissera faire)

Pour la dernière tout dépend de μ par rapport à $\tau.u_n$

$\mu > \tau.u_n$	vous remboursez plus que les intérêts	vous allez grignoter votre capital dû, c'est bon
$\mu = \tau.u_n$	vous remboursez chaque mois pile poil les intérêts	votre dette reste constante (emprunts à taux progressifs au début)
$\mu < \tau.u_n$	vous ne remboursez même pas les intérêts	votre dette augmente de plus en plus

Illustration : vous empruntez 1000 euros à un taux mensuel (usurier) de 1 pour cent par mois.
 Vous remboursez 10 euros par mois... Pas génial, mais au moins, vous n'augmentez pas votre dette.
 Vous remboursez 100 euros par mois. le premier mois, vous avez payé 10 euros d'intérêts et remboursé 90 euros de capital
 le second mois, vous avez payé 9 euros d'intérêts et remboursé encore 91 euros de capital
 le troisième mois, vous avez payé un peu moins de 9 euros d'intérêts et remboursé encore 91, ... euros de capital
 A la fin, vous devrez 200 euros à la banque. Elle vous demandera 2 euros d'intérêts, vous rembourserez 98 euros de capital, et un mois après ce sera fini.

Bref, la formule $u_{n+1} = (1 + \tau).u_n - \mu$ est la bonne, avec $u_0 = S$.

Mais la suite n'est ni arithmétique ($u_{n+1} = u_n - \mu$) ni géométrique ($u_{n+1} = (1 + \tau).u_n$).

Alors on fait quoi ? On la rend géométrique en lui soustrayant ce qu'il faut.

C'est la suite $u_n - \frac{\mu}{\tau}$ qui est géométrique.

Pourquoi elle ? Because le calcul.

Et parce que $\frac{\mu}{\tau}$ est justement la somme à rembourser pour que votre situation se maintienne à une dette constante.

Si vous empruntez plus que μ/τ , vous ne pourrez jamais éponger votre dette...

Bon, calcul ! On pose $v_n = u_n - \alpha$ avec α à ajuster

On a donc aussi $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha$

On remplace : $v_{n+1} = (1 + \tau).u_n - \mu - \alpha$

On remplace encore : $v_{n+1} = (1 + \tau).(v_n + \alpha) - \mu - \alpha$

On développe : $v_{n+1} = (1 + \tau).v_n + \tau.\alpha - \mu$

On a justement choisi : $\mu = \tau.\alpha$!

18. si vous devez un pour cent d'intérêts, la formule $u_{n+1} = 1,01 \times u_n$ vous semble cohérente ? oui !
 sinon, faites toutes les études que vous voulez... sauf celles contenant des maths, de la physique, de la finance, des sciences, des choses intelligentes... bref, si vous ne comprenez pas $(1 + \tau).u_n$, reprenez vos études de latin pour devenir traducteur de Plaute et Pline, c'est tout ce qu'il vous reste...

On reconnaît : (v_n) est géométrique de raison $1 + \tau$.

On a alors $v_n = (1 + \tau)^n \cdot v_0$.

On remplace : $u_n + \frac{\mu}{\tau} = (1 + \tau)^n \cdot \left(S - \frac{\mu}{\tau}\right)$.

On déplace : $u_n = (1 + \tau)^n \cdot S + \frac{\mu}{\tau} \cdot \left(1 - (1 + \tau)^n\right)$.

Dans $\frac{(1 + \tau)^n - 1}{(1 + \tau) - 1}$ certains reconnaissent une série géométrique. Et ils ont raison.

On l'obtient aussi en moulinant $u_1 = (1 + \tau) \cdot u_0 - \mu$
 $u_2 = (1 + \tau) \cdot u_1 - \mu = (1 + \tau)^2 \cdot u_0 - \mu \cdot (1 + (1 + \tau))$
 $u_3 = (1 + \tau) \cdot u_2 - \mu = (1 + \tau)^3 \cdot u_0 - \mu \cdot (1 + (1 + \tau) + (1 + \tau)^2)$
 $u_4 = (1 + \tau) \cdot u_3 - \mu = (1 + \tau)^4 \cdot u_0 - \mu \cdot (1 + (1 + \tau) + (1 + \tau)^2 + (1 + \tau)^3)$

Remarque : | Finalement, la récurrence ça a aussi du bon...

On a la formule $u_n = (1 + \tau)^n \cdot \left(S - \frac{\mu}{\tau}\right) + \frac{\mu}{\tau}$ et $u_n = (1 + \tau)^n \cdot S + \frac{\mu}{\tau} \cdot \left(1 - (1 + \tau)^n\right)$.

On se dit qu'on a tout remboursé quand u_n est enfin nul (au delà, on change de signe !).

On a donc cette fois une équation liant

N	capital emprunté
τ	taux des intérêts
μ	montant des remboursements
n	nombre de mensualités pour solder le crédit

:

$$(1 + \tau)^n \cdot \left(\frac{\mu}{\tau} - S\right) = \frac{\mu}{\tau}.$$

On extrait n par exemple : $(1 + \tau)^n = \frac{\mu}{\tau \cdot \left(\frac{\mu}{\tau} - S\right)} = \frac{\mu}{\mu - \tau \cdot S}.$

On passe au logarithme pour extraire n (durée du remboursement) :

$$n \cdot \ln(1 + \tau) = \ln\left(\frac{\mu}{\mu - \tau \cdot S}\right) = -\ln\left(1 - \frac{\tau \cdot S}{\mu}\right)^{19}.$$

Approximons pour τ « petit »²⁰ : $\ln(1 + x) \sim_{x \rightarrow 0} x$ devient $\ln(1 + x) \simeq x$ (sorry, I don't understand ce $\simeq$)

$$n \cdot \tau \simeq n \cdot \ln(1 + \tau) = -\ln\left(1 - \frac{\tau \cdot S}{\mu}\right) \simeq -\left(-\frac{\tau \cdot S}{\mu}\right)$$

On trouve n peu différent de S/μ . Logique, si on rembourse μ chaque mois, il en faut S/μ pour rembourser S .

Sinon, on avait aussi $(1 + \tau)^n \cdot \left(\frac{\mu}{\tau} - S\right) = \frac{\mu}{\tau}$ qui devenait $\mu = \frac{\tau \cdot S}{1 - (1 + \tau)^n}$ en résolvant une équation du premier degré.

Et cette fois, pour τ « petit » : $(1 + \tau)^n = 1 + n \cdot \tau + \dots$ et il reste $\mu = \frac{\tau \cdot S}{\tau \cdot n} = \frac{S}{n}$. C'est la même formule.

◦60◦

On prend quatre chiffres distincts a, b, c et d . On crée tous les nombres à trois chiffres (*combien y en a-t-il ?*). On les somme tous. On divise le résultat par $a + b + c + d$. Que trouve-t-on ?

$4 \times 3 \times 2$ nombres, puisque l'ordre dans lequel on tire a, b et c est important.

Ou 4^3 si on a le droit de reprendre plusieurs fois le même chiffre, l'énoncé n'est pas clair là dessus..

Par exemple, avec 2, 4, 7 et 9, on crée

247	249	274	279	294	297
427	429	472	479	492	497
724	729	742	749	792	794
924	927	942	947	972	974

et on somme...

On écrit des nombres de la forme $\overline{\alpha\beta\gamma}$ c'est à dire $100 \cdot \alpha + 10 \cdot \beta + \gamma$.

On va les sommer et avoir $100 \cdot \sum \alpha + 10 \cdot \sum \beta + \sum \gamma$.

Chaque somme est faite de 24 termes, où a, b, c et d sont présents chacun six fois.

On a donc $\sum \alpha = \sum \beta = \sum \gamma = 6 \cdot a + 6 \cdot b + 6 \cdot c + 6 \cdot d$.

19. et si $\tau \cdot S/\mu$ est trop grand, ce logarithme n'existe pas, et vous ne pouvez rien emprunter !

20. aidez moi, je suis en train de devenir physicien !

Notre grande somme vaut donc $6 \cdot (\alpha + \beta + \gamma) \cdot (100 + 10 + 1)$.

Total : $666 \cdot (a + b + c + d)$.

Après division on trouve 666. Le nombre de la bête...

◦61◦ Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $]0, 1]$. Montrez que pour tout n de $\mathbb{Z}$, f^n est bornée.
Attention, j'ai bien écrit $\mathbb{Z}$.

Comme $[0, 1]$ est un segment, f est bornée, et atteint ses bornes.

Il existe donc c et d vérifiant : $\forall x \in [0, 1], f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ et même $\forall x \in [0, 1], 0 < f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

Tout est positif, on élève à la puissance n pour n positif : $\forall x \in [0, 1], 0 < (f(c))^n \leq (f(x))^n \leq (f(d))^n$.

Et pour n négatif ($n = -p$), on doit renverser (pensez à $t \mapsto \frac{1}{t}$) : $\forall x \in [0, 1], \frac{1}{(f(d))^p} \leq \frac{1}{(f(x))^p} \leq \frac{1}{(f(c))^p}$.

L'essentiel pour les exposants négatifs est d'aller « loin de 0 ».

Notons que de $]0, 1]$ dans $]0, 1]$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et bornée, mais $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ (exposant négatif) reste continue mais n'est plus bornée... Le met segment avait ici son rôle.

◦62◦ An old exercise from the Mathematical Gazette (1952) : Four members of my club -Messrs Albert, Charles, Frederick and Dick- have recently been knighted, so now their friends have to learn their Christian names. These are a bit troublesome : for it transpires that the surname of each of the four knights is the Christian name of one of the others.
Dick is not the Christian name of the member whose surname is Albert.
There are three of the knights related as follows : the Christian name of the member whose surname is Frederick is the surname of the member whose Christian name is the surname of the member whose Christian name is Charles.
Whats is Mr. Dick's first name ?

Note : "Christian name" is an outdated way of saying "first name".

We are given three hints to find Mr. Dick's first name :

- 1) The surname of each of the four knights is the Christian name of one of the others
- 2) Dick is not the Christian name of the member whose surname is Albert
- 3) The Christian name of the member whose surname is Frederick is the surname of the member whose Christian name is the surname of the member whose Christian name is Charles.

We will be using a double-entry table for this exercise :

First name	surname	Albert	Charles	Frederick	Dick
Albert		X (1)			✓ (5)
Charles		✓ (5)	X (1)	X (4)	
Frederick			✓ (6)	X (1)	
Dick		X (2)		✓ (5)	X (1)

(1) According to rule n°1 "of one of the others" : no one has the same name and surname

(2) Rule n°2

(3) According to rule n°3 :

first name: Albert Charles -(4) Dick	Frederick		person C		Charles	surname: Albert Frederick -(4) Dick
	person A		first name	surname		person B

(4) person A's first name cannot be Charles and person B's surname cannot be Frederick, otherwise they are the same person and person C is Frederick Charles, so the other two will be Albert Dick and Dick Albert... which breaks rule n°2.

(5) those are the remaining options :

Person A	Person B	Person C
Albert Frederick	Charles Albert	Albert Albert → NO! (rule n°1)
	Charles Dick	Dick Albert → NO! (rule n°2)
Dick Frederick	Charles Albert	Albert Dick
	Charles Dick	Dick Dick → NO! (rule n°1)

(6) confirms that our solution is valid.

Conclusion : Mr. Dick's first name is Albert.