

LYCEE CHARLEMAGNE

Lundi 3 juin

M.P.S.I.2



2023

2024

TD31

◦0◦

Sachant $\sqrt{a^2 + a.b + b^2} + \sqrt{a^2 - a.b + b^2} = 1$, calculez $(a^2 - 1).(b^2 - 1)$.

Une piste : $a^2 + b^2 + a.b = \cos^4(t)$ et $a^2 + b^2 - a.b = \sin^4(t)$.

Autre piste : quantité conjuguée.

◦1◦

$$\boxed{} \times \boxed{} = \boxed{51}$$

+

x

$$\boxed{} - \boxed{} = \boxed{18}$$

=

=

$$\boxed{23} \quad \boxed{99}$$

Montrez qu'il n'y a pas de solution dans $\mathbb{Z}^4$ mais qu'il y en a une dans $\mathbb{Q}^4$.

$$\boxed{a} \times \boxed{b} = \boxed{51}$$

+

x

$$\boxed{c} - \boxed{d} = \boxed{18}$$

=

=

$$\boxed{23} \quad \boxed{99}$$

On nomme nos quatre inconnues

La condition $a.b = 51$ donne (aux signes près et à l'ordre près) les couples (1, 51) et (3, 17).

La condition $b.d = 99$ donne des couples qui refusent $b = \pm 51$ de même que $b = \pm 17$.

b ne peut valoir que 1 ou 3 (au signe près).

Mais dans ce cas, on trouve tout de suite a et d puis c et il y a alors une contradiction

$$\boxed{51} \times \boxed{1} = \boxed{51} \quad \boxed{-51} \times \boxed{-1} = \boxed{51} \quad \boxed{17} \times \boxed{3} = \boxed{51} \quad \boxed{-17} \times \boxed{-3} = \boxed{51}$$

+

x

$$\boxed{} - \boxed{99} = \boxed{18} \text{ ni } \boxed{} - \boxed{-99} = \boxed{18} \text{ ni } \boxed{} - \boxed{33} = \boxed{18} \text{ ni } \boxed{} - \boxed{-33} = \boxed{18}$$

=

=

$$\boxed{23} \quad \boxed{99} \quad \boxed{23} \quad \boxed{99} \quad \boxed{23} \quad \boxed{99} \quad \boxed{23} \quad \boxed{99}$$

$$a \times b = 51$$

$$a + c = 23$$

$$b \times d = 99$$

$$c - d = 18$$

Sinon, on a un système de quatre équations à quatre inconnues, non linéaire :

A faire.

$$\boxed{1.7} \times \boxed{30} = \boxed{51}$$

+

x

$$\text{Finalement, on trouve } \boxed{21.3} - \boxed{3.3} = \boxed{18}$$

=

=

$$\boxed{23} \quad \boxed{99}$$

◦2◦

♥ Donnez le développement limité d'ordre 3 en 0 de $\ln(1 + \sin(x))$.

Donnez le développement limité d'ordre 3 en 0 de $\ln(1 + \cos(x))$.

C'est en 0 donc on pose $x = h$ et c'est tout.

Les développements utiles sont

$\sin(h)$	=	0	+h	+0.h ²	+ $\frac{h^3}{6}$	+o(h ³)
$\cos(h)$	=	1	+0.h	- $\frac{h^2}{2}$	+0.h ³	+o(h ³)
$\ln(1 + u)$	=	0	+u	- $\frac{u^2}{2}$	+ $\frac{u^3}{3}$	+o(u ³)

La première fois, dans le rôle de u , on prend $h - \frac{h^3}{6} + o(u^3)$ avec donc $u^2 = h^2 + o(h^3)$ et $u^3 = h^3 + o(h^3)$.

Sans effort : $\ln(h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3)$ (pas de parité, équivalent h , localement concave).

Pour la seconde, il faut écrire $\ln(1 + \cos(h)) = \ln\left(2 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)$ et ne pas aller trop vite.

$$\ln(1 + \cos(h)) = \ln\left(2 \cdot \left(1 - \frac{h^2}{4} + o(h^2)\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 - \frac{h^2}{4} + o(h^3)\right).$$

Finalement : $\ln(1 + \cos(h)) = \ln(2) - \frac{h^2}{4} + o(h^3)$ (paire, valeur limite : $\ln(2)$, tangente horizontale, localement concave).

◦3◦

♡ Comparez le développement limité en 0 de $\frac{60x - 7x^3}{60 + 3x^2}$ et de $\sin(x)$ à l'ordre 7.

◦4◦

Horizontalement

- A - Carré de E.
 B - La somme de ses chiffres vaut celle de E.
 C - La somme de ses chiffres vaut celle de D.
 D - Carré de b.
 E - Le produit de ses chiffres vaut 9.

□	□	□	□	□
□	■	4	□	□
□	□	□	□	□
□	□	□	□	■
□	■	□	□	□

Verticalement :

- a - Carré de e.
 b - La somme de ses chiffres vaut 17.
 c - Carré d'un nombre dont le produit des chiffres vaut 2.
 d - Impair dont la somme des chiffres vaut celle de a.
 e - Le produit de ses chiffres vaut 28.

Si la somme des chiffres de *b* (vertical colonne 2) vaut 17, c'est que les deux chiffres de *b* sont 8 et 9.

Si le produit des chiffres de *E* (trois chiffres en bas) vaut 9, c'est qu'il y a au moins un 1, voir deux.

Regardez aussi le *d* (vertical) : Carré d'un nombre dont le produit des chiffres vaut 2. C'est donc le carré d'un nombre comme 112, 1211 ou autre. Que des 1 et un 2.

Mais le carré doit avoir cinq chiffres, dont un 4 en deuxième position : 14641 ou 44521 (carrés de 121 et 211).

□	□	4	□	□
□	■	4	□	□
□	□	5	□	□
□	□	2	□	■
□	■	1	□	□

ou

□	□	1	□	□
□	■	4	□	□
□	□	6	□	□
□	□	4	□	■
□	■	1	□	□

Pour que le produit des chiffres de celui en bas vaille 9 : 119, 191 ou 133. Mais il s'appelle *E* et *A* est son carré ! 14161, 36481 et 17689 sont les trois carrés... Un seul donne un 4 ou un 1 en position 3.

3	6	4	8	1
□	■	4	□	☺
□	□	5	□	☺
☼	☼	2	☼	■
□	■	1	9	1

Je m'intéresse aux deux cases smiley. « le produit de ses chiffres vaut 28. Il nous reste donc un 7 et un 4 à placer sur les deux sourires.

Et celui avec des soleils est un carré. C'est le carré de 89 ou 98. Pas le choix : $7921 = 89^2$.

3	6	4	8	1
□	■	4	□	☺
□	8	5	□	☺
7	9	2	1	■
□	■	1	9	1

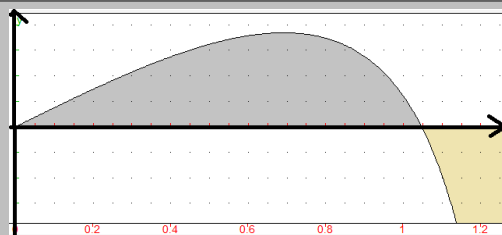
La première colonne est un carré parfait. C'est même le carré du nombre aux smiley : $174^2 = 30276$ et $147^2 = 21609$.

3	6	4	8	1
0	■	4	□	7
2	8	5	□	4
7	9	2	1	■
6	■	1	9	1

et on termine

3	6	4	8	1
0	■	4	0	7
2	8	5	0	4
7	9	2	1	■
6	■	1	9	1

Montrez : $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin(3\theta)}{1 + \cos(2\theta)} \cdot d\theta = \frac{1}{2}$.



◦5◦

Donnez le développement limité d'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $\frac{\sin(3\theta)}{1 + \cos(2\theta)}$.

L'intégrale existe par continuité.

Par règles de Bioche, on doit chercher le cosinus caché. Et on sort sa dérivée en forme de sinus.

$$\sin(3\theta) = \sin(\theta) \cdot (4 \cdot \cos^2(\theta) - 1)$$

(Tchebychev de seconde espèce obtenue en dérivant $\cos(3\theta) = 4 \cdot \cos^3(\theta) - 3 \cdot \cos(\theta)$)

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin(3\theta)}{1 + \cos(2\theta)} \cdot d\theta = \int_{c=1}^{c=1/2} \frac{4 \cdot c^2 - 1}{1 + (2 \cdot c^2 - 1)} (-dc) = \int_{1/2}^1 \left(2 - \frac{1}{2 \cdot c^2}\right) \cdot dc = \left[2 \cdot c + \frac{1}{2 \cdot c}\right]_{1/2}^1$$

Tous calculs faits : $\frac{1}{2}$ comme attendu.

◦6◦

♥ Donnez le développement limité d'ordre 4 en 1 de x^x .

Attention, on ne mélange pas tout.

Il faut impérativement passer par exponentielle et logarithme : $x^x = e^{x \cdot \ln(x)}$.

Ensuite, comme c'est en 1, on pose $x = 1 + h$.

On a donc $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + o(h^4)$ (intégration de la série géométrique, et rappel avec le série harmonique).

	h	$-\frac{h^2}{2}$	$+\frac{h^3}{3}$	$-\frac{h^4}{4}$
1	h	$-\frac{h^2}{2}$	$+\frac{h^3}{3}$	$-\frac{h^4}{4}$
$+h$	h^2	$-\frac{h^3}{2}$	$+\frac{h^4}{3}$	$+o(h^4)$

On somme et passe à l'exponentielle : $e^{(1+h) \cdot \ln(1+h)} = e^{h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{12} + o(h^4)} = e^h \cdot e^{h^2/2} \cdot e^{-h^3/6} \cdot e^{h^4/12} \cdot e^{o(h^4)}$.

On développe chaque exponentielle au bon ordre, et on multiplie

e^h	=	1	$+h$	$+\frac{h^2}{2}$	$+\frac{h^3}{6}$	$+\frac{h^4}{24}$	$+o(h^4)$
$e^{h^2/2}$	=	1		$+\frac{h^2}{2}$		$+\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{2}\right)^2$	$+o(h^4)$
$e^{-h^3/6}$	=	1			$-\frac{h^3}{6}$		$+o(h^4)$
$e^{h^4/12}$	=	1				$+\frac{h^4}{12}$	$+o(h^4)$
$e^{o(h^4)}$	=	1					$+o(h^4)$

Finalement $(1+h)^{1+h} = 1 + h + h^2 + \frac{h^3}{2} + \frac{h^4}{3} + o(h^4)_{h \rightarrow 0}$

Avec deux terme de plus : $(1+h)^{1+h} = 1 + h + h^2 + \frac{h^3}{2} + \frac{h^4}{3} + \frac{h^5}{12} + \frac{3 \cdot h^6}{40} + o(h^6)_{h \rightarrow 0}$

Pas de formule simple pour les coefficients.

Et si on veut passer par les dérivées successives, c'est vite l'horreur :

x^x puis $x^x \cdot (1 + \ln(x))$ puis $x^x \cdot ((\ln(x))^2 + 2 \cdot \ln(x) + 1 + \frac{1}{x})$ puis « stop, je craque », et ensuite ?

◦7◦

Justifiez : $\cos(\log(x)) = 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{2} + o((x-1)^3)_{x \rightarrow 1}$

et aussi (si si) $\cos(\log(x)) = 1 + (x-1)^2 - 3 \cdot (x-1)^3 + o(x)^3_{x \rightarrow 1}$.

Bon, que les choses soient claires : $\cos(\log(x)) = 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{2} + o((x-1)^3)_{x \rightarrow 1}$ est correct, mais n'est pas prudent du tout.

La bonne formule est $\cos(\log(1+h)) = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2} + o(h^3)_{h \rightarrow 0}$.

On commence par écrire : $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$.

Ensuite, $\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^3)$ avec $u = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$ et donc $o(u^3) = o(h^3)$.

On a juste besoin de u^2 à l'ordre 3 : $u^2 = h^2 - h^3 + o(h^3)$.

On somme et il reste bien $\cos(\ln(1+h)) = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2} + o(h^3)_{h \rightarrow 0}$ (par $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ qu'on croise assez souvent).

Maximum égal à 1, tangente horizontale, fonction localement concave.

Et l'autre ? $\cos(\log(x)) = 1 + (x-1)^2 - 3(x-1)^3 + o(x^3)_{x \rightarrow 1}$.

Elle contient un $o(x^3)$ avec x qui tend vers 1.

Ce n'est rien d'autre qu'un $o(1)$.

Et ce $o(1)$ va dévorer $x-1$ et toutes ses puissances.

$\cos(\log(x)) = 1 + (x-1)^2 - 3(x-1)^3 + o(x^3)_{x \rightarrow 1}$ ne dit rien de plus que $\cos(\log(x)) = 1 + o(1)_{x \rightarrow 1}$.

La limite vaut 1, c'est vrai !

8.

Donnez le développement limité d'ordre 10 en 0 de $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

L'intégrale ne se calcule pas. Ou alors avec beaucoup de courage et des fonctions auxiliaires.

Et pas à l'aide des fonctions usuelles.

En revanche, quand x tend vers 0, les deux bornes x et x^2 tendent vers 0 et t aussi par encadrement.

On effectue un développement limité de $(1+t^4)^{-1/2}$ (en utilisant celui de $(1+u)^{-1/2}$ à un ordre pas trop élevé car u sera remplacé par t^4).

On n'a plus ensuite qu'à intégrer.

$$(1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + o(u^2)_{u \rightarrow 0}$$

$$(1+t^4)^{-1/2} = 1 - \frac{t^4}{2} + \frac{3t^8}{8} + o(t^8)_{t \rightarrow 0}$$

$$\int_{t=x}^{t=x^2} (1+t^4)^{-1/2} . dt = \left[t - \frac{t^5}{10} + \frac{3t^9}{72} + o(t^9)_{t \rightarrow 0} \right]_{t=x}^{t=x^2}$$

On trouve $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = -x + x^2 + \frac{x^5}{10} - \frac{x^9}{24} - \frac{x^{10}}{10} + o(x^{10})_{x \rightarrow 0}$

Seule difficulté : ne pas se perdre dans les noms, il y a u , t et x et donc des $o(u^3)$, des $o(t^5)$ et des $o(x^8)$.

9.

Donnez un équivalent en 0 de $\sqrt{1+t} - \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ de la forme $a.t^\alpha$.

On effectue des développements d'ordre 0 :

$$\sqrt{1+t} - \frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + o(1) - (1 + o(1)) = o(1)$$

puis d'ordre 1 :

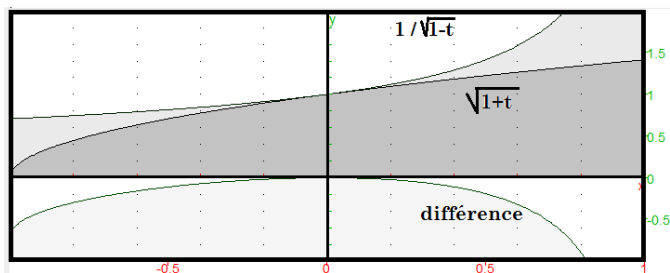
$$\sqrt{1+t} - \frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \frac{t}{2} + o(t) - \left(1 - \frac{t}{2} + o(t) \right) = o(1)$$

et même d'ordre 2 :

$$\sqrt{1+t} - \frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2) - \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} + o(t^2) \right) = -\frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

On peut s'en contenter, l'équivalent cherché est $-\frac{t^2}{2}$ quand t tend vers 0.

On a utilisé $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha.t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}.t^2 + o(t^2)_{t \rightarrow 0}$ avec α égal à $\frac{1}{2}$ puis $-\frac{1}{2}$.



◦10◦

Donnez le développement limité d'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \tan(\pi.e^x)$.

On étudie $\tan\left(\pi + \pi.x + \frac{\pi.x^2}{2} + \frac{\pi.x^3}{6} + \frac{\pi.x^4}{24} + o(x^4)\right)$.

La périodicité nous ramène à $\tan\left(\pi.x + \frac{\pi.x^2}{2} + \frac{\pi.x^3}{6} + \frac{\pi.x^4}{24} + o(x^4)\right)$.

On développe ensuite $\tan(u) = u + \frac{u^3}{3} + o(u^4)$ avec $u = \pi.x + \frac{\pi.x^2}{2} + \frac{\pi.x^3}{6} + \frac{\pi.x^4}{24} + o(x^4)$ qui tend bien vers 0 quand x tend vers 0.

On trouve $\tan(\pi.e^x) = \pi.x + \frac{\pi.x^2}{2} + \left(\frac{2.\pi^3 + \pi}{6}\right).x^3 + \left(\frac{12.\pi^3 + \pi}{24}\right).x^4 + o(x^4)_{x \rightarrow 0}$

◦11◦

Donnez le développement limité d'ordre 5 en 0 de $(1+t)^{\frac{1}{t}}$.

On revient à la forme $\exp\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)$ (non définie en 0, mais au moins sur $] -1, 0[\cup]0, +\infty[$ et de classe C^∞).

On comprend bien que le quotient nous fait perdre un ordre.

On écrit donc le logarithme à l'ordre 6 et on a $\exp(1+u)$ avec $u = -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} + \frac{t^4}{5} - \frac{t^5}{6} + o(t^5)_{t \rightarrow 0}$.

On vérifie : $e^{1+u} = e.e^u$ avec u qui tend vers 0.

On va avoir besoin de u^2, u^3, u^4 et même u^5 calculés par produits successifs :

$$\begin{array}{rcll} u & = & -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} + \frac{t^4}{5} - \frac{t^5}{6} & + o(t^5)_{t \rightarrow 0} \times 1 \\ u^2 & = & \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{13.t^4}{36} - \frac{11.t^5}{30} & + o(t^5)_{t \rightarrow 0} \times \frac{1}{2} \\ u^3 & = & -\frac{t^3}{8} + \frac{t^4}{4} - \frac{17.t^5}{48} & + o(t^5)_{t \rightarrow 0} \times \frac{1}{6} \\ u^4 & = & \frac{t^4}{16} - \frac{t^5}{6} & + o(t^5)_{t \rightarrow 0} \times \frac{1}{24} \\ u^5 & = & -\frac{t^5}{32} & + o(t^5)_{t \rightarrow 0} \times \frac{1}{120} \end{array}$$

On combine courageusement :

$$(1+t)^{\frac{1}{t}} = e.\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{11.t^2}{24} - \frac{7.t^3}{16} + \frac{2447.t^4}{5760} - \frac{959.t^5}{2304} + o(t^5)_{t \rightarrow 0}\right)$$

On se dit qu'ici, un logiciel de calcul forme serait le bienvenu...

On aurait pu aussi développer

$$e^1.e^{-\frac{t}{2}}.e^{\frac{t^2}{3}}.e^{\frac{t^3}{4}}.e^{-\frac{t^4}{5}}.e^{-\frac{t^5}{6}+o(t^5)}$$

◦12◦

Soit f de classe C^6 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Complétez

$$\begin{pmatrix} f(x+1) - f(x) \\ f(x+2) - f(x) \\ f(x+3) - f(x) \\ f(x+4) - f(x) \\ f(x+5) - f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x)/2 \\ f^{(3)}(x)/6 \\ f^{(4)}(x)/24 \\ f^{(5)}(x)/120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

Montrez que la matrice carrée de cette formule est inversible.

Deduez que si f et $f^{(6)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$, alors $f', f'', f^{(3)}, f^{(4)}$ et $f^{(5)}$ le sont aussi.

Quand on effectue le produit matriciel et qu'on regarde la ligne k (indexation non pythonienne), on veut

$$f(a+k) - f(a) - k.f'(a) - \frac{k^2}{2}.f''(a) - \frac{k^3}{6}.f^{(3)}(a) - \frac{k^4}{24}.f^{(4)}(a) - \frac{k^5}{120}.f^{(5)}(a) = ?$$

Ceci fait furieusement penser à un développement limité

$$\begin{pmatrix} f(x+1) - f(x) \\ f(x+2) - f(x) \\ f(x+3) - f(x) \\ f(x+4) - f(x) \\ f(x+5) - f(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x)/2 \\ f^{(3)}(x)/6 \\ f^{(4)}(x)/24 \\ f^{(5)}(x)/120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o(1^5) \\ o(2^5) \\ o(3^5) \\ o(4^5) \\ o(5^5) \end{pmatrix}$$

Non, c'est n'importe quoi ! Ça n'a aucun sens.

$$\begin{pmatrix} f(x+1) - f(x) \\ f(x+2) - f(x) \\ f(x+3) - f(x) \\ f(x+4) - f(x) \\ f(x+5) - f(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x)/2 \\ f^{(3)}(x)/6 \\ f^{(4)}(x)/24 \\ f^{(5)}(x)/120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o(1^5)_{1 \rightarrow 0} \\ o(2^5)_{2 \rightarrow 0} \\ o(3^5)_{3 \rightarrow 0} \\ o(4^5)_{4 \rightarrow 0} \\ o(5^5)_{5 \rightarrow 0} \end{pmatrix}$$

Ça n'a toujours aucun sens, mais au moins c'est d'une poésie folle ces « quand 3 tend vers 0 »¹.

Alors, si ce n'est pas développement limité le mot clef, je propose « formule de Taylor ».

Et nos points d'interrogations sont des choses comme $\frac{3^6}{5!} \cdot \int_0^1 (1-t)^5 \cdot f^{(6)}(1+t.3).dt$ (changez le 3 en chacun des entiers).

Sinon, on pourra utiliser une formule de Taylor Lagrange (ou plutôt cinq)

$$\begin{pmatrix} f(x+1) - f(x) \\ f(x+2) - f(x) \\ f(x+3) - f(x) \\ f(x+4) - f(x) \\ f(x+5) - f(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x)/2 \\ f^{(3)}(x)/6 \\ f^{(4)}(x)/24 \\ f^{(5)}(x)/120 \end{pmatrix} = \frac{1}{6!} \cdot \begin{pmatrix} f^{(6)}(x+\theta_1) \\ f^{(6)}(x+2.\theta_2) \\ f^{(6)}(x+3.\theta_3) \\ f^{(6)}(x+4.\theta_4) \\ f^{(6)}(x+5.\theta_5) \end{pmatrix}$$

chacun des cinq θ_i étant entre 0 et 1.

La matrice est inversible. J'ai calculé son déterminant.

Et VanDerMonde l'avait fait avant moi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \end{vmatrix} = 1.2.3.4.5. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{vmatrix}$$

et on trouve 5!.
 $\begin{matrix} (2-1) & (3-1) & (4-1) & (5-1) \\ & (3-2) & (4-2) & (5-2) \\ & & (4-3) & (5-3) \\ & & & (4-3) \end{matrix}$ (transposez la si le rôle des colonnes et lignes ne vous plait pas).

pas).

J'ai 34560 et je m'en moque pas mal.

On repart la formule matricielle et on obtient

$$\begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x)/2 \\ f^{(3)}(x)/6 \\ f^{(4)}(x)/24 \\ f^{(5)}(x)/120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(x+1) - f(x) \\ f(x+2) - f(x) \\ f(x+3) - f(x) \\ f(x+4) - f(x) \\ f(x+5) - f(x) \end{pmatrix} - \frac{1}{6!} \cdot \begin{pmatrix} f^{(6)}(x+\theta_1) \\ f^{(6)}(x+2.\theta_2) \\ f^{(6)}(x+3.\theta_3) \\ f^{(6)}(x+4.\theta_4) \\ f^{(6)}(x+5.\theta_5) \end{pmatrix}$$

de la forme $M^{-1} \cdot (U - V)$.

Si f est bornée par M toutes les composantes de U sont entre $-2.M$ et $2.M$.

Si $f^{(5)}$ est bornée par K , toutes les composantes de V sont entre $-K/6!$ et $K/6!$.

1. Troyes relégué en seconde division ?

Par addition, les composantes de $U - V$ sont plus petites que $2.M + \frac{K}{6!}$.

Quand on pose ce vecteur sur la matrice inverse (dont le plus grand coefficient en valeur absolue peut être noté A), on obtient des combinaisons de nos $f(x+k) - f(x) - \frac{f^{(5)}(x+\dots)}{6!}$. Bref, on obtient des quantités bornées (par $6.A \cdot \frac{2.6!.M+K}{6!}$ si vous y tenez).

Bref, chaque composante est bornée, chaque $f^{(i)}$ est bornée.

◦13◦ Donnez le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{1+x}}}$ (sans dériver, d'accord...).

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)$$

$$\sqrt{3 + \sqrt{1+h}} = \sqrt{4 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)} = 2 \cdot \sqrt{1 + \frac{h}{8} - \frac{h^2}{32} + o(h^2)}$$

$$\sqrt{3 + \sqrt{1+h}} = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{8} - \frac{h^2}{32} \right) - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{h}{8} \right)^2 + o(h^2) \right) = 2 + \frac{h}{8} - \frac{9.h^2}{2560} + o(h^2)$$

et on recommence avec encore un 2 à factoriser :

$$\sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{1+x}}} = 2 + \frac{h}{32} - \frac{37.h^2}{4096} + o(h^2)_{h \rightarrow 0}$$

Le calcul est déjà atroce pour le terme d'ordre 2.

◦14◦ ♥ Donnez le développement limité d'ordre 4 en $x = 1$ de $\frac{\ln(x)}{x^2}$ (oui, pas en 0, en 1, ça va !).

On pose $x = 1 + h$. On développe $\ln(1+h)$ (connu : $h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + o(h^4)$),

et $\frac{1}{(1+h)^2}$ (connu aussi : $1 - 2.h + 3.h^2 - 4.h^3 + 5.h^4 + o(h^4)$).

On les multiplie :

$$\frac{\ln(1+h)}{(1+h)^2} = h - \frac{5.h^2}{2} + \frac{13.h^3}{3} - \frac{77.h^4}{12} + o(h^4)$$

(nulle, tangente=bissectrice, localement concave).

◦15◦ ♥ Donnez le développement limité d'ordre 4 en 0 de $x \mapsto e^{\sqrt{4+x}}$ (bon 2 suffira pour un cœur).

L'existence de la fonction est assurée sur $] -4, +\infty[$ et comme elle est C^∞ , on peut développer à tout ordre.

On commence par

$$\sqrt{4+x} = 2 \cdot \sqrt{1 + \frac{x}{4}} = 2 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64} + \frac{x^3}{512} - \frac{5.x^4}{16384} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}$$

On place dans des exponentielle : $e \cdot e^{\frac{x}{4}} \cdot e^{-\frac{x^2}{64}} \cdot e^{\frac{x^3}{512}} \cdot e^{-\frac{5.x^4}{16384}} \cdot e^{o(x^4)}$.

On développe chaque exponentielle à l'ordre adéquat :

$$e \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{64} + \frac{x^4}{8192} + o(x^4) \right) \cdot \left(1 + \frac{x^3}{512} + o(x^4) \right) \cdot \left(1 - \frac{5.x^4}{16384} + o(x^4) \right)$$

C'est laborieux et inutile : $e^{\sqrt{4+x}} = e^2 \cdot \left(1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64} + \frac{x^3}{1536} - \frac{x^4}{49152} + o(x^4)_{x \rightarrow 0} \right)$

valeur en 0	e^2	e^2
dérivée en 0	$\frac{e^2}{4}$	pente $e^2/4$
dérivée seconde en 0	$\frac{e^2}{32}$	localement convexe

◦16◦ Donnez le développement limité d'ordre 5 en 0 de $\text{Arctan}(\cos(t))$.

Pas de chance, on connaît bien le développement de $\cos$ en 0, mais il nous amène en 1 et on ne connaît pas trop le développement de l'arctangente en 1.

On va commencer par dériver notre application.
 Ah tiens, problème habituel. Comment noter cette dérivée ?

- $\text{Arctan}(\cos(t))'$? Pas de sens.
- $\text{Arctan}'(\cos(t))$? Non, ce serait juste $\frac{1}{1+\cos^2(t)}$ ça.
- $(t \mapsto \text{Arctan}(\cos(t)))'$? Correct. Mais vite lourd.

C'est pourquoi on va nommer la fonction pour commencer.

On pose donc $f = x \mapsto \text{Arctan}(\cos(x))$ et on dérive : $f = x \mapsto \frac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$.

On va devoir développer $\cos^2(x)$. Plutôt que d'élever $\cos(x)$ au carré, je passer par $\frac{1+\cos(2x)}{2}$.

$$\cos^2(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)_{x \rightarrow 0}$$

On connaît celui du sinus. On peut poser une division ou passer par le produit en croix. C'est ce que je vais faire.

On justifie que $x \mapsto \frac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$ admet un développement limité à tout ordre (C^∞), avec seulement des termes d'exposant impair.

Son équivalent en 0 est d'ailleurs $\frac{x}{2}$ qui nous donne le premier terme.

On écrit juste

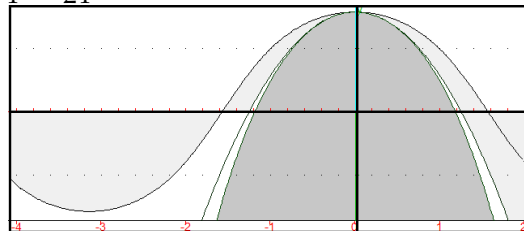
$$\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}\right) = \left(2 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}\right) \cdot \left(\frac{x}{2} + a \cdot x^3 + o(x^4)_{x \rightarrow 0}\right)$$

Sans effort : $a = \frac{1}{6}$ et $\frac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)} = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}$. Et c'est $f'(x)$.

On intègre $f'(x)$ de $x = 0$ à $x = t$ qui tend vers 0 : $f(t) - f(0) = -\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)_{x \rightarrow 0}$.

Résumé :

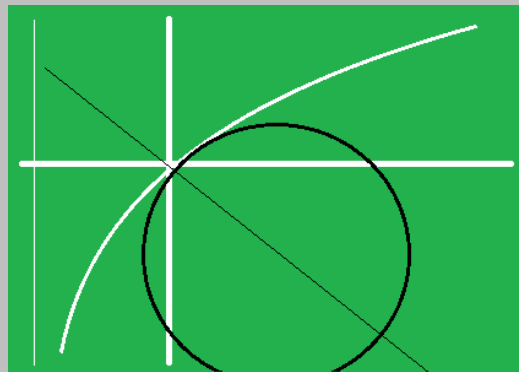
$$\text{Arctan}(\cos(x)) = \frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)_{x \rightarrow 0}$$



♡ Montrez que pour a positif, $x \mapsto \sqrt{2a^2 - (x-a)^2} - a$ est l'équation d'un arc de cercle passant par l'origine. Ajustez a pour que son graphe coïncide à $o(x^2)$ près avec celui de $x \mapsto \ln(1+x)$.

◻17◻

A faire.



◻18◻

♡ Donnez le développement limité d'ordre 5 en 0 de $\ln\left(\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right)$.

L'application est de classe C^∞ sur un intervalle ouvert contenant 0.

On peut développer la tangente, ajouter, soustraire, diviser puis composer avec le logarithme.

Ceci risque d'être un peu long. Alors quoi ?

Première idée : on développe $\ln(1 - \tan(x))$ en composant les développements.

Ensuite, on remplace x par $-x$ et on a celui de $\ln(1 + \tan(x))$.

Il ne reste qu'à sommer.

Mais si on dérivait ? $x \mapsto \ln(1 - \tan(x)) - \ln(1 + \tan(x))$ a pour dérivée $x \mapsto \frac{2}{\cos(2x)}$.

On va donc juste écrire $\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$ (remplacer x par $2x$ dans $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$).

On calcule ensuite $\left(1 + \left(-2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)\right)\right)^{-2}$ et on a $1 + 2x^2 + \frac{10x^4}{3} + o(x^4)$.

On multiplie par 2 et on intègre (fonction nulle en 0) : $\ln\left(\frac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)}\right) = -2x - \frac{4x^3}{3} - \frac{4x^5}{3} + o(x^5)_{x \rightarrow 0}$

◦19◦

D'accord, elle n'est pas au programme, mais voyons où elle peut servir. On veut décomposer en éléments simples la fraction $\frac{P(X)}{(X-a)^d \cdot Q(X)}$ où P et Q sont deux polynômes dont a n'est pas racine. On sait que la fraction va se décomposer en éléments simples sous la forme $\frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{\alpha_2}{(X-a)^2} + \dots + \frac{\alpha_d}{(X-a)^d} + \text{autres termes}$.

Calculez α_1 ou α_d par la méthode des pôles.

Mais il paraît qu'en posant la division suivant les puissances croissantes de $P(X-a)$ par $Q(X-a)$, on trouve directement les α_k .

Ce n'est pas clair ? Prenons un exemple du cours avec $\frac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^3)}$. Qui sont alors a , $P(X)$ et $Q(X)$. Posez $Y = X - 1$ et réécrivez le fraction. Posez la division suivant les puissances croissantes de 1 par $6 + 9Y + 5Y^2 + Y^3$ à l'ordre 3. Concluez.

◦20◦

Déterminez la limite quand x tend vers l'infini de $\left(\frac{1}{x} + \frac{\ln(2x)}{\ln(x)}\right)^{\ln(x)}$.

En écrivant $\frac{\ln(2x)}{\ln(x)}$ sous la forme $1 + \frac{\ln(2)}{\ln(x)}$, on aboutit à une forme indéterminée du type $1^{+\infty}$.

On passe au logarithme : $\ln(x) \cdot \ln\left(1 + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} + \frac{1}{x}\right)$.

On pose $u = \frac{\ln(2)}{\ln(x)} + \frac{1}{x}$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0.

L'équivalent $\ln(1+u) \sim_{u \rightarrow 0} u$ donne $\ln\left(1 + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} + \frac{1}{x}\right) \sim \left(\frac{\ln(2)}{\ln(x)} + \frac{1}{x}\right)$.

Mais qui des deux dicte le comportement ? $\ln(x) = o(x)$ donc $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$.

Je vous le refais pour la compréhension : $\ln(x) \ll x$ donc $\frac{1}{\ln(x)} \gg \frac{1}{x}$. C'est plus lisible ainsi.

On a donc

$$\ln\left(1 + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} + \frac{1}{x}\right) \sim \left(\frac{\ln(2)}{\ln(x)} + \frac{1}{x}\right) \sim \left(\frac{\ln(2)}{\ln(x)}\right)$$

On simplifie : $\ln(x) \cdot \ln\left(1 + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} + \frac{1}{x}\right) \sim \ln(2)$.

Par continuité de l'exponentielle $\left(1 + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} + \frac{1}{x}\right)^{\ln(x)}$ admet une limite, égale à 2.

$x =$	1	2	5	10	50	100	200	500
$\ln\left(1 + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} + \frac{1}{x}\right)^{\ln(x)}$	non	1,887	2,197	2,173	2,022	1,984	1,963	1,951

Le calcul approché d'une calculatrice ou même d'un module purement numérique donne n'importe quoi.

◦21◦

Donnez la limite en $+\infty$ de $\left(\frac{\text{Arctan}(1+x)}{\text{Arctan}(x)}\right)^{x^2}$.

Les deux arctangentes tendent vers $\frac{\pi}{2}$, le quotient tend vers 1 et l'exposant tend vers l'infini. C'est une forme indéterminée (visible quand on passe au logarithme).

Certes, mais que faire de $\ln\left(\frac{\text{Arctan}(x+1)}{\text{Arctan}(x)}\right)$?

Comme x tend vers $+\infty$, on va poser $x = \frac{1}{h}$ et l'idée va vous venir à l'esprit assez spontanément.

$$\ln\left(\frac{\operatorname{Arctan}(x+1)}{\operatorname{Arctan}(x)}\right) = \ln\left(\frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{h}+1\right)}{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{h}\right)}\right)$$

Vous la voyez l'idée ? $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(h)$ en tout cas pour h positif, ce qui est ici le cas.

$$\ln\left(\frac{\operatorname{Arctan}(x+1)}{\operatorname{Arctan}(x)}\right) = \ln\left(\frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{h}+1\right)}{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{h}\right)}\right) = \ln\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{h}{1+h}\right)}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(h)}\right) = \ln\left(\frac{1 - \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{Arctan}\left(\frac{h}{1+h}\right)}{1 - \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{Arctan}(h)}\right)$$

On effectue des développements trop poussés : $\operatorname{Arctan}(h) = h - \frac{h^3}{3} + o(h^3)_{h \rightarrow 0}$ (c'est du cours).

$$\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + o(u^3)_{u \rightarrow 0} \text{ (cours)}$$

$$\ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{Arctan}(h)\right) = -\frac{2h}{\pi} + \frac{2h^2}{\pi^2} + o(h^2) \text{ composition}$$

On s'arrête à l'ordre 2 car devant la parenthèse on a x^2

On continue : $\frac{h}{1+h} = 1 - h + h^2 + o(h^2)_{h \rightarrow 0}$

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{h}{1+h}\right) = h - h^2 + \frac{2h^3}{3} + o(h^3) = h - h^2 + o(h^2)$$

$$\ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{Arctan}\left(\frac{h}{1+h}\right)\right) = -\frac{2h}{\pi} + \frac{(2\pi-2)h^2}{\pi^2} + o(h^2)_{h \rightarrow 0}$$

On soustrait : $\ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{Arctan}\left(\frac{h}{1+h}\right)\right) - \ln\left(1 - \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{Arctan}(h)\right) = \frac{2h^2}{\pi} + o(h^2)_{h \rightarrow 0}$

On multiplie par x^2 c'est à dire $\frac{1}{h}$.

$x^2 \cdot \ln\left(\frac{\operatorname{Arctan}(x+1)}{\operatorname{Arctan}(x)}\right)$ converge vers $\frac{2}{\pi}$.

Et $\left(\frac{\operatorname{Arctan}(x+1)}{\operatorname{Arctan}(x)}\right)^{x^2}$ converge vers $\boxed{e^{\frac{2}{\pi}}}$

Et là encore, un dixième de seconde pour Xcas...

Mais il y a encore plus simple. Repartons de $\ln\left(\frac{\operatorname{Arctan}(x+1)}{\operatorname{Arctan}(x)}\right)$ qu'on écrit comme différence de deux logarithmes.

Et posons $f = x \mapsto \ln(\operatorname{Arctan}(x))$.

On est en présence de $f(x+1) - f(x)$. Le théorème de Rolle nous autorise à l'écrire $(x+1-x) \cdot f'(c)$ pour un c entre x et $x+1$. On a donc

$$1 \leq \frac{c}{x} \leq 1 + \frac{1}{x} \text{ et } \ln(\operatorname{Arctan}(x+1)) - \ln(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{1}{\operatorname{Arctan}(c)} \cdot \frac{1}{1+c^2}$$

Quand x tend vers $+\infty$ l'encadrement permet de dire que c le fait aussi, en étant équivalent à x . Son arctangente tend vers $\frac{\pi}{2}$. Bref

$$\ln(\operatorname{Arctan}(x+1)) - \ln(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{1}{\operatorname{Arctan}(c)} \cdot \frac{1}{1+c^2} \sim \frac{1}{\pi/2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

On multiplie par x^2 et l'équivalent est une constante numérique non nulle

$$x^2 \cdot \left(\ln(\operatorname{Arctan}(x+1)) - \ln(\operatorname{Arctan}(x)) \right) \sim \frac{2}{\pi}$$

On peut passer à l'exponentielle et retrouver le résultat précédent.

◦22◦

Donnez le développement limité d'ordre 4 en 0 de $\sqrt{1-x^2+x} - \sqrt[3]{\cos(x)}$.

a. normalement, c'est l'ordre 4 si vous visez la MP ; si vous visez MP*, l'ordre 2 suffira, au delà, vous plantez les calculs... et si vous visez la PSI, c'est ordre 8

$\sqrt{1-x^2+x} - \sqrt[3]{\cos(x)}$ est définie sur un voisinage de 0.

On pose $u = x - x^2$ et $v = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}$.

On a alors $(1+u)^{1/2}$ et $(1+v)^{1/3}$. On les développe à l'ordre 4 pour l'une et 2 pour l'autre (2 seulement car v^2 est déjà de l'ordre de x^4).

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} - \frac{5u^4}{128} + o(u^4) \text{ (c'est } \frac{1}{2}, \text{ puis } \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2}, \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{6} \text{ et } \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{24} \text{)}$$

Oui, il faut un ordre 4 car u est de l'ordre de x même si l'énoncé le présentait dans un ordre déroutant.

$$(1+x-x^2)^{1/2} = 1 + \frac{x-x^2}{2} - \frac{x^2-2x^3+x^4}{8} + \frac{x^3-3x^4+o(x^4)}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}$$

On a trouvé les numérateurs

$x - x^2$		$x^2 - 2x^3 + x^4$	$x^3 - 3x^4 + o(x^4)$		$x^4 + o(x^4)$
	$\times (x - x^2)$		$\times (x - x^2)$	$\times (x - x^2)$	

$$\text{On simplifie : } \sqrt{1+x-x^2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{5x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} - \frac{45x^4}{128} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}$$

$$\text{De même } \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^{1/3} = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{72} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}.$$

$$\text{On réunit et on trouve } \sqrt{1-x^2+x} - \sqrt[3]{\cos(x)} = \frac{x}{2} - \frac{11x^2}{24} + \frac{5x^3}{16} - \frac{389x^4}{1152} + o(x^4)_{x \rightarrow 0}$$

◦23◦

On cherche des applications f vérifiant $f \circ f = \sin$ et $f(0) = 0$. On suppose que f est solution, de classe C^4 . Trouvez alors les coefficients de son développement limité en 0 d'ordre 4 (combien de solutions trouvez vous ?).

On cherche f vérifiant $f(0) = 0$ et $f(f(x)) = \sin(x)$.

Posons a priori le développement limité de f en 0 : $f(x) = a.x + b.x^2 + c.x^3 + d.x^4 + o(x^4)_{x \rightarrow 0}$

$$\begin{array}{lcl} \text{a.} & (a.x & +b.x^2 & +c.x^3 & +d.x^4 & +o(x^4)) \\ \text{puis composons } f(f(x)) = & +b. & (a^2.x^2 & +2.a.b.x^3 & +(2.a.c+b^2).x^4 & +o(x^4)) \\ & +c. & (a^3.x^3 & +3.a^2.b.x^4 & +o(x^4)) \\ & +d. & (a^4.x^4 & +o(x^4)) \end{array}$$

On regroupe et on identifie avec le développement du sinus en 0 :

exposant	$f \circ f$	sin	équation
x^1	a^2	1	$a = 1$ ou $a = -1$
x^2	$a.b + b.a^2$	0	$b = 0$ ou ...
x^3	$a^3.c + 2.a^2.b + 3.a^3.c$	$-\frac{1}{6}$	euh
x^4	$a^4.d + 2.a.b.c + b^3 + 3.a^2.b.c + a.d$	0	de pire en pire

La première équation nous donne $a = 1$ ou $a = -1$.

J'aime assez $a = 1$ qui donne ensuite $2.b = 0$ donc $b = 0$. On reporte dans la troisième : $c = -\frac{1}{12}$ et dans la

dernière : $d = 0$. On a une solution $x \mapsto x - \frac{x^3}{12} + o(x^4)$

Mais il y a aussi $a = -1$. b vaut ce qu'il veut ! Et du moment que $-2.b^2 - 2.c$ vaut $-\frac{1}{6}$ et $b^3 + b.c$ est nul...

Si on prend $b = 0$ et $c = \frac{1}{12}$, c'est correct. Puis d est nul. On (re)trouve $x \mapsto -x + \frac{x^3}{12} + o(x^4)$

Sinon, l'équation en x^4 $b^3 + b.c = 0$ donne $c = -b^2$. Et c'est incohérent dans $-2.b^2 - 2.c = 0$.

Et d fait pour l'instant ce qu'il veut !

On n'a pas que nos deux solutions. On a aussi $x \mapsto -x + \frac{x^3}{12} + d.x^4 + o(x^4)$ et ce n'est que le terme en x^5 qui

livrera finalement $d = 0$ puis figera la valeur de e .

On pourrait poursuivre de proche en proche.

◦24◦

Donnez la limite de la suite $\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^n$. Donnez la limite de la suite $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

La suite $\left(\cos(1/\sqrt{n})\right)^{n^2}$ a une limite. Combien ?

Le logarithme de $\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^n$ vaut $n \cdot \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^n$ et est équivalent à $n \cdot \frac{(-1)^n}{n^2}$, de limite nulle.

La limite cherchée vaut 1.

On écrit un développement limité : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)_{x \rightarrow 0}$ issu d'une formule de Taylor dans laquelle on écrase le reste qui est en x^3 donc en $o(x^2)$.

Ensuite, $\ln(1 - u) = -u + o(u)_{u \rightarrow 0}$ permet de composer : $\ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2)_{x \rightarrow 0}$.

Avec $\frac{1}{\sqrt{n}}$ dans le rôle de x , on a ensuite $n^2 \cdot \ln(\cos(1/\sqrt{n}))$ qui est en $n^2 \cdot \left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n \rightarrow +\infty}$.

La limite vaut $-\infty$ et la suite de l'énoncé a pour limite 0.

◦25◦

Pour f convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$. Montrez que f^+ est convexe, mais pas forcément f^- .

Soient f et g convexes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, convexes. Montrez que $\max(f, g)$ est convexe.

Montrez que $\min(f, g)$ ne l'est pas forcément, mais montrez qu'il existe une minorante de f et g qui est convexe.

◦26◦

Combien y a-t-il de matrices carrées de taille 2 à coefficients entiers entre -2 et 2 ? Un ordinateur tire au hasard uniforme une de ces matrices.

- Montrez que la probabilité qu'elle soit symétrique est $1/5$.
- Montrez que la probabilité qu'elle soit diagonale est $1/25$.

L'univers des fait des $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec 5 choix pour chacun des quatre coefficients. Il y a 5^4 matrices. La liste ne sera pas donnée ici.

Les matrices symétriques sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ avec 5 choix pour chacun des trois coefficients.

Le rapport $\frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}}$ vaut 5^{3-4} .

Les matrices symétriques sont de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ avec 5 choix pour chacun des deux coefficients.

Le rapport $\frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}}$ vaut $\frac{5^2}{5^4}$.

- Montrez que la probabilité que ce soit une matrice de Gram^a est $2/125$.

a. une matrice de Gram est une matrice symétrique, à diagonale positive (les deux termes) et à déterminant positif

Une matrice de Gram est symétrique : $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

Ses coefficients diagonaux sont strictement positifs : $\begin{pmatrix} 1 \text{ ou } 2 & b \\ b & 1 \text{ ou } 2 \end{pmatrix}$.

Et il faut ensuite que son déterminant soit strictement positif. En effet, $\det(G) = \det({}^t T) = \det(T)^2$. C'est aussi une inégalité de Cauchy-Schwarz. La condition $a \cdot d > b^2$ est nécessaire, et suffisante.

On a assez de contraintes pour finalement dresser la liste :

$\begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & b \\ b & 2 \end{pmatrix}$
$1 - b^2 > 0$	$2 - b^2 > 0$	$2 - b^2 > 0$	$4 - b^2 > 0$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Le total des possibles vaut 10 et la probabilité vaut $\frac{10}{5^4} = \frac{2}{125}$. Pas nombreuses les filles...

• Quelle est la probabilité que ce soit une matrice de Gram, sachant qu'elle est symétrique (*probabilité sur un sous-univers*) ?

Les événements "Gram" et "symétrique" sont-ils indépendants ? Les événements "Gram" et "diagonale" sont-ils indépendants ?

	symétrique 125	non symétrique 500		diagonale 25	non diagonale 600
Gram 10		0	Gram 10		
pas Gram 615			pas Gram		

On se place donc sur l'univers réduit des matrices symétriques.

On compte encore $\frac{\text{favorables}}{\text{possibles}} = \frac{10}{125} = \frac{2}{25}$.

la proportion de matrices de Gram parmi les matrices symétriques est plus élevée que la proportion de matrices de Gram parmi toutes les matrices.

C'est normal, les matrices de Gram sont forcément symétriques par nature.

On complète d'ailleurs le tableau :

	symétrique 125	non symétrique 500
Gram 10	10	0
pas Gram 615	115	500

Le nombre de Gram étant de 10, le nombre de « pas Gram » est bien de $625 - 10$.

On vérifie les totaux en lignes et en colonnes.

On mesure $P(\text{Gram}) = \frac{10}{625}$

Univers : 625	
Gram	10
pas Gram	615

On a mesuré $P(G | S) = \frac{10}{125}$

Univers réduit : 125	
Gram	10
pas Gram	115

Et $P(G | \bar{S}) = 0$:

symétrique 125	
Gram	0
pas Gram	500

les proportions ne sont pas les mêmes dans les grands univers que dans chacun des univers coupés

	symétrique	non symétrique
Gram	10	0
pas Gram	115	500

ce ne sont pas des événements indépendants.

Et avec des matrices diagonales ? Cette fois, il y a des matrices diagonales de Gram, et des matrices non diagonales de Gram.

Mais garde-t-on les mêmes proportions ?

	diagonale 25	non diagonale 600
Gram 10	3	7
pas Gram 615	22	593

On a trouvé trois matrices à la fois de Gram et diagonales.

Par soustraction, 7 sont de Gram mais non diagonales.

On avait 25 matrices diagonales, il ne reste 22 qui sont diagonales sans être de Gram, à cause de nombres négatifs ou nuls sur la diagonale.

La dernière case se calcule par soustraction.

On calcule des probabilités

	diagonale 25	non diagonale 600
Gram 10	3	7
pas Gram 615	22	593
$P(G) = \frac{10}{625}$	$P(G D) = \frac{3}{25}$	$P(G \bar{D}) = \frac{7}{600}$

ce ne sont pas les mêmes, le fait d'être diagonale (ou non) influence la probabilité d'être de Gram.

Les événements ne sont pas indépendants.

D'ailleurs, $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 22 & 593 \end{vmatrix}$ est non nul.

Les colonnes de la matrice ne sont pas proportionnelles.

$\frac{sh(x)}{x}$ est une forme indéterminée en 0 mais elle tend vers 1 par équivalent.

Et même, avec un développement limité $\frac{sh(h)}{h} = 1 + \frac{h^2}{6} + \frac{h^4}{120} + o(h^4)_{h \rightarrow 0}$.

En combinant avec $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)_{u \rightarrow 0}$ on trouve

$$\ln\left(\frac{sh(h)}{h}\right) = \frac{h^2}{6} + \frac{h^4}{120} + o(h^4)_{h \rightarrow 0} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{6} + o(h^2)_{h \rightarrow 0}\right)^2 + o((h^2)^2)_{h \rightarrow 0}$$

◦28◦

On définit : $f = x \mapsto [x] \cdot \sin(\pi \cdot x)$. Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Montrez que l'équation $\int_0^x f(t) \cdot dt = 0$ a une solution entre 3 et 4.

L'application est continue en tout point d'un intervalle du type $]n, n+1[$ (ouvert), car elle y est de la forme $x \mapsto n \cdot \sin(\pi \cdot x)$.

Les seuls points posant problème sont donc les entiers relatifs n de $\mathbb{Z}$.

Comme c'est une définition avec une partie entière, il est judicieux de regarder à droite et à gauche.

intervalle	$]n-1, n[$	n	$]n, n+1[$
fonction	$(n-1) \cdot \sin(\pi \cdot x)$	0	$n \cdot \sin(\pi \cdot x)$
limite en n	à gauche : 0	0	0 à droite

Les deux limites latérales coïncident avec la valeur de la fonction. Elle est continue aussi en n de $\mathbb{Z}$.

Maintenant qu'elle est continue sur un intervalle tel que $[3, 4]$, on va appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

On découpe donc l'intégrale par relation de Chasles :

$\int_0^1 f(t) \cdot dt = \int_0^1 0 \cdot dt$	$\int_1^2 f(t) \cdot dt = \int_1^2 \sin(\pi \cdot t) \cdot dt$	$\int_2^3 f(t) \cdot dt = \int_2^3 2 \cdot \sin(\pi \cdot t) \cdot dt$	$\int_3^4 f(t) \cdot dt = \int_3^4 3 \cdot \sin(\pi \cdot t) \cdot dt$
0	$-\frac{2}{\pi}$	$\frac{4}{\pi}$	$-\frac{6}{\pi}$
		$f(3) = \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi} \geq 0$	$f(4) = \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi} - \frac{6}{\pi} \leq 0$

Et encore une fois, un bon tableau vaut mieux qu'un con discours.

Si vous vous contentez de dire « oui, j'ai le bon argument », vous n'avez pas l'esprit à réussir aux concours.

Si vous vous demandez « ai je rendu la chose claire et compréhensible », vous avez l'esprit ingénieur...

Mots clefs : limite à droite et à gauche, relation de Chasles, théorème des valeurs intermédiaires.

◦29◦

♡ On pose : $f = x \mapsto x^3 - 3 \cdot x$. Montrez que f n'est pas un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Complétez : f est un homéomorphisme de $[1, +\infty[$ dans $\square$

f est un homéomorphisme de $\square$ dans $[-2, 2]$.

Existe-t-il un homéomorphisme h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $h \circ f$ soit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Existe-t-il un homéomorphisme h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $f \circ h$ soit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Existe-t-il une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $g \circ f$ soit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Existe-t-il une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $f \circ g$ soit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Si oui, calculez $g(18)$.

Rappel : homéomorphisme de A sur B : application f continue de A dans B , bijective, telle que f^{-1} soit aussi continue de B dans A .

Quel est le défaut de f ? Elle est continue, mais pas injective.

En effet, elle est croissante, décroissante puis à nouveau croissante (dérivez si vous ne me faites pas confiance).

On donne même un contre-exemple pour son défaut d'injectivité : 0 et $\sqrt{3}$ ont la même image.

f est un homéomorphisme de $[1, +\infty[$ dans $\square$ $[-2, +\infty[$

Continue, strictement croissante (f' est strictement positive par tableau de signes), et l'intervalle image est bien $[f(1), f(+\infty)[$. Euh, on a le droit d'écrire ça ? $f(+\infty)$? Non.

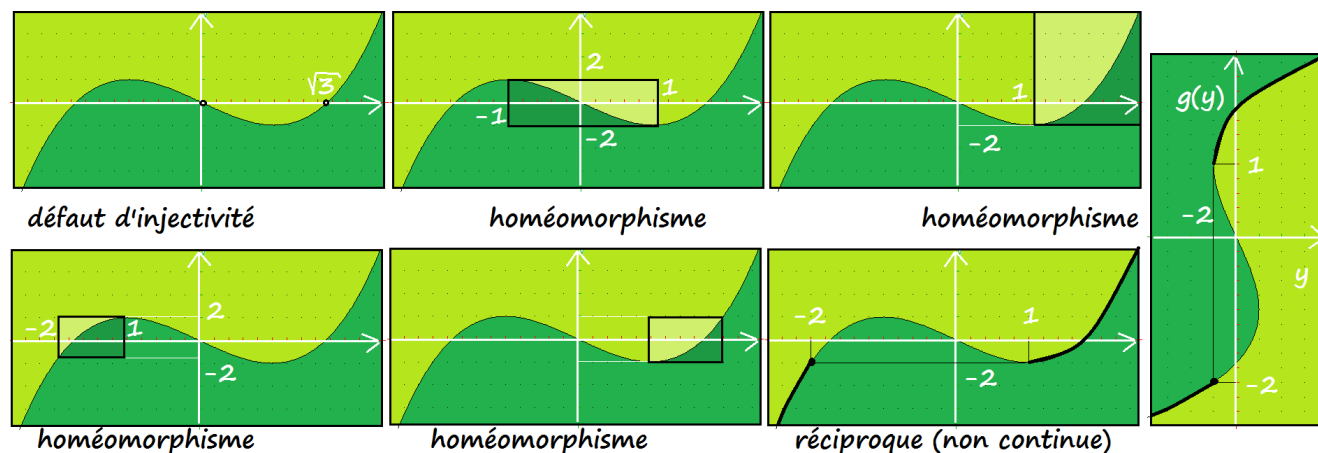
2. Oui, un tableau, c'est plus lisible que des formules partout que l'on ne relie pas entre elles au premier coup d'œil et qui s'étalent sur des lignes et des lignes ; y'a écrit « maths », donc on ne calcule pas, on communique.

f est un homéomorphisme de $[-1, 1]$ dans $[-2, 2]$. (décroissante, continue, et c'est le bon intervalle image).
 Bien sûr, on ne démontre pas la continuité de la réciproque, elle est offerte par le théorème.
 D'ailleurs, qui a essayé d'expliciter la réciproque, à part un grand naïf sortant de l'amphi 21 ?

Mais attention, j'en ai d'autres :

f est un homéomorphisme de $[-2, -1]$ dans $[-2, 2]$.

Si, elle est croissante, continue sur $[-2, 1]$ et on a $f(-2) = -2$ et $f(-1) = 2$!



Et j'en ai une autre : f est un homéomorphisme de $[1, 2]$ dans $[-2, 2]$.

Deuxième de la deuxième ligne.

Et pour chacune des trois affirmations, c'est une autre réciproque qui sert...

a	Existe-t-il un homéomorphisme h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $h \circ f$ soit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?	Non
b	Existe-t-il un homéomorphisme h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $f \circ h$ soit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?	Non
c	Existe-t-il une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $g \circ f$ soit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?	Non
d	Existe-t-il une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $f \circ g$ soit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?	Oui

Pour le a et le b c'est le même argument.

Si $h \circ f$ est un homéomorphisme, alors h^{-1} existe et est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et par composition, $h^{-1} \circ h \circ f$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour le c si h existe, on demande à $g \circ f$ d'être bijective. Alors que f n'est même pas injective.

Rappelons : $g \circ f$ injective implique f injective.

Reformulation : f non injective implique $g \circ f$ non injective.

Ici, le défaut avec $f(0) = f(\sqrt{3})$ se transmet à $g(f(0)) = g(f(\sqrt{3}))$

Pour le d , que f ne soit pas injective ne pose pas de véritable problème. Il suffit de demander par exemple à g de ne pas atteindre à la fois 0 et $\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$.

Mais attention, g ne sera pas continue... Sinon, on retombe sur le a .

On va prendre ce qui est représenté sur le dernier schéma de la planche de six graphes.

Pour y dans $] -\infty, -2]$, on prend $g(y) = \phi(y)$ où ϕ est la réciproque de $\begin{matrix}] -\infty, -2] & \xrightarrow{f} &] -\infty, -2] \end{matrix}$

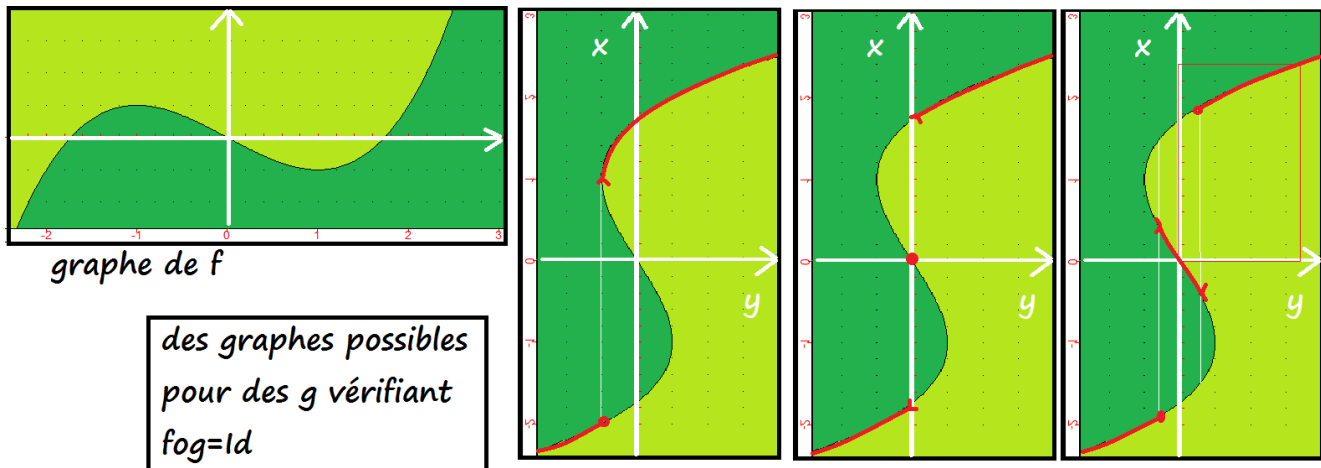
Pour y dans $] -2, +\infty[$, on prend $g(y) = \varphi(y)$ où φ est la réciproque de $\begin{matrix}] 1, +\infty[& \xrightarrow{f} &] -2, +\infty[\end{matrix}$.

g est définie partout, sans ambiguïté.

Pour tout y de $\mathbb{R}$, on a $f(g(y)) = y$.

$y \leq -2$	$-2 < y$
$g(y) = \phi(y) \leq -2$	$g(y) = \varphi(y) > 1$
$f(g(y)) = f(\phi(y)) = y \in] -\infty, -2]$	$f(g(y)) = f(\varphi(y)) = y \in] -2, +\infty[$

On note que g est discontinue en -2 . Elle passe de -1 (valeur atteinte) à 1 (limite à droite).



On note aussi qu'il existe plusieurs fonctions g possibles, suivant quelle branche on choisit, y compris des solutions totalement fantaisistes ayant plusieurs points de discontinuité.

L'une d'entre elles a même le bon goût d'être impaire comme f . Mais elle nécessite d'autres points de discontinuité, qui font que c'est « vraiment pas » un homéomorphisme.

Sinon, pour l'ultime question $g(18)$, peut-on avoir plusieurs réponses ?

Comme toutes nos applications g sont bien définies, $g(18)$ doit exister. Et vérifier $f(g(18)) = 18$.

Or, 18, de par sa position, n'a qu'un antécédent par f plus grand que 2 : $f(3) = 18$ et c'est la seule solution.

On a donc forcément $g(18) = 3$

Un exercice sans calcul méchant, loin de là. Mais qui normalement doit bien vous faire comprendre qu'une application non injective peut avoir plusieurs réciproques à droite.

Et qu'il faut faire des choix, si possible continus, non ?

◦30◦

♥ Montrez que la probabilité que `randrange(1, 626)` soit un carré parfait est de $\frac{1}{25}$.

Quelle est la probabilité que `randrange(1, 626)**2` soit un carré parfait ?

Quelle est la probabilité que `randrange(1, 626)*randrange(1, 626)` soit un carré parfait ? (exploitez Python si nécessaire pour dénombrer).

◦31◦

Montrez que la série de terme général $\frac{i^n}{n+1}$ converge. Tiens, et sa somme vaut quoi ?

Le numérateur est borné, il vaut alternativement 1, i , -1 et $-i$.

Le dénominateur tend vers l'infini. Le terme général tend vers 0.

La condition nécessaire est validée. mais on ne peut pas encore conclure.

En module, le terme général vaut $\frac{1}{n+1}$. La série de terme général $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \geq 0}$ diverge. On ne peut donc pas appliquer un théorème de convergence en valeur absolue.

Les termes sont dans $\mathbb{C}$, on ne peut pas utiliser le critère des séries alternées.

Mais si on sépare partie réelle et partie imaginaire :

$$\sum_{n=0}^N \frac{i^n}{n+1} = \sum_{2.p \leq N} \frac{(-1)^p}{2.p+1} + \sum_{2.p+1 \leq N} \frac{i \cdot (-1)^p}{2.p+2}$$

(c'est la façon la plus simple que j'ai trouvée pour l'écrire).

La série de terme général $\left(\frac{(-1)^p}{2.p+1}\right)_{p \geq 0}$ converge, en appliquant le critère spécial des séries alternées (la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant).

La série de terme général $\left(\frac{(-1)^p}{2.p+2}\right)_{p \geq 0}$ converge, en appliquant le critère spécial des séries alternées (la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant).

On multiplie la seconde par i et on somme : notre série initiale converge.

Ça manque un peu de rigueur, suivant le rang auquel on s'est arrêté. Il faut être plus rigoureux, suivant la valeur de N modulo 4 :

N modulo 4	0	1	2	3
$N =$	$4.q$	$4.q + 1$	$4.q + 2$	$4.q + 3$
partie réelle	$\sum_{p=0}^{2.q} \frac{(-1)^p}{2.p+1}$	$\sum_{p=0}^{2.q} \frac{(-1)^p}{2.p+1}$	$\sum_{p=0}^{2.q+1} \frac{(-1)^p}{2.p+1}$	$\sum_{p=0}^{2.q+1} \frac{(-1)^p}{2.p+1}$
partie imaginaire	$i. \sum_{p=0}^{2.q-1} \frac{(-1)^p}{2.p+2}$	$i. \sum_{p=0}^{2.q} \frac{(-1)^p}{2.p+1}$	$i. \sum_{p=0}^{2.q} \frac{(-1)^p}{2.p+1}$	$i. \sum_{p=0}^{2.q+1} \frac{(-1)^p}{2.p+1}$

On utilise le théorème de convergence des séries alternées, et un théorème de recouvrement de $\mathbb{N}$ par parité/impairité.

Bonus : et la somme vaut $\frac{\pi}{4} + i. \frac{\ln(2)}{2}$.

Bonus du bonus : $\exp\left(i. \left(\frac{\pi}{4} + i. \frac{\ln(2)}{2}\right)\right) = e^{i.\pi/4}.e^{-\ln(2)/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.e^{i.\pi/4} = \frac{i}{2}$.

◻32◻

L'élève affirme : si on réunit deux familles libres n'ayant aucun vecteur de l'une colinéaire à un vecteur de l'autre, on a une nouvelle famille libre. Prouvez lui qu'il a tort.

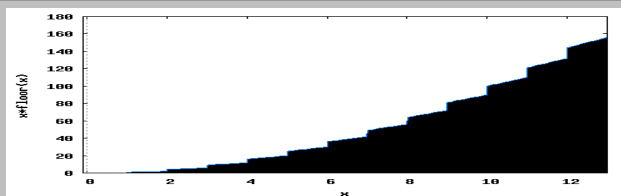
Un contre-exemple : $(\vec{i}, \vec{j})$ et $(\vec{i} + \vec{j})$.

Aucun vecteur de l'une n'est colinéaire à aucun vecteur de l'autre.

Et la famille $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} + \vec{j})$ est liée.

◻33◻

Résolvez $\int_0^x t.[t].dt = 222$ d'inconnue réelle x .



Oui, voici bien une fonction discontinue. Peut-on calculer l'intégrale ? Oui. Mais pas avec des mots clefs de Terminale du type « dérivable donc intégrable » (ce qui fait sauter deux marches, et dire que pour aller à Fontainebleau, il faut acheter un billet pour Marseille, s'arrêter à Lyon et reprendre un train en sens inverse...).

ici, il faut découper par relation de Chasles :

x	$[0, 1[$	$[1, 2[$	$[2, 3[$	$[3, 4[$	$[4, 5[$
$f(x)$	0	x	$2.x$	$3.x$	$4.x$
	$\int_0^1 f(t).dt = 0$	$\int_0^2 f(t).dt = 0 + \int_1^2 t.dt = \frac{3}{2}$	$\int_0^3 f(t).dt = \frac{3}{2} + \int_2^3 2.t.dt = \frac{13}{2}$	etc...	

On peut calculer $\int_0^n f(t).dt$ pour tout entier n :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t).dt = \sum_{k=0}^{n-1} k. \int_k^{k+1} t.dt$$

On trouve donc $\sum_{k=0}^{n-1} k. \left(\frac{(k+1)^2}{2} - \frac{k^2}{2}\right)$. On peut simplifier ceci.

Ou se demander quand cette quantité dépasse 222. Et quelle chance, avec un peu de patience ou un Python en rond, on trouve $\int_0^9 f(t).dt = 222$.

Et comme f est positive, l'application $x \mapsto \int_0^x f(t).dt$ est croissante. Il n'y a donc pas d'autre solution.

Il est vrai que si x dépasse 0, l'intégrale augmente encore. Et avant, on n'a pas encore atteint 222.

Mais si j'avais demandé $\int_0^x f(g).dt = 223$, il aurait fallu en rajouter un petit peu, avec $x = 9 + a$ avec a à ajuster.

◻34◻

Combien y a-t-il d'applications continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0, 1, 2\}$?

Une application continue de I (intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\{0, 1, 2\}$ est forcément constante. En effet, si elle ne l'était pas, elle prendrait deux valeurs différentes, comme 1 et 2 et devrait donc prendre aussi toutes les valeurs intermédiaires comme des irrationnels. Ça lui est interdit. Elle est donc constante.

Mais attention, f est constante sur $] -\infty, 0[$ et constante sur $]0, +\infty[$. Elle a trois choix d'un coté et trois de l'autre. Ce qui fait neuf applications.

Exercice à double détente...

◦35◦

Le professeur a demandé de calculer la moyennes des entiers de 1 à . L'élève Hall-Honter (Pourlaveh-Lelinj) a trouvé 8,8. Le professeur lui dit : "tu t'es trompé, tu as oublié de compter un entier (mais tu as bien divisé par le nombre de termes de ta somme)". Retrouvez l'entier oublié et la question initiale du professeur.

On note N l'entier jusqu'au-quel il faut sommer, et k l'entier oublié par l'élève dans son calcul du numérateur.

On note μ la vraie moyenne.

$$\text{On a donc } \mu = \frac{N \cdot (N+1)}{2 \cdot N} \text{ et } 8,8 = \frac{\frac{N \cdot (N+1)}{2} - k}{N-1}.$$

On peut encadrer suivant le terme oublié :

$$\frac{\frac{N \cdot (N+1)}{2} - N}{N-1} \leq 8,8 \leq \frac{\frac{N \cdot (N+1)}{2} - 1}{N-1}$$

N ne peut valoir que 16 ou 17.

On teste : N vaut 16 et k vaut 4.

$$\text{Vérification : } \frac{1+2+3+5+6+\dots+16}{15} = \frac{132}{15} = 8,8$$

◦36◦



A	B	C	D
[0, 0, 4, 4, 4, 4]	[3, 3, 3, 3, 3, 3]	[2, 2, 2, 2, 6, 6]	[1, 1, 1, 5, 5, 5]

Ce sont des dés équilibrés à six faces (appelés dés de Bradley Effron).

Montrez que la probabilité que A batte B est $2/3$.

Montrez que la probabilité que B batte C est $2/3$.

Montrez que la probabilité que C batte D est $2/3$.

Quelle est la probabilité que D batte A ?

On fait se battre A contre B . A n'a que deux issues possibles, B n'en a qu'une :

$P(A=0) = \frac{1}{3}$	$P(A=4) = \frac{2}{3}$	$P(B=3) = 1$
------------------------	------------------------	--------------

	$A=0$	$A=4$
$B=3$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

	$A=0$	$A=4$
$B=3$		$\frac{2}{3}$

	A	B	C	D
A		$\frac{1}{3}$		
B	$\frac{2}{3}$			
C				
D				

On commence à remplir pour dire que A bat B avec probabilité $\frac{2}{3}$ (et que B ne bat A qu'avec

probabilité $\frac{1}{3}$).

En revanche, B bat C deux fois sur 3 (B a toujours 3, et C ne fait mieux qu'une fois sur trois).

	A	B	C	D
A		$\frac{1}{3}$		
B	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$	
C		$\frac{2}{3}$		
D				

Plus intéressant : C contre D :

		$C = 2$ ($p=2/3$)	$C = 6$ ($p=1/3$)	
$D = 1$ ($p=1/2$)		$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	3
$D = 5$ ($p=1/2$)		$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	

Les variables aléatoires des dés sont indépendantes, donc les probabilités des cases sont des produits.

		$C = 2$ ($p=2/3$)	$C = 6$ ($p=1/3$)	
C gagne sur D :	$D = 1$ ($p=1/2$)	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	Total : $P(C > D) = \frac{2}{3}$ (et par soustraction
	$D = 5$ ($p=1/2$)		$\frac{1}{6}$	

$$P(D > C) = \frac{1}{3}.$$

Bilan provisoire :

	A	B	C	D
A		$\frac{1}{3}$		
B	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$	
C		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$
D			$\frac{2}{3}$	

Jusque là, $A > B$ $B > C$ $C > D$ à chaque fois avec probabilité $\frac{2}{3}$.

Mais la surprise va venir de D contre A :

		$D = 1$ ($p=1/2$)	$D = 5$ ($p=1/2$)
$A = 0$ ($p=1/3$)		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$A = 4$ ($p=2/3$)		$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$

A gagne sur D :

		$D = 1$ ($p=1/2$)	$D = 5$ ($p=1/2$)
$A = 0$ ($p=1/3$)			
$A = 4$ ($p=2/3$)		$\frac{2}{6}$	

dans un cas sur trois.

C'est surprenant $A > B$ $B > C$ $C > D$ $D > A$ à chaque fois avec probabilité $\frac{2}{3}$

A est meilleur que B

B est meilleur que C

C est meilleur que D

D est meilleur que A .

La relation « être meilleur que au moins une fois sur trois » n'est pas transitive.

Jouons vraiment : Les dés sont posés sur la table. Je vous laisse en choisir un, et j'en prend un à mon tour (je choisis bien évidemment^a).

On lance plusieurs fois les dés.

Je vous bats deux fois sur trois. Pas de bol pour vous.

Vous en avez marre, je vous dis « on change de dés ? ».

Vous prenez le mien, et moi évidemment, je prend le suivant dans la liste.

Et à nouveau, je vous bats deux fois sur trois.

Quel que soit le dé que vous choisissiez, je prendrai le bon pour vous battre deux fois sur trois. Le fait de vous laisser le choix est en fait un désavantage pour vous... Sympathique, non ?

^a. si vous avez pris B et que je prends B aussi, ça va être assez peu intéressant comme jeu

Il existe d'autres modèles assez similaires à ces dés, avec d'autres faces et d'autres probabilités, mais toujours « non transitifs ».

♥ Montrez qu'il existe un isomorphisme entre $(S_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ et $(S_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
Isomorphisme = application linéaire, bijective.

Écrivons la forme des éléments de $S(\mathbb{C})$: $\begin{pmatrix} a + i.b & c + i.d \\ c + i.d & e + i.f \end{pmatrix}$ (on retient $\begin{pmatrix} a + i.b & c + i.d \\ e + i.f \end{pmatrix}$ pour voir juste la

3. j'ai laissé des sixièmes partout pour bien vérifier que la somme des probabilités vaut 1

dimension)

et ceux de $S_3(\mathbb{R})$: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ et là aussi, on retient $\begin{pmatrix} a & b & c \\ & d & e \\ & & f \end{pmatrix}$.

Les deux sont de dimension 6, on va pouvoir créer une application linéaire bijective :

$$\begin{pmatrix} a + i.b & c + i.d \\ e + i.f \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c \\ & d & e \\ & & f \end{pmatrix}$$

Il existe un isomorphisme entre deux espaces si et seulement si ils ont la même dimension.

38

p et q sont deux réels plus grands que 1 vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. y est un réel strictement positif fixé. Étudiez les variations de $x \mapsto \frac{x}{p} + \frac{y}{q} - x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}}$ sur $]0, +\infty[$. Déduisez : $x^{1/p} \cdot y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$.

On se donne f et g continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on pose $A = \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p dt}$ et $B = \sqrt[q]{\int_a^b |g(t)|^q dt}$ (supposés non nuls). Montrez pour tout x de $[a, b]$: $\frac{f(x) \cdot g(x)}{A \cdot B} \leq \frac{f(x)^p}{p \cdot A^p} + \frac{g(x)^q}{q \cdot B^q}$. Déduisez : $\int_a^b |f(t) \cdot g(t)| dt \leq \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p dt} \cdot \sqrt[q]{\int_a^b |g(t)|^q dt}$. Que reconnaissez vous pour $p = 2$?

p et q sont dits conjugués, comme 2 et 2.

La majoration $x^{1/p} \cdot y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$ est un classique, qu'on va obtenir ici par variations.

$x \mapsto \frac{x}{p} + \frac{y}{q} - x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}}$ est une application dérivable.

En 0 elle tend vers $\frac{y}{q}$.

En $+\infty$ elle tend vers l'infini (car $\frac{x}{p}$ l'emporte sur $x^{\frac{1}{p}}$ puisque p est plus grand que 1).

On la dérive : $x \mapsto \frac{1}{p} + 0 - \frac{1}{p} \cdot x^{\frac{1}{p}-1} \cdot y^{\frac{1}{q}}$.

On la simplifie en $x \mapsto \frac{1}{p} \cdot (1 - x^{-\frac{1}{q}} \cdot y^{\frac{1}{q}})$ (p et q sont conjugués).

La dérivée s'annule et change de signe en y . Et on trouve qu'en y cette application vaut $\frac{y}{p} + \frac{y}{q} - y^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$, ce qui fait...

Oui, 0 !

Le minimum de $x \mapsto \frac{x}{p} + \frac{y}{q} - x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}}$ vaut 0, atteint en $x = y$.

Cette application est donc positive.

Les deux réels A et B existent. Ils sont a priori strictement positifs.

Prenons $x^{1/p} \cdot y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$ avec $x = \frac{|f(x)|^p}{A^p}$ et $y = \frac{|g(x)|^q}{B^q}$ (le rôle de x comme agent double est étrange dans cette formule).

L'inégalité devient donc $\frac{|f(x)|}{A} \cdot \frac{|g(x)|}{B} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(x)|^q}{B^q}$.

On intègre de a à b : $\int_a^b \frac{|f(x)|}{A} \cdot \frac{|g(x)|}{B} dx \leq \frac{1}{p \cdot A^p} \cdot \int_a^b |f(x)|^p dx + \frac{1}{q \cdot B^q} \cdot \int_a^b |g(x)|^q dx$ par linéarité.

Et même $\frac{1}{A \cdot B} \cdot \int_a^b |f(x) \cdot g(x)| dx \leq \frac{1}{p \cdot A^p} \cdot \int_a^b |f(x)|^p dx + \frac{1}{q \cdot B^q} \cdot \int_a^b |g(x)|^q dx$.

Mais qui est $\int_a^b |f(x)|^p dx$? C'est A^p . Et de même pour $\int_a^b |g(x)|^q dx$.

Le membre $\frac{1}{p \cdot A^p} \cdot \int_a^b |f(x)|^p dx + \frac{1}{q \cdot B^q} \cdot \int_a^b |g(x)|^q dx$ devient simplement $\frac{1}{p \cdot A^p} \cdot A^p + \frac{1}{q \cdot B^q} \cdot B^q$.

On le simplifie en 1 (car p et q sont conjugués).

A ce stade : $\frac{1}{A \cdot B} \cdot \int_a^b |f(x) \cdot g(x)| dx \leq 1$.

Un produit en croix : $\int_a^b |f(x).g(x)|.dx \leq A.B.$

On revient aux vrais noms de variables : $\int_a^b |f(x).g(x)|.dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p.d x \right)^{1/p} . \left(\int_a^b |g(x)|^q.d x \right)^{1/q}.$

On notera qu'on avait intérêt à donner un nom aux deux quantités appelées justement A et B , et à ne pas traîner leur forme intégrale.

La démonstration est très similaire à celle faite pour les sommes.

Pour p et q égaux à 2, c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz (au programme, car « facile »).

Ici, c'est l'inégalité de Minkowski.

◦39◦

A est un entier à trois chiffres et B est son renversé exemple : le renversé de 453 est 354. On sait :

A est divisible par 13	B est divisible par 31
A est divisible par 39	B est divisible par 93
A est divisible par 21	B est divisible par 12

Trouvez A (et B) (expliquez).

On veut que A soit divisible par 13, 39 et 21. Ceci revient à dire que A est divisible par 13.3.7 (le plus petit commun multiple). On veut un multiple de 273 à trois chiffres 273, 546 et 819.

Quant à B il est divisible par 31.12. pas le choix : 372 ou 744. Finalement $A = 273$

273 est divisible par 13	quotient 21	372 est divisible par 31	quotient 12
273 est divisible par 39	quotient 7	372 est divisible par 93	quotient 4
273 est divisible par 21	quotient 13	372 est divisible par 12	quotient 31

◦40◦

On applique le théorème des accroissements finis à $f = x \mapsto \frac{x+2}{x-3}$ pour $a = 2$ et $b = 5$. On trouve : $\exists c \in \mathbb{R}, 3.f'(c) = \frac{7}{2} + \frac{4}{1}$. Et pourtant l'équation obtenue n'a pas de racine réelle. Pourquoi ?

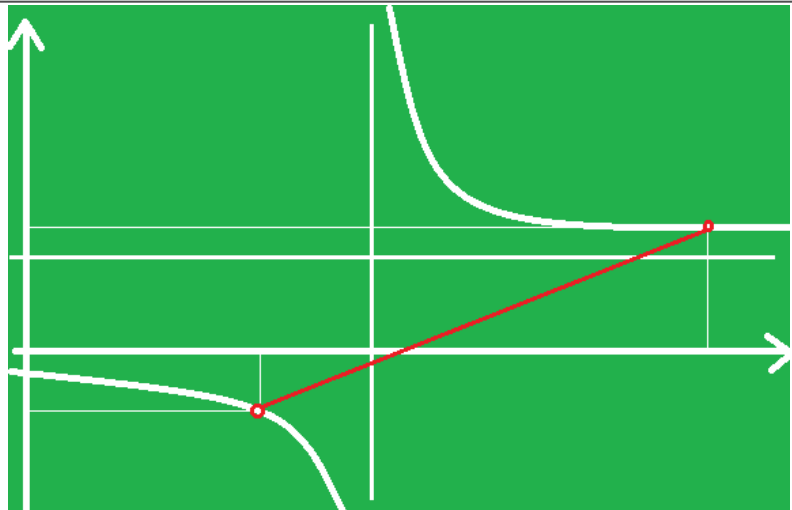
Il faut vraiment être con pour se faire avoir ainsi.

L'application n'est pas définie sur $[2, 5]$!
On ne peut pas lui appliquer le théorème des accroissements finis !

On note que $f'(c)$ est négatif pour tout c :

$$f' = x \mapsto \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{(x-3)^2}.$$

Mais f ne doit pas être déclarée décroissante. Elle ne l'est que sur chaque intervalle de son domaine.



Et si on s'entraînait à TeX ? $f = x \mapsto \frac{x+2}{x-3}$ c'est `$f \rightarrow \frac{x+2}{x-3}$`.

Et j'ai une préférence pour `$f \rightarrow \displaystyle \frac{x+2}{x-3}$` qui donne une fraction plus jolie

$$:f = x \mapsto \frac{x+2}{x-3}.$$

Pour construire une fraction, c'est `\frac{numérateur}{dénominateur}`.

Il y a aussi une construction en `{numérateur} \over {dénominateur}`.

♥ On définit : $f = (x, y) \mapsto x.y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Donnez son domaine de définition.

Calculez $f(\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta))$. Montrez : $f(h, k) = o(\sqrt{h^2 + k^2})$ quand h et k tendent vers 0.

Prolongez f par continuité en $(0, 0)$.

Calculez $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k}$ (qu'on notera $p(0, 0)$) et $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, k) - f(x, 0)}{k}$ (qu'on notera $p(x, 0)$) pour x non nul.

Calculez $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(h, 0) - p(0, 0)}{h}$.

Calculez aussi $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, k) - f(h, 0)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h}}{k}$.

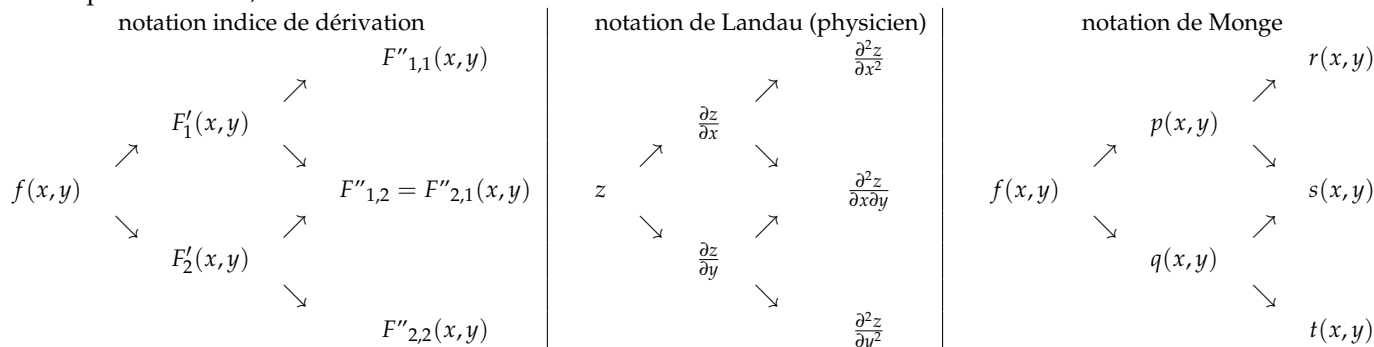
Les matheux sont des emmerdeurs. A peine vous ont ils donne un théorème (avec des hypothèses précises, c'est en ça que ce sont des matheux), ils vous donnent le contre-exemple (c'est à dire le cas où en ayant omis une hypothèse, la conclusion n'est plus valable).

Ici, le cours (de seconde année) contient le lemme de Schwarz : $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ si z est de classe C^2 .

Pour le physicien, l'essentiel est « on peut dériver dans l'ordre qu'on veut ».

Pour le matheux, l'essentiel est « seulement si f est C^2 ».

Pour le prof de maths, l'essentiel est



$\nearrow$ correspond à la dérivation par rapport à la première variable (disons x),

$\searrow$ correspond à la dérivation par rapport à la seconde variable (disons y).

Le résultat agréable est que le trajet $\nearrow \searrow$ donne la même chose que $\searrow \nearrow$.

Ici, c'est juste en un point que l'on n'aura pas égalité des dérivées croisées : en $(0, 0)$.

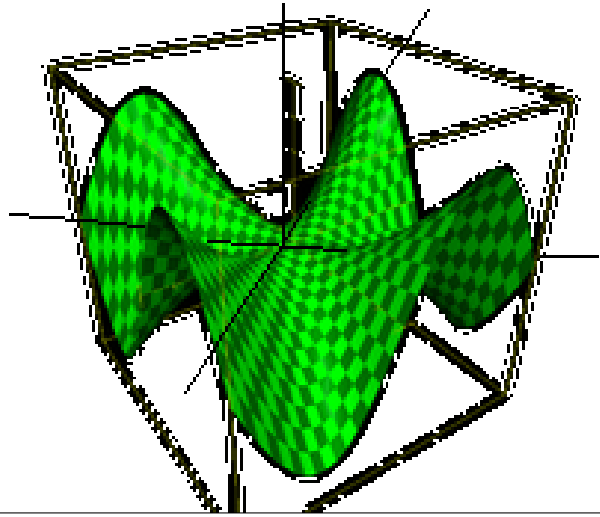
C'est parti pour le résultat proprement dit.

$$f(\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta)) = \rho \cdot \cos(\theta) \cdot \rho \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{\rho^2 \cdot \cos^2(\theta) - \rho^2 \cdot \sin^2(\theta)}{\rho^2 \cdot \cos^2(\theta) + \rho^2 \cdot \sin^2(\theta)} = \rho^2 \cdot \frac{\sin(2\theta)}{2} \cdot \frac{\cos(2\theta)}{1} = \rho^2 \cdot \frac{\sin(4\theta)}{4}$$

(oui, c'est en soi un petit exercice de trigonométrie qui teste la capacité du candidat à organiser et solliciter ses connaissances).

quand ρ tend vers 0 (quoi que fasse θ), $F(\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta))$ tend vers 0.

On posera donc $\boxed{f(0, 0) = 0}$



$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 0 = 0.$$

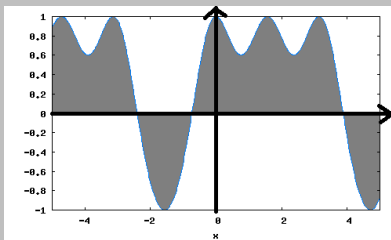
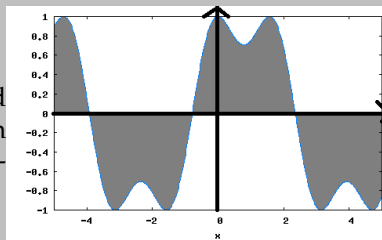
Oui, il n'y a même pas de forme indéterminée, le numérateur est carrément nul.

A suivre...

Donnez un intervalle I le plus grand possible sur lequel $\cos^3 + \sin^3$ est un homéomorphisme. Donnez alors l'intervalle image.

◦42◦

Même question pour $\cos^4 + \sin^3$.



L'application est continue. Il suffit de s'assurer de sa stricte monotonie, en dérivant.

$$(\cos^3 + \sin^3)' = 3 \cdot \cos^2 \cdot (-\sin) + 3 \cdot \sin^2 \cdot \cos = 3 \cdot \cos \cdot \sin(\sin - \cos).$$

On fait un tableau de signes sur $[0, 2\pi]$ pour profiter de la périodicité

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$		+		+	0	-		-		-	0	+	
$\sin(x)$	0	+		+		+	0	-		-		-	0
$\sin(x) - \cos(x)$		-	0	+		+		+	0	-		-	
$f'(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

On retient le plus grand intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ d'intervalle image $[-1, 1]$ (renversé).

Pour $\cos^4 + \sin^3$, on fait le même type de travail :

$$(\cos^4 + \sin^3)' = 4 \cdot \cos^3 \cdot (-\sin) + 3 \cdot \sin^2 \cdot \cos = \cos \cdot \sin(3 \cdot \sin - 4 \cdot \cos^2) \text{ et cette fois, on doit étudier le signe de } 3 \cdot \sin - 4 \cdot \cos^2 \text{ qui est un polynôme en } \sin, \text{ non ?}$$

◦43◦

Montrez que $x \mapsto x \cdot \text{ch}(x)$ (notée f) est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Donnez son développement limité en 0 à l'ordre 5.

Donnez le développement limité en 0 de sa réciproque f^{-1} (posez a priori, composez, identifier).

Montrez : $f^{-1}(y) \sim_{+\infty} \ln(y)$.

L'application est continue, dérivable. Sa dérivée $x \mapsto \text{ch}(x) + x \cdot \text{sh}(x)$ est toujours plus grande que 1.

En effet, $\text{ch}(x)$ est plus grand que 1 et le produit $x \cdot \text{sh}(x)$ est positif car constitué de deux termes de même signe.

L'application est strictement croissante, sans tangente horizontale.

Le théorème du cours garantit qu'elle admet une réciproque, que celle-ci est continue, dérivable partout, et qu'elle est même à son tour de classe C^∞ (phénomène de bootstrap).

Les limites aux bornes (infinies) nous donnent l'intervalle image et c'est $]-\infty, +\infty[$.

Le développement limité d'ordre 5 en 0 est

$$f(0+h) = h + \frac{h^3}{2} + \frac{h^5}{24} + o(h^5)$$

On pose a priori celui de la réciproque (existence par difféomorphisme), on en annule la moitié des termes par imparité, et on donne le premier par équivalent (la bissectrice est la tangente au graphe de f mais aussi de f^{-1}).
 $f^{-1}(x) = x + a.x^3 + b.x^5 + o(x^5)$.

On compose els deux et on identifie avec le développement limité de l'identité

$$h = h + \frac{h^3}{2} + \frac{h^5}{24} + o(h^5) + a.(h + \frac{h^3}{2} + o(h^3))^3 + b.(h + o(h))^5 + o(h^5)$$

Le système donne $a = -\frac{1}{2}$ puis $b = \frac{17}{24}$.

On interprète géométriquement si on y tient.

On part ensuite de la relation $x.ch(x) = y$ qui définit x comme fonction de y .

Elle dit que x doit tendre vers $+\infty$ avec y mais à quelle vitesse ?

On passe au logarithme

$$\ln(x) + \ln(ch(x)) = \ln(y)$$

et même

$$\ln(x) + \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-2.x}) - \ln(2) = \ln(y)$$

Les termes $\ln(x) + \ln(1 + e^{-2.x}) - \ln(2)$ sont négligeables devant x , on a donc

$$x + o(x) = \ln(y)$$

et c'est bien la définition de l'équivalence des deux quantités de part et d'autre du signe « égale ».

◦44◦

On pose $F = (x, y) \mapsto \frac{\ln(1+x.y)}{1+x+y^2}$. Donnez son domaine de définition (partie du plan).

Donnez son développement limité d'ordre 1 en $(0, 0)$: $F(0+h, 0+k) = F(0, 0) + p.h + q.k + o(\sqrt{h^2+k^2})$.

Donnez l'équation du plan tangent au graphe de F en $(0, 0)$.

Donnez son développement limité d'ordre 1 en $(0, 0)$:

$$F(0+h, 0+k) = F(0, 0) + \frac{p.h}{q.k} + \frac{r.h^2}{t.k^2} + o(h^2+k^2)$$

en donnant les trois nouveaux coefficients. Avez vous le courage pour le développement d'ordre 3 (dites moi déjà combien de termes ça fait).

A faire.

◦45◦

x et y sont liés par la relation $2.(x^3 + y^3) = 9.x.y$ qu'on ne cherchera pas à résoudre.

Montrez que le point $(2, 1)$ est sur cette courbe. En ce point, donnez alors le développement limité d'ordre 3 de y vu comme fonction de x (posez le développement a priori, reportez, développez, identifiez).

◦46◦

Avec les notations de Monge, j'ai trouvé $p = (x, y) \mapsto e^x \cdot \cos(y)$. Pouvez vous retrouver F .

Si j'ajoute $q = (x, y) \mapsto -e^x \cdot \sin(y)$?

Rappel :

		$F(x, y)$		
		$\frac{\partial}{\partial x}$		$\frac{\partial}{\partial y}$
	$p(x, y)$			$q(x, y)$
$\frac{\partial}{\partial x}$		$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$
$r(x, y)$		$s(x, y)$		$t(x, y)$

Pour remonter de p à f , il suffit d'intégrer « par rapport à x ».

Facile : $f(x, y) = e^x \cdot \cos(y)$.

Ah non, $f(x, y) = e^x \cdot \cos(y) + C^{te}$. Et de qui dépend cette constante ?⁴

La constante d'intégration dépend de y . On a donc juste $f(x, y) = e^x \cdot \cos(y) + \varphi(y)$ avec une fonction φ qu'on ne

4. vous vous rendrez compte des horreurs que vous finissez par écrire quand vous maltraitez les variables ? « de qui dépend la constante »

connaît pas et que la donnée de p ne nous permet pas de connaître.

En revanche, l'information complémentaire $q(x, y) = -e^x \cdot \cos(y)$ donne $\varphi'(y) = 0$.

Oui, $\varphi'(y)$ et pas un $\frac{\partial \varphi(y)}{\partial y}$ puisque c'est une fonction d'une seule variable.

Finalement, $\boxed{\exists k \in \mathbb{R}, \forall (x, y), f(x, y) = e^x \cdot \cos(y) + k}$

Mais peut on rendre rigoureuse cette « intégration par rapport à x à y constant » ?

Oui, partons de $p(x, y) = e^x \cdot \cos(y)$, pour tout x et pour tout y .

On a donc $\forall x, p(x, b) = e^x \cdot \cos(b)$.

On intègre de $x = 0$ à $x = a$: $\int_0^a p(x, b) \cdot dx = \int_0^a e^x \cdot \cos(b) \cdot dx$.

On intègre dans le premier membre en cherchant une primitive de $p(x, b)$ (l'application $(x \mapsto f(x, b))$ par définition même !).

On a donc $f(a, b) - f(0, b) = [e^x \cdot \cos(b)]_0^a$ et ainsi $f(a, b) = e^a \cdot \cos(b) - 1 \cdot \cos(b) + f(0, b)$.

Et c'est $-1 \cdot \cos(b) + f(0, b)$ qu'on a traité plus haut de « constante ne dépendant que de b ». C'est quand même plus propre ainsi.

Comme toujours, il est mille fois plus propre d'intégrer d'un état initial à un état final (ou état d'observation si vous tenez à laisser à votre système la possibilité de continuer à évoluer). C'est en ça que la physique m'a donné de la rigueur.

◻47◻

Avec les notations de Monge, j'ai trouvé $p = (x, y) \mapsto x \cdot y^2$ et $q = (x, y) \mapsto x^2 \cdot y$. Pouvez vous retrouver F (et si j'impose $F(0, 0) = 3$?).

Avec les notations de Monge, j'ai trouvé $p = (x, y) \mapsto x \cdot y^3$ et $q = (x, y) \mapsto x^3 \cdot y$. Montrez que je me suis trompé.

Pour le second exercice, on n'arrive pas à trouver de primitive valable des deux côtés à la fois.

Mais c'est peut être juste qu'on se débrouille mal.

Mais tout à coup, on a l'illumination. On doit avoir $\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}$. Et ici

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial (x \cdot y^3)}{\partial y} = 3 \cdot x \cdot y^2 \neq 3 \cdot x^2 \cdot y = \frac{\partial q(x, y)}{\partial x}$$

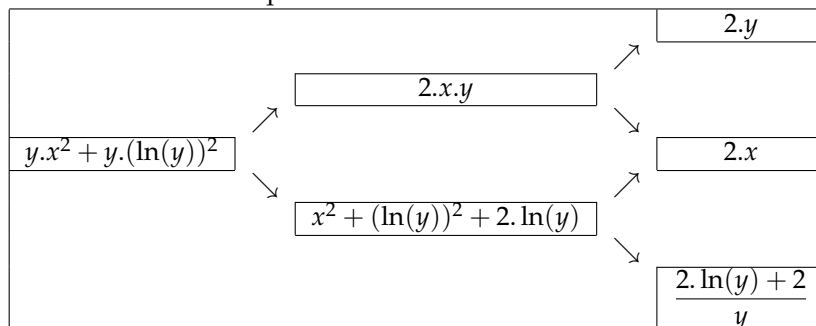
◻48◻

♥ On définit $F = (x, y) \mapsto y \cdot (x^2 + (\ln(y))^2)$.

Calculez p et q . Trouvez les « points critiques » (solutions de $p(x, y) = q(x, y) = 0$, c'est à dire plan tangent horizontal).

Donnez le développement limité d'ordre 2 de F en chacun des deux points critiques.

On va calculer les cinq dérivées dont on a besoin



Pour les points critiques, on résout un système $\begin{cases} \frac{2 \cdot x \cdot y}{x^2 + (\ln(y))^2 + 2 \cdot \ln(y)} = 0 \\ x^2 + (\ln(y))^2 + 2 \cdot \ln(y) = 0 \end{cases}$ d'inconnues x et y (y strictement positif à cause du logarithme).

On trouve déjà que x est nul. Et $\ln(y)$ vaut alors 0 ou $-1/2$.

On a deux points critiques $(0, 1)$ et $(0, \frac{1}{e^2})$.

On calcule alors les développements limités de deux façons : formule de Taylor Monge ou développement simples car finalement les variables sont séparées.

$$\text{Formule de Taylor-Monge} \quad F(a+h, b+k) = F(a, b) + \begin{matrix} p(a, b).h \\ q(a, b).k \end{matrix} + \frac{1}{2} \begin{matrix} r(a, b).h^2 \\ s(a, b).2.h.k \\ t(a, b).k^2 \end{matrix} + o(h^2 + k^2)$$

	fonction			$F(0, 1) = 0$		
En $(0, 1)$:	dérivées premières		$p(0, 1) = 0$		$q(0, 1) = 0$	
	dérivées secondes	$r(0, 1) = 2$		$s(0, 1) = 0$		$t(0, 1) = 0$

Il reste

$$F(0+h, 1+k) = 2 \cdot \left(\frac{h^2}{2} + \frac{k^2}{2} \right) + o(h^2 + k^2)$$

On peut aussi développer directement

$$F(0+h, 1+k) = (1+k) \cdot (h^2 + (\ln(1+k))^2) = (1+k) \cdot (h^2 + k^2 + o(k^2)) = h^2 + k^2 + o(h^2 + k^2)_{h,k \rightarrow 0,0}$$

	fonction			$F(0, e^{-2}) = 4.e^{-2}$		
En $(0, e^{-2})$:	dérivées premières		$p(0, e^{-2}) = 0$		$q(0, e^{-2}) = 0$	
	dérivées secondes	$r(0, e^{-2}) = 2.e^{-2}$		$s(0, e^{-2}) = 0$		$t(0, 1) = -2.e^2$

Il reste

$$F(0+h, e^{-2}+k) = 4.e^{-2} + \frac{1}{2} \cdot (h^2.e^{-2} - k^2.e^2) + o(h^2 + k^2)$$

On peut aussi développer directement

$$F(0+h, e^{-2}+k) = (e^{-2}+k) \cdot (h^2 + (\ln(e^{-2}+k))^2)$$

$$F(0+h, e^{-2}+k) = (e^{-2}+k) \cdot \left(h^2 + \left(-2 + e^2.k - \frac{e^4.k^2}{2} + o(k^2) \right)^2 \right)$$

$$F(0+h, e^{-2}+k) = (e^{-2}+k) \cdot (h^2 + 4 - 4.e^2.k + 3.e^2.k^2 + o(k^2))$$

$$F(0+h, e^{-2}+k) = (e^{-2}+k) \cdot (4 - 4.e^2.k + h^2 + 3.e^2.k^2 + o(k^2))$$

Il ne reste qu'à développer et à abandonner les termes d'ordre 3 et plus.

◦49◦

On définit $F = (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 12.x.y$. Quelle équation différentielle doit vérifier $t \mapsto \varphi(t)$ pour que l'application $t \mapsto F(t, \varphi(t))$ soit constante ?

On veut donc $\exists a, \forall t, t^3 + (\varphi(t))^3 - 12.t.\varphi(t) = a$ ou aussi

$$\forall t, t^3 + (\varphi(t))^3 - 12.t.\varphi(t) = 0^3 + (\varphi(0))^3 - 12.0.\varphi(0)$$

On va demander à ce que la fonction du premier membre soit constante, ce qui revient à exiger que sa dérivée soit nulle.

Comme l'énoncé parle d'équation différentielle, il y a implicitement une hypothèse de dérivabilité et continuité.

On dérive donc et on demande (équivalence car on travaille sur un intervalle)

$$\forall t, 3.t^2 + 3.(\varphi(t))^2.\varphi'(t) - 12.\varphi(t) - 12.t.\varphi'(t) = 0$$

On isole pour que ceci ait bien la forme d'une équation différentielle (non linéaire, c'est vrai)

$$\forall t, \varphi'(t) \cdot ((\varphi(t))^2 - 4.t) - 4.\varphi(t) + t^2 = 0$$

et sous forme plus classique (sous réserve d'un domaine convenable)

$$y' = \frac{4.y - t^2}{y^2 - 4.t}$$

◦50◦

Étudiez la convergence de $\left(n^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)\right)$.

On a une forme indéterminée. n^2 tend vers l'infini et $\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$ tend vers $1 - 1$.

L'élève de Spé vous dira : fais un développement limité $\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)$, soustrais les

multiplie par n^2

regarde si l'ensemble a une limite

Il n'a pas tort. Mais qu'est ce que c'est lourd ! C'est sortir les gros outils là où le prof de Sup va dire « tu connais $\cos(a) - \cos(b)$? »

Et là, vous réagissez : oui : $\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

Ici, cela donne

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}}{2}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{-1}{2 \cdot n \cdot (n+1)}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot n + 1}{2 \cdot n^2 + 2 \cdot n}\right)$$

Les deux contenus de parenthèses tendent vers 0, on utilise l'équivalent du sinus : $\sin(\theta) \sim \theta$ quand θ tend vers 0.

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{-2}{2 \cdot n \cdot (n+1)} \cdot \frac{2 \cdot n + 1}{2 \cdot n^2 + 2 \cdot n} \sim \frac{-1}{n^2} \cdot \frac{2 \cdot n}{2 \cdot n^2}$$

On multiplie par n^2 . Rien n'y fait, le produit est équivalent à $\frac{-1}{n}$.

Il tend vers 0.

Pour ce qui est de la formule $\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$,

le prof de physique vous dira « retiens la par cœur, c'est du cours, tu as bien sûr retenu les paroles de 150 chansons idiotes et la classification périodique des éléments, tu peux bien ajouter ça.

Le prof de maths te dira « retiens la par cœur, moi même j'ai réussi à le faire ».

Ton prof de maths te dira « retiens déjà qu'elle existe,

$$\begin{aligned} \text{retrouve comment on l'a : } \cos(\alpha + \beta) &= \cos \cdot \cos - \sin \cdot \sin \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \cdot \cos + \sin \cdot \sin \end{aligned}$$

on soustrait, qui reste-t-il

qui devaient être α et β pour avoir $\alpha + \beta = a$ et $\alpha - \beta = b$

Et là, à son grand dam, tu diras « OK, je vais l'apprendre par cœur, ça doit pas être si dur d'être une bête à concours, et c'est plus tard que j'apprendrai à raisonner efficacement ».

◦51◦

Montrez que $\frac{(n+1)^{\sqrt{n}}}{n^{\sqrt{n+1}}}$ converge quand n tend vers l'infini.

$\frac{(n+1)^{\sqrt{n}}}{n^{\sqrt{n+1}}}$ existe pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

On ne va pas étudier la monotonie. On va tenter tout de suite de trouver une limite, en passant par le logarithme : $\sqrt{n} \cdot \ln(n+1) - \sqrt{n+1} \cdot \ln(n)$.

Mais qui l'emporte ? Ces deux termes sont équivalents...

Intercalons le terme $\sqrt{n+1} \cdot \ln(n)$ (et conjuguons ensuite !) :

$$\sqrt{n} \cdot \ln(n+1) - \sqrt{n+1} \cdot \ln(n) = \left(\sqrt{n} \cdot \ln(n+1) - \sqrt{n+1} \cdot \ln(n+1)\right) + \left(\sqrt{n+1} \cdot \ln(n+1) - \sqrt{n+1} \cdot \ln(n)\right)$$

$$\sqrt{n} \cdot \ln(n+1) - \sqrt{n+1} \cdot \ln(n) = \frac{n - (n+1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \cdot \ln(n+1) + \sqrt{n+1} \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\sqrt{n} \cdot \ln(n+1) - \sqrt{n+1} \cdot \ln(n) = \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \cdot \ln(n+1) + \sqrt{n+1} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Toujours indéterminé ? $\frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \cdot \ln(n+1)$ est équivalent à $\frac{-1}{2\sqrt{n}} \cdot \ln(n+1)$; il tend vers 0 (*croissances comparées*)
 $\sqrt{n+1} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est équivalent à $\sqrt{n} \cdot \frac{1}{n}$; il tend vers 0

Les deux tendent vers 0, la somme tend vers 0.

Par retour à l'exponentielle (*continue*), $\frac{(n+1)^{\sqrt{n}}}{n^{\sqrt{n+1}}}$ tend vers 0 à l'infini

◦52◦

♥ Montrez l'équivalence des suites : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \sim \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ quand n tend vers l'infini.

Retour à $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ tend vers e^a quand n tend vers l'infini.

Donc, $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^2$ converge vers $(e)^2$.

Et $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ converge vers e^2 .

Le quotient converge vers 1.

Et ici, l'usage d'équivalents est un peu abusif. Il n'y a pas de forme indéterminée, juste deux limites.

◦53◦

Pour tout n , on pose $a_n = \sqrt{4n^2 + n + 1} \cdot \pi$. Montrez, en explicitant un G_A que la suite a diverge vers $+\infty$. Justifiez $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} 2n \cdot \pi$. Un élève prétend alors que $\sin(a_n)$ tend vers $\sin(2n \cdot \pi)$. En quoi a-t-il totalement tort ? Que pensez vous de celui qui dit que $\sin(a_n)$ est équivalent à $\sin(2n \cdot \pi)$?

En utilisant les quantités conjuguées, montrez que $(a_n - 2n \cdot \pi)$ est équivalent à $\frac{\pi}{4}$. Donnez la limite de la suite $\sin(a_n)$.

On se donne A et on veut $\sqrt{4n^2 + n + 1} \cdot \pi \geq A$.

Il suffit d'avoir $4n^2 + n + 1 \geq \left(\frac{A}{\pi}\right)^2$.

Ceci semble conduite à une équation du second degré pas très agréable à étudier.

Mais en fait, exigeons juste $n \geq \frac{A}{2\pi}$ qu'on notera G_A .

On a en effet

$$n \geq \frac{A}{2\pi} \Rightarrow 4n^2 + n + 1 \geq 4n^2 \geq \left(\frac{A}{\pi}\right)^2 \Rightarrow a_n \geq A$$

On effectue le quotient

$$\frac{a_n}{2n \cdot \pi} = \sqrt{\frac{4n^2 + n + 1}{4n^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n^2}}$$

L'ensemble tend vers 1.

C'est la définition de l'équivalent.

L'affirmation $\sin(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin(2n \cdot \pi)$ est absurde.

Déjà, on ne tend pas vers quelque chose qui dépend encore de n .

Si on affirme ensuite que $\sin(2n \cdot \pi)$ vaut 0 et qu'il n'est pas idiot de dire : $\sin(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on commet quand même une erreur.

Il n'y a aucun théorème pour affirmer ce type de passage à la limite.

D'ailleurs, un exemple : $2n \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$ est équivalent à $2n \cdot \pi$.

Mais quand on passe au sinus, $\sin\left(2n \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right)$ est toujours égal à 1 et ne tend pas vers $\sin(2n \cdot \pi)$ qui lui, vaut toujours 0.

Calculons comme demande

$$a_n - 2n \cdot \pi = \left(\sqrt{4n^2 + n + 1} - 2n\right) \cdot \pi = \frac{4n^2 + n + 1 - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + n + 1} + 2n} \cdot \pi$$

Cette quantité tend vers $\frac{\pi}{4}$.

Remarque : | Et alors ? On ne passe pas au sinus !

| On y va doucement, avec bon usage des petits o.

$$a_n - 2n \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + o(1) \text{ donc } a_n = 2n \cdot \pi + \frac{\pi}{4} + o(1).$$

Cette fois, c'est une égalité, $\sin(a_n) = \sin\left(2n \cdot \pi + \frac{\pi}{4} + o(1)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + o(1)\right)$ en profitant de la périodicité du

sinus.

Cette suite tend vers $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$. On ne pouvait pas prévoir...

◦54◦

Placez aux huit sommets d'un cube les entiers de 1 à 8.
Il faut ensuite que pour chaque face, le produit des quatre entiers aux quatre coins de la face soit la valeur imposée sur le patron du développement du cube ci contre :

	280		
96	1344	420	30
	144		

C'est déjà un problème de factorisation.

	2.2.2.5.7		
2.2.2.2.2.3	2.2.2.2.2.2.3.7	2.2.3.5.7	2.3.5
	2.2.2.2.3.3		

Après c'est du repérage dans l'espace pour comprendre qui sont les sommets communs à trois faces dans le patron du dé.

Par exemple, le 5 est facile à placer.

	2.2.2.5.7		
2.2.2.2.2.3	2.2.2.2.2.2.3.7	2.2.3.5.7	2.3.5
	2.2.2.2.3.3		

Il en est de même du 7.

Autour de la face 2.3.5, il ne peut y avoir que le 2, le 3, le 5 et... le 1. Et par exemple, le 3 ne peut pas être à côté de la face supérieure qui n'en contient pas...

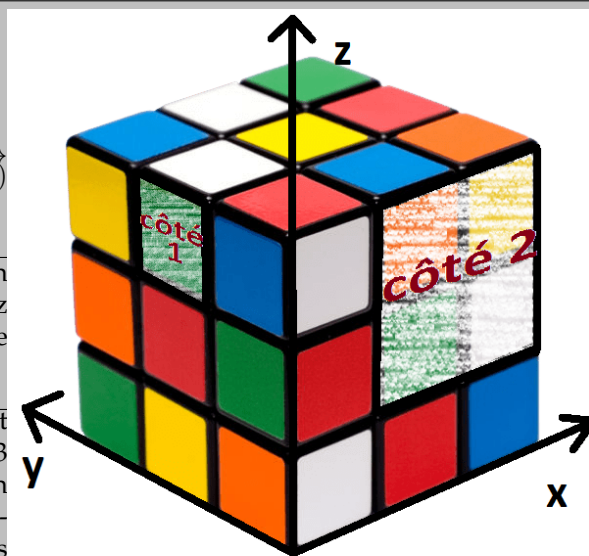
Autour de la face 2.2.3.5.7 on a déjà le 5 et le 7, il reste au choix : 4 et 3 ou alors 2 et 6.

Je vous laisse finir.

♣₀ On pose $\tau = \overrightarrow{(12)}$ et $\sigma = \overrightarrow{(12345)}$. Décomposez $\overrightarrow{(13)}$ et $\overrightarrow{(23)}$ uniquement avec des σ et des τ .

♡₁ Le polynôme $X^3 + p.X + q$ a pour racines a, b et c . On définit $\alpha = a + b.c$, $\beta = b + a.c$ et $\gamma = c + a.b$. Exprimez $\alpha + \beta + \gamma$ et $\alpha.\beta.\gamma$ à l'aide de p et q . Donnez le polynôme de racines α, β et γ .

♣₁ Un Rubik'Cube est formé de vingt sept cubes articulés, et donc aussi soixante quatre « sommets » numérotés de 0 à 63 ou de $(0,0,0)$ à $(3,3,3)$, c'est comme vous voulez. Combien de carrés de côté unité pouvez vous tracer ayant pour sommets quatre de ces points ? Combien de carrés pouvez vous tracer ayant pour sommets quatre de ces points ?



◦55◦

Le polynôme $X^3 + p.X + q$ a pour racines a, b et c . On a donc $a + b + c = 0$, $a.b + a.c + b.c = p$ et $a.b.c = -q$. Plus d'autres relations comme $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2.(a.b + a.c + b.c) = -2.p$.

On définit $\alpha = a + b.c$, $\beta = b + a.c$ et $\gamma = c + a.b$. Les rôles sont symétriques.

sans aucun effort : $\alpha + \beta + \gamma = (a + b + c) + (a.b + a.c + b.c) = p$

On y va courageusement : $\alpha.\beta.\gamma = (a.b + a^2.c + b^2.c + a.b.c^2).(c + a.b)$

puis $\alpha.\beta.\gamma = \begin{matrix} a.b.c & +a^2.c^2 & +b^2.c^2 & +a.b.c^3 \\ a^2.b^2 & +a^3.b.c & +a.b^3.c & +a^2.b^2.c^2 \end{matrix}$

On regroupe par symétrie : $\alpha.\beta.\gamma = (a.b.c) + (a^2.b^2 + a^2.c^2 + b^2.c^2) + (a.b.c^3 + a.c.b^3 + b.c.a^3) + (a^2.b^2.c^2)$.

On traite ce qu'on peut directement : $(a.b.c) + (a^2.b^2.c^2) = q^2 - q$.

On a aussi rapidement $(a.b.c^3 + a.c.b^3 + b.c.a^3) = (a.b.c).(a^2 + b^2 + c^2) = 2.p.q$.

Pour $(a^2.b^2 + a^2.c^2 + b^2.c^2)$ on développe $(a.b + a.c + b.c)^2$ auquel on doit soustraire des termes en $2.(a.b).(a.c)$.

On a donc $(a^2.b^2 + a^2.c^2 + b^2.c^2) = (a.b + a.c + b.c)^2 - 2.(a.b.c).(a + b + c) = p^2$.

On regroupe : $\alpha.\beta.\gamma = q^2 - q + 2.p.q + p^2$ (bon, ça n'a rien de spécial, hormis $(p + q)^2 - q$).

Pour la suite, on va calculer la somme des doublets $\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma$:

$a.b$	$+c.a^2$	$+c.b^2$	$+a.b.c^2$
$a.c$	$+a.b^2$	$+c.b^2$	$+a.c.b^2$
$b.c$	$+b.a^2$	$+c.a^2$	$+b.c.a^2$

Dois je encore vous dire qu'en mettant les calculs sous forme de tableau, on n'y perd rien et on est efficace ?

On a des termes simples : $a.b + a.c + b.c = p$,

puis $a.b.c^2 + a.c.b^2 + b.c.a^2 = (a.b.c).(a + b + c) = 0$

et enfin $a^2.c + a^2.b + b^2.a + b^2.c + c^2.a + c^2.b = (a + b + c).(a.b + a.c + b.c) - 3.a.b.c = 3.q$.

On termine $\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma = p + 3.q$

On peut conclure avec le polynôme

$$(X - \alpha).(X - \beta).(X - \gamma) = X^3 - p.X^2 + (p + 3.q).X + q - (p + q)^2$$

On a deux outils : τ qui échange deux éléments, et σ qui fait tourner tout le monde d'un cran.

On veut échanger 2 et 3. On les place en 1 et 2 par σ , on permute alors 1 et 2 avec τ , puis on les remet en 2 et 3.

On va donc essayer $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = \overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)} \circ \overrightarrow{(1\ 2)} \circ \overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)} = \overrightarrow{(1\ 2)} = \overrightarrow{(2\ 3)}$

	1	2	3	4	5
$\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)}$	↓	↓	↓	↓	↓
	5	1	2	3	4
$\overrightarrow{(1\ 2)}$	↓	↓	↓	↓	↓
	5	2	1	3	4
$\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)}$	↓	↓	↓	↓	↓
	1	3	2	4	5

Si les exposants négatifs sont interdits : $\overrightarrow{(2\ 3)} = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = \sigma \circ \tau \circ \sigma^4$

Et si on a mal joué : $\sigma^{-1} \circ \tau \circ \sigma = \overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)} \circ \overrightarrow{(1\ 2)} \circ \overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)} = \overrightarrow{(1\ 5)} = \overrightarrow{(1\ 5)}$

	1	2	3	4	5
$\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)}$	↓	↓	↓	↓	↓
	2	3	4	5	1
$\overrightarrow{(1\ 2)}$	↓	↓	↓	↓	↓
	1	3	4	5	2
$\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)}$	↓	↓	↓	↓	↓
	5	2	3	4	1

Ça ne sert à rien.

Il faut échanger le 1 et le 3. On ne peut pas le faire avec juste τ ; ils sont trop loin l'un de l'autre.

Mais on sait échanger le 2 et le 3. Si on échange alors 1 et 2 et qu'on remet en place, on doit avoir gagné :

$\overrightarrow{(1\ 2)} \circ \overrightarrow{(2\ 3)} \circ \overrightarrow{(1\ 2)} = \overrightarrow{(2\ 3)} \circ \overrightarrow{(1\ 2)} = \overrightarrow{(1\ 3)}$

	1	2	3
$\overrightarrow{(1\ 2)}$	↓	↓	↓
	2	1	3
$\overrightarrow{(2\ 3)}$	↓	↓	↓
	3	1	2
$\overrightarrow{(1\ 2)}$	↓	↓	↓
	3	2	1

On peut donc écrire $\overrightarrow{(1\ 3)} = \tau \circ \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \circ \tau$ Mais il y a d'autres solutions.

On a bien des points, et si on prend le repère, ils ont des coordonnées (i, j, k) avec i, j et k pouvant valoir 0, 1, 2 ou 3. On a quatre choix pour chacun, d'où effectivement $4 \times 4 \times 4$ points possibles.

On regarde les carrés de côté 1. Ce sont les faces des petits cubes.

On peut s'y prendre mal, quoique.

Il y a 27 petits cubes (neuf par tranche). Chacun a six faces carrées. On a donc 6×27 carrés.

Mais beaucoup sont comptés deux fois. Tous, sauf les faces à l'extérieur du grand cube. Il y en a neuf par face du

grand cube, et donc 9×6 carrés qui ne sont pas comptés deux fois, mais une seule.

mini faces carrées	mini faces carrés comptés
27×6	6×9

On arrive à la formule $\frac{6 \times 27 - 6 \times 9}{2} + 6 \times 9$. Tous calculs faits : 108 carrés de côté 1

Si vous n'avez compté que les carrés visibles : 54.

Autre approche : on regarde dans chaque plan de coupe du cube. De tels plans sont similaires à chaque face visible du cube, mais ils sont plus nombreux.

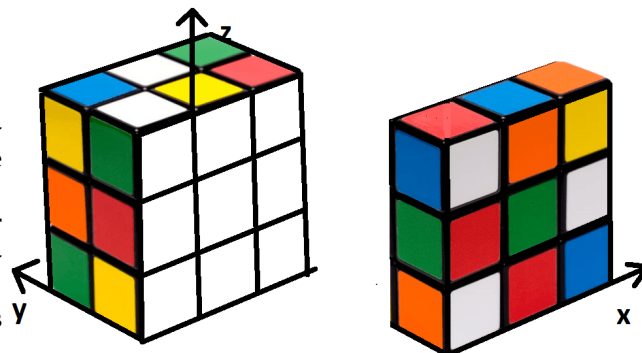
Sur un tel plan, on voit neuf carrés.

Il reste à compter ces plans. Il y en a de trois types : horizontaux, verticaux comme xOz ou verticaux comme yOz .

Pour chaque type, il y a quatre niveaux de coupe : par exemple pour les horizontaux : équation $z = 0$, équation $z = 1$, équation $z = 2$, équation $z = 3$.

On a donc douze plans de coupes, avec à chaque fois neuf carrés.

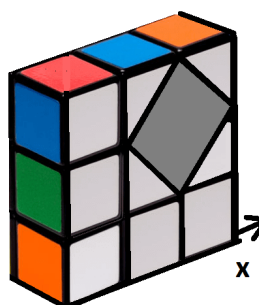
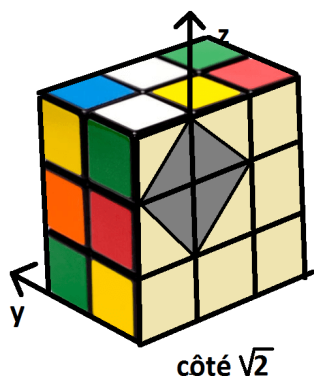
Le total est (là encore) de 108 carrés.



Mais il y a plusieurs formats de carrés possibles : taille 1, taille 2, taille 3.

On regarde dans chacun des douze plans de coupe

taille 1 sur 1	taille 2 sur 2	taille 3 sur 3
9	4	1



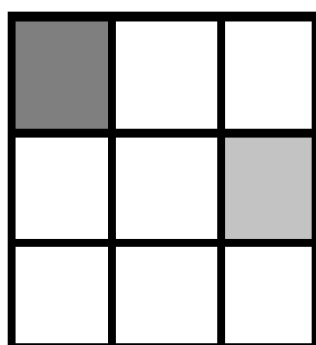
On multiplie donc par 12.

Mais on a oublié des carrés. Si si ! Ceux de côté $\sqrt{2}$. Il ne fallait pas les oublier ceux là.

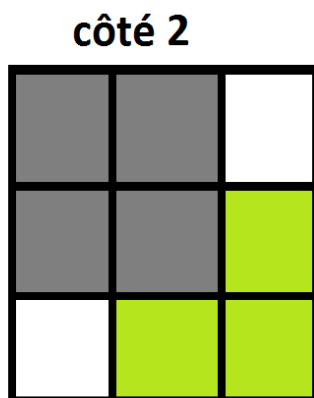
Il y en a quatre par plan de coupe. On peut les nommer Nord-ouest, Nord-Est, Sud-Est et Sud-Ouest.

Sur le schéma ci-contre, on voit Nord-ouest et Nord-Est de deux plans de coupe parallèles.

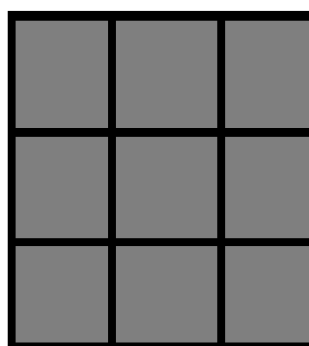
Et on a aussi des modèles de côté $\sqrt{5}$.



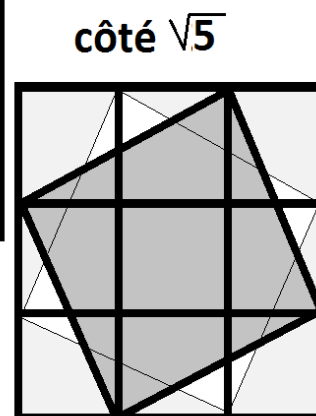
côté 1



côté 2



côté 3



côté $\sqrt{5}$

	taille 1 sur 1	taille 2 sur 2	taille 3 sur 3	taille $\sqrt{2}$ sur $\sqrt{2}$	taille $\sqrt{5}$ sur $\sqrt{5}$
par plan de coupe	9	4	1	4	2
au total	108	48	12	48	24

On a un total de **240 carrés** qu'on ne tracera pas.

D'autant qu'il faut se poser une autre question. Peut il exister des carrés qui ne soient pas dans des plans de coupe ?

Peut-on avoir des carrés « inclinés » ?

Dans un Rubik's cube de taille 4 sur 4, on peut aller chercher les quatre points suivants :

$$A(0, 2, 1) \quad B(2, 3, 3) \quad C(4, 1, 2) \quad D(2, 0, 0)$$

Les quatre vecteurs sont alors

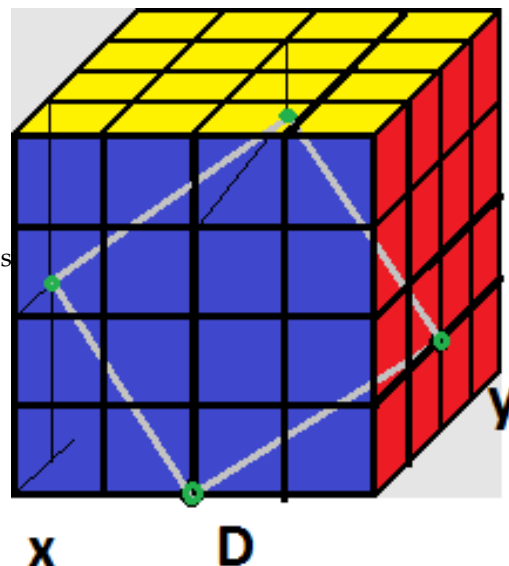
$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{DA} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $\vec{AB} = -\vec{CD}$: on a un parallélogramme.

On a aussi $\vec{AB} \perp \vec{BC}$: on a un rectangle.

On a enfin $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$: on a un carré.

Mais il faudrait justement des vecteurs deux à deux orthogonaux, de même norme, pas trop longs pour qu'on ne sorte pas du cube. On pourrait par exemple prendre le modèle ci dessus, mais il nous fait déborder du cube 3 sur 3 à cause des 2 qui s'additionnent.



◦56◦

♣ Pouvez-vous compléter la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & \heartsuit \end{pmatrix}$ pour que ses deux valeurs propres soient entières ?
Quel est alors le plus grand terme de A^{100} ?

On veut qu'il existe a et b entiers vérifiant $4 + \heartsuit = a + b$ et $4 \cdot \heartsuit - 2 = a \cdot b$.

L'équation $x^2 - (4 + \heartsuit)x + (4 \cdot \heartsuit - 2)$ doit avoir des racines réelles et même entières.

$\heartsuit$ doit être entier, et le discriminant $\heartsuit^2 - 8 \cdot \heartsuit + 24$ doit être un carré parfait d'entier.

On, il vaut $(\heartsuit - 4)^2 + 8$, et c'est déjà presque un carré d'entier.

Il faut donc que $(\heartsuit - 4)^2 + 8$ et $(\heartsuit - 4)^2$ soient deux carrés alors qu'ils sont proches...

La seule solution est 1 + 8 et 1.

On est sur la piste de deux possibilités : $\heartsuit = 5$ ou $\heartsuit = 3$.

Il reste à voir si les deux conviennent (on a juste raisonné par implications) :

$\heartsuit = 3$	$\heartsuit = 5$
$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
$x^2 - 7x + 10 = 0$	$x^2 - 9x + 18 = 0$
5 et 2	5 et 2
$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
$P.D.P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot 5^n + 2^n}{3} & \frac{2 \cdot 5^n - 2^{n+1}}{3} \\ \frac{5^n - 2^n}{3} & \frac{5^n + 2^{n+1}}{3} \end{pmatrix}$	$P.D.P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6^n + 2 \cdot 3^n}{3} & \frac{2 \cdot 6^n - 2 \cdot 3^n}{3} \\ \frac{6^n - 3^n}{3} & \frac{2 \cdot 6^n + 3^n}{3} \end{pmatrix}$

◦57◦

Soit f une application linéaire. Montrez : $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(f - \text{Id}) + \text{Ker}(f - 2.\text{Id}) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2.\text{Id})$.

$$\text{On donne : } f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5.x & -3.y & -2.z \\ 4.x & -2.y & -2.z \\ x & -y & +2.z \end{pmatrix}.$$

Un élève entend prouver $\text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2.\text{Id}) = \mathbb{R}^3$ par analyse et synthèse.

Il écrit ce qui suit : $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ avec $\vec{a}$ dans $\text{Ker}(f)$, $\vec{b}$ dans $\text{Ker}(f - \text{Id})$ et $\vec{c}$ dans $\text{Ker}(f - 2.\text{Id})$.

Il déduit $f(\vec{u}) = \vec{0} + \vec{b} + 2.\vec{c}$, puis $f^2(\vec{u}) = \vec{b} + 4.\vec{c}$. Il déduit $\vec{c} = \frac{f^2(\vec{u}) - f(\vec{u})}{2}$, $\vec{b} = 2.f(\vec{u}) - f^2(\vec{u})$ et $\vec{a} = \frac{2.\vec{u} - 3.f(\vec{u}) + f^2(\vec{u})}{2}$. Quel sens a-t-il traité ?

Ensuite, il propose $\vec{c} = \frac{f^2(\vec{u}) - f(\vec{u})}{2}$, $\vec{b} = 2.f(\vec{u}) - f^2(\vec{u})$ et $\vec{a} = \frac{2.\vec{u} - 3.f(\vec{u}) + f^2(\vec{u})}{2}$ et vérifie $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Quel sens a-t-il prouvé ?

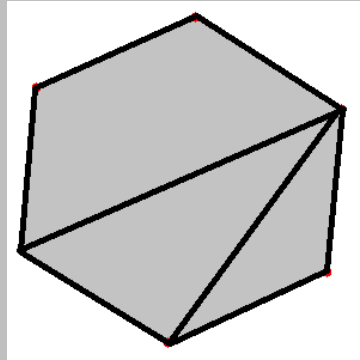
Trouvez l'erreur.

Montrez qu'en remplaçant $x - y + 2.z$ par $x - y$, le résultat devient correct.

Trois garçons et trois filles s'installent aléatoirement aux six places d'une table hexagonale. Calculez la probabilité que les garçons forment un triangle équilatéral.

Quelle est la probabilité que les filles forment un triangle équilatéral ?

Quelle est la probabilité que les filles forment un triangle rectangle, sur l'univers restreint où les garçons forment un triangle isocèle ?



◦58◦

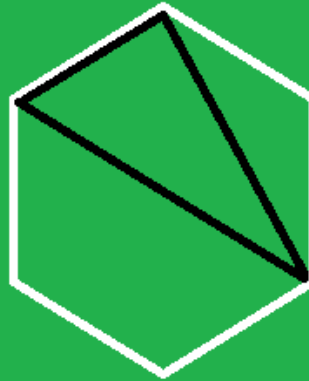
On a un triangle équilatéral si et seulement si la configuration est une alternance parfaite filles/garçons, du type F-G-F-G-F-G ou G-F-G-F-G-F-G.

Est-il possible d'avoir des triangles

équilatéraux	isocèles	rectangles
--------------	----------	------------



Isocèles



Rectangles

La probabilité que les filles forment un triangle rectangle est non nulle.

La probabilité que les garçons forment un isocèle est non nulle.

Mais la probabilité que les filles forment un triangle rectangle et les garçons un triangle isocèle est nulle.

$$P_{G \text{ iso}}(F \text{ rect}) = \frac{P((F \text{ rect}) \cap (G \text{ iso}))}{P(G \text{ iso})} = 0$$

◦59◦

Pour tout n , on pose $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrez que (U_n) diverge. Montrez que la série de terme général $\frac{1}{U_n}$ diverge (majorer U_n par $2\sqrt{n}$)

Pour tout n , on pose $V_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \cdot \ln(k)}$. Montrez que (V_n) diverge. Montrez que la série de terme général $\frac{1}{V_n}$ diverge.

Toutes les séries sont à termes positifs. Les suites issues de ces séries sont croissantes.

On montre les divergences par comparaison série intégrale.

Ou même : $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour une série de référence.

Sinon, vraiment niveau Sup :

$$U_{2n} - U_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

(nombre de termes fois plus petit).

Ce minorant diverge vers $+\infty$ et le majorant devrait converger vers 0 si la série convergeait.

Mais pour la suite, autant encadrer U_n :

pour tout k et ensuite pour tout t de $[k, k+1]$: $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$

on intègre sur un intervalle de longueur 1 : $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$

on somme de 1 à n d'un côté avec la relation de Chasles $\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = U_n$

et de 1 à $n-1$ de l'autre : $U_n - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}}$

On a l'encadrement $\int_1^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq U_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}}$

On calcule : $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1} \leq U_n \leq 1 + 2\sqrt{n} - 2\sqrt{1}$

La première minoration confirme la divergence de (U_n) vers $+\infty$.

La majoration donne ensuite $\frac{1}{U_n} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

La série de terme général positif $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ diverge.

Par minoration, la série de terme général $\frac{1}{U_n}$ diverge aussi.

◦60◦

Décomposez $x \mapsto 2|x+1|$ en $p+i$ avec p paire et i impaire, puis représentez p et i .

Certes $x \mapsto |x|$ est paire. Mais ici, la fonction est décalée. Son axe de symétrie a pour équation $x = -1$.

Ce n'est plus l'axe Oy .

Il faut donc séparer.

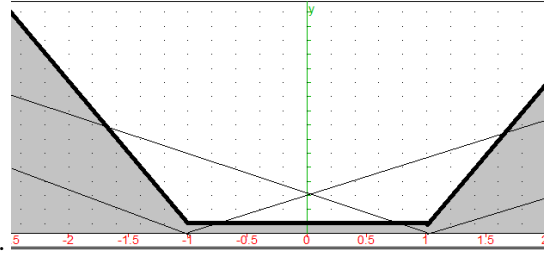
La formule « toute prête », obtenue par condition nécessaire dit

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + i(x) \\ f(-x) &= p(-x) + i(-x) \\ f(-x) &= p(x) - i(x) \end{aligned}$$

puis $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $p(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

On peut alors découper par intervalles

x	$] -\infty, -1[$	-1	$] -1, 1[$	1	$] 1, +\infty[$
$2 x+1 $	$-2-2x$	0	$2x+2$	4	$2x+2$
$2 -x+1 $	$2-2x$	4	$2-2x$	0	$2x-2$
$p(x)$	$-2x$	2	2	2	$2x$
$i(x)$	-4	-4	$2x$	4	4



Sans petit dessin pour conclure, cet exercice est totalement stérile...

Le plus fort est le cas des élèves qui tracent p et i avec des formules erronées, et ne voient même pas que p n'est pas paire par exemple.

◦61◦ ♡ Donnez un équivalent en $\alpha.n^\beta$ de $\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1}$ quand n tend vers l'infini (pensez à $a^6 - b^6$).

Forme indéterminée en $(n + o(n)) - (n + o(n))$ puisque chacun des deux est équivalent à n .

On va justement insérer n : $\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1} = (\sqrt{n^2+1} - n) - (\sqrt[3]{n^3+1} - n)$.

On conjugue : $\sqrt{n^2+1} - n = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n}$ donc $\sqrt{n^2+1} = n + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)_{n \rightarrow +\infty}$.

On conjugue encore : $\sqrt[3]{n^3+1} - n = \frac{n^3+1-n^3}{(\sqrt[3]{n^3+1})^2 + (\sqrt[3]{n^3+1}.n) + n^2}$ (formule $a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+a.b+b^2}$).

On a donc cette fois $\sqrt[3]{n^3+1} = n + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On soustrait : $\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1} = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)_{n \rightarrow +\infty} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)_{n \rightarrow +\infty} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Un équivalent est donc $\frac{1}{2n}$.

Variante : Les deux termes sont des équivalents de même ordre (n en l'occurrence). On ne peut pas les soustraire. Mais on peut utiliser les quantités conjuguées.

Ici, on choisit un exposant qui efface à la fois racine carrée et racine cubique :

$$a-b = \frac{a^6-b^6}{a^5+a^4.b+a^3.b^2+a^2.b^3+a.b^4+b^5}$$

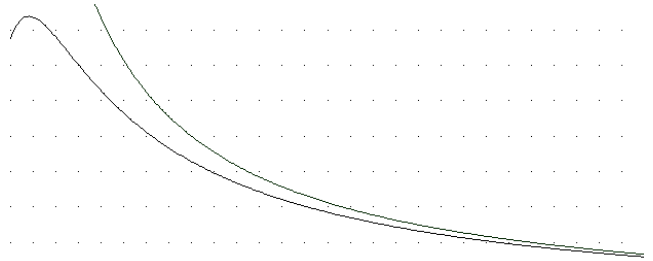
Le numérateur devient $(n^2+1)^3 - (n^3+1)^2$ c'est à dire $3.n^4 - 2.n^3 + 3.n^2$ qu'on trie en $3.n^4 + o(n^4)$.

Le dénominateur est fait de six termes qui sont tous équivalents à n^5 (qu'il viennent par exemple de $(n^2+1)^{3/2} \cdot (n^3+1)^{2/3}$ ou de $(n^2+1)^{1/2} \cdot (n^3+1)^{4/3}$).

L'équivalent de notre différence est donc $\frac{3.n^4}{6.n^5}$. On

trouve $\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n}$ avec donc $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -1$.

Le graphe ci-contre vous donne une comparaison de la fonction (au lieu de la suite) et de son équivalent.



◦62◦ En quels points du graphe de l'application $x \mapsto \frac{x-1}{x+3}$ la tangente au graphe est-elle la plus proche de l'origine, et quand passe-t-elle par l'origine du repère ?

La tangente au graphe de $y = f(x)$ au point d'abscisse a a pour équation $\frac{y-f(a)}{x-a} = f'(a)$ si on veut l'écrire à la physicienne $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$.

On en fait une équation « classique » : $(x-a).f'(a) - (y-f(a)) = 0$.

On la normalise : $\frac{x.f'(a) - y + f(a) - a.f'(a)}{\sqrt{1+(f'(a))^2}}$.

On utilise la formule toute prête de distance d'un point à une droite $\frac{x_0.f'(a) - y_0 + f(a) - a.f'(a)}{\sqrt{1+(f'(a))^2}}$.

ici, ce point est l'origine : $\frac{|f(a) - a.f'(a)|}{\sqrt{1 + (f'(a))^2}}$. C'est la formule distance de l'origine à la tangente au graphe.

mais ici, on a donné f . L'application numérique donne $f(a) - a.f'(a) = \frac{a^2 - 2.a - 3}{(a + 3)^2}$

$$\sqrt{1 + (f'(a))^2} = \frac{\sqrt{a^4 + 12.a^3 + 54.a^2 + 108.a + 97}}{(a + 3)^2}$$

$$\text{distance} = \frac{|a^2 - 2.a - 3|}{\sqrt{a^4 + 12.a^3 + 54.a^2 + 108.a + 97}}$$

On doit minimiser cette horreur ! On n'y arrivera jamais. On n'a aucune envie de dériver...

Sauf que le numérateur s'annule en -1 et 3 .

Vous voulez plus petit que 0 ? C'est une distance.

En $a = -1$ et en $a = 3$, la tangente au graphe passe par l'origine. La distance est minimale !

◦63◦

On définit, pour f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$:

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|.dt \quad N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2.dt} \quad N_\infty(f) = \text{Sup}\{|f(t)| \mid t \in [0, 1]\}$$

Calculez ces trois normes pour les applications suivantes : $t \mapsto t^n$, $\exp$, $t \mapsto \sin(\pi.t)$.

Montrez : $N_1 \leq N_\infty$ (c'est à dire $\forall f, N_1(f) \leq N_\infty(f)$), $N_2 \leq N_\infty$ et $N_1 \leq N_2$ (là, il faut penser à quelquechose, ou à quelqu'un ou à quelques uns).

L'application $f \mapsto |f(0)| + N_1(f')$ est elle une norme sur $C_1([0, 1], \mathbb{R})$ (les applications dérivables à dérivée continue).

	$N_1(f) = \int_0^1 f(t) .dt$	$N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2.dt}$	$N_\infty(f) = \text{Sup}\{ f(t) .dt \mid t \in [0, 1]\}$
$t \mapsto t^n$	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{\sqrt{2.n+1}}$	1 (en 1)
$t \mapsto \sin(\pi.t)$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1 (en 1/2)

Pour f donnée, on écrit $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|.dt \leq \int_0^1 N_\infty(f).dt = N_\infty(f)$.

De même,

$$(N_2(f))^2 = \int_0^1 (f(t))^2.dt \leq \int_0^1 (N_\infty(f))^2.dt = (N_\infty(f))^2$$

et on passe à la racine.

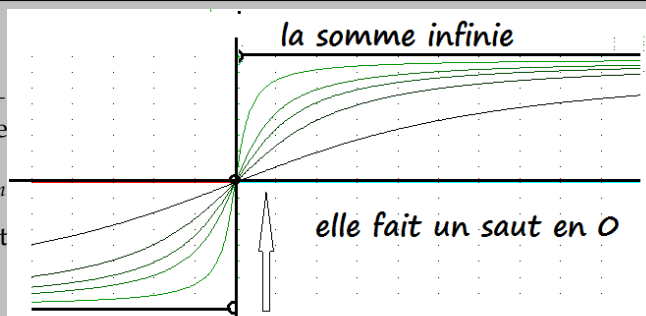
Enfin, on écrit avec l'aide de Cauchy et Schwarz :

$$(N_1(f))^2 = \left(\int_0^1 |f(t)|.dt \right)^2 = \left(\int_0^1 1.f(t).dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 1^2.dt \right) \cdot \left(\int_0^1 |f(t)|^2.dt \right) = (N_2(f))^2$$

Pour tout n , on pose $f_n = x \mapsto \text{Arctan}((n+1).x) - \text{Arctan}(n.x)$. Montrez (non, sans en revenir aux ε) que chaque f_n est continue de même que chaque $\sum_{n=0}^N f_n$ (notée F_N). Montrez que F_∞ (notation abusive) n'est pas continue en 0 .

Sinon, que pensez vous de $x \mapsto x^n$ sur $[0, 1]$?

Ou $x \mapsto \sin(x)^{2.n}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier ?



◦64◦

Chaque f_n est continue comme différence d'applications continues.

Chaque F_N est une somme d'un nombre fini d'applications continues, elle le reste.

Et elle télescope : $F_N = x \mapsto \text{Arctan}(N+1).x$.

On fait tendre N vers l'infini. Que se passe-t-il ?

Pour x nul, rien, chaque $F_N(0)$ vaut vraiment 0 . La limite est 0 .

Pour x strictement négatif, la suite $(n+1).x$ tend vers $-\infty$ et son arctangente tend vers $-\pi/2$.

Pour x strictement positif, $\text{Arctan}((n+1).x)$ tend vers $\text{Arctan}(+\infty)$ diront certains.

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
$F_\infty(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

La « limite d'applications continues » n'est plus continue.

Et c'est une « somme infinie ».

Ce qui passait bien aux sommes finies ne passe plus aux sommes infinies.

Et la raison en est simple si on revient aux démonstrations (il faut les avoir en tête pour comprendre les choses en profondeur et ne pas faire des affirmations sans fondement, c'est ça qui fait que les ingénieurs sont des gens intelligents même dans la vie de tous les jours).

Pour la somme de deux fonction, on prend $\text{Min}(\eta_{\varepsilon/2}, \mu_{\varepsilon/2})$.

Pour la somme de n fonctions, on prend $\text{Min}(\eta_{\varepsilon/n}, \mu_{\varepsilon/n}, \nu_{\varepsilon/n}, \dots, \rho_{\varepsilon/n})$.

Pour une somme d'une infinité de fonctions....

Parés côté tennis, des taupins trichent sur les maths. Des fessées, ça fait mal à la nuque. Ce vieux crû gâte le goût du blanc. Des parrains se butent, et ces brutes sont privées de Pâques. Que fait ce verrat das ce champ ? Confinés, il faut remonter la pente !

Les confinés sont ils à l'abri des pannes ? Face aux ados dans les lycées, aux pions et aux confinés, Blanquer prétend rectifier les notions. Grosse peine à Sucy. Le feu à la Nièvre. Combien de kinés confus ? Des confinés ont du mal à piger. Faut il confiner les porteurs ?

On l'a trop gâté à la taule. Ce jus sent le coing. Faut il évacuer l'élus ? Train de Puteaux. Les cheminots doutent des gares. Ce viticulteur a vu éclater bien des fûts. On observe des bruits en tas. Ce climat trop chaud c'est à Thonon ? La dessinatrice quête des maquettes. Cette Buzin n'arrête pas de péter.

L'employée qui fait des colis s'attend à être fouillée. Je laisse passer ma belle-mère. J'ai explosé quelques bulles sur le quai. Qu'est ce qui étonne du climat ? La braise chauffe le tout. Coup de foudre dans l'éther, hier. Tu es bienvenu, tu peux décoller. Manille aime les feux. A cause des carences, on ne veut plus des Bédés.

Gérard Durand Gérant du Rare (spécialiste des palindromes) :

Luc note : « Taré, tu palis si la rate ton ... ! ».

Ami, Sheila pompa Papon, là chez Mia. (syllabes).

Alec a soif : Ed (rapporte Luc, né ici, ... trop, par défi ?) osa cela. (Retrouvez le mot qui manque dans ce palindrome).

Oui, Dora ! Il au gourbi, ce bi, gourd obèse. Il adore, oui. (celui là, il est syllabique).

Mon Edmond, rare génie, venu à Noël à Segré, va, ... râpé par Luc, reçu, sa sale ! On a une veine, Gérard, nom de nom !

J'ai enlevé quelques mots, mais comme ce sont des palindromes, vous pouvez retrouver les lettres qui manquent.

◦65◦

♥ Soit g une application de classe C^1 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Montrez l'existence de n réels deux à deux distincts a_1 à a_n vérifiant $\sum_{k=1}^n g'(a_k) = n$ (indication : théorème des accroissements finis sur $[k/n, (k+1)/n]$ et somme télescopique).
Soit maintenant f de classe C^1 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, dont la dérivée ne s'annule jamais. déduisez qu'il existe n réels distincts b_1 à b_n vérifiant $\sum_{k=1}^n \frac{1}{f'(b_k)} = n$ (pensez à travailler sur f^{-1}).

Un classique des oraux. En deux jolies étapes.

On découpe l'intervalle $[0, 1]$ en n segments $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ sur lesquels g est continue et dérivable.

On applique le théorème des accroissements finis : pour chacun, il existe c_k vérifiant $\frac{g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = g'(c_k)$.

On somme ces formules de 0 à $n-1$. Le premier membre télescope en $(g(1) - g(0)).n$.

La formule devient qu'il existe $(c_0, \dots, c_{n-1})$ vérifiant $g(1) - g(0) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} g'(c_k)$.

Et on remplace $g(1) - g(0)$ par 1.

On note que c'est une généralisation du théorème des accroissements finis avec une moyenne à droite.

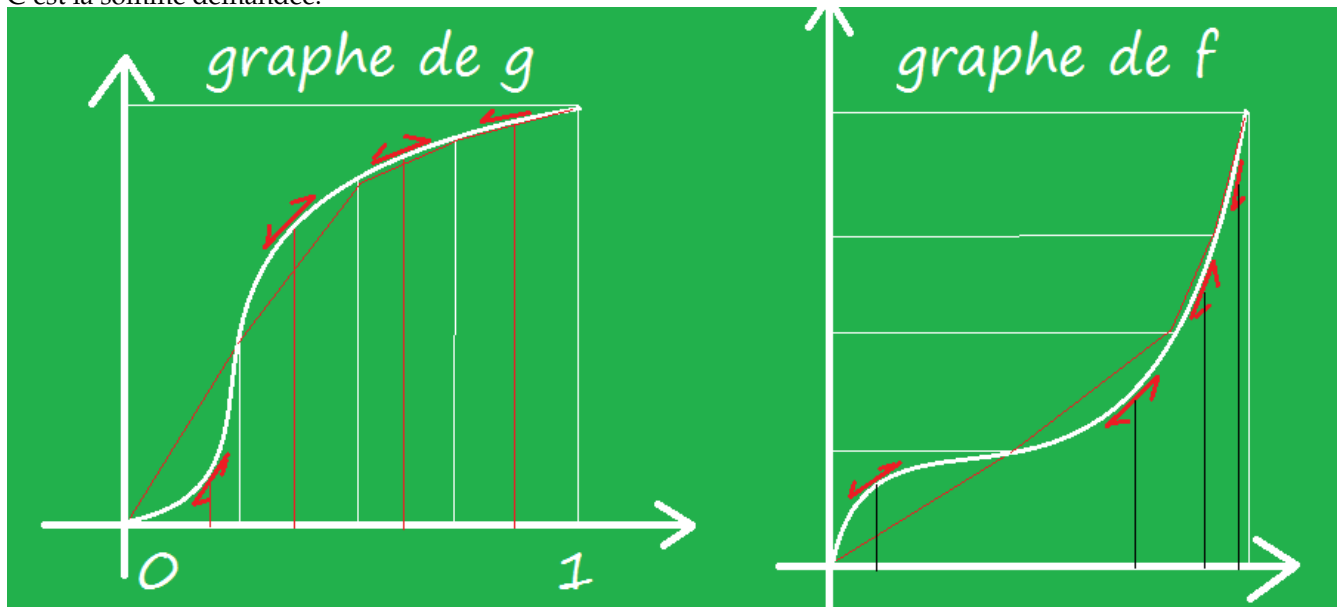
Ensuite, comme la dérivée de f ne s'annule pas (donc ne change pas de signe), on a un C^1 difféomorphisme f de réciproque qu'on va appeler g .

Comme on a $f(1) = 1$, on compose par $g : 1 = g(f(1)) = g(1)$ et aussi $g(0) = 0$.

On est donc pleinement dans le cadre d'application du résultat précédent : il existe des c_i vérifiant $\sum_{k=0}^{n-1} g'(c_i) = n$.

Et en posant $b_i = g(c_i)$, on a $g'(c_k) = \frac{1}{f'(b_k)}$ (dérivée de la réciproque = inverse de la dérivée, mais aux bons points).

C'est la somme demandée.



◦66◦

Pouvez vous trouver deux matrices A et B de taille 2 sur 2 telles que les spectres soient

A	B	$A + B$	A	B	$A + B$	A	B	$A + B$	(trois exercices)
$\{1, 3\}$	$\{1, 5\}$	$\{4, 6\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 5\}$	$\{1, 4\}$	$\{0, 3\}$	$\{2, 5\}$	$\{4, 6\}$	

Les matrices de spectre $\{1, 3\}$ sont diagonalisables (deux valeurs propres distinctes, chaque valeur propre apporte un vecteur propre, on a deux vecteurs propres indépendants, donc une matrice de passage). Elles sont donc de la forme $P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$, avec en particulier $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On raisonne de même pour « spectre $\{1, 5\}$ », avec cette fois les Q . $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot Q^{-1}$ et en particulier $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On tient une solution facile :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$+$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
spectre $\{1, 3\}$		$\{5, 1\}$		$\{6, 4\}$

On peut ensuite cacher les choses avec $P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} + P \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$ Ça, c'est l'art du « poseur d'exercices ».

Pour le triplet

A	B	$A + B$
$\{1, 3\}$	$\{2, 5\}$	$\{1, 4\}$

la même idée ne convient plus.

D'ailleurs, aucune idée ne convient. Et c'est rapide. Regardez la trace

matrice	A	B	$A + B$
spectre	$\{1, 3\}$	$\{2, 5\}$	$\{1, 4\}$
trace	4	7	5

On n'a pas $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$. Le problème n'a pas de solution.

La même idée avec

A	B	$A + B$
$\{0, 3\}$	$\{2, 5\}$	$\{4, 6\}$

?

matrice	A	B	A + B
spectre	{0, 3}	{2, 5}	{6, 4}
trace	3	7	10

c'est cohérent. Mais ça ne prouve pas qu'il y a une solution⁵.

Il faut vraiment construire une solution.

il faut vraiment construire une solution.

	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	
Cette fois, ce n'est pas avec des jeux sur	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

qu'on trouve une solution.

Il faut jouer sur $P. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .P^{-1}$ et $Q. \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .Q^{-1}$.

Ou sur $Q^{-1}.P. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .P^{-1}.Q$ et $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On va donc prendre une matrice R inversible, et poser $A = R. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .R^{-1}$ avec R inversible et $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

	matrice	trace	déterminant	polynôme caractéristique	spectre
Par construction,	$A = R. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .R^{-1}$	3	0	$X^2 - 3.X$	{0, 3}
	$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	7	10	$X^2 - 7.X + 10$	{2, 5}
	$A + B$	10	?	$X^2 - 10.X + ?$	{4, 6}

La condition nécessaire et suffisante est $\det(A + B) = 24$.

Si on n'arrive pas à avoir ça ! Prenons même R assez simple pour commencer : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$.

Le calcul « à la main » donne $A + B = \frac{1}{b-a} \cdot \begin{pmatrix} 8.a - 5.b & -3.a \\ 3.b & 2.a - 5.b \end{pmatrix}$.

On effectue : $\det(A + B) = \frac{16.a - 25.b}{a-b}$.

C'est faisable, avec $a = 1$ et $b = 8$ par exemple.

	matrice	trace	déterminant	polynôme caractéristique	spectre
On résume :	$A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$	3	0	$X^2 - 3.X$	{0, 3}
	$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	7	10	$X^2 - 7.X + 10$	{2, 5}
	$A + B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ -8 & 14 \end{pmatrix}$	10	24	$X^2 - 10.X + 24$	{4, 6}

D'autres réponses sont possibles.

◦67◦

♣ Trouvez toutes les applications f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall a, \forall h, f(a+h) = f(a) + h.f'(a + \frac{h}{2})$.

Trouvez toutes les applications f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\exists \theta \in]0, 1[, \forall a, \forall h, f(a+h) = f(a) + h.f'(a + \theta.h)$.

C'est une équation fonctionnelle. pas différentielle puisque on relie la valeur de f et f' en des points distincts.

On va quand même revenir à une équation différentielle à partir de cette chose qui ressemble à une formule de Taylor.

Ah oui, tiens, mais c'est une formule de Taylor dans laquelle θ vaut toujours $\frac{1}{2}$.

Sachant qu'on peut extraire $f'(a + \frac{h}{2}) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, on déduit que f' est à son tour dérivable, et on peut mettre en boucle. f est C^∞ .

On dérive	par rapport à a :	$f'(a+h) = f'(a) + h.f''(a + \frac{h}{2})$	
	par rapport à h	$f'(a+h) = f'(a + \frac{h}{2}) + \frac{h}{2}.f''(a + \frac{h}{2})$	produit et composée en $h \mapsto a + \frac{h}{2} \mapsto f'(a + \frac{h}{2})$

5. Point important à nouveau : montrer qu'il n'y a pas d'incohérence ne montre pas qu'il y a une solution, on est d'accord ! L'incohérence peut être ailleurs. On raisonne !

On finira par trouver les polynômes de degré 2.

Pour la seconde question, on trouve les mêmes, en commençant par prouver que θ vaut forcément $\frac{1}{2}$.

◦68◦

Le prof Phil Sémieuk-Defass ayant bien préparé son cours veut étudier la dérivabilité en 0 de $x \mapsto x \cdot \left[\frac{1}{x} \right]$ (notée g) prolongée par continuité en 0. Prolongez déjà par continuité en définissant $g(0)$. Calculez ensuite les taux $\frac{g\left(\frac{1}{n}\right) - g(0)}{\frac{1}{n}}$ et $\frac{g\left(\frac{n}{n^2+n-1}\right) - g(0)}{\frac{n}{n^2+n-1}}$. Concluez.

On encadre $\frac{1}{x} - 1 \leq \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$ pour tout x non nul.

Pour x positif, on encadre donc $1 - x \leq g(x) \leq 1$ et le théorème d'encadrement donne pour limite 1.

Pour x négatif, l'encadrement est dans l'autre sens, mais la conclusion est la même.

On pose donc $g(0) = 1$.

On calcule donc des taux d'accroissements particuliers

$$\frac{g\left(\frac{1}{n}\right) - g(0)}{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n} \cdot [n] - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{0}{\frac{1}{n}} = 0$$

Ces taux tendent vers 0. Si tangente il y a, elle sera horizontale.

Mais il y a d'autres taux tout aussi particuliers

$$\frac{g\left(\frac{n}{n^2+n-1}\right) - g(0)}{\frac{n}{n^2+n-1}} = \frac{\frac{n}{n^2+n-1} \cdot \left[n + \frac{n-1}{n} \right] - 1}{\frac{n}{n^2+n-1}} = \frac{\frac{n}{n^2+n-1} \cdot n - 1}{\frac{n}{n^2+n-1}} = \frac{\frac{1-n}{n^2+n-1}}{\frac{n}{n^2+n-1}} = \frac{1-n}{n}$$

Cette fois, la limite des taux vaut -1 .

Ce n'est pas la même. La fonction n'est pas dérivable en 0.

Le graphe de cette fonction doit figurer quelquepart dans le cours.

◦69◦

Soit f de classe C^2 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. On se donne x , il faut montrer qu'il existe c vérifiant $f(x) = \frac{(x-a) \cdot (x-b)}{2} \cdot f''(c)$.

Vous pouvez le faire, pour x fixé, en introduisant $\varphi_x = t \mapsto f(t) - A \cdot (t-a) \cdot (t-b)$ et en ajustant A pour que φ_x soit nulle en x . Bon, beh faites le alors !

Puisqu'on nous dit de le faire. On se donne x quelconque (c'est le $\forall x$, et a et b sont des données de l'énoncé). On définit alors la fonction de l'énoncé

$$\varphi_x = t \mapsto f(t) - A \cdot (t-a) \cdot (t-b)$$

Elle est nulle en a et en b quoi qu'on y fasse (hypothèse $f(a) = f(b) = 0$, on ne revient pas dessus).

Mais en x elle vaut $f(x) - A \cdot (x-a) \cdot (x-b)$. Elle n'est pas nulle.

Sauf si je dis que j'ai choisi $A = \frac{f(x)}{(x-a) \cdot (x-b)}$. Donc je le dis. Et je reprends si nécessaire en cachant mon jeu en disant que je définis

$$\varphi_x = t \mapsto f(t) - f(x) \cdot \frac{(t-a) \cdot (t-b)}{(x-a) \cdot (x-b)}$$

Cette application prend la même valeur (0 mais on s'en moque) en trois points distincts. Par théorème de Rolle sur deux intervalles successifs, sa dérivée φ'_x s'annule en deux points, et par théorème de Rolle à nouveau, sa dérivée seconde (qui existe, merci les hypothèses) s'annule en au moins un point qu'il est temps de nommer c .

Pour ce point c on a

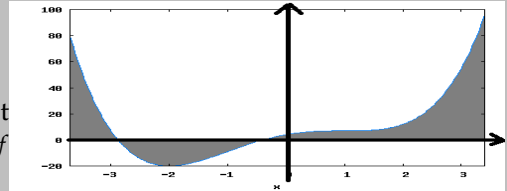
$$f''(c) - f(x) \cdot \frac{2 \cdot c}{(x-a) \cdot (x-b)} = 0$$

et c'est bien la formule que l'on voulait.

On a mis de côté les deux cas $x = a$ et $x = b$ qui ne permettent pas d'appliquer le théorème de Rolle en cascade, mais qui autorisent à prendre pour c n'importe quel point, comme par exemple $\frac{a+b}{2}$.

◦70◦

Donnez les intervalles entre lequel $x \mapsto x^4 - 6x^2 + 8x + 4$ est un homéomorphisme. Même question avec difféomorphisme (f dérivable et f^{-1} aussi).



Je sais, vous pensez que je voulais écrire « Donnez les intervalles sur lequel... » et non pas « entre lesquels ». Mais rappelons qu'un homéomorphisme, c'est de ... sur ... C'est donc entre deux intervalles.

L'application est continue, on va chercher les intervalles où elle est monotone.

On la dérive et on dresse un tableau de signes pour la dérivée :

		-2		1	$]1, +\infty[$
$x + 2$	-	0	+		+
$(x - 1)^2$	+		+	0	+
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$\searrow -20$	-20	$\nearrow 7$	7	$\nearrow +\infty$

On a les deux réponses : $] -\infty, -2]$ puis $[-2, +\infty[$

Mais attention, il y a un piège, c'est qu'on demande des intervalles, pas forcément « les plus grands possibles ».

On peut prendre $[-5, -3]$ pourquoi pas (de $[-5, -3]$ sur $[7, 439]$). On a bien un homéomorphisme.

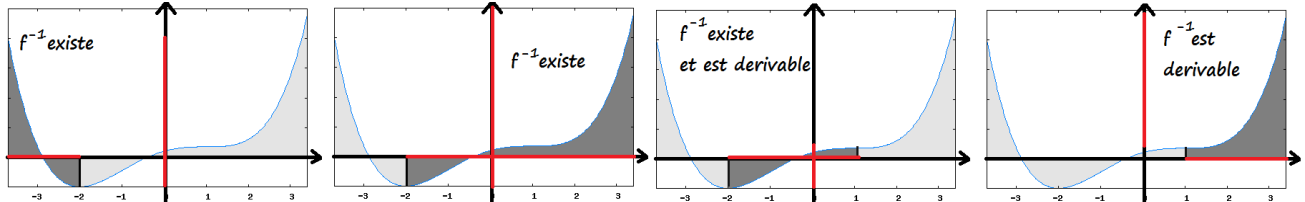
Peut-on dire que f est un homéomorphisme de $[0, 0]$ sur $[4, 4]$? La bijectivité est acquise, mais moins la continuité.

Ensuite, on veut des difféomorphismes. f doit être continue et dérivable. Ça ne change pas grand chose.

f^{-1} doit être continue et dérivable. Petit changement. Il faut éviter une chose : que f ait une tangente horizontale (qui donne à f^{-1} une « tangente » verticale).

Cette fois, on ne garde que $] -\infty, -2[$ puis $] -2, 1[$ et $]1, +\infty[$

Il faut ouvrir et éviter 1.



◦71◦

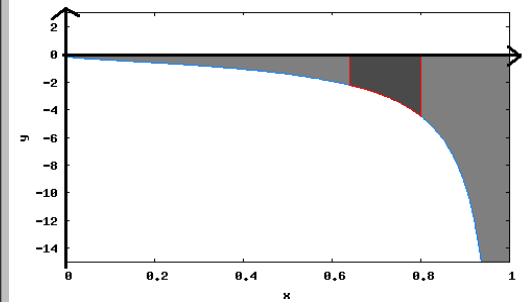
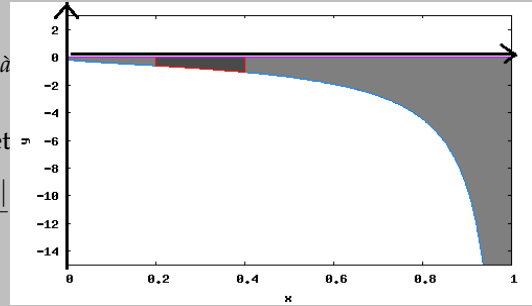
On définit $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

Montrez que H est C^1 sur $]0, 1[$ et calculez sa dérivée (pensez à l'écrire $F(x^2) - F(x)$ où F est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ sur $]1, +\infty[$).

Montrez que $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ est bornée sur $]0, 1/2[$ par 0 et

$-1/\ln(2)$. Déduisez que $H(x)$ est compris entre 0 et $\frac{|x^2 - x|}{\ln(2)}$ pour x entre 0 et $1/2$.

Déduisez que $H(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.



Montrez que $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}$ tend vers $\frac{1}{2}$ en 1 (attention, ne pas soustraire des "équivalents, ça ne donne rien, réduisez d'abord au dénominateur commun, puis utilisez des développements limités).

Montrez que $\int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} \right) dt$ converge vers 0 quand x tend vers 1.

Calculez $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$ pour x entre 0 et 1.

Déduisez que $H(x)$ tend vers $\ln(2)$ quand x tend vers 1.

Déduisez en étudiant $F(1) - F(0) : \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx = \ln(2)$.

Notons F une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ sur l'intervalle $]0, 1[$ (par exemple $F = x \mapsto \int_{1/2}^x \frac{dt}{\ln(t)}$).

On a alors par relation de Chasles $H(x) = F(x^2) - F(x)$.

On dérive une composée⁶ : $H' = x \mapsto 2x \cdot F'(x^2) - F'(x)$.

On remplace : $H' = x \mapsto \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)}$.

On simplifie : $H' = x \mapsto \frac{x-1}{\ln(x)}$.

Cette dérivée est continue (en tout cas sur $]0, 1[$). H est donc C^1 .

En fait elle est même C^∞ .

Pour tout x de $]0, 1/2[$, on a $\ln(x) \leq \ln(1/2) = -\ln(2) < 0$.

On passe à l'inverse (décroissant sur $] -\infty, 0[$: $0 > \frac{1}{\ln(x)} \geq \frac{-1}{\ln(2)}$.

Prenons x entre 0 et $1/2$ et écrivons la relation précédente pour tout t lui-même entre 0 et x : $0 > \frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{-1}{\ln(2)}$.

Quand on intègre entre deux bornes a et b dans le bon ordre, on a alors $0 > \int_a^b \frac{dt}{\ln(t)} \geq -\frac{b-a}{\ln(2)}$.

Mais justement, x est plus grand que x^2 (entre 0 et 1, comparez par exemple $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{9}$).

Il faut donc changer le sens : $0 < \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \leq -\frac{x^2 - x}{\ln(2)} = \frac{x - x^2}{\ln(2)}$.

On fait tendre x vers 0 (ce qui est compatible avec « x est entre 0 et $1/2$ »).

Par encadrement, $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ tend vers 0 par valeur supérieure.

Attention, on ne peut pas dire que $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ tend vers 0 parce que les « bornes se rejoignent ».

Ou « parce qu'on obtient $\int_0^0 \frac{dt}{\ln(t)}$ par passage à la limite ».

C'est un argument raté.

Regardez $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t}$. Elle devrait tendre vers « l'intégrale sur un intervalle réduit à un point » c'est à dire vers 0 ».

6. H est dérivable en tant que composée et différence d'applications dérivables

Mais sur ce pseudo intervalle, la fonction est infinie.

D'ailleurs $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t} = \left[\ln(t) \right]_x^{x^2} = \ln(2)$. Ceci ne tend pas vers 0.

Comme quoi il faut se méfier des affirmations à l'emporte pièce.

D'ailleurs, en 1, x et x^2 tendent vers la même valeur mais $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ ne va pas tendre vers 0.

$x \mapsto \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}$ s'étudie en 1 en posant $x = 1 + h$ avec h qui tend vers 0.

$$\frac{1}{\ln(1+h)} - \frac{1}{h} = \frac{h - \ln(1+h)}{h \cdot \ln(1+h)} = \frac{h - h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)}{h \cdot \ln(1+h)} \sim \frac{h^2/2}{h^2}$$

La fraction est équivalente au réel $\frac{1}{2}$, elle tend vers $\frac{1}{2}$.

Une fois prolongée, l'application $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}$ est continue sur $]0, 1]$.

Mais on peut même la prolonger en 0 par la valeur $0 - \frac{1}{-1}$. Elle est donc continue sur $[0, 1]$.

Par théorème de compacité, elle est bornée.

Même si on ne connaît pas la valeur de ces bornes, on peut les nommer α et β .

On a donc $\alpha \leq \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} \leq \beta$ pour tout t entre x et x^2 si x est lui même entre 0 et 1.

On intègre de x à x^2 (attention au sens de l'intervalle là encore) :

$$\alpha \cdot (x^2 - x) = \int_x^{x^2} \alpha \cdot dx \geq \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} \right) \cdot dt \geq \int_x^{x^2} \beta \cdot dt = (x^2 - x) \cdot \beta$$

Si x tend vers 1 les deux termes de l'encadrement tendent vers 0.

On a donc $\int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} \right) \cdot dt$ qui tend vers 0 en 1.

On sépare : $H(x) - \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$ tend vers 0.

Mais la seconde intégrale vaut $\ln(x^2 - 1) - \ln(x - 1)$ ce qui fait $\ln(x + 1)$.

Par soustraction, c'est donc que $H(x)$ tend vers $\ln(2)$ quand x tend vers 1.

Le signe ne doit pas vous surprendre : dans $H(x)$, les bornes sont dans le mauvais sens, mais la fonction intégrée est négative.

L'exercice peut se conclure.

$H(x)$ tend vers 0 en 0 et $H(x)$ tend vers $\ln(2)$ en 1.

C'est donc qu'elle a augmenté de $\ln(2)$ en allant de 0 à 1 : $\ln(2) = \left[H(t) \right]_{t=0}^{t=1}$.

Mais là où c'est fort, c'est que $\left[H(t) \right]_{t=0}^{t=1}$ est égal à $\int_0^1 H'(x) \cdot dx$ par théorème fondamental du calcul intégrale.

Mais comme on connaît H' , on a

$$\ln(2) = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} \cdot dx$$

(en prolongeant la fonction sous le signe somme en 0 par la valeur 0 et en 1 par la valeur 1⁷)

C'est votre seconde exercice où vous calculez une intégrale sans disposer de primitive.