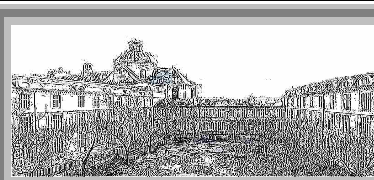
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 10 juin
M.P.S.I.2



2023 2024

TD32

∘0∘ Quelle est la dimension de $Vect(\cos,\ \sin,\ \exp,\ \exp^2,\ \cos^2,\ \sin^2)$?
Quelle est la dimension de $Vect(\cos(x),\ \sin(x),\ \exp(x),\ \cos(2.x),\ \sin(2.x))$?

∘1∘ ♡ Montrez que $x \longmapsto x.e^{(x^2)}$ (notée f) réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Donnez sa dérivée en 0, et la dérivée de sa réciproque en 0.

∘2∘ ♡ On pose $U = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ x\end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Est il possible de choisir x pour que $(U,\ V,\ W)$ soit de rang 3 (libre) et $(M.U,\ M.V,\ M.W)$ de rang 2 (liée) ?
Est il possible de choisir x pour que $(U,\ V,\ W)$ soit de rang 3 et $(M.U,\ M.V,\ M.W)$ de rang 1 ?

∘3∘ Pour tout k, on note E_k l'application $x \longmapsto [x/k]$. Montrez que la famille $(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5)$ est libre dans l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour les lois usuelles.

∘4∘ On vous a proposé deux contrats d'embauche en C.D.D. de six ans. Le salaire d'embauche est de 2 500 euros par mois dans les deux contrats. Le premier propose une augmentation de dix pour cent par an. Le second contrat propose soixante dix pour cent la quatrième année. Quel contrat choisissez vous pour optimiser vos gains sur la durée du contrat ?

∘5∘ ♡ Montrez que $\ln\left(\dfrac{1+2/k^2}{1+1/k^2}\right)$ est équivalent à $\dfrac{1}{k^2}$ quand k tend vers l'infini. Déduisez que le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\frac{k^2+1}{k^2+2}$ admet une limite quand n tend vers l'infini. Écrivez un script `Python` qui calcule la valeur approchée de ce produit pour n égal à 100.
Qu'en est il du produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\frac{k+1}{k+2}$?

∘6∘ On pose $f = (x,\ y) \longmapsto \dfrac{x.y}{x^2+y^2}$. On veut la prolonger par continuité en $(0,\ 0)$.
Calculez $\lim_{x\to 0} f(x,\ 0)$, $\lim_{y\to 0} f(0,\ y)$, $\lim_{x\to 0} f(x,\ x)$ et $\lim_{x\to 0} f(x,\ -x)$.
f est elle prolongeable par continuité en $(0,\ 0)$?

∘7∘ Un point $(a,\ b)$ est un point critique de F (fonction numérique de deux variables dérivable) si les deux dérivées partielles p et q (notées aussi F'_1 et F'_2 ou même F'_x et F'_y, ou encore $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$) s'annulent en $(a,\ b)$.
Trouvez les points critiques des applications suivantes :

a	$(x,\ y) \longmapsto (x-y)^2 + x^3 + y^3$	e	$(x,\ y) \longmapsto x^2.y^3$
b	$(x,\ y) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$	f	$(x,\ y) \longmapsto (x-1)^2 + 2.y^2$
c	$(x,\ y) \longmapsto \sin(x).\sin(y).\sin(x+y)$	g	$(x,\ y) \longmapsto x^3.y + x^3 - x^2.y$
d	$(x,\ y) \longmapsto (x-y)^2 + x^4 + y^4$	h	$(x,\ y) \longmapsto e^{x-y}.(x^2 - 2.y^2)$

∘8∘ Soit ϕ un opérateur linaire sur $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans lui même qui vérifie $\phi(p) = (x \longmapsto p(x+1))$ si p est paire et $\phi(i) = (x \longmapsto i(x-1))$ si i impaire.
Déterminez $\phi(\exp)$.
On doit déterminer $Ker(\phi)$.
Un élève dit : je cherche x vérifiant $\phi(f)(x) = 0$. Pourquoi est il totalement crétin ?
Un élève indique : si f est paire, ceci revient à $\forall x,\ f(x+1) = x$, et donc $\forall t,\ f(t) = 0$; il n'y a que la fonction nulle. Si f est impaire, de la même façon : $f(x-1) = 0$ pour tout x, et f est nulle. Dans tous les cas, f est nulle.
Où est l'erreur dans son « raisonnement » ? Rectifiez.

∘9∘ Montrez que la dérivation est un endomorphisme de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y^{(3)} + 6.y = 2.y'' + 5.y'$.
Donnez une base de cet espace vectoriel des solutions, puis donnez la matrice de la dérivation sur cette base.

∘10∘ Une liste L de longueur 365 indique les bénéfices de votre restaurant chaque jour de l'année écoulée. Écrivez un script qui détermine quelle a été la période de dix jours consécutifs où le bénéfice total a été le moins élevé, pour déterminer quand vous auriez pu le fermer pour prendre des congés.

∘11∘

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24

. SERIE LACUNAIRE .

Le but avoué de cet exercice est de déterminer un équivalent en 1 par valeur inférieure de l'application $x \longmapsto x^1 + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \ldots$ *(infinité de termes)*, après en avoir prouvé l'existence.

On rappelle la définition du logarithme de base a ($a > 0$, $a \neq 1$) : $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$. Vérifiez que c'est bien l'application réciproque de $t \longmapsto a^t$. Résolvez l'équation $\log_2(n) \in \mathbb{N}$ d'inconnue n dans $\mathbb{N} \cap [0,\ 2016]$.

I∼0) Pour tout x réel, on définit les séries suivantes *(les sommes partielles sont en* $\sum_{n=1}^{N}$*)* :

terme général	nom des sommes partielles	nom de la somme si convergence
x^{2n}	$\varphi_N(x)$	$\varphi(x)$
x^{2^n}	$F_N(x)$	$F(x)$
$\log_2(n).x^n$	$G_N(x)$	$G(x)$
$[\log_2(n)].x^n$	$\Gamma_N(x)$	$\Gamma(x)$
$H_n.x^n$	$S_N(x)$	$S(x)$
x^n/n	$L_N(x)$	$L(x)$

Montrez que pour tout x de $]1,\ +\infty[$, ces séries divergent grossièrement.
I∼1) On se fixe x dans $[0,\ 1[$. Montrez que ces séries sont croissantes et que leurs termes généraux tendent vers 0. On ne peut pas encore conclure évidemment, mais calculez déjà $\varphi(x)$.
I∼2) Montrez $F_N(x) \leqslant \varphi_N(x)$ pour tout N. Concluez que F est définie sur $[0,\ 1[$ puis sur $]-1,\ 1[$.
I∼3) Écrivez un script `Python` pour représenter graphiquement F_{10} sur $[-1,\ 1]$.
I∼4) Donnez le développement limité d'ordre 10 de F en 0.

II∼0) Montrez $L_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-t^N}{1-t}.dt$.
II∼1) Montrez par encadrement que $\displaystyle\int_0^x \frac{t^N}{1-t}.dt$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Déduisez la valeur de $L(x)$.
II∼2) Simplifiez $(1-x).S_N(x)$ et déduisez la valeur de $S(x)$.

III∼0) Montrez que la suite $\dfrac{\log_2(n).(2.x)^n}{(1+x)^n}$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini. Est elle bornée ? Déduisez qu'il existe A (dépendant de x mais pas de n) vérifiant $[\log_2(n)].x^n \leqslant \log_2(n).x^n \leqslant A.\Big(\dfrac{1+x}{2}\Big)^n$.
III∼1) Déduisez que $G(x)$ et $\Gamma(x)$ existent.
III∼2) Montrez : $\Gamma(x) \leqslant G(x) \leqslant \Gamma(x) + \dfrac{x}{1-x}$.
III∼3) Montrez : $(1-x).\Gamma(x) = x.F(x)$ *(il faudra étudier quand on a* $[\log_2(n)] = [\log_2(n+1)]$*)*.
III∼4) Montrez pour tout n : $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
III∼5) Déduisez : $\dfrac{G(x)}{x} \leqslant S(x) \leqslant G(x) \leqslant \dfrac{x}{1-x}$.
III∼6) Déduisez que $G(x)$ est équivalent à l'une des quantités suivantes quand x tend vers 1 par valeur inférieure : $-\ln(2).\ln(1-x)$, $\dfrac{1}{(1-x)^2}$, $-\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}$, $(1-x)^{x.\ln(2)}$.
III∼7) Déduisez que $F(x)$ est équivalent à $-\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(2)}$ quand x tend vers 1 par valeur inférieure.

IV∼0) Et que serait un équivalent en 1 de $x \longmapsto x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + \ldots$?

∘12∘

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24

Poincaré

On note $\mathbb{P}$ en hommage à Henri Poincaré le demi plan des complexes de la forme $a + i.b$ avec a et b réels et b strictement positif.
On note l'ensemble des matrices réelles de taille 2 de déterminant 1.
On note T l'ensemble des matrices réelles de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec θ décrivant $\mathbb{R}$.
On note § l'ensemble des matrices réelles de la forme $\begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix}$ avec t décrivant $\mathbb{R}$.
Pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ notée M et tout complexe z de $\mathbb{P}$, on note $M * z$ le complexe $\dfrac{a.z + b}{c.z + d}$.

I∼0) Montrez que $(D,\ \times)$ est un groupe non commutatif.
I∼1) Montrez que $(T,\ \times)$ est un sous-groupe commutatif de $(D,\ \times)$.
I∼2) Montrez que pour toute M de et tout z de $\mathbb{P}$, $M * z$ existe et est dans $\mathbb{P}$.
I∼3) Montrez : $\forall (A,\ B) \in D^2,\ \forall z \in \mathbb{P},\ A * (B * z) = (A.B) * z.$
I∼4) Montrez : $\forall M \in \mathrm{T},\ M * i = i.$
I∼5) Montrez : $\forall M \in,\ M * i = i \Leftrightarrow M \in \mathrm{T}.$

II∼0) On définit sur la relation $\eqcirc$ par $A \eqcirc B \Leftrightarrow A^{-1}.B \in \mathrm{T}$. Montrez que c'est une relation d'équivalence.

III∼0) On définit pour M de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $N(M) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Montrez que N est une norme, c'est à dire :
• pour toute M de : $N(M)0$ et $(N(M) = 0 \Leftrightarrow M = 0)$ *(matrice nulle)*
• pour toute M de et tout λ de $\mathbb{R}$: $N(\lambda.M) = |\lambda|.N(M)$
• pour tout couple $(A,\ B)$ de ^{2} : $N(A + B)N(A) + N(B)$ ah, non, celle là, on la garde pour la fin.

III∼1) Montrez pour tout couple $(A,\ B)$ de ^{2} : $A \eqcirc B \Rightarrow N(A) = N(B)$.
III∼2) La réciproque est elle vraie ? Indication : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

IV∼0) Montrez : $\forall z \in \mathbb{P},\ \exists A \in,\ A * i = z.$
IV∼1) Déduisez : $\forall (z,\ Z) \in \mathbb{P}^2,\ \exists A \in,\ A * z = Z$. A-t-on unicité de A ?

V∼0) Plus précisément, montrez $\forall z \in \mathbb{P},\ (\exists A \in,\ A * i = z)\ et\ (\forall M \in D,\ M * i = z \Rightarrow N(M) = N(A)$. On décide alors de nommer "hauteur de z" la quantité $N(A)$ pour toute matrice A de vérifiant $A * i = z$.
Calculez la hauteur de i. Calculez la hauteur de $\lambda.i$ pour tout réel λ strictement positif, et indiquez pour quel λ cette hauteur est minimale. Calculez la hauteur de $1 + i$.

VI∼0) On rappelle que pour deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^4$ ($\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$), on peut calculer leur produit scalaire de deux façons : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = a.\alpha + b.\beta + c.\gamma + d.\delta$
mais aussi $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}.\cos(\widehat{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}})$. Montrez la propriété mise de côté : • pour tout couple $(A,\ B)$ de ^{2} : $N(A + B) \leqslant N(A) + N(B)$.
En considérant les deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} d \\ -c \\ -b \\ a \end{pmatrix}$, montrez que toutes les matrices A de vérifient $N(A) \geqslant \sqrt{2}$. Déduisez que les complexes ont tous une hauteur au moins égale à $\sqrt{2}$.

∘13∘ Calculez $\displaystyle\int_0^1 t.Arcsin(t).dt$.

◦14◦ ♡ Une application linéaire f de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ dans $(\mathbb{R}_2[X],+,.)$ vérifie $f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}) = X^2+X+1$, $f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) = X^2-X$ et $f(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) = X^2-X$.
Calculez $f(\overrightarrow{i})$, $f(\overrightarrow{j})$ et $f(\overrightarrow{k})$. Déterminez le noyau de f.

◦15◦ *E est* l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 nuls en 1.
Complétez le tableau.
Pour celles qui sont des bases, regroupez les en deux groupes en fonction de leur orientation relative.

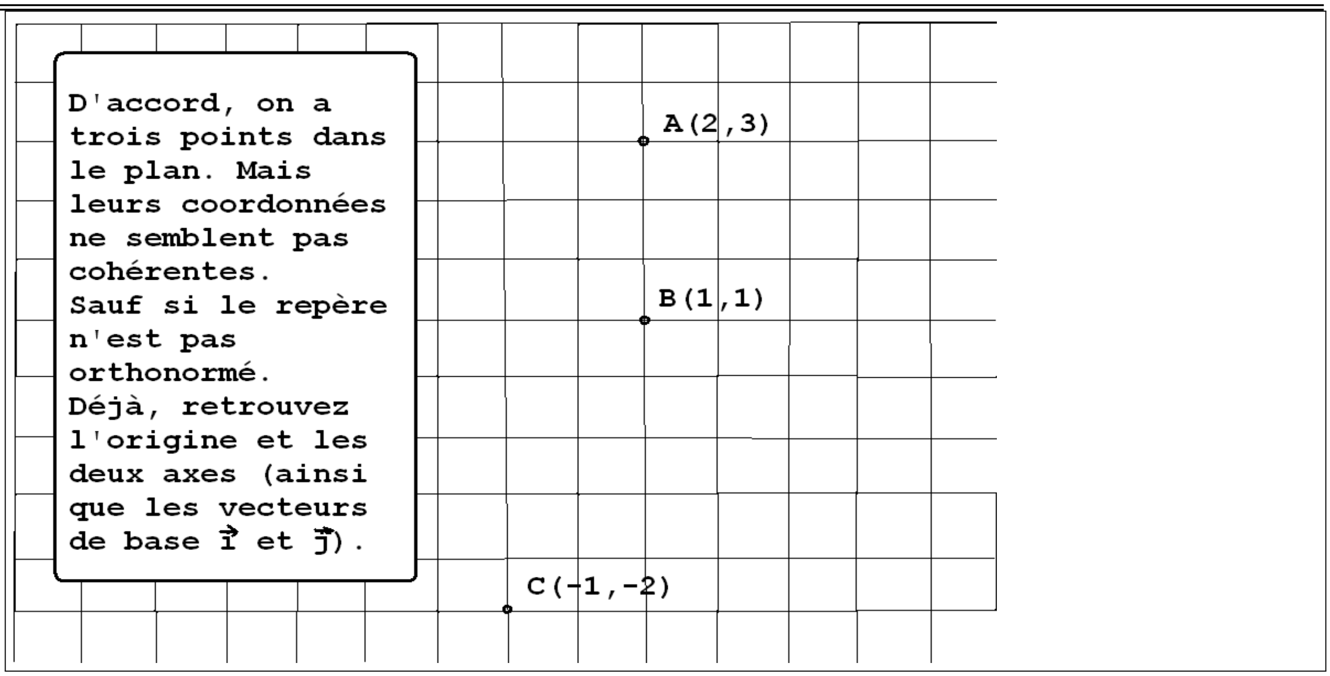
	génératrice	base
$(1, X, X^2, X^3)$		
$((X-1),\ (X-1)^2,\ (X-1)^3)$		
$(X-1),\ (X-1).(X-2),\ (X-1).(X-2).(X-3))$		
$(X-1),\ (X-1).(X-2),\ (X-1).(X-2)^2)$		
$(X-1,\ (X-1)^2,\ (X-1).(X-2),\ (X-1).(X-3))$		
$((X-1)^2.(X-2),\ (X-1).(X-2)^2,\ X-1)$		
$((X-1),\ (X-1).X,\ (X-1).X^2)$		

◦16◦ Montrez que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\right)$ est liée dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles vous pouvez enlever n vecteurs de la famille alors qu'elle reste liée.
Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles vous pouvez enlever n vecteurs de la famille pour qu'elle devienne libre.

◦17◦ Soient A et B deux matrices carrées de taille 2. Montrez que la famille $(A^2,\ B^2,\ A.B,\ A.B.A,\ B.A.B)$ est liée.

◦18◦ ♡ Un élève a l'intention de démontrer que la famille $(\cos,\ \cos^2,\ \cos^3,\ \sin)$ est liée dans $(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,.)$. Il veut pour un quadruplet donné $(a,\ b,\ c,\ d)$: $a.\cos + b.\cos^2 + c.\cos^3 + d.\sin = 0$ *(fonction nulle)*. Il calcule en 0 en $\pi/4$ et en $\pi/2$.
Il aboutit au système $\left\{\begin{array}{lllll} a & +b & +c & & = 0 \\ \sqrt{2}.a/2 & +b/2 & +\sqrt{2}.c/4 & +\sqrt{2}.d/2 & = 0 \\ & & & +d & = 0 \end{array}\right.$. Il trouve une solution non nulle $(a,b,c,d) = (\sqrt{2}/2,\ -(2+\sqrt{2})/2,\ 1,\ 0)$ *(vérifiez)*. Pourquoi son raisonnement est il faux ?

◦19◦



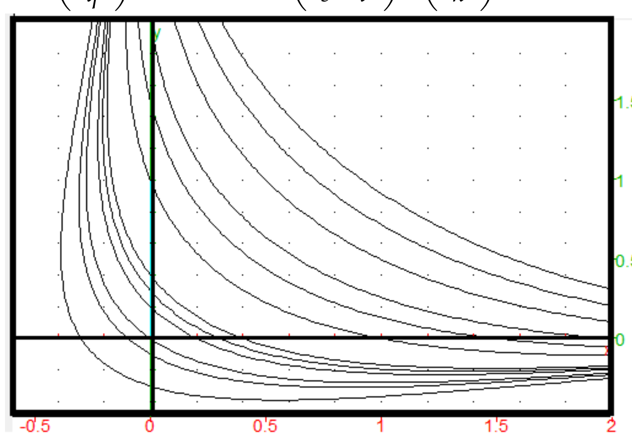
◦20◦ Montrez que si $(S_1, \ldots S_p)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$ et $(A_1, \ldots A_q)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$, alors $(S_1, \ldots S_p, A_1, \ldots A_q)$ n'est pas forcément une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$.
Montrez que si $(S_1, \ldots S_p)$ est une famille libre de $(S_n(\mathbb{R}),+,.)$ et $(A_1, \ldots A_q)$ est une famille libre de $(A_n(\mathbb{R}),+,.)$, alors $(S_1, \ldots S_p, A_1, \ldots A_q)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$.

Rappel : $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$ est l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n sur n ; S_n en est le sous-espace des matrices symétriques (définition : ${}^tS = S$) et enfin A_n en est le sous-espace des matrices antisymétriques (définition : ${}^tA = -A$) .

◦21◦ Montrez que dans $(\mathbb{R},+,.)$, vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la famille $(\cos(\theta), \cos(2.\theta), \cos(3.\theta))$ est liée pour tout θ.
Pour quelles valeurs de θ dans $(\mathbb{R},+,.)$, vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, la famille $(\cos(\theta), \cos(2.\theta), \cos(3.\theta))$ est-elle libre ?
$\theta = 0, \theta = \dfrac{\pi}{3}, \theta = \dfrac{\pi}{12}, \theta = \dfrac{\pi}{4}, \theta = \dfrac{\pi}{2}, \theta = \dfrac{\pi}{5}$

◦22◦ On définit $\phi = (u,\ v) \longmapsto (x,\ y)$ de $(\mathbb{R}^+)^2$ dans $\mathbb{R}^2$ avec $x = u^2 - v^2$ et $y = u.v$. Déterminez $\dfrac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}$ (c'est $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$).
Résolvez $\det\left(\dfrac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right) = 0$ d'inconnues u et v.
Montrez : $\phi(a+h,\ b+k) = \phi(a,b) + \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} . \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} + \overrightarrow{o(\sqrt{h^2+k^2})}$ (et expliquez la présence de cette flèche sur le petit o).
On admet que ϕ^{-1} est différentiable en $(0,\ 1)$. Donnez son développement limité d'ordre 1 en $(0,\ 1)$.

◦23◦ On définit : $F = (x,\ y) \longmapsto x.e^y + y.e^x$. Calculez les dérivées d'ordre 1 et 2 de F en $(a,\ b)$.
Retrouvez les coefficients : $F(1+h,\ 0+k) = z_0 + \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(h^2+k^2)$.

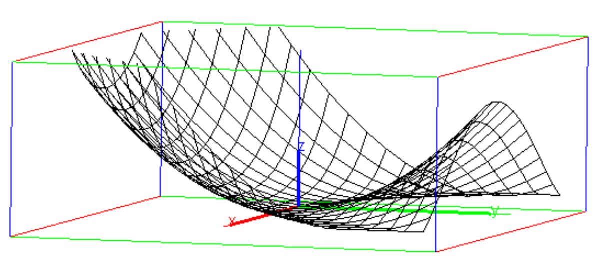


x et y sont liés par l'équation (impossible à résoudre par fonctions usuelles) $x.e^y + y.e^x = 1$. Calculez y pour $x = 0$.
Calculez y pour $x = 1$.
Montrez que si x et y sont liées ainsi, alors on a $y' = -\dfrac{y.e^x + e^y}{x.e^y + e^x}$.
Réciproque ?

◦24◦ ♡ A est une matrice 2×2 donnée. H est une matrice donnée.
Donnez le développement limité d'ordre 1 de $t \longmapsto \det(A + t.H)$ sous la forme $\det(A) + t.☺ + o(t)$ où vous exprimerez le réel ☺ à l'aide de A et H (et si possible pas à l'aide de leurs coefficients).

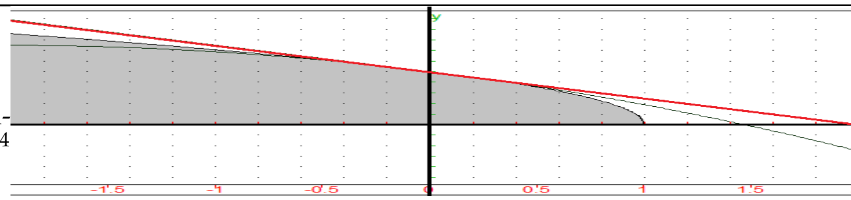
A est une matrice de taille n sur n donnée, inversible. Donnez le développement limité d'ordre 1 de $t \longmapsto \det(A + t.H)$ sous la forme $\det(A) + t.☻ + o(t)$ où vous mettrez ☻ sous la forme de la trace d'une matrice simple.

◦25◦ On définit : $F = (x,\ y) \longmapsto (x^2 - y).(x^2 - 2.y)$.



Donnez son développement limité d'ordre 2 en $(0,\ 0)$.
Montrez que $x \longmapsto F(x,0)$ et $y \longmapsto F(0,y)$ admettent en 0 un minimum.
Montrez que pour tout θ l'application $r \longmapsto F(0 + r.\cos(\theta),\ 0 + r.\sin(\theta))$ admet un minimum en $r = 0$.
Montrez que F n'admet pas un minimum local en $(0,\ 0)$ en trouvant des points aussi proches de $(0,\ 0)$ qu'on veut vérifiant $F(x,\ y) < 0$.

∘26∘ On veut utiliser $\sqrt{1-x} \simeq 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$.
Sur quel intervalle peut on se placer pour qu'elle soit correcte à 10^{-4} près ?



∘27∘ $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & +4.b & -c & \\ & b & +c & \\ a & & +3.c & +d \end{pmatrix}$ va de $(\mathbb{R}^4, +, .)$ dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$. Donnez son image et son noyau (base et équations cartésiennes).

∘28∘ ♣ ou ♡ ? Calculez la limite (étonnante ?) de $\dfrac{e.\sqrt[3]{e}.\sqrt[5]{e}.\sqrt[7]{e}.\sqrt[9]{e}\ldots\sqrt[2.n+1]{e}}{\sqrt[2]{e}.\sqrt[4]{e}.\sqrt[6]{e}.\sqrt[8]{e}.\sqrt[10]{e}\ldots\sqrt[2.n]{e}}$ quand n tend vers l'infini (mot clef : $\ln(1+h) = \sum_{k=1}^{n} \ldots + \ldots$ avec $h = 1$).

∘29∘ ♡ Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie. On suppose $E = Ker(f) + Ker(g)$ et $E = Im(f) + Im(g)$.
Montrez que l'on a alors $E = Ker(f) \oplus Ker(g)$ et $E = Im(f) \oplus Im(g)$.
Si vraiment vous avez besoin d'une indication : utilisez la formule du rang et la formule de Grassmann.

∘30∘ Déterminez le noyau de $f \longmapsto f' - f$ de $C^\infty(\mathbb{R})$ dans lui même.
Déterminez le noyau de $P \longmapsto P' - P$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui même.

∘31∘ ♡ Montrez qu'il existe un endomorphisme f de E vérifiant $Ker(f) = Im(f)$ si et seulement si $\dim(F)$ est paire.
Pour un sens, on construira un endomorphisme sur la base $(\overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \ldots \overrightarrow{e_{2.p}})$ en donnant sa matrice avec bon nombre de 0.

∘32∘ On définit $f = X \longmapsto M.X$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & & 1 & \\ & -3 & & 3 \end{pmatrix}$ et $P = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Donnez la dimension de P et une équation cartésienne de P.

Ajustez les coefficients de M pour avoir $Im(f) \subset P$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \in Ker(f)$. A-ton $Im(f) = P$? Donnez une base et la dimension de $Ker(f)$ (rappelle : $Ker(f)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs dont l'image est nulle).

∘33∘ ♡ Donnez le développement asymptotique de la suite $\left(\exp\left(\dfrac{n+4}{n+1}\right)\right)_n$ sous la forme $a.n + b + \dfrac{c}{n} + \dfrac{d}{n^2} + o(n^{-2})_{n\to+\infty}$ *(oui, certains coefficients sont peut être nuls).*

∘34∘ Donnez la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$ si elle existe.

∘35∘ Complétez $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$ (notée A) pour que le noyau de $X \longmapsto A.X$ soit $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Déterminez alors son image.
Diagonalisez alors A.

∘36∘ Donnez la limite de $(x+1).\ln(x) - x.\ln(x+1)$ quand n tend vers l'infini. Trouvez alors un équivalent en $a.x^b.(\ln(x))^c$.

∘37∘ A Paris, un mariage sur deux se termine par un divorce dans les dix ans. Sachant que je n'ai pas divorcé sur les dix dernières années, calculez la probabilité que ma femme en ait fait de même.

∘38∘ Montrez : $Ker(g \circ f) = Ker(f) \Leftrightarrow Im(f) \cap Ker(g) = \{\overrightarrow{0}\}$ après avoir précisé les ensembles de départ et d'arrivée de ces morphismes.

∘39∘ ♡ Sachant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, montrez que $M \longmapsto M.A - Tr(M).A$ est un endomorphisme de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Donnez la dimension de son noyau.

Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

∘40∘ ♠ Donnez la limite de $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}.dx$ *(notée I_n)*. Calculez I_0 et I_1. Donnez une relation de récurrence sur la suite I.

Donnez un équivalent en $+\infty$ de $\int_0^1 x^n \ln(1+x^2).dx$.

∘41∘ ♡ f et g sont linéaires de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$, α et β sont deux réels. Montrez : $Ker(f) \cap Kar(g) \subset Ker(\alpha.f + \beta.g)$.

∘42∘ ♡ a- Limite en 0 si elle existe de $x^{\frac{1}{1+2.\ln(x)}}$.
b- Limite en 0 si elle existe de $x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$.
c- Limite en e si elle existe (par valeur inférieure) de $\big(\ln(x)\big)^{\ln(e-x)}$.
d- Limite en 0 si elle existe (par valeur supérieure) de $\frac{1}{x.\big(x - \ln(x)\big)^x}$.

∘43∘ Montrez $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(t+i)^2}.dt = \frac{\pi}{4} - \frac{i.\ln(2)}{2}$ et puis montrez aussi $\int_0^{\pi/3} \theta.\tan^2(\theta).d\theta = \frac{\pi.\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi^2}{18} - \ln(2)$ tiens, et pourquoi pas $\int_1^2 \frac{dt}{t.(t^n+1)} = \frac{1}{n}.\ln\left(\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)$ et pour terminer $\int_0^1 3^{t+3^t}.dt$. Et $\int_1^2 \frac{4}{x^2+2.i.x}.dx = i.\ln(2) - i.\ln(5) + Arctan\left(\frac{3}{4}\right)$.

∘44∘ Montrez que $M \longmapsto {}^t M + 2.M$ est un endomorphisme de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$.
Déterminez son noyau. Est-ce un automorphisme.
Montrez que c'est un automorphisme de $(S_3(\mathbb{R}), +, .)$.
Montrez que c'est un automorphisme de $(A_3(\mathbb{R}), +, .)$.
Donnez la matrice de cette application sur la base canonique de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ *(attention, elle est de taille 9 sur 9, mais rassurez vous, elle contient beaucoup de 0)*.
Calculez sa trace, et calculez *(sans effort, S.V.P.)* son déterminant.

∘45∘ Combien d'endomorphismes de $(P^2, +, .)$ ont pour noyau $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et vérifient $f \circ f = 0$? $(P, +, \times)$ est le corps des entiers de 0 à 10 pour l'addition modulo 11.

∘46∘ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Montrez que $M \longmapsto A.M$ est un endomorphisme de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Déterminez son noyau. Est il surjectif ? Déterminer son rang.

∘47∘ Connaissez vous le principe mathématique de l'évidence ?

∘48∘ Le théorème des accroissements finis dit, pour f dérivable de I dans $\mathbb{R}$: $\forall (a, b) \in I^2, \exists c \in]a, b[, f(b) - f(a) = (b-a).f'(c)$. Déterminez c en fonction de a et b pour l'application $f = x \longmapsto \frac{1+x}{2+x}$.

Déterminez la limite de $\frac{c-a}{b-a}$ ci dessus défini quand b tend vers a.

∘49∘ Donnez deux matrices qui ont le même polynôme caractéristique mais ne sont pas semblables, en taille 2 puis en taille 3.

∘50∘ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de $\sqrt{n^2+2.n+5} - n$. Déduisez que $(\sqrt{n^2+2.n+5} - n)^n$ est une forme indéterminée. Calculez quand même sa limite, quitte à revenir à $\Big(1 - (\sqrt{n^2+2.n+5} - n - 1)\Big)^n$ et à la forme logarithmique *(indication : e^2)*.

∘51∘ Donnez si elle existe, la limite en 0^+ de x^{1-x^x}.

∘52∘ Montrez que ce sont trois normes sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

$N_1(h,\ k)$	$N_2(h,\ k)$	$N_\infty(h,\ k)$
$\|h\|+\|k\|$	$\sqrt{h^2+k^2}$	$Max(\|h\|,\ \|k\|)$

Vérifiez que ce sont des normes (existence, positivité, homogénéité, séparation, inégalité triangulaire).
Trouvez les neuf constantes qui manquent, dont certes trois sont un peu simples : $\forall(h,\ k)\in\mathbb{R}$,

$N_1(h,\ k)\leqslant\ldots N_1(h,\ k)$	$N_1(h,\ k)\leqslant\ldots N_2(h,\ k)$	$N_1(h,\ k)\leqslant\ldots N_\infty(h,\ k)$
$N_2(h,\ k)\leqslant\ldots N_1(h,\ k)$	$N_2(h,\ k)\leqslant\ldots N_2(h,\ k)$	$N_2(h,\ k)\leqslant\ldots N_\infty(h,\ k)$
$N_\infty(h,\ k)\leqslant\ldots N_1(h,\ k)$	$N(h,\ k)\leqslant\ldots N_2(h,\ k)$	$N_\infty(h,\ k)\leqslant\ldots N_\infty(h,\ k)$

Les développements limités sur $\mathbb{R}^2$ se terminent par un $o(\sqrt{h^2+k^2})$ dans notre cours. Mais si on change de norme. Montrez que si $r(h,k)$ est un $o(\sqrt{h^2+k^2})$ (c'est à dire $\dfrac{r(h,h)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ tend vers 0 quand h et k tendent vers 0), alors c'est aussi un $o(|h|+|k|)$ (c'est à dire $\dfrac{r(h,h)}{|h|+|k|}$ tend vers 0 quand h et k tendent vers 0). Montrez la réciproque et la comparaison avec les autres normes aussi.

∘53∘ Soit f croissante de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. On découpe suivant une équisubdivision, montrez : $R_g(f)\leqslant\int_a^b f(t).dt\leqslant R_d(f)$ et calculez $R_d(f)-R_g(f)$.

Déduisez que ce sont des approximations de $\int_a^b f(t).dt$ à $O\left(\frac{1}{n}\right)$ près.

Soit f de classe C^1 de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. On se donne k et on écrit $a_k=a+k.\dfrac{b-a}{n}$.

Montrez : $\forall x\in[a_k,\ a_{k+1}],\ |f(x)-f(a_k)|\leqslant\dfrac{b-a}{n}.||f'||$.

Déduisez $\left|\int_a^b-\dfrac{b-a}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}f(a_k)\right|\leqslant\dfrac{(b-a)^2}{n}.||f'||$.

∘54∘ L'élève Hilaine *(duc Roupion)* dit que l'équation $n.\pi\in\{[2.k,\ 2.k+1[\ |\ k\in\mathbb{N}\}$ d'inconnue n dans Z n'a qu'un nombre fini de solutions. L'élève Axinée *(comte Laraje)* dit qu'au contraire elle en a une infinité. Qui a raison ? Prouvez le *(sauf si vous me dites que les deux ont raison)*.

∘55∘ On définit $F(x,\ y)=\dfrac{y^2}{x}$si $x\neq 0$ et $F(0,\ y))=0$ pour tout x.
Montrez que $x\longmapsto F(x,\ 0)$ et $y\longmapsto F(0,\ y)$ sont continues en 0.
Montrez que $r\longmapsto F(r.\cos(\theta),\ 0+r.\sin(\theta))$ est continue en $r=0$ pour tout θ fixé.
Montrez que F n'admet pas de DL_0 en $(0,\ 0)$ (en montrant qu'elle n'est pas bornée par exemple).