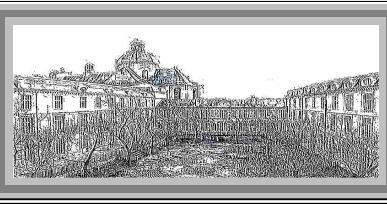
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 3 juin
M.P.S.I.2



2023 2024

TD31

◦0◦ Sachant $\sqrt{a^2+a.b+b^2}+\sqrt{a^2-a.b+b^2}=1$, calculez $(a^2-1).(b^2-1)$.
Une piste : $a^2+b^2+a.b=\cos^4(t)$ et $a^2+b^2-a.b=\sin^4(t)$.
Autre piste : quantité conjuguée.

◦1◦

	x		=	51
+		x		
	-		=	18
=		=		
23		99		

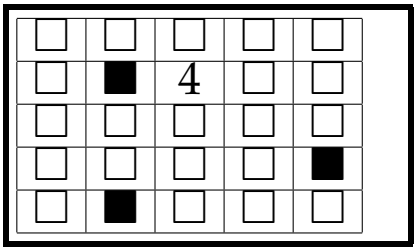
Montrez qu'il n'y a pas de solution dans $\mathbb{Z}^4$ mais qu'il y en a une dans $\mathbb{Q}^4$.

◦2◦ ♡ Donnez le développement limité d'ordre 3 en 0 de $\ln(1+\sin(x))$.
Donnez le développement limité d'ordre 3 en 0 de $\ln(1+\cos(x))$.

◦3◦ ♡ Comparez le développement limité en 0 de $\dfrac{60.x-7.x^3}{60+3.x^2}$ et de $\sin(x)$ à l'ordre 7.

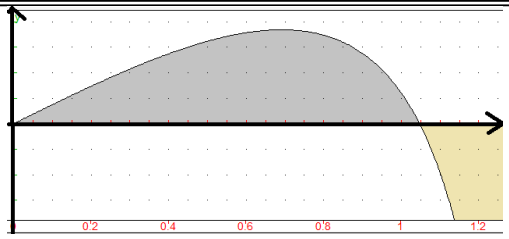
◦4◦

Horizontalement
A - Carré de E.
B - La somme de ses chiffres vaut celle de E.
C - La somme de ses chiffres vaut celle de D.
D - Carré de b.
E - Le produit de ses chiffres vaut 9.



Verticalement :
a - Carré de e.
b - La somme de ses chiffres vaut 17.
c - Carré d'un nombre dont le produit des chiffres vaut 2.
d - Impair dont la somme des chiffres vaut celle de a.
e - Le produit de ses chiffres vaut 28.

Montrez : $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{\sin(3.\theta)}{1+\cos(2.\theta)}.d\theta=\frac{1}{2}$.



◦5◦ Donnez le développement limité d'ordre 3 en $\dfrac{\pi}{3}$ de $\dfrac{\sin(3.\theta)}{1+\cos(2.\theta)}$.

◦6◦ ♡ Donnez le développement limité d'ordre 4 en 1 de x^x.

◦7◦ Justifiez : $\cos(\log(x))=1-\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(x-1)^3}{2}+o((x-1)^3)_{x\to1}$
et aussi (si si) $\cos(\log(x))=1+(x-1)^2-3.(x-1)^3+o(x)^3_{x\to1}$.

◦8◦ Donnez le développement limité d'ordre 10 en 0 de $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

◦9◦ Donnez un équivalent en 0 de $\sqrt{1+t}-\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ de la forme $a.t^\alpha$.

◦10◦ ♡ Donnez le développement limité d'ordre 4 en 0 de $x\longmapsto\tan(\pi.e^x)$.

◦11◦ Donnez le développement limité d'ordre 5 en 0 de $(1+t)^{\frac{1}{t}}$.

◦12◦ Soit f de classe C^6 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Completez

$$\begin{pmatrix} f(x+1)-f(x) \\ f(x+2)-f(x) \\ f(x+3)-f(x) \\ f(x+4)-f(x) \\ f(x+5)-f(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x)/2 \\ f^{(3)}(x)/6 \\ f^{(4)}(x)/24 \\ f^{(5)}(x)/120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

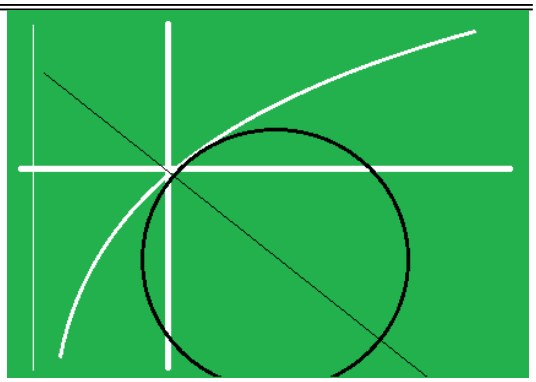
Montrez que la matrice carree de cette formule est inversible.
Deduisez que si f et $f^{(6)}$ sont bornes sur $\mathbb{R}$, alors f', f'', $f^{(3)}$, $f^{(4)}$ et $f^{(5)}$ le sont aussi.

◦13◦ Donnez le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1+x}}}$ (sans deriver, d'accord...).

◦14◦ ♡ Donnez le développement limité d'ordre 4 en $x=1$ de $\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ (oui, pas en 0, en 1 , ça va !).

◦15◦ ♡ Donnez le développement limité d'ordre 4 en 0 de $x \longmapsto e^{\sqrt{4+x}}$ (bon 2 suffira pour un coeur).

◦16◦ Donnez le développement limité d'ordre 5 en 0 de $Arctan(\cos(t))$.



◦17◦ ♡ Montrez que pour a positif, $x \longmapsto \sqrt{2.a^2-(x-a)^2}-a$ est l'équation d'un arc de cercle passant par l'origine. Ajustez a pour que son graphe coïncide à $o(x^2)$ près avec celui de $x \longmapsto \ln(1+x)$.

◦18◦ ♡ Donnez le développement limité d'ordre 5 en 0 de $\ln\left(\dfrac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right)$.

◦19◦ D'accord, elle n'est pas au programme, mais voyons où elle peut servir. On veut décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{P(X)}{(X-a)^d.Q(X)}$ où P et Q sont deux polynômes dont a n'est pas racine. On sait que la fraction va se décomposer en éléments simples sous la forme $\dfrac{\alpha_1}{X-a}+\dfrac{\alpha_2}{(X-a)^2}+\ldots+\dfrac{\alpha_d}{(X-a)^d}+autres\ termes$. Calculez α_1 ou α_d par la méthode des pôles.
Mais il parait qu'en posant la division suivant les puissances croissantes de $P(X-a)$ par $Q(X-a)$, on trouve directement les α_k.
Ce n'est pas clair ? Prenons un exemple du cours avec $\dfrac{1}{(1-X).(1-X^2).(1-X^3)}$. Qui sont alors a, $P(X)$ et $Q(X)$. Posez $Y=X-1$ et réécrivez le fraction. Posez la division suivant les puissances croissantes de 1 par $6+9.Y+5.Y^2+Y^3$ à l'ordre 3. Concluez.

◦20◦ Déterminez la limite quand x tend vers l'infini de $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln(2.x)}{\ln(x)}\right)^{\ln(x)}$.

◦21◦ Donnez la limite en $+\infty$ de $\left(\dfrac{Arctan(1+x)}{Arctan(x)}\right)^{x^2}$.

◦22◦ Donnez le développement limité d'ordre 4 [1] en 0 de $\sqrt{1-x^2+x}-\sqrt[3]{\cos(x)}$.

◦23◦ On cherche des applications f vérifiant $f\circ f=\sin$ et $f(0)=0$. On suppose que f est solution, de classe C^4. Trouvez alors les coefficients de son développement limité en 0 d'ordre 4 (combien de solutions trouvez vous ?).

---

1. normalement, c'est l'ordre 4 si vous visez la MP ; si vous visez $MP*$, l'ordre 2 suffira, au delà, vous plantez les calculs... et si vous visez la PSI, c'est ordre 8

◦24◦ Donnez la limite de la suite $\left(\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^n\right)$. Donnez la limite de la suite $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)$.
La suite $\left(\left(\cos(1/\sqrt{n})\right)^{n^2}\right)$ a une limite. Combien ?

◦25◦ Pour f convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit $f^+ = Max(f,\ 0)$ et $f^- = Max(-f,\ 0)$. Montrez que f^+est convexe, mais pas forcément f^-.
Soient f et g convexes de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$, convexes. Montrez que $Max(f,\ g)$ est convexe.
Montrez que $Min(f,\ g)$ ne l'est pas forcément, mais montrez qu'il existe une minorante de f et g qui est convexe.

◦26◦ Combien y a-t-il de matrices carrées de taille 2 à coefficients entiers entre -2 et 2 ? Un ordinateur tire au hasard uniforme une de ces matrices.
• Montrez que la probabilité qu'elle soit symétrique est $1/5$.
• Montrez que la probabilité qu'elle soit diagonale est $1/25$.

• Montrez que la probabilité que ce soit une matrice de Gram [2] est $2/125$.
• Quelle est la probabilité que ce soit une matrice de Gram, sachant qu'elle est symétrique *(probabilité sur un sous-univers)* ?
Les événements "Gram" et "symétrique" sont ils indépendants ? Les événements "Gram" et "diagonale" sont ils indépendants ?

	symétrique 125	non symétrique 500
Gram 10		0
pas Gram 615		

	diagonale 25	non diagonale 600
Gram 10		
pas Gram		

◦27◦ Justifiez $\ln\left(\frac{sh(h)}{h}\right) = \frac{h^2}{6} - \frac{h^4}{180} + o(h^4)_{h\to 0}$.

◦28◦ On définit : $f = x \longmapsto [x].\sin(\pi.x)$. Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}$.
Montrez que l'équation $\int_0^x f(t).dt = 0$ a une solution entre 3 et 4.

◦29◦ ♡ On pose : $f = x \longmapsto x^3 - 3.x$. Montrez que f n'est pas un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Complétez : f est un homéomorphisme de $[1,\ +\infty[$ dans $\square$
f est un homéomorphisme de $\square$ dans $[-2,\ 2]$.
Existe-t-il un homéomorphisme h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $h \circ f$ soit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
Existe-t-il un homéomorphisme h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $f \circ h$ soit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
Existe-t-il une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $g \circ f$ soit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
Existe-t-il une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que $f \circ g$ soit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Si oui, calculez $g(18)$.
Rappel : homéomorphisme de A sur B : application f continue de A dans B, bijective, telle que f^{-1} soit aussi continue de B dans A.

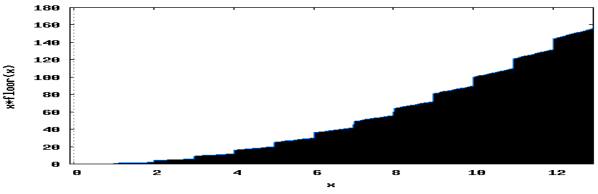
◦30◦ ♡ Montrez que la probabilité que `randrange(1, 626)` soit un carré parfait est de $\frac{1}{25}$.
Quelle est la probabilité que `randrange(1, 626)**2` soit un carré parfait ?
Quelle est la probabilité que `randrange(1, 626)*randrange(1, 626)` soit un carré parfait ? (exploitez Python si nécessaire pour dénombrer).

◦31◦ Montrez que la série de terme général $\frac{i^n}{n+1}$ converge. Tiens, et sa somme vaut quoi ?

◦32◦ L'élève affirme : si on réunit deux familles libres n'ayant aucun vecteur de l'une colinéaire à un vecteur de l'autre, on a une nouvelle famille libre. Prouvez lui qu'il a tort.

---

2. une matrice de Gram est une matrice symétrique, à diagonale positive (les deux termes) et à déterminant positif



◦33◦ Résolvez $\int_0^x t.[t].dt = 222$ d'inconnue réelle x.

◦34◦ Combien y a-t-il d'applications continues de $\mathbb{R}^*$ dans $\{0,\ 1,\ 2\}$?

◦35◦ Le professeur a demandé de calculer la moyennes des entiers de 1 à . L'élève Hall-Honter (Pourlaveh-Lelinj) a trouvé 8,8. Le professeur lui dit : "tu t'es trompé, tu as oublié de compter un entier *(mais tu as bien divisé par le nombre de termes de ta somme)*". Retrouvez l'entier oublié et la question initiale du professeur.

◦36◦ ♣

A	B	C	D
$[0,\ 0,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4]$	$[3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3]$	$[2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 6,\ 6]$	$[1,\ 1,\ 1,\ 5,\ 5,\ 5]$

Ce sont des dés équilibrés à six faces *(appelés dés de Bradley Effron)*.
Montrez que la probabilité que A batte B est $2/3$.
Montrez que la probabilité que B batte C est $2/3$.
Montrez que la probabilité que C batte D est $2/3$.
Quelle est la probabilité que D batte A ?

◦37◦ ♡ Montrez qu'il existe un isomorphisme entre $(S_2(\mathbb{C}), +, .)$ et $(S_3(\mathbb{R}), +, .)$.
Isomorphisme = application linéaire, bijective.

◦38◦ p et q sont deux réels plus grands que 1 vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. y est un réel strictement positif fixé. Étudiez les variations de $x \longmapsto \frac{x}{p} + \frac{y}{q} - x^{\frac{1}{p}}.y^{\frac{1}{q}}$ sur $]0,\ +\infty[$. Déduisez : $x^{1/p}.y^{1/q} \leqslant \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$.

On se donne f et g continues de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$, on pose $A = \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p.dt}$ et $B = \sqrt[q]{\int_a^b |g(t)|^q.dt}$ *(supposés non nuls)*. Montrez pour tout x de $[a,\ b]$: $\frac{f(x).g(x)}{A.B} \leqslant \frac{f(x)^p}{p.A^p} + \frac{g(x)^q}{q.B^q}$. Déduisez : $\int_a^b |f(t.g(t)|.dt \leqslant \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p.dt}.\sqrt[q]{\int_a^b |f(t)|^q.dt}$. Que reconnaissez vous pour $p = 2$?

◦39◦ A est un entier à trois chiffres et B est son renversé exemple : le renversé de 453 est 354. On sait :

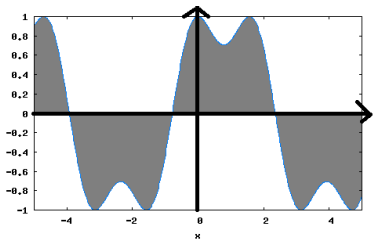
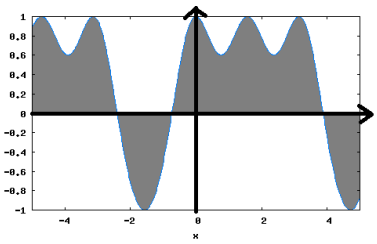
A est divisible par 13	B est divisible par 31
A est divisible par 39	B est divisible par 93
A est divisible par 21	B est divisible par 12

Trouvez A (et B) *(expliquez)*.

◦40◦ On applique le théorème des accroissements finis à $f = x \longmapsto \frac{x+2}{x-3}$ pour $a = 2$ et $b = 5$. On trouve : $\exists c \in \mathbb{R},\ 3.f'(c) = \frac{7}{2} + \frac{4}{1}$. Et pourtant l'équation obtenue n'a pas de racine réelle. Pourquoi ?

◦41◦ ♡ On définit : $f = (x,\ y) \longmapsto x.y.\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Donnez son domaine de définition.

Calculez $f(\rho.\cos(\theta),\ \rho.\sin(\theta))$. Montrez : $f(h,\ k) = o(\sqrt{h^2 + k^2})$ quand h et k tendent vers 0.
Prolongez f par continuité en $(0,\ 0)$.
Calculez $\lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k}$ (qu'on notera $p(0,0)$) et $\lim_{k\to 0} \frac{f(x,k) - f(x,0)}{k}$ (qu'on notera $p(x,0)$) pour x non nul.
Calculez $\lim_{h\to 0} \frac{p(h,0) - p(0,0)}{h}$.
Calculez aussi $\lim_{k\to 0} \frac{\lim_{h\to 0} \frac{f(h,k) - f(h,0)}{k} - \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}}{k}$.

Donnez un intervalle I le plus grand possible sur lequel $\cos^3 + \sin^3$ est un homéomorphisme. Donnez alors l'intervalle image.

◦42◦ Même question pour $\cos^4 + \sin^3$.

◦43◦ Montrez que $x \longmapsto x.ch(x)$ (notée f) est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Donnez son développement limité en 0 à l'ordre 5.
Donnez le développement limité en 0 de sa réciproque f^{-1} (posez a priori, composez, identifier).
Montrez : $f^{-1}(y) \sim_{+\infty} \ln(y)$.

◦44◦ On pose $F = (x, y) \longmapsto \dfrac{\ln(1 + x.y)}{1 + x + y^2}$. Donnez son domaine de définition (partie du plan).
Donnez son développement limité d'ordre 1 en $(0,\ 0)$: $F(0 + h,\ 0 + k) = F(0,\ 0) + p.h + q.k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$.
Donnez l'équation du plan tangent au graphe de F en $(0,\ 0)$.
Donnez son développement limité d'ordre 1 en $(0,\ 0)$:

$$F(0 + h,\ 0 + k) = F(0,\ 0) + \begin{matrix} p.h \\ + \\ q.k \end{matrix} \quad + \quad \begin{matrix} r.h^2 \\ s.h.k \\ t.k^2 \end{matrix} \quad + o(h^2 + k^2)$$

en donnant les trois nouveaux coefficients. Aurez vous le courage pour le développement d'ordre 3 (dites moi déjà combien de termes ça fait).

◦45◦ x et y sont liés par la relation $2.(x^3 + y^3) = 9.x.y$ qu'on ne cherchera pas à résoudre.
Montrez que le point $(2,\ 1)$ est sur cette courbe. En ce point, donnez alors le développement limité do'rdre 3 de y vu comme fonction de x (posez le développement a priori, reportez, développez, identifiez).

◦46◦ Avec les notations de Monge, j'ai trouvé $p = (x,\ y) \longmapsto e^x.\cos(y)$. Pouvez vous retrouver F.
Si j'ajoute $q = (x,\ y) \longmapsto -e^x.\sin(y)$?

Rappel :

			$F(x,y)$			
		$\frac{\partial}{\partial x}$		$\frac{\partial}{\partial y}$		
	$p(x,y)$				$q(x,y)$	
$\frac{\partial}{\partial x}$		$\frac{\partial}{\partial y}$		$\frac{\partial}{\partial x}$		$\frac{\partial}{\partial y}$
$r(x,y)$			$s(x,y)$			$t(x,y)$

◦47◦ Avec les notations de Monge, j'ai trouvé $p = (x,\ y) \longmapsto x.y^2$ et $q = (x,\ y) \longmapsto x^2.y$. Pouvez vous retrouver F (et si j'impose $F(0,0) = 3$?).
Avec les notations de Monge, j'ai trouvé $p = (x,\ y) \longmapsto x.y^3$ et $q = (x,\ y) \longmapsto x^3.y$. Montrez que je me suis trompé.

◦48◦ ♡ On définit $F = (x,\ y) \longmapsto y.(x^2 + (\ln(y))^2)$.
Calculez p et q. Trouvez les « points critiques » (solutions de $p(x,y) = q(x,y) = 0$, c'est à dire plan tangent horizontal).
Donnez le développement limité d'ordre 2 de F en chacun des deux points critiques.

◦49◦ On définit $F = (x,\ y) \longmapsto x^3 + y^3 - 12.x.y$. Quelle équation différentielle doit vérifier $t \longmapsto \varphi(t)$ pour que l'application $t \longmapsto F(t,\ \varphi(t))$ soit constante ?

◦50◦ Étudiez la convergence de $\left(n^2.\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)\right)$.

◦51◦ Montrez que $\dfrac{(n+1)^{\sqrt{n}}}{n^{\sqrt{n+1}}}$ converge quand n tend vers l'infini.

◦52◦ ♡ Montrez l'équivalence des suites : $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2.n} \sim \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{n}$ quand n tend vers l'infini.

◦53◦ Pour tout n, on pose $a_n = \sqrt{4.n^2+n+1}.\pi$. Montrez, en explicitant un G_A que la suite a diverge vers $+\infty$. Justifiez $a_n \sim_{n\to+\infty} 2.n.\pi$. Un élève prétend alors que $\sin(a_n)$ tend vers $\sin(2.n.\pi)$. En quoi a-t-il totalement tort ? Que pensez vous de celui qui dit que $\sin(a_n)$ est équivalent à $\sin(2.n.\pi)$?
En utilisant les quantités conjuguées, montrez que $(a_n - 2.n.\pi)$ est équivalent à $\frac{\pi}{4}$. Donnez la limite de la suite $\sin(a_n)$.

◦54◦ Placez aux huit sommets d'un cube les entiers de 1 à 8.
Il faut ensuite que pour chaque face, le produit des quatre entiers aux quatre coins de la face soit la valeur imposée sur le patron du développement du cube ci contre :

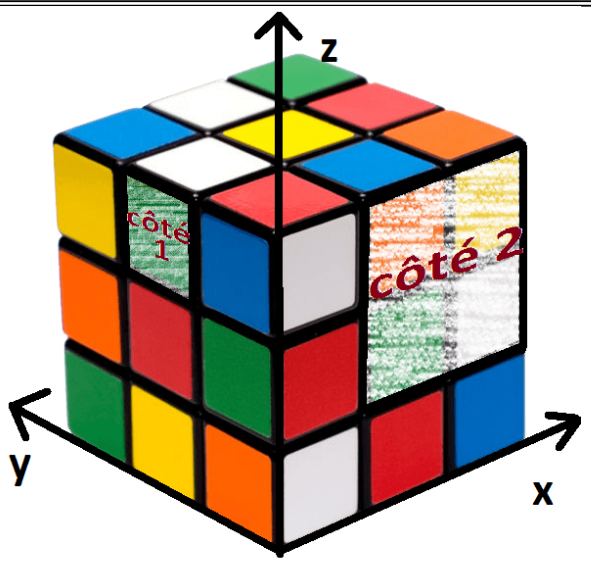
	280		
96	1344	420	30
	144		

♣$_0$ On pose $\tau = \overrightarrow{(1\,2)}$ et $\sigma = \overrightarrow{(1\,2\,3\,4\,5)}$. Décomposez $\overrightarrow{(1\,3)}$ et $\overrightarrow{(2\,3)}$ uniquement avec des σ et des τ.

♡$_1$ Le polynôme $X^3 + p.X + q$ a pour racines a, b et c. On définit $\alpha = a + b.c$, $\beta = b + a.c$ et $\gamma = c + a.b$. Exprimez $\alpha+\beta+\gamma$ et $\alpha.\beta.\gamma$ à l'aide de p et q. Donnez le polynôme de racines α, β et γ.

♣$_1$Un Rubik'Cube est formé de vingt sept cubes articulés, et donc aussi soixante quatre « sommets » numérotés de 0 à 63 ou de $(0,0,0)$ à $(3,3,3)$, c'est comme vous voulez. Combien de carrés de côté unité pouvez vous tracer ayant pour sommets quatre de ces points ? Combien de carrés pouvez vous tracer ayant pour sommets quatre de ces points ?

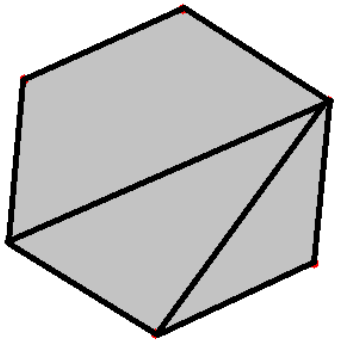
◦55◦



2018

◦56◦ ♣ Pouvez vous compléter la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & \heartsuit \end{pmatrix}$ pour que ses deux valeurs propres soient entières ?
Quel est alors le plus grand terme de A^{100} ?

◦57◦ Soit f une application linéaire. Montrez : $Ker(f) + Ker(f - Id) + Ker(f - 2.Id) = Ker(f) \oplus Ker(f - Id) \oplus + Ker(f - 2.Id)$.
On donne : $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 5.x & -3.y & -2.z \\ 4.x & -2.y & -2.z \\ x & -y & +2.z \end{pmatrix}$.
Un élève entend prouver $Ker(f) \oplus Ker(f - Id) \oplus + Ker(f - 2.Id) = \mathbb{R}^3$ par analyse et synthèse.
Il écrit ce qui suit : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ avec $\overrightarrow{a}$ dans $Ker(f)$, $\overrightarrow{b}$ dans $Ker(f - Id)$ et $\overrightarrow{c}$ dans $Ker(f - 2.Id)$.
Il déduit $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{b} + 2.\overrightarrow{c}$, puis $f^2(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{b} + 4.\overrightarrow{c}$. Il déduit $\overrightarrow{c} = \frac{f^2(\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{u})}{2}$, $\overrightarrow{b} = 2.f(\overrightarrow{u}) - f^2(\overrightarrow{u})$ et $\overrightarrow{a} = \frac{2.\overrightarrow{u} - 3.f(\overrightarrow{u}) + f^2(\overrightarrow{u})}{2}$. Quel sens a-t-il traité ?
Ensuite, il propose $\overrightarrow{c} = \frac{f^2(\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{u})}{2}$, $\overrightarrow{b} = 2.f(\overrightarrow{u}) - f^2(\overrightarrow{u})$ et $\overrightarrow{a} = \frac{2.\overrightarrow{u} - 3.f(\overrightarrow{u}) + f^2(\overrightarrow{u})}{2}$ et vérifie $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$. Quel sens a-t-il prouvé ?
Trouvez l'erreur.
Montrez qu'en remplaçant $x - y + 2.z$ par $x - y$, le résultat devient correct.



Trois garçons et trois filles s'installent aléatoirement aux six places d'une table hexagonale. Calculez la probabilité que les garçons forment un triangle équilatéral.

Quelle est la probabilité que les filles forment un triangle équilatéral ?

◦58◦ Quelle est la probabilité que les filles forment un triangle rectangle, sur l'univers restreint où les garçons forment un triangle isocèle ?

◦59◦ Pour tout n, on pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrez que (U_n) diverge. Montrez que la série de terme général $\frac{1}{U_n}$ diverge (majorez U_n par $2.\sqrt{n}$)

Pour tout n, on pose $V_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)}$. Montrez que (V_n) diverge. Montrez que la série de terme général $\frac{1}{V_n}$ diverge.

◦60◦ Décomposez $x \longmapsto 2.|x+1|$ en $p+i$ avec p paire et i impaire, puis représentez p et i.

◦61◦ ♡ Donnez un équivalent en $\alpha.n^\beta$ de $\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1}$ quand n tend vers l'infini *(pensez à $a^6 - b^6$)*.

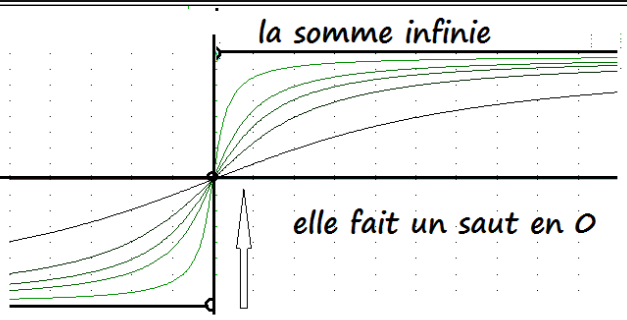
◦62◦ En quels points du graphe de l'application $x \longmapsto \frac{x-1}{x+3}$ la tangente au graphe est elle la plus proche de l'origine, et quand passe-t-elle par l'origine du repère ?

◦63◦ On définit, pour f continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$:

$N_1(f) = \int_0^1 \lvert f(t)\rvert.dt$	$N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2.dt}$	$N_\infty(f) = Sup\{\lvert f(t)\rvert \mid t \in [0,\ 1]\}$

Calculez ces trois normes pour les applications suivantes : $t \longmapsto t^n$, exp, $t \longmapsto \sin(\pi.t)$.
Montrez : $N_1 \leqslant N_\infty$(c'est à dire $\forall f,\ N_1(f) \leqslant N_{\infty(f)}$), $N_2 \leqslant N_\infty$ et $N_1 \leqslant N_2$ (là, il faut penser à quelquechose, ou à quelqu'un ou à quelques uns).
L'application $f \longmapsto |f(0)| + N_1(f')$ est elle une norme sur $C_1([0,\ 1], \mathbb{R})$ (les applications dérivables à dérivée continue).

Pour tout n, on pose $f_n = x \longmapsto Arctan((n+1).x) - Arctan(n.x)$. Montrez (non, sans en revenir aux ε) que chaque f_n est continue de même que chaque $\sum_{n=0}^{N} f_n$ (notée F_N). Montrez que F_∞ (notation abusive) n'est pas continue en 0.



Sinon, que pensez vous de $x \longmapsto x^n$ sur $[0,\ 1]$?

◦64◦ Ou $x \longmapsto \sin(x))^{2.n}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

◦65◦ ♡ Soit g une application de classe C^1 de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Montrez l'existence de n réels deux à deux distincts a_1 à a_n vérifiant $\sum_{k=1}^{n} g'(a_k) = n$ *(indication : théorème des accroissements finis sur $[k/n,\ (k+1)/n]$ et somme télescopique)*.
Soit maintenant f de classe C^1 de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, dont la dérivée ne s'annule jamais. déduisez qu'il existe n réels distincts b_1 à b_n vérifiant $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(b_k)} = n$ *(pensez à travailler sur f^{-1})*.

◦66◦ Pouvez vous trouver deux matrices A et B de taille 2 sur 2 telles que les spectres soient

A	B	$A+B$
$\{1,3\}$	$\{1,5\}$	$\{4,6\}$

A	B	$A+B$
$\{1,3\}$	$\{2,5\}$	$\{1,4\}$

A	B	$A+B$
$\{0,3\}$	$\{2,5\}$	$\{4,6\}$

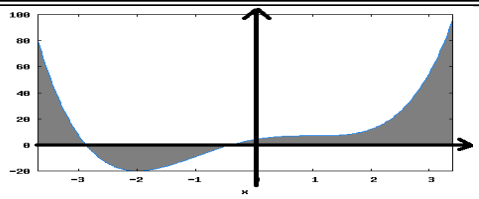
(trois exercices)

◦67◦ ♣ Trouvez toutes les applications f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall a,\ \forall h,\ f(a+h) = f(a) + h.f'\left(a + \frac{h}{2}\right)$.
Trouvez toutes les applications f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\exists \theta \in]0,\ 1[,\ \forall a,\ \forall h,\ f(a+h) = f(a) + h.f'(a + \theta.h)$.

◦68◦ Le prof Phil Sémieuk-Defass ayant bien préparé son cours veut étudier la dérivabilité en 0 de $x \longmapsto x.\left[\frac{1}{x}\right]$ *(notée g)* prolongée par continuité en 0. Prolongez déjà par continuité en définissant $g(0)$. Calculez ensuite les taux $\dfrac{g\left(\frac{1}{n}\right) - g(0)}{\frac{1}{n}}$ et $\dfrac{g\left(\frac{n}{n^2+n-1}\right) - g(0)}{\frac{n}{n^2+n-1}}$. Concluez.

◦69◦ Soit f de classe C^2 de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. On se donne x, il faut montre qu'il existe c vérifiant $f(x) = \dfrac{(x-a).(x-b)}{2}.f''(c)$.
Vous pouvez le faire, pour x fixé, en introduisant $\varphi_x = t \longmapsto f(t) - A.(t-a).(t-b)$ et en ajustant A pour que φ_x soit nulle en x. Bon, beh faites le alors !

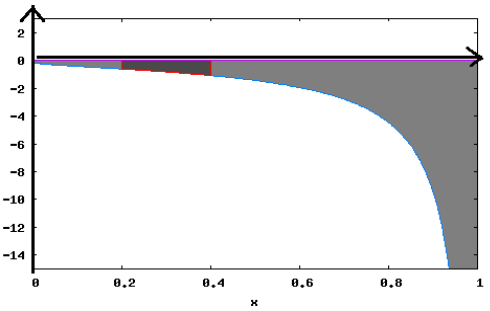
◦70◦ Donnez les intervalles entre lequel $x \longmapsto x^4 - 6.x^2 + 8.x + 4$ est un homéomorphisme. Même question avec difféomorphisme *(f dérivable et f^{-1} aussi)*.

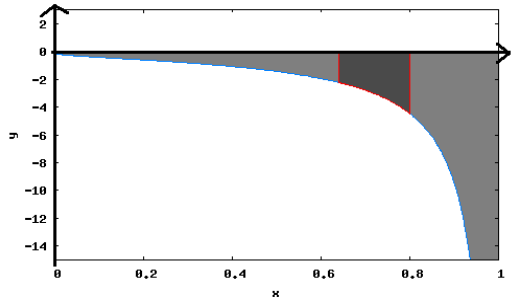


Je sais, vous pensez que je voulais écrire « Donnez les intervalles sur lequel... » et non pas « entre lesquels ». Mais rappelons qu'un homéomorphisme, c'est de ... sur ... C'est donc entre deux intervalles.

◦71◦ On définit $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

Montrez que H est C^1 sur $]0,\ 1[$ et calculez sa dérivée *(pensez à l'écrire $F(x^2) - F(x)$ où F est une primitive de $t \longmapsto \ln^{-1}(t)$ sur $]1,\ +\infty[$)*.
Montrez que $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ est bornée sur $]0,\ 1/2[$ par 0 et $-1/\ln(2)$. Déduisez que $H(x)$ est compris entre 0 et $\dfrac{|x^2 - x|}{\ln(2)}$ pour x entre 0 et $1/2$.
Déduisez que $H(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.





Montrez que $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ en 1 *(attention, ne pas soustraire des "équivalents, ça ne donne rien, réduisez d'abord au dénominateur commun, puis utilisez des développements limités)*.
Montrez que $\displaystyle\int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\right).dt$ converge vers 0 quand x tend vers 1.
Calculez $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$ pour x entre 0 et 1.
Déduisez que $H(x)$ tend vers $\ln(2)$ quand x tend vers 1.
Déduisez en étudiant $F(1) - F(0)$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}.dx = \ln(2)$.

Parés côté **t**ennis, des taupins trichent sur les **m**aths. Des fe**ss**ées, ça fait mal à la nu**q**ue. Ce vieux cr**û** gâte le **g**out du **b**lanc. Des p**arr**ains se b**ut**ent, et ces br**ut**es sont privées de P**âq**ues. Que fait ce verr**at** das ce ch**am**p ? Con**f**inés, il faut remonter la **p**ente !
*Les conf**i**nés sont ils à l'abri des p**a**nnes ? Face au**x** ados dans les ly**c**ées, aux **p**ions et aux conf**i**nés, Blanquer prétend **rec**tifier*

*les **no**tions. Grosse p**ei**ne à Suc**y**. Le **f**eu à la **N**ièvre. Combien de k**inés** conf**us** ? Des confi**n**és ont du mal à pi**g**er. Faut il conf**in**er les p**ort**eurs ?*
*On l'a trop **g**âté à la **t**aule. Ce **j**us sent le **c**oing. Faut il éva**c**uer l'é**l**u ? Tr**ain** de Put**eaux**. Les cheminots **d**outent des **g**ares. Ce viticulteur a vu é**c**later bien des fûts. On observe des **b**ruits en **t**as. Ce cli**mat** trop chaud c'est à **Tho**non ? La dessinatrice **quê**te des **ma**quettes. Cette **B**u**z**in n'arrête pas de **p**é**t**er.*
L'employée qui fait des **c**olis s'attend à être **f**ouillée. Je laisse **p**asser ma belle-**m**ère. J'ai explosé quelques b**u**lles sur le quAI. Qu'est ce qui é**to**nne du cli**mat** ? La b**r**aise échauffe le tout. Coup de fou**d**re dans l'é**th**er, hier. Tu es bienve**n**u, tu peux déco**ll**er. Ma**n**ille aime les **f**eux. A cause des car**en**ces, on ne veut plus des B**é**Dés.

Gérard Durand Gérant du Rare (spécialiste des palindromes) :
Luc note : « Taré, tu palis si la .... rate ton ... ! ».
Ami, Sheila pompa Papon, là chez Mia. (syllabes).
Alec a soif : Ed (rapporte Luc, né ici, ... trop, par défi ?) osa cela. (Retrouvez le mot qui manque dans ce palindrome).
Oui, Dora ! Il .... au gourbi, ce bi, gourd obèse. Il adore, oui. (celui là, il est syllabique).
Mon Edmond, rare génie, venu à Noël à Segré, va ....., ... râpé par Luc, reçu, sa ..... sale ! On a une veine, Gérard, nom de nom !

J'ai enlevé quelques mots, mais comme ce sont des palindrômes, vous pouvez retrouver les lettres qui manquent.