LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 10 juin
M.P.S.I.2

2023 2024

TD32

∘0∘ Quelle est la dimension de $Vect(\cos,\ \sin,\ \exp,\ \exp^2,\ \cos^2,\ \sin^2)$?
Quelle est la dimension de $Vect(\cos(x),\ \sin(x),\ \exp(x),\ \cos(2.x),\ \sin(2.x))$?

Pour $Vect(\cos,\ \sin,\ \exp,\ \exp^2,\ \cos^2,\ \sin^2)$, les objets sont bien des vecteurs, en tant que fonctions.
La dimension ne peut pas dépasser 6, car on a une famille génératrice de six vecteurs.
Reste à savoir si elle est libre.
Si elle l'est, elle forme une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre. Et la dimension vaut donc 6.
On suppose donc, pour un sextuplet[1] donné (a, b, c, d, e, f) : $a.\cos + b.\sin + c.\exp + d.\exp^2 + e.\cos^2 + f.\sin^2 = 0$ (fonction nulle).
On traduit : $\forall x,\ a.\cos(x) + b.\sin(x) + c.e^x + d.e^{2.x} + e.\cos^2(x) + f.\sin^2(x) = 0$. Et on joue sur le $\forall x$ pour annuler les coefficients.
Les idées sont classiques : regarder en quelques points bien choisis, dériver, regarder encore en quelques points, regarder vers $+\infty$.
Je vais commencer par l'idée de $+\infty$.
On commence par diviser par $e^{2.x}$ (non nul) :

$$\forall x,\ \frac{a.\cos(x) + b.\sin(x)}{e^{2.x}} + c.e^{-x} + d + \frac{e.\cos^2(x) + f.\sin^2(x)}{e^{2.x}} = 0$$

On fait tendre x vers $+\infty$ (c'est vrai pour tout x !) : $0 + d + 0 = 0$.

On recommence en effaçant $d.e^{2.x}$ et en divisant juste cette fois par e^x :

$$\forall x,\ \frac{a.\cos(x) + b.\sin(x)}{e^x} + c + \frac{e.\cos^2(x) + f.\sin^2(x)}{e^x} = 0$$

Cette fois, c'est c qui est nul.
On s'est débarrassé des exponentielles (qui n'auraient pas pû être égales à des lignes trigonométriques !).

On repart de $\forall x,\ a.\cos(x) + b.\sin(x) + e.\cos^2(x) + f.\sin^2(x) = 0$ et on regarde en particulier en 0 et en π :
$a + e = 0$ et $-a + e = 0$.
Cette fois, c'est a et e qui sont nuls.
On regarde en $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{-\pi}{2}$.
Et c'est fini !

La dimension vaut 6.

Et pour $Vect(\cos(x),\ \sin(x),\ \exp(x),\ \cos(2.x),\ \sin(2.x))$?
Eh bien, pour tout x, ce sont des réels.
On est donc dans $(\mathbb{R}, +, .)$, de dimension 1, et on a pris six vecteurs (dont plusieurs non nuls).
La dimension vaut toujours 1.

Il ne faut effectivement pas confondre $Vect(\cos(x),\ \sin(x),\ \exp(x),\ \cos(2.x),\ \sin(2.x))$ de cette question avec

$$Vect(x \longmapsto \cos(x),\ x \longmapsto \sin(x),\ x \longmapsto \exp(x),\ x \longmapsto \cos(2.x),\ x \longmapsto \sin(2.x))$$

de la question précédente...

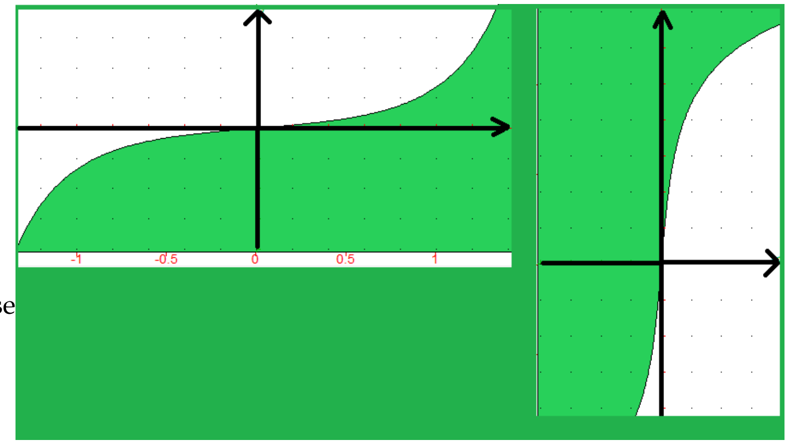
∘1∘ ♡ Montrez que $x \longmapsto x.e^{(x^2)}$ (notée f) réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Donnez sa dérivée en 0, et la dérivée de sa réciproque en 0.

Cette application est continue, dérivable. Elle se dérive en $x \longmapsto e^{x^2}.(1 + 2.x^2)$.

1. j'ai peur : par quoi mon correcteur orthographique va-t-il me proposer de remplacer « sextuplet » si il ne le trouve pas dans sa base de données ?

sa dérivée est strictement positive, l'application est strictement croissante, et n'a pas ces préjudiciables tangentes horizontales.
Elle réalise un difféomorphisme de l'intervalle de départ $]-\infty,\ +\infty[$ sur l'intervalle image $]-\infty,\ +\infty[$ (limites aux bornes).

On constate $f(0)=0$ donc $0=f^{-1}(0)$.
On dérive : $f'(0)=1$. Et on passe à l'inverse
$(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$ avec ici $x=y=0$.
Sa réciproque a pour dérivée 1 en 0.



∘2∘ ♡ On pose $U=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $W=\begin{pmatrix}2\\1\\x\end{pmatrix}$ et $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&4\\1&2&3\end{pmatrix}$. Est il possible de choisir x pour que $(U,\ V,\ W)$ soit de rang 3 (libre) et $(M.U,\ M.V,\ M.W)$ de rang 2 (liée) ?
Est il possible de choisir x pour que $(U,\ V,\ W)$ soit de rang 3 et $(M.U,\ M.V,\ M.W)$ de rang 1 ?

On veut une famille de trois vecteurs de rang 3. On veut donc une famille libre.
On veut une famille libre de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$: on veut une base de $(\mathbb{R}^3,+,.)$.
Il faut et il suffit que le déterminant $\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&1\\1&0&x\end{vmatrix}$ soit non nul. On évitera $x=3$.
En revanche, on veut que la famille des trois images soit de rang 2.
Les vecteurs $M.U$ et $.V$ sont déjà indépendants : $\begin{pmatrix}3\\6\\6\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$
Il faut et il suffit que $M.W$ soit combinaison de $M.U$ et $M.V$.
Mais alors M transforme une base en famille liée...
Or $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&4\\1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&4\\0&1&2\end{vmatrix}=0$.
C'est donc possible !
D'ailleurs, quel que soit le choix de x (même pour x égal à 3), les trois vecteurs $M.U$, $.V$ et $M.W$ sont dans un ensemble image de dimension 2.
Ils forment une famille de rang majoré par 2.
Ils forment une famille de rang 2 grâce aux deux premiers.

Bref, pour x égal à 3, (U,V,W) est de rang 2 et $(M.U,M.V,M.W)$ aussi.
Enfin, pour x différent de 3, (U,V,W) est de rang 3 et $(M.U,M.V,M.W)$ de rang 2.

∘3∘ Pour tout k, on note E_k l'application $x\longmapsto[x/k]$. Montrez que la famille (E_1,E_2,E_3,E_4,E_5) est libre dans l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour les lois usuelles.

On se donne cinq réels et on suppose : $\alpha_1.E_1+\alpha_2.E_2+\alpha_3.E_3+\alpha_4.E_4+\alpha_5.E_5=0$ (fonction nulle). L'objectif est $\alpha_1=\ldots=\alpha_5=0$.
On traduit l'hypothèse : $\forall x\in\mathbb{R},\ \alpha_1.[x]+\alpha_2.[x/2]+\alpha_3.[x/3]+\alpha_4.[x/4]+\alpha_5.[x/5]=0$.
On prend des points particuliers :

point	formule	conclusion	report
$x=1$	$\alpha_1.1+0=0$	$\alpha_1=0$	$\forall x\in\mathbb{R},\ \alpha_2.[x/2]+\alpha_3.[x/3]+\alpha_4.[x/4]+\alpha_5.[x/5]=0$
$x=2$	$0.2+\alpha_1.1+0=0$	$\alpha_2=0$	$\forall x\in\mathbb{R},\ \alpha_3.[x/3]+\alpha_4.[x/4]+\alpha_5.[x/5]=0$
$x=3$	$0.3+0.1+\alpha_3.1=0$	$\alpha_3=0$	$\forall x\in\mathbb{R},\ \alpha_4.[x/4]+\alpha_5.[x/5]=0$

et ainsi de suite. Les α_i sont nuls. La famille est libre.

◦4◦

On vous a proposé deux contrats d'embauche en C.D.D. de six ans. Le salaire d'embauche est de 2 500 euros par mois dans les deux contrats. Le premier propose une augmentation de dix pour cent par an. Le second contrat propose soixante dix pour cent la quatrième année. Quel contrat choisissez vous pour optimiser vos gains sur la durée du contrat ?

On peut même faire le calcul avec un tableur, comme au collège.

◦5◦

♡ Montrez que $\ln\left(\dfrac{1+2/k^2}{1+1/k^2}\right)$ est équivalent à $\dfrac{1}{k^2}$ quand k tend vers l'infini. Déduisez que le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\frac{k^2+1}{k^2+2}$ admet une limite quand n tend vers l'infini. Écrivez un script **Python** qui calcule la valeur approchée de ce produit pour n égal à 100.

Qu'en est il du produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\frac{k+1}{k+2}$?

◦6◦

On pose $f = (x,\ y) \longmapsto \dfrac{x.y}{x^2+y^2}$. On veut la prolonger par continuité en $(0,\ 0)$.

Calculez $\lim_{x\to 0} f(x,\ 0)$, $\lim_{y\to 0} f(0,\ y)$, $\lim_{x\to 0} f(x,\ x)$ et $\lim_{x\to 0} f(x,\ -x)$.

f est elle prolongeable par continuité en $(0,\ 0)$?

◦7◦

Un point $(a,\ b)$ est un point critique de F (fonction numérique de deux variables dérivable) si les deux dérivées partielles p et q (notées aussi F'_1 et F'_2 ou même F'_x et F'_y, ou encore $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$) s'annulent en $(a,\ b)$.

Trouvez les points critiques des applications suivantes :

a	$(x,\ y) \longmapsto (x-y)^2 + x^3 + y^3$	e	$(x,\ y) \longmapsto x^2.y^3$
b	$(x,\ y) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	f	$(x,\ y) \longmapsto (x-1)^2 + 2.y^2$
c	$(x,\ y) \longmapsto \sin(x).\sin(y).\sin(x+y)$	g	$(x,\ y) \longmapsto x^3.y + x^3 - x^2.y$
d	$(x,\ y) \longmapsto (x-y)^2 + x^4 + y^4$	h	$(x,\ y) \longmapsto e^{x-y}.(x^2 - 2.y^2)$

a	$(x,\ y) \longmapsto (x-y)^2 + x^3 + y^3$	e	$(x,\ y) \longmapsto x^2.y^3$
	$2.(x-y) + 3.x^2 = 0$		$2.x.y^3 = 0$
	$-2.(x-y) + 3.y^2 = 0$		$3.x^2.y^2 = 0$
	$(0,\ 0)$		$(0,\ 0)$

b	$(x,\ y) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	f	$(x,\ y) \longmapsto (x-1)^2 + 2.y^2$
	$2.a.x + 2.b.y = 0$		$2.(x-1) = 0$
	$2.b.x + 2.c.y = 0$		$4.y = 0$
	$(0,\ 0)$ sauf si...		$(0,\ 0)$

c	$(x,\ y) \longmapsto \sin(x).\sin(y).\sin(x+y)$	g	$(x,\ y) \longmapsto x^3.y + x^3 - x^2.y$
	$\cos(x).\sin(y).\sin(x+y) + \sin(x).\sin(y).\cos(x+y) = 0$		$3.x^2.y + 3.x^2 - 2.x.y = 0$
	$\cos(y).\sin(y).\sin(x+y) + \sin(x).\sin(y).\cos(x+y) = 0$		$x^3 - x^2 = 0$
	A faire		$(1,\ -3)$ et tous les $(0,\ y)$

d	$(x,\ y) \longmapsto (x-y)^2 + x^4 + y^4$	h	$(x,\ y) \longmapsto e^{x-y}.(x^2 - 2.y^2)$
	$2.(x-y) + 4.x^3 = 0$		$e^{x-y}.(x^2 + 2.x - 2.y^2) = 0$
	$-2.(x-y) + 4.y^3 = 0$		$e^{x-y}.(-x^2 + 2.y^2 - 4.y) = 0$
	$(0,\ 0)$		$(0,\ 0)$ et $(-4,\ -2)$

◦8◦

Soit ϕ un opérateur linaire sur $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans lui même qui vérifie $\phi(p) = (x \longmapsto p(x+1))$ si p est paire et $\phi(i) = (x \longmapsto i(x-1))$ si i impaire.

Déterminez $\phi(\exp)$.

On doit déterminer $Ker(\phi)$.

Un élève dit : je cherche x vérifiant $\phi(f)(x) = 0$. Pourquoi est il totalement crétin ?

Un élève indique : si f est paire, ceci revient à $\forall x,\ f(x+1) = 0$, et donc $\forall t,\ f(t) = 0$; il n'y a que la fonction nulle. Si f est impaire, de la même façon : $f(x-1) = 0$ pour tout x, et f est nulle. Dans tous les cas, f est nulle. Où est l'erreur dans son « raisonnement » ? Rectifiez.

Comme l'opérateur est linéaire, et comme toute application se décompose d'une façon unique en partie paire et impaire, il suffit de se laisser porter, en surveillant toutefois les étages

$$\phi(\exp) = \phi(ch + sh) = (x \longmapsto ch(x+1) + x \longmapsto sh(x-1)) = \left(x \longmapsto \frac{e^{x+1} + e^{-x-1}}{2} + \frac{e^{x-1} - e^{-(x-1)}}{2}\right)$$

On pourra regrouper en $x \longmapsto e^x.ch(1) - e^{-x}.sh(1)$ pour que ce soit plus classe.

$\phi(f)(x) = 0$ est la bonne écriture (en toute rigueur $(\phi(f))(x) = 0$). Mais surtout la vraie inconnue n'est pas x mais f. On cherche f vérifiant

$$\forall x,\ \phi(f)(x) = 0$$

Résolvons cpomme propose $\phi(f) = 0$ (fonction nulle) pour f paire.
La question devient $\forall x,\ f(x+1) = 0$.
Mais comme $x = 1$ décrit tout $\mathbb{R}$, on obtient $\forall t,\ f(t) = 0$.
La solution paire de $\phi(f) = 0$ est la fonction nulle.

On résout de même $\phi(f) = 0$ pour f impaire.
On trouve de la même façon la fonction nulle.

Mais il reste le cas des fonctions qui ne sont ni paires ni impaires. Il y en a (en terme de cardinal, on pourrait dire qu'elles sont majoritaires ; en termes d'algèbre linéaire, elles se décomposent à l'aide des paires et impaires).

Ce qu'on a prouvé c'est

$$Ker(\phi) \cap P = \{\overrightarrow{0}\} = Ker(\phi) \cap I$$

mais ceci ne nous renseigne pas sur

$$Ker(\phi) \bigcap (P + I)$$

avec les notations usuelles (P pour ensemble des fonctions paires et I pour ensemble des fonctions impaires).

Que faut il faire ? Décompose f en partie paire et impaire comme dans le cas de l'exponentielle

$$p = x \longmapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \ et\ i = x \longmapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$\phi(p) = x \longmapsto \frac{f(x+1) + f(-(x+1))}{2} \ et\ \phi(i) = x \longmapsto \frac{f(x-1) - f(-(x-1))}{2}$$

Par linéarité on détermine $\phi(f)$ et on demande finalement

$$\forall x,\ \frac{f(x+1) + f(-(x+1))}{2} + \frac{f(x-1) - f(-(x-1))}{2} = 0$$

On se dit qu'il doit bien y avoir des fonctions vérifiant ceci

$$\forall x,\ f(x+1) + f(-x-1) + f(x-1) - f(-x+1) = 0$$

J'ai une solution avec $x \longmapsto \cos\left(\frac{\pi}{4}.x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}.x\right)$
On vérifie en décomposant $f = p + i$ avec

$$p = x \longmapsto \cos\left(\frac{\pi}{4}.x\right) \ et\ i = x \longmapsto \sin\left(\frac{\pi}{4}.x\right)$$

On calcule l'image de chacune

$$p = x \longmapsto \cos\left(\frac{\pi}{4}.x + \frac{\pi}{4}\right) \ et\ i = x \longmapsto \sin\left(\frac{\pi}{4}.x - \frac{\pi}{4}\right) et$$

justement (trigonométrie)

$$\forall x,\ \cos\left(\frac{\pi}{4}.x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}.x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Le noyau est au moins de dimension 1.

De là à le connaître totalement !

◦9◦

Montrez que la dérivation est un endomorphisme de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y^{(3)} + 6.y = 2.y'' + 5.y'$.
Donnez une base de cet espace vectoriel des solutions, puis donnez la matrice de la dérivation sur cette base.

Si f vérifie $f^{(3)}(t) + 6.f(t) = 2.f''(t) + 5.f'(t)$ pour tout t, alors elle est C^∞ en mettant en boucle « $f^{(3)} = 2.f'' + 5.f' - 2.f$ est dérivable quand on la regarde comme membre de droite ».
On dérive : $f^{(4)}(t) + 6.f'(t) = 2.f^{(3)}(t) + 5.f''(t)$ pour tout t.
On pose $\varphi = f'$ et on reconnait que φ est encore solution de l'équation différentielle...

Sinon, que la dérivation soit linéaire, c'est acquis : $(\alpha.f + \beta.g)' = \alpha.f' + \beta.g'$, que f et g soient ou non solutions d'équations différentielles, du moment qu'elles sont dérivables.

Le cours d'analyse nous donne une base de l'espace des solutions, en résolvant l'équation caractéristique $\lambda^3 - 2.\lambda^2$-$5.\lambda + 6 = 0$ d'inconnue (réelle/complexe) λ.
Le spectre réel est $[3,\ 1,\ -2]$.
Une base des solutions est $(t \longmapsto e^{3.t},\ t \longmapsto e^t,\ t \longmapsto e^{-2.t})$.
Et l'ensemble des solutions est $Vect(t \longmapsto e^{3.t},\ t \longmapsto e^t,\ t \longmapsto e^{-2.t})$.
Et les solutions s'écrivent $t \longmapsto A.e^{3.t} + B.e^t + C.e^{-2.t}$ avec A, B et C dépendant des conditions initiales.

Choisissez la formulation que vous voulez parmi les trois ci dessus... Et dites moi si le physicien a vraiment conscience qu'il fait de l'algèbre linéaire.

On dérive chaque vecteur de la base proposée et on écrit alors la matrice de la dérivation : $\boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$

La trace vaut 2 et le déterminant -6.

Question : d'accord, mais c'est parce qu'on a choisi cette base là... mais si on en avait pis une autre, comme $(t \longmapsto e^{-2.t},\ t \longmapsto e^{3.t},\ t \longmapsto e^t)$ ou même $(t \longmapsto e^{3.t} + e^{2.t},\ t \longmapsto e^t - e^{2.t},\ t \longmapsto 3.e^{-2.t})$ ou pire encore...
Eh bien, la matrice n'aurait pas été la même, mais elle aurait été semblable à celle ci.
Et on aurait eu la même trace et le même déterminant...

Une étourderie m'a fait une année taper $y'' + 6.y = 2.y'' + 5.y'$ comme énoncé.
Le raisonnement est le même, mais cette fois, le spectre est $[1,\ -6]$.
On a alors $Vect(t \longmapsto e^t,\ t \longmapsto e^{-6.t})$ et la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.

◦10◦

Une liste L de longueur 365 indique les bénéfices de votre restaurant chaque jour de l'année écoulée. Écrivez un script qui détermine quelle a été la période de dix jours consécutifs où le bénéfice total a été le moins élevé, pour déterminer quand vous auriez pu le fermer pour prendre des congés.

La liste `L` contient donc 365 valeurs. Le nombre `L[k]` représente donc le bénéfice du jour d'indice `k` *(éventuellement négatif, je ne sais pas comment vous gérez votre affaire, ni comment était la météo)*.
On doit donc étudier des sommes sur le modèle `L[k]+L[k+1]+...+L[k+9]` et trouver le `k` *(de `0` à `355`)* pour lequel elle sera la plus petite. Trouver l'indice du minimum, on sait faire, par simple parcours.
On peut le faire en deux fois, même si ce n'est pas très intelligent et très redondant :

```
Cumul = []
for k in range(355) :
....somme = 0 #on initialise à chaque fois une somme nulle
....for i in range(10) :
........somme = somme+L[k+i] #on calcule la somme sur dix jours
....Cumul.append(somme) #on place dans la liste Cumul
```

La liste `Cumul` contient le bilan comptable de chacun des `355` segments de longueur `10`.

```
Minimum, index = Cumul[0], 0 #on initialise avec les dix premiers jours de l'année
for k in range(1, 355) : #un simple parcours
....if Cumul[k]<Minimum : #si on a fait pire sur le segment
........Minimum = Cumul[k] #on mémorise le nouveau minimum
........index = k #et on mémorise l'indice
```

La réponse est alors l'indice `index` et le bénéfice cumulé sur la période est `Minimum`.
Bien que joliment méthodique, cette approche calcule bien trop de fois les mêmes sommes partielles.

On va donc le faire au fur et à mesure. Pour passer d'un cumul au suivant, on ajoute un terme et on en efface un, c'est tout.

```
k, DixJours = 0, 0
for i in range(10) :
....DixJours = DixJours+L[i] #on a créé la première somme cumulée
Minimum, index = DixJours, 0
for k in range(1, 355) :
....DixJours = DixJours-L[k-1]+L[k+9] #on efface un terme et on en ajoute un autre
....if DixJours < Minimum :
........Minimum = DixJours
........index = k
```

Ensuite, on aura intérêt à rendre le programme adaptatif et à poser deux variables `NbJours` et `duree` qu'on met égales à `365` et `10` et on écrit des `for k in range(1, NbJours-duree) :`.

∘11∘

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

SERIE LACUNAIRE

Le but avoué de cet exercice est de déterminer un équivalent en 1 par valeur inférieure de l'application $x \longmapsto x^1 + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \dots$ *(infinité de termes)*, après en avoir prouvé l'existence.

On rappelle la définition du logarithme de base a ($a > 0$, $a \neq 1$) : $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$. Vérifiez que c'est bien l'application réciproque de $t \longmapsto a^t$. Résolvez l'équation $\log_2(n) \in \mathbb{N}$ d'inconnue n dans $\mathbb{N} \cap [0,\ 2016]$.

I∼0) Pour tout x réel, on définit les séries suivantes *(les sommes partielles sont en $\sum_{n=1}^{N}$)* :

terme général	nom des sommes partielles	nom de la somme si convergence
x^{2n}	$\varphi_N(x)$	$\varphi(x)$
x^{2^n}	$F_N(x)$	$F(x)$
$\log_2(n).x^n$	$G_N(x)$	$G(x)$
$[\log_2(n)].x^n$	$\Gamma_N(x)$	$\Gamma(x)$
$H_n.x^n$	$S_N(x)$	$S(x)$
x^n/n	$L_N(x)$	$L(x)$

Montrez que pour tout x de $]1,\ +\infty[$, ces séries divergent grossièrement.
I∼1) On se fixe x dans $[0,\ 1[$. Montrez que ces séries sont croissantes et que leurs termes généraux tendent vers 0. On ne peut pas encore conclure évidemment, mais calculez déjà $\varphi(x)$.
I∼2) Montrez $F_N(x) \leqslant \varphi_N(x)$ pour tout N. Concluez que F est définie sur $[0,\ 1[$ puis sur $]-1,\ 1[$.
I∼3) Écrivez un script `Python` pour représenter graphiquement F_{10} sur $[-1,\ 1]$.
I∼4) Donnez le développement limité d'ordre 10 de F en 0.

II∼0) Montrez $L_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-t^N}{1-t}.dt$.
II∼1) Montrez par encadrement que $\displaystyle\int_0^x \frac{t^N}{1-t}.dt$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Déduisez la valeur de $L(x)$.
II∼2) Simplifiez $(1-x).S_N(x)$ et déduisez la valeur de $S(x)$.

III∼0) Montrez que la suite $\dfrac{\log_2(n).(2.x)^n}{(1+x)^n}$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini. Est elle bornée ? Déduisez qu'il existe A (dépendant de x mais pas de n) vérifiant $[\log_2(n)].x^n \leqslant \log_2(n).x^n \leqslant A.\Big(\dfrac{1+x}{2}\Big)^n$.
III∼1) Déduisez que $G(x)$ et $\Gamma(x)$ existent.
III∼2) Montrez : $\Gamma(x) \leqslant G(x) \leqslant \Gamma(x) + \dfrac{x}{1-x}$.
III∼3) Montrez : $(1-x).\Gamma(x) = x.F(x)$ *(il faudra étudier quand on a $[\log_2(n)] = [\log_2(n+1)]$)*.
III∼4) Montrez pour tout n : $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
III∼5) Déduisez : $\dfrac{G(x)}{x} \leqslant S(x) \leqslant G(x) \leqslant \dfrac{x}{1-x}$.
III∼6) Déduisez que $G(x)$ est équivalent à l'une des quantités suivantes quand x tend vers 1 par valeur inférieure

$: -\ln(2).\ln(1-x)$, $\dfrac{1}{(1-x)^2}$, $-\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}$, $(1-x)^{x.\ln(2)}$.

III∼7) Déduisez que $F(x)$ est équivalent à $-\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(2)}$ quand x tend vers 1 par valeur inférieure.

IV∼0) Et que serait un équivalent en 1 de $x \longmapsto x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + \ldots$?

A propos du logarithme de base a. TD32

On rappelle que l'application $t \longmapsto a^t$ est strictement monotone pour a dans $]0,\ 1[$ ou $]1,\ +\infty[$. Elle réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $]0,\ +\infty[$ (limites aux bornes qui sont dans le bon sens pour a plus grand que 1 et dans le mauvais pour a plus petit que 1).
On détermine la réciproque en se donnant x strictement positif et en résolvant $a^t = x$ d'inconnue réelle t. On passe au logarithme naturel (bijectif) : $t.\ln(a) = \ln(x)$ et on divise $t = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$. C'est donc bien $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ qui en est la réciproque.

Pour ce qui est de l'équation $\log_2(n) \in \mathbb{N}$, elle demande finalement que $\ln(n)/\ln(2)$ soit de la forme k avec k dans $\mathbb{N}$. On aboutit à $n = 2^k$ avec k décrivant $\mathbb{N}$.
Comme on veut des solutions entières plus petites que 2016, on trouve

$$S = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024\}$$

et on s'arrête là.

Convergence et divergence de nos séries. TD32

Pour la divergence grossière, il faut et il suffit de prouver que le terme général ne tend pas vers 0. Rappelons que le fait que le terme général tende vers 0 est une condition nécessaire pour la convergence, mais évidemment pas suffisante.

> *Rappelons aussi que pour la divergence grossière, le terme général peut tendre vers autre chose que* 0*, tendre vers l'infini, ou même n'avoir aucune limite.*

Ici, on va regarder le terme général pour x plus grand que 1 et utiliser les croissances comparées si nécessaire. Mais il y a bien des cas où c'est un produit de deux suites infiniment grandes. Le cas $x = 1$ sera traité à part.
On ajoute tout de suite le cas où x est entre 0 et 1

terme général	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
x^{2n}	0 évident	1	$+\infty$ géométrique
x^{2^n}	0	1	$+\infty$
$\log_2(n).x^n$	0 logarithme contre géométrique	$+\infty$	$+\infty$ "sur-déterminée"
$[\log_2(n)].x^n$	0 majorée par la précédente	$+\infty$	$+\infty$
$H_n.x^n$	0 majorée par $\ln(n).x^n$	$+\infty$	$+\infty$
x^n/n	0 évident	0	$+\infty$ croissances comparées

Pour x entre 0 et 1, les termes généraux sont positifs, les séries sont croissantes.

On a aussi le terme général qui tend vers 0, c'est bon signe, mais ça ne veut rien dire, rappelons que $\sum_{k=1}^{N} \dfrac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$ à la vitesse d'un logarithme.

On s'offre la première série car elle est géométrique de raison x^2 : $\sum_{n=1}^{N} x^{2.n} = \dfrac{x^2 - x^{2.N+2}}{1-x^2}$ *(avec x^2 non nul)*. On fait tendre N vers l'infini, puisqu'on parle de série : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} x^{2.n} = \dfrac{x^2}{1-x^2}}$ *(car pour x entre* 0 *et* 1*, $x^{2.N+2}$ converge vers* 0 *quand N tend vers l'infini)*.

Attention, disons le tout de suite, il ne faut pas confondre x^{2^n} avec $x^{2.n}$. Dans le premier, on regroupe l'exposant $x^{(2^n)}$ pour être rigoureux. Dans le second, on peut écrire $(x^2)^n = x^{2.n}$. Bref, on ne confond pas $(a^b)^c$ avec a^{b^c}. L'opérateur d'exponentiation n'est pas associatif...

Application F. TD32

On garde x entre 0 et 1. On se donne n entier, on a $2.n \leqslant 2^n$ *(comparaison simple, preuve par récurrence simple)*. Comme x est plus petit que 1, on a alors $x^{2^n} \leqslant x^{2.n}$ (attention, $\left(\frac{1}{2}\right)^{16} < \left(\frac{1}{2}\right)^{4}$ par exemple, car on compare $2.n.\ln(x)$ avec $2^n.\ln(x)$ mais avec $\ln(x)$ négatif).
On somme de 1 à N :

$$\sum_{n=1}^{N} x^{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{N} x^{2.n}$$

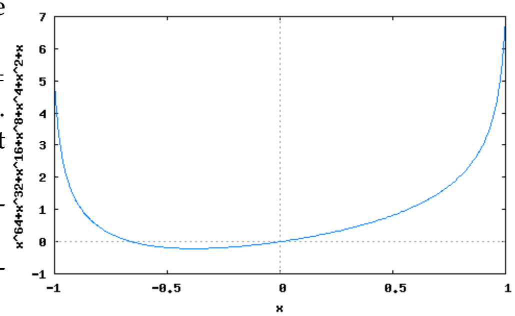
Mieux encore :

$$\sum_{n=1}^{N} x^{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{N} x^{2.n} = \frac{x^2 - x^{2.N+2}}{1-x^2} \leqslant \frac{x^2}{1-x^2}$$

On a donc majoré la série croissante $\left(\sum_{n=1}^{N} x^{2^n}\right)$ par le nombre $\frac{x^2}{1-x^2}$.

Cette suite converge. Et on sait au mieux qu'on peut majorer sa somme par $\frac{x^2}{1-x^2}$. Mais on ne peut pas dire mieux que $F(x) = x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \dots$
Et on ne confond pas avec $F_N(x) = x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \dots + x^{2^N}$.

On étend la définition de F à $]-1,\ 1[$ avec un simple argument de parité :
$F_N(-x) = -x + (-x)^2 + (-x)^4 + (-x)^8 + (-x)^{16} + \dots + (-x)^{2^N} = F_N(x) - 2.x$pour tout réel x et tout entier naturel N *(exposants pairs)*.
On peut prendre x entre 0 et 1 et obtenir que $F(-x)$ existe et vaut $F(x) - 2.x$. Tous les réels de $]-1,\ 0]$ ont donc une image par F.
Quant aux réels de $]-\infty,\ -1]$, ils donnent aussi une divergence grossière.
Bref, F est définie sur $]-1,\ 1[$ et on peut en donner une représentation graphique sommaire



Plus précisément, on commence par créer la fonction

```
def F(x, N) :
....s = 0
....expo = 1
....for k in range(N+1) :
........s = s+x**expo
........expo = expo*2
....return(s)
```

On peut évidemment aussi faire appel à x**(2**k) (physicien) ou tout au contraire mettre une autre boucle de mathématicien

```
def F(x, N) :
....s = 0
....xn = x
....for k in range(N+1) :
........s = s+xn
........xn = xn*xn
....return(s)
```

On peut aussi, puisque l'énoncé parle juste de F_{10} :

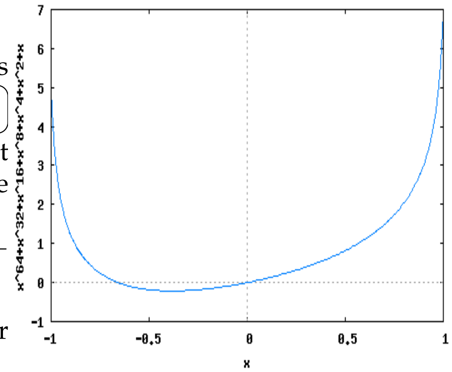
```
def F10(x) :
....return(x+x**2+x**4+x**8+x**16+x**32+x**64+x**128+x**256+x**512+x**1024)
```

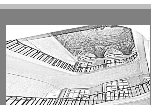
mais c'est décevant car non modulable si on veut changer la valeur de N, ce qu'on ne manquera pas de faire...

Ensuite, on suit la démarche du Python enroulé en hélice sur une Solénoïde :

```
import numpy as np
import mathplotlib.pyplot as plt
x = np.arange(-1, 1, 0.05)
plt.plot(x, F(x,10))
plt.show()
```

Pour le développement limité de F en 0, on ne prend que les termes d'ordre peu élevé dans $F(x)$: $\boxed{F(x) = x + x^2 + x^4 + x^8 + o(x^{10})_{x\to 0}}$
Ce qu'on doit prouver c'est que la somme $x^{16} + x^{32} + x^{64} + \ldots$ est bien un $o(x^{10})$ quand x tend vers 0. Même si c'est évident, il faut le prouver, car il y a quand même une infinité de termes...
$0 \leqslant x^{16} + x^{32} + x^{64} + \ldots = x^{11}.(x^5 + x^{21} + x^{53} + \ldots) \leqslant x^{11}.(x + x^2 + x^3 + \ldots) = x^{11}.\dfrac{x}{1-x}$
Le majorant tend vers 0 quand x tend vers 0, on peut conclure par encadrement.





Applications L et S. TD32

Pour prouver $L_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-t^N}{1-t}.dt$, on peut partir du membre de droite *(dont l'existence est assurée car $1-t$ ne s'annule pas entre 0 et x, avec argument de continuité)*. On remplace $\dfrac{1-t^N}{1-t}$ par la série géométrique $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} t^n$. On intègre de 0 à 1 par linéarité en N termes : $\displaystyle\int_0^x t^n.dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. La somme vaut donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^{n+1}}{n+1}$. On décale les indices en $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n}$. On reconnaît $L_N(x)$.

On regarde l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{t^N}{1-t}.dt$. Elle est positive *(et elle existe par continuité)*. On majore $\dfrac{t^N}{1-t}$ par $\dfrac{x^N}{1-x}$ *(car $t^N \leqslant x^N$ et $1-t \geqslant 1-x$ avec tout ce beau monde positif)*. On intègre la constante et on a donc $\displaystyle\int_0^x \frac{t^N}{1-t}.dt$ compris entre 0 et $\dfrac{x^{N+1}}{1-x}$ *(si vous avez obtenu d'autres majorations comme $\dfrac{x^{N+1}}{(N+1).(1-x)}$, vous pouvez avoir raison aussi)*.

Le majorant tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Par encadrement, l'intégrale tend vers 0.

> *A la louche, la fonction $t \longmapsto \dfrac{t^N}{1-t}$ tendait vers 0 quand N tendait vers l'infini tant que t restait dans $[0,\ x]$ inclus dans $[0,\ 1[$. Mais de là à conclure sur l'intégrale qui est une aire, il ne faut pas parler trop vite...*

On sépare : $L_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t} - \int_0^x \frac{t^N.dt}{1-t}$. La deuxième intégrale tend vers 0 quand N tend vers l'infini. La première se calcule et vaut $-\ln(1-x)$.
Par somme, le premier membre tend vers $-\ln(1-x)$.

> *Comment se rendre ridicule pour montrer que $L_N(x)$ converge vers $-\ln(1-x)$: avoir des réflexes idiots de Terminable en prouvant déjà la convergence par un théorème classique du type "croissante majorée", puis calculer la limite par le petit calcul ci dessus. En effet, à quoi bon faire appel au théorème "croissante majorée". Du moment qu'on prouve que la suite a une limite, c'est bien qu'elle converge...*

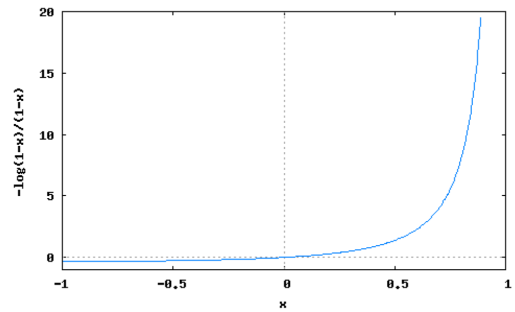
On a donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = L(x) = -\ln(1-x) = \ln\Big(\frac{1}{1-x}\Big)}$

On passe à $(1-x).S_N(x)$, qu'on écrit sous forme de deux sommes : $\sum_{n=1}^{N} H_n.x^n - \sum_{n=1}^{N} H_n.x^{n+1}$.

On décale la seconde : $\sum_{n=1}^{N} H_n.x^n - \sum_{k=2}^{N+1} H_{k-1}.x^k$.

On fusionne en $x + \sum_{n=2}^{N} (H_n - H_{n-1}).x^n - H_n.x^{n+1}$.

On simplifie en $x + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}.x^n - H_n.x^{n+1}$.



On reconnaît $L_N(x) - H_n.x^{n+1}$.
On peut faire tendre N vers l'infini. La forme indéterminée $H_n.x^{N+1}$ tend vers 0, par croissances comparées *(H_N est équivalent à $\ln(N)$ tandis que x^{N+1}est de type exponentielle*[a]*)*.
On déduit : $(1-x).S_N(x)$ tend vers $-\ln(1-x)$.
Par division, $S_N(x)$ converge vers $-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

---

a. *ou géométrique, c'est pareil*

On a obtenu : $\boxed{x + \Big(1+\frac{1}{2}\Big).x^2 + \Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big).x^3 + \Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Big).x^4 + \ldots = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}}$ avec une infinité de termes dans la somme.
La série entière L est un classique du cours de Spé. S est un classique des exercices de Spé.

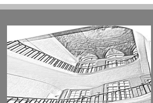
Pour qui a du mal, on le refait, avec des points de suspension :

$$(1-x).\Big(x + \Big(1+\frac{1}{2}\Big).x^2 + \Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big).x^3 + \Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Big).x^4\Big)$$

est égal à

$$\Big(x + \Big(1+\frac{1}{2}\Big).x^2 + \Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big).x^3 + \Big(1+\ldots+\frac{1}{4}\Big).x^4\Big) - \Big(x^2 + \Big(1+\frac{1}{2}\Big).x^3 + \Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big).x^4 + \Big(1+\ldots+\frac{1}{4}\Big).x^5\Big)$$

et on regarde ce qu'il reste.



Existence de G et Γ. TD32

On s'est donné x dans $]0,\ 1[$, et on n'a rien dit de plus sur lui depuis, il y est toujours. On étudie $\frac{\log_2(n).(2.x)^n}{(1+x)^n}$ qui est une forme très indéterminée sous cette forme. Mais ensuite, on a $\frac{\ln(n)}{\ln(2)}.\Big(\frac{2.x}{1+x}\Big)^n$.

On a un terme logarithmique face à un terme exponentiel. La raison $\frac{2.x}{1+x}$ est positive, strictement plus petite que 1.
C'est la suite géométrique qui l'emporte par **puissances comparées**. La suite $\Big(\frac{\ln(n)}{\ln(2)}.\Big(\frac{2.x}{1+x}\Big)^n\Big)_n$ tend vers 0. Elle est donc bornée, comme toute suite convergente.

Notons A un majorant de cette suite : $\frac{\ln(n)}{\ln(2)}.\Big(\frac{2.x}{1+x}\Big)^n \leqslant A$ pour tout n.

On effectue un produit en croix *(légitime par positivité de tout ce beau monde)* : $\frac{\ln(n)}{\ln(2)}.x^n \leqslant A.\Big(\frac{1+x}{2}\Big)^n$.

Ensuite, on rappelle que $[u]$ se majore par u pour tout u, on multiplie par x^n, positif :

$$\Big[\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\Big].x^n \leqslant \frac{\ln(n)}{\ln(2)}.x^n \leqslant A.\Big(\frac{1+x}{2}\Big)^n$$

C'est bien la formule demandée, en écrivant ce qu'est le logarithme de base 2.

On somme ces inégalités pour n de 1 à N donné : $\Gamma_N(x) \leqslant G_N(x) \leqslant A.\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1+x}{2}\right)^n$.

On identifie dans le majorant une série géométrique qui se calcule : $A.\dfrac{1-\left(\frac{1+x}{2}\right)^{N+1}}{1-\frac{1+x}{2}}$.

On est certes tenté (à presque juste titre) *de faire tendre N vers l'infini pour continuer à majorer.*

> *Mais il n'en est rien. On majore, c'est tout. L'infini ne vient qu'après et il se manipule avec précaution et avec le cerveau.*

On a donc $\Gamma_N(x) \leqslant G_N(x) \leqslant A.\dfrac{1}{1-\frac{1+x}{2}}$.

Les deux séries à termes positifs $\Big(\Gamma_N(x)\Big)_N$ et $\Big(G_N(x)\Big)_N$ sont croissantes *(en N)* et majorées *(par une constante qui ne dépend que de x et pas de N)*. Elles convergent.

> *Bref, à partir de maintenant on a donné un sens à* $\log_2(1).x + \log_2(2).x^2 + \log_2(3).x^3 + \log_2(4).x^4 + \log_2(5).x^5 + \dots$ *et le même avec des parties entières.*
> *On peut les simplifier d'ailleurs en* $0.x + 1.x^2 + \log_2(3).x^3 + 2.x^4 + \log_2(5).x^5 + \dots$ *et* $0.x + 1.x^2 + 1.x^3 + 2.x^4 + 2.x^5 + 2.x^6 + 2.x^7 + 3.x^8 + 3.x^9 + 3.x^{10} + \dots$.

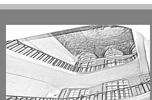
On a montré dans la majoration précédente : $\Gamma_N(x) \leqslant G_N(x) \leqslant A.\dfrac{2}{1-x}$. En passant à la limite *(maintenant qu'on sait qu'elle existe)* : $\Gamma(x) \leqslant G(x)$.
C'est normal, la partie entière fait descendre.
Mais en partant de $[\log_2(n)] \leqslant \log_2(n) \leqslant [\log_2(n)] + 1$ *(encadrement usuel* $[u] \leqslant u < [u]+1$*)*, en multipliant par x^n *(positif)* et en sommant, on a

$$\Gamma_N(x) \leqslant G_N(x) \leqslant \Gamma_N(x) + \sum_{n=1}^{N} x^n = \Gamma_N(x) + \frac{x - x^{N+1}}{1-x}$$

On passe à les limites *(elles existent car x est entre* 0 *et* 1*)* :

$$\Gamma(x) \leqslant G(x) \leqslant \Gamma(x) + \frac{x}{1-x}$$

> *On devrait pouvoir en déduire des limites et peut être des équivalents quand x tend vers 1...*



Lien entre Γ et F. TD32

Comme indiqué, on calcule le produit $(1-x).\Gamma(x)$ ou même $(1-x).\Gamma_N(x)$ en ne travaillant déjà que sur des sommes finies.
en développant :

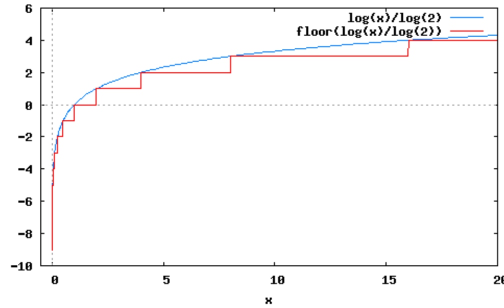
$$(1-x).\sum_{n=1}^{N}[\log_2(n)].x^n = \sum_{n=1}^{N}[\log_2(n)].x^n - \sum_{n=1}^{N}[\log_2(n)].x^{n+1}$$

en ré-indexant :

$$(1-x).\sum_{n=1}^{N}[\log_2(n)].x^n = \sum_{n=1}^{N}[\log_2(n)].x^n - \sum_{n=2}^{N+1}[\log_2(n-1)].x^n$$

en effaçant le terme nul :

$$(1-x).\sum_{n=1}^{N}[\log_2(n)].x^n = \sum_{n=2}^{N}\big([\log_2(n)] - [\log_2(n-1)]\big).x^n - [\log_2(N)].x^{N+1}$$



Tout va se jouer avec le terme $([\log_2(n)] - [\log_2(n-1)])$. C'est un entier.
Il est positif car $\log_2(n-1)$ est plus petit que $\log_2(n)$ *(et l'application partie entière est croissante au sens large)*.
Et il vaut souvent 0.
Il ne passe à 1 que quand n est une puissance de 2.
Écrivons en effet $2^{k-1} \leqslant n-1 < 2^k$ *(pour dire* $[\log_2(n-1)] = k-1$*)*.
On a alors $2^{k-1} \leqslant n-1 < 2^k$ ou bien $n = 2^k$. Dans le premier cas : $[\log_2(n)] = k-1$ et la différence est nulle. Dans le second cas : $[\log_2(n)] = k$ et la différence vaut 1.
On a par exemple

$$\Gamma_{18}(x) = x^2 + x^3 + 2.x^4 + 2.x^5 + 2.x^6 + 2.x^7 + 3.x^8 + 3.x^9 + \ldots + 3.x^{15} + 4.x^{16} + 4.x^{17} + 4.x^{18}$$

On multiplie :

$$x.\Gamma_{18}(x) = x^3 + x^4 + 2.x^5 + 2.x^6 + 2.x^7 + 2.x^8 + 3.x^9 + 3.x^{10} + \ldots + 3.x^{16} + 4.x^{17} + 4.x^{18} + 4.x^{19}$$

On effectue :

$$(1-x).\Gamma_{18}(x) = x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} - 4.x^{19}$$

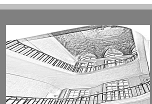
On résume dans le cas général :

$$(1-x).\Gamma_N(x) = \sum_{n=1}^{N} 1_{n\in P}.x^n - [\log_2(N)].x^{N+1}$$

avec P l'ensemble des puissances de 2.
On a donc

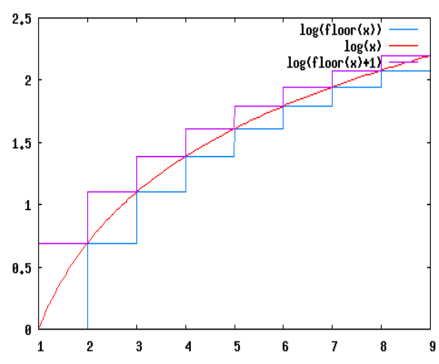
$$(1-x).\Gamma_N(x) = F_k(x) - x - [\log_2(N)].x^{N+1}$$

avec k égal à $[\log_2(n)]$.
On fait tendre N vers l'infini, $(1-x).\Gamma_N(x)$ tend vers $(1-x).\Gamma(x)$. Le réel $[\log_2(N)].x^{N+1}$ tend vers 0 par croissances comparées. $F_k(x)$ converge vers F.
On a $\boxed{(1-x).\Gamma(x) = F(x) - x}$



Série harmonique et logarithme. TD32

L'encadrement $\ln(1+n) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$ est un de nos grands classiques.



Pour tout k de 2 à n, on encadre $\dfrac{1}{k}$ par $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$, puis on somme. Les intégrales se concatènent par relation de Chasles, et se calculent par intervention du logarithme. On ajoute le terme $k = 1$ du côté "majoration", on introduit même $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t}$ du côté minoration, et c'est fini.
Le dessin suivant ne suffit quand même pas, mais en dit long :

On prend ces inégalités, on les divise par $\ln(2)$ et on les multiplie par x^n (tout est positif) :

$$\log_2(n+1).x^n \leqslant \frac{H_n.x^n}{\ln(2)} \leqslant \log_2(n).x^n + x^n$$

On somme de 1 à N :

$$\sum_{n=1}^{N} \log_2(n+1).x^n \leqslant S_N(x) \leqslant G_N(x) + \sum_{n=1}^{N} x^n$$

Dans le premier terme, on identifie $\sum\limits_{k=2}^{N+1}\log_2(k).x^{k-1}$ (on peut commencer à sommer à 1 ou 2, le premier logarithme est nul). C'est bien $G_{N+1}(x)/x$.*
On fait tendre N vers l'infini, on passe à la limite dans ces inégalités :

$$\frac{G(x)}{x}\leqslant\frac{S(x)}{\ln(2)}\leqslant G(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}x^n$$

Il n'y a plus qu'à identifier une série géométrique de raison strictement plus petite que 1.

> *Évidement, des raisonnements basés par exemple sur des développements limités sont à proscrire, car les développements limités ne sont que des comportements "*à la limite*", et ne donnent jamais des inégalités sur tout un intervalle.*
> *Enfin, les preuves du type "*je calcule la différence des fonctions, je dérive, je fais un tableau de variations*" sont ici vouées à l'échec car il est délicat de dériver des séries de fonctions* (vous le verrez en Spé, mais on peut s'en douter car il y a une infinité de termes...).

On rappelle qu'on a prouvé $S(x)=-\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$. Mais c'est G qu'il faut isoler dans $\dfrac{G(x)}{x}\leqslant\dfrac{S(x)}{\ln(2)}\leqslant G(x)+\dfrac{x}{1-x}$.
On bascule donc en

$$\frac{S(x)}{\ln(2)}-\frac{x}{1-x}\leqslant G(x)\leqslant x.\frac{S(x)}{\ln(2)}$$

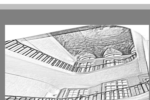
(si il vous faut une plus d'une minute pour comprendre ce passage, justement, passez... mais pas en Spé).
On a cette fois

$$-\frac{\ln(1-x)+\ln(2).x}{\ln(2).(1-x)}\leqslant G(x)\leqslant -x.\frac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}$$

> *On ne passe pas à la limite, ça ne servirait à rien, tout tend vers l'infini.*
> *Enfin, si ! On a déjà par minoration $G(x)\longrightarrow_{x\to 1^-}+\infty$ (mais on s'en serait douté à partir de $\log_2(2).x^2+\log_2(3).x^3+\log_2(4).x^4+\ldots$ avec son infinité de termes.*

On multiplie par $\ln(2).(1-x)$ et on divise par $-\ln(1-x)$ *(tous deux positifs)* : $\dfrac{G(x)}{-\ln(1-x)/\ln(2).(1-x)}$ est compris entre $1+\dfrac{x}{\ln(1-x)}$ et x. Quand x tend vers 1, les deux tendent vers 1.
Par encadrement, $\dfrac{G(x)}{-\frac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}}$ tend vers 1.

Par définition, $\boxed{G(x)\text{ est équivalent en }1^-\text{ à }-\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}}$ *(et ça, c'est un infiniment grand en 1^-).*



Equivalent de F en 1 par valeur inférieure. TD32

Il est temps de mettre bout à bout tout ce qu'on a prouvé pour tout x de $[0,\ 1[$ *(outre l'existence des quantités)* :

$(1-x).\Gamma(x)+x=F(x)$	$\Gamma(x)\leqslant G(x)\leqslant\Gamma(x)+\dfrac{x}{1-x}$	$G(x)\sim_1-\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}$	$L(x)=-\ln(1-x)$	$S(x)=-\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$
	$\Gamma(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[\log_2(n)].x^n$	$G(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\log_2(n).x^n$	$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$	$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}H_n.x^n$

On repart de $\Gamma(x)\leqslant G(x)\leqslant\Gamma(x)+\dfrac{x}{1-x}$ qu'on transforme en

$$G(x)-\frac{x}{1-x}\leqslant\Gamma(x)\leqslant G(x)$$

On divise par $-\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}$ et on encadre le quotient central par $\dfrac{G(x)}{-\frac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}}-\dfrac{x.\ln(2)}{\ln(1-x)}$ et $\dfrac{G(x)}{-\frac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}}$. Par définition de l'équivalent de G, les deux encadrants tendent vers 1.

Par théorème d'encadrement, on aboutit à $\Gamma(x)$ est équivalent aussi à $-\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(2).(1-x)}$.

On multiplie par $1-x$ et on ajoute x *(qui reste borné et est un* $o(\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(2)})$.

Par une grande transitivité, on aboutit à $\boxed{F(x) \text{ est équivalent en } 1^- \text{ à } -\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(2)}}$ *(dans toute l'histoire, le facteur* $1-x$ *a été apporté deux fois, puis simplifié...).*

Cette série entière tend vers l'infini moins vite que $\dfrac{1}{1-x}$ qui était formée de tous les termes : $F(x) = x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \ldots$ contre $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$.

Pour $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{(3^n)}$, on refait les mêmes calculs avec 3 à la place de 2 *(les* $\log_2(n)$ *deviennent des* $\log_3(n)$*).* Finalement, tout le raisonnement peut être repris et on trouve $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + \ldots \sim_1 -\dfrac{\ln(1-x)}{\ln(3)}$

∘12∘

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

Poincaré

On note $\mathbb{P}$ en hommage à Henri Poincaré le demi plan des complexes de la forme $a + i.b$ avec a et b réels et b strictement positif.
On note l'ensemble des matrices réelles de taille 2 de déterminant 1.
On note T l'ensemble des matrices réelles de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec θ décrivant $\mathbb{R}$.

On note § l'ensemble des matrices réelles de la forme $\begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix}$ avec t décrivant $\mathbb{R}$.

Pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ notée M et tout complexe z de $\mathbb{P}$, on note $M * z$ le complexe $\dfrac{a.z+b}{c.z+d}$.

I∼0) Montrez que $(D, \times)$ est un groupe non commutatif.
I∼1) Montrez que $(T, \times)$ est un sous-groupe commutatif de $(D, \times)$.
I∼2) Montrez que pour toute M de et tout z de $\mathbb{P}$, $M * z$ existe et est dans $\mathbb{P}$.
I∼3) Montrez : $\forall (A, B) \in D^2, \forall z \in \mathbb{P}, A * (B * z) = (A.B) * z$.
I∼4) Montrez : $\forall M \in \mathrm{T}, M * i = i$.
I∼5) Montrez : $\forall M \in, M * i = i \Leftrightarrow M \in \mathrm{T}$.

II∼0) On définit sur la relation $\risingdotseq$ par $A \risingdotseq B \Leftrightarrow A^{-1}.B \in \mathrm{T}$. Montrez que c'est une relation d'équivalence.

III∼0) On définit pour M de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $N(M) = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$. Montrez que N est une norme, c'est à dire :
• pour toute M de : $N(M)0$ et $(N(M) = 0 \Leftrightarrow M = 0)$ *(matrice nulle)*
• pour toute M de et tout λ de $\mathbb{R}$: $N(\lambda.M) = |\lambda|.N(M)$
• pour tout couple (A, B) de ^{2} : $N(A+B)N(A) + N(B)$ ah, non, celle là, on la garde pour la fin.

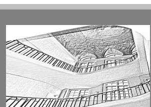
III∼1) Montrez pour tout couple (A, B) de ^{2} : $A \risingdotseq B \Rightarrow N(A) = N(B)$.
III∼2) La réciproque est elle vraie ? Indication : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

IV∼0) Montrez : $\forall z \in \mathbb{P}, \exists A \in, A * i = z$.
IV∼1) Déduisez : $\forall (z, Z) \in \mathbb{P}^2, \exists A \in, A * z = Z$. A-t-on unicité de A ?

V∼0) Plus précisément, montrez $\forall z \in \mathbb{P}$, $(\exists A \in, A * i = z)$ *et* $(\forall M \in D, M * i = z \Rightarrow N(M) = N(A)$. On décide alors de nommer "hauteur de z" la quantité $N(A)$ pour toute matrice A de vérifiant $A * i = z$.
Calculez la hauteur de i. Calculez la hauteur de $\lambda.i$ pour tout réel λ strictement positif, et indiquez pour quel λ cette hauteur est minimale. Calculez la hauteur de $1 + i$.

VI∼0) On rappelle que pour deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^4$ ($\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$), on peut calculer leur produit scalaire de deux façons : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = a.\alpha + b.\beta + c.\gamma + d.\delta$
mais aussi $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}.\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}.\cos(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$. Montrez la propriété mise de côté : • pour tout couple $(A,\ B)$ de ^{2} : $N(A+B) \leqslant N(A)+N(B)$.

En considérant les deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} d \\ -c \\ -b \\ a \end{pmatrix}$, montrez que toutes les matrices A de vérifient $N(A) \geqslant \sqrt{2}$. Déduisez que les complexes ont tous une hauteur au moins égale à $\sqrt{2}$.



Le demi plan de Poincaré. TD32

L'ensemble des matrices réelles de taille 2 et de déterminant 1 est un groupe car :
• la loi est interne : le produit de deux matrices carrées réelles est encore carrée réelle, et son déterminant vaut 1 *(déterminant du produit égal au produit des déterminants)*
• la loi est associative *(c'est dans le cours, que le déterminant vaille* 1 *ou non)*
• on connaît un neutre : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: c'est bien une matrice carrée réelle de taille 2 et son déterminant vaut 1 [2]
• les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de cet ensemble sont inversibles *(déterminant non nul)*, et leurs inverses $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ sont encore de déterminant 1 [3]

Pour prouver que ce groupe n'est pas commutatif, on donne un contre-exemple, comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

> *Évidemment, on ne se contente pas de vagues déclarations comme* "le produit matriciel n'est pas commutatif". *Il se pourrait en effet que la condition* "déterminant égal à 1" *fasse qu'on se limite alors à des matrices particulières obligées de commuter entre elles.*
> *D'autre part, évidemment, dans le contre-exemple, on prend des matrices de déterminant* 1.

Les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ont toutes un déterminant égal à 1, elles sont dans *(ceci nous assure de l'associativité du produit matriciel et de l'existence d'inverses)*.

Le produit de deux matrices de cette forme est encore une matrice de cette forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

en utilisant les formules d'addition sur les angles, ou justement en se disant qu'on les retrouvera grâce à ces matrices.
La matrice neutre est de cette forme : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix}$.
L'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, et elle est encore de la bonne forme : $\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$.
Enfin, la multiplication est ici commutative :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

2. oubliez de dire que son déterminant vaut 1 et vous n'avez rien prouvé
3. là aussi, si vous ne dites pas que l'inverse est dans , vous avez tout perdu

Les élèves qui confondent mathématiques et calcul et ne savent pas qu'il faut avant tout raisonner tartinnent des lignes de calculs inutiles et oublient les vraies questions : appartenance à l'ensemble. Je ne peux rien pour ceux là, ils se sont trompés de filière. Mais ce n'est pas grave, on a autant besoin de militaires et de bouchers que d'ingénieurs.

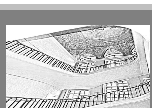
Pour les matrices de la forme $\begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix}$ les arguments sont de la même forme :

• déterminant égal à 1

• neutre $\begin{pmatrix} ch(0) & sh(0) \\ sh(0) & ch(0) \end{pmatrix}$

• inverse $\begin{pmatrix} ch(-t) & sh(-t) \\ sh(-t) & ch(-t) \end{pmatrix}$

• stabilité $\begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} ch(u) & sh(u) \\ sh(u) & ch(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(t+u) & sh(t+u) \\ sh(t+u) & ch(t+u) \end{pmatrix}$ *(et commutativité).*



Notation $M * z$. TD32

Si z est un complexe de partie imaginaire strictement positive, on peut déjà regarder si $c.z+d$ peut être nul. Pour ce faire, il faudrait annuler sa partie imaginaire $c.\Im m(z)$, c'est à dire annuler c. Il faudrait ensuite annuler sa partie réelle d. Mais alors la matrice M serait de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et ne serait pas inversible.

On regarde alors $\dfrac{a.z+b}{c.z+d}$ qui existe bien, et on calcule sa partie imaginaire et sa partie réelle, en multipliant par la quantité conjuguées :

$$\frac{a.z+b}{c.z+d} = \frac{(a.z+b).(c.\overline{z}+d)}{(c.z+d).(c.\overline{z}+d)} = \frac{a.|z|^2 + (a.d.z + b.c.\overline{z}) + b.d}{|c.z+d|^2}$$

Le dénominateur est un réel strictement positif, on écrit le numérateur sous forme cartésienne en posant $z = x + i.y$ avec $(x,\ y)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$:

$$\frac{a.z+b}{c.z+d} = \frac{a.(x^2+y^2) + (a.d+b.c).x + i.(a.d - +b.c.).y}{|c.z+d|^2}$$

La partie imaginaire $\dfrac{i.(a.d - +b.c.).y}{|c.z+d|^2}$ est du signe de y car $a.d - b.c$ vaut 1.

On a bien $M * z \in \mathbb{P}$. Là, c'est vrai, c'est juste du calcul. Simplement, il ne vaut mieux pas prendre $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et en même temps $z = a + i.b$, vous voyez pourquoi...

On prend cette fois deux matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et on calcule

$B * z = \dfrac{\alpha.z+\beta}{\gamma.z+\delta}$	$A * (B * z) = \dfrac{a.\dfrac{\alpha.z+\beta}{\gamma.z+\delta} + b}{c.\dfrac{\alpha.z+\beta}{\gamma.z+\delta} + d}$	$(A.B) * z = \dfrac{(a.\alpha + b.\gamma).z + (a.\beta + b.\delta)}{(c.\alpha + d.\gamma).z + (c.\beta + d.\delta)}$

Il y a bien égalité *(c'est dans le cours :* "composer les homographies, c'est multiplier les matrices"*).*

On prend ensuite une matrice de la forme $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ et on calcule l'image de i : $\dfrac{i.\cos(\theta) - \sin(\theta)}{i.\sin(\theta) + \cos(\theta)}$.

On reconnaît : $\dfrac{i.(\cos(\theta) + i.\sin(\theta))}{\cos(\theta) + i.\sin(\theta)}$ et après simplification par le réel non nul $e^{i.\theta}$ il reste encore i.

Pour l'équivalence, un sens est acquis. Sinon, on suppose que i est "un point fixe" de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *(à coefficients réels et de déterminant* 1*).* On a donc : $\dfrac{a.i+b}{c.i+d} = i$. On effectue un produit en croix : $a.i + b = -c + i.d$. On identifie parties réelles et parties imaginaires : $a = d$ et $b = -c$. La matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$. Mais son déterminant vaut 1, ne l'oublions pas : $a^2 + c^2 = 1$. Le points $(a,\ c)$ est sur le cercle trigonométrique. On peut mettre ses coordonnées sous la forme $(\cos(\theta),\ \sin(\theta))$ pour θ bien choisi *(en l'occurrenceArccos(a) au signe près, sachant que la relation $a^2 + c^2 = 1$ entraîne bien que a est entre -1 et 1).*

La matrice est donc bien de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. On a l'équivalence.

Relation d'équivalence. TD32

On se donne A et B à coefficients réels et de déterminant 1. On peut donc calculer $A.B^{-1}$ et s'interroger sur son appartenance à T. La question "$A \eqcirc B$" a bien un sens.

	quantification	argument
R	$\forall A,\ A \eqcirc A$	$A^{-1}.A = I_2 \in$ T
S	$\forall (A,\ B),\ (A \eqcirc B) \Rightarrow (B \eqcirc A)$	si $A^{-1}.B$ est dans T, son inverse $B^{-1}.A$ y est aussi
T	$\forall \ldots,\ (A \eqcirc B \textit{ et } B \eqcirc \mathrm{C}) \Rightarrow (A \eqcirc \mathrm{C})$	si $A^{-1}.B$ et $B^{-1}.C$ sont dans T, leur produit $A^{-1}.C$ y est aussi

On note qu'on utilise une à une toutes les propriétés du sous-groupe.

> *Attention, l'élève qui rédige la réflexivité de la sorte :*
> $\forall A \in,\ A \eqcirc A \Leftrightarrow A^{-1}.A = I_2 \in T$ *n'a pas écrit ce qu'il fallait.*
> *Il n'a fait que recopier quasiment la définition.*
> *Quand il écrit* $\forall A \in,\ A \eqcirc A \Leftrightarrow A^{-1}.A \in T$*, ce peut être Vrai $\Leftrightarrow$ Vrai que Faux $\Leftrightarrow$ Faux puisque c'est une définition.*
> *Ce qu'il écrit, c'est* "pour que A soit en relation avec A, il faut et il suffit que $A.A^{-1}$ soit dans T"*. Il sous-entend alors :* "or, $A^{-1}.A \in$ T est évidemment vrai, donc $A \eqcirc A$ l'est aussi"*.*
> *Mais il* sous-entend *cette phrase mais ne l'écrit pas.*
> *Bref, cet élève a fait de la bouillie de mathématiques.*
> *Le vrai élève qui maitrise le langage mathématique* (et ne jargonne pas comme un étudiant d'Histoire qui prend des notes en mélangeants sténographie et symbolisme mathématique mal assumé) *écrit :*
> $\forall A \in,\ A \eqcirc A$*, en effet* $A^{-1}.A = I_2 \in T$
> *et la différence est capitale. Si vous n'en avez pas conscience, écrivez des livres de physique ou biologie pour le collège, mais ne faites pas de sciences.*

Norme de matrices. TD32

On se donne une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le réel $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ est positif. Sa racine carrée existe et est positive [4]

Si la matrice est nulle, la somme des carrés l'est aussi, la norme est nulle.
Supposons en contrepartie que la norme est nulle. On a alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$. Comme ce sont des réels, la seule possibilité est $a = b = c = d = 0$.

> *Pour ceux qui veulent les détails :* $0 \leqslant a^2 \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$*. Par antisymétrie :* $a^2 = 0$ *et par intégrité :* $a = 0$*. On fait de même avec les autres. Argument classique* "seule solution pour qu'une somme de carrés de réels soit nulle"*. S'il vous plait, n'oubliez pas le mot* "réels"*.*

On se donne $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et λ et on calcule la norme de $\begin{pmatrix} \lambda.a & \lambda.b \\ \lambda.c & \lambda.d \end{pmatrix}$.

C'est $\sqrt{(\lambda.a)^2 + (\lambda.b)^2 + (\lambda.c)^2 + (\lambda.d)^2}$. On développe, on factorise : $\sqrt{\lambda^2.(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}$. En sortant de la racine, λ^2 donne bien $|\lambda|$ en facteur.

Norme et relation d'équivalence. TD32

4. qui a juste rédigé la positivité sans mentionner l'existence ?

On se donne deux matrices A et B *(de la forme* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$*)* qu'on suppose en relation par $\eqcirc$: $A^{-1}.B$ est dans T. On doit alors comparer $a^2+b^2+c^2+d^2$ et $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ *(les racines ne servant à rien)*.
L'hypothèse dit que $A^{-1}.B$ est de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour un certain θ. On écrit alors $B = A.\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ soit encore

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. = \begin{pmatrix} a.\cos(\theta)+b.\sin(\theta) & b.\cos(\theta)-a.\sin(\theta) \\ c.\cos(\theta)+d.\sin(\theta) & d.\cos(\theta)-c.\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

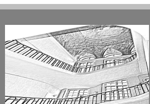
On développe alors $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$:

$$(a.\cos\theta+b.\sin\theta)^2+(b.\cos\theta-a.\sin\theta)^2+(c.\cos\theta+d.\sin\theta)^2+(d.\cos\theta-c.\sin\theta)^2$$

Les termes mixtes en $2.\sin(\theta).\cos(\theta)$ se simplifient ; on utilise le relation de Pythagore $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ et au final il ne reste que $a^2+b^2+c^2+d^2$.

Simple question calculatoire une fois qu'on a pensé à écrire $B = A.R_\theta$.

Pour la réciproque *(fausse)*, on donne deux matrices ayant même "norme", mais qui ne sont pas en relation par la relation $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Elles ont bien la même somme des carrés des coefficients, mais ne sont pas en relation.
Par l'absurde, sinon, le produit $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ serait une matrice de T. Or, cette matrice se calcule $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, elle ne peut vraiment pas être de la forme $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$.



Equation $A * i = z$ d'inconnue A. TD32

On se donne z de la forme $x+i.y$ avec x dans $\mathbb{R}$ et y dans $\mathbb{R}^{+*}$. Il faut pouvoir l'écrire $\dfrac{a.i+b}{c.i+d}$ avec a, b, c et d réels vérifiant de surcroit $a.d-b.c=1$.
On effectue un produit en croix : $a.i+b=(c.i+d).(x+i.y)$. On développe et on identifie *(raisonnement par équivalences)* :
$a=c.x+d.y$ et $b=d.x-c.y$ et aussi $a.d-b.c=1$ *(les données sont x et y, les inconnues sont a, b, c et d)*.

On semble avoir le choix quand même, avec trois équations pour quatre inconnues.

On veut montrer qu'il existe une solution, on ne les cherche pas toutes. On peut donc s'imposer des conditions.

Je demande $c=0$. Le système devient $a=d.y$ et $b=d.x$ puis enfin $(d.y).d-d.x.0=1$. On isole et choisit $d=1/\sqrt{y}$ *(l'existence est assurée par $y>0$)*. On remonte : $a=\sqrt{y}$ et $b=x/\sqrt{y}$.

Je résume pour vérifier : $A = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & x/\sqrt{y} \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}$ est à coefficients réels, a pour déterminant 1 et vérifie $A*i = \dfrac{\sqrt{y}.i+x/\sqrt{y}}{1/\sqrt{y}} = i.(\sqrt{y})^2+x = x+i.y$.
On a envoyé i sur z par une matrice de .

Il n'y a pas unicité, puisque l'on a pu choisir $c=0$. Une autre solution pouvait provenir de $b=0$ par exemple.

On se donne cette fois z et Z et on veut passer de l'un à l'autre par un élément de . On peut certes poser un affreux système. Mais on nous demande de le déduire de la question précédente.
On sait déjà qu'il existe A dans vérifiant $A*i=z$ et qu'il existe B aussi dans vérifiant $B*i=Z$.
On compose la première relation par A^{-1} : $A^{-1}*(A*i) = A^{-1}*z$. Mais on connaît les propriétés de $*$: $A^{-1}*(A*i)=(A^{-1}.A)*i=I_2*i=i$.
On peut donc écrire : $i=A^{-1}*z$. On reporte : $B*(A^{-1}*z)=Z$. On utilise encore le lien entre $*$ et le produit matriciel : $(B.A^{-1})*z=Z$.

La matrice $B.A^{-1}$ est encore dans *(groupe)* et permet de passer de z à Z. On a répondu à la question.

> *En fait, on a montré que par action $*$ on pouvait passer de i à n'importe quel z. On en déduit que pour passer de z à Z, il suffit de transiter par i.*

On n'a pas unicité. On peut passer de i à i par plusieurs matrices : toutes celles de T.
On a $i = T * i$ pour toute matrice T de T. Ensuite, si on se donne z et Z vérifiant $A * i = z$ et $B * i = Z$ comme ci dessus, on a bien $(B.A^{-1}) * z = Z$; mais on a aussi $(A.T) * i = z$ et $(B.T') * i = Z$ pour tout couple $(T,\ T')$ de T^2, et on a donc aussi $(B.T'.T^{-1}.A^{-1}) * z = Z$.

Hauteur d'un complexe. TD32

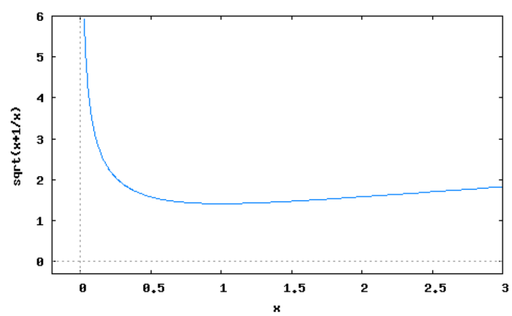
On se donne un complexe z. On sait déjà qu'il existe au moins une matrice A vérifiant $A * i = z$ (*"permettant de passer de i à z"*). Mais on le sait, il en existe d'autres. Ce qu'on doit montrer : si on en prend une autre, alors elle a la même norme que la première matrice A.
Supposons en effet qu'on a à la fois $A * i = z$ et $M * i = z$. Alors, en comparant, on a $M * i = A * i$. En composant par A^{-1} *(qui existe car A est dans)*, on a alors $A^{-1} * (M * i) = A^{-1} * (A * i)$. Avec les règles de composition des homographies : $(A^{-1} * M) * i = I_2 * i = i$.
Or, si une matrice P de vérifie $P * i = i$, elle est nécessairement dans T. Comme $A^{-1}.M$ est dans le groupe , on a $A^{-1}.M \in \mathrm{T}$. On reconnaît $A \doteq M$, et on déduit $N(A) = N(M)$ comme déjà prouvé *(les questions s'enchaînent)*.

> *Si une matrice permet de passer de i à z, toutes les autres matrices qui permettent de passer de i à z ont la même norme. On peut donc en prendre une "au hasard" et calculer sa norme ; ce sera la même pour toutes.*

On cherche une matrice qui permette de passer de i à i. Il y a I_2 *(et en fait toutes les matrices de T)*. Sa norme vaut $\sqrt{2}$ *(de même que pour toutes les matrices de T)*.

On cherche une matrice pour passer de i à $\lambda.i$. On peut proposer $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puisque $\dfrac{\lambda.i + 0}{0.i + 1}$ vaut $\lambda.i$. Mais cette matrice n'a pas pour déterminant 1. On peut proposer $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$ puisque $\dfrac{\sqrt{\lambda}.i + 0}{0.i + 1/\sqrt{\lambda}}$ vaut aussi $\lambda.i$.
La norme de cette matrice *(et de toute matrice de vérifiant $M * i = \lambda.i$)* est $\boxed{\sqrt{\lambda + \dfrac{1}{\lambda}}}$

On cherche le minimum de cette application en la dérivant. Cela dit, on comprend que $\sqrt{\lambda + \dfrac{1}{\lambda}}$ est minimum quand $\lambda + \dfrac{1}{\lambda}$ est minimum.
C'est donc cette application que l'on dérive : $\lambda \longmapsto 1 - \dfrac{1}{\lambda^2}$. Le minimum est atteint pour $\lambda = 1$ *(on ne regarde que les λ positifs)*. La hauteur la plus courte pour les $\lambda.i$ est $\sqrt{2}$, atteinte pour i lui même.



On veut cette fois passer de i à $1 + i$. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient et a pour déterminant 1. On calcule la norme : $\sqrt{3}$.

Inégalités à partir du produit scalaire. TD32

On veut montrer ce qu'on appelle l'inégalité triangulaire : On se donne deux matrices. On doit comparer $\sqrt{(a+\alpha)^2 + (b+\beta)^2 + (c+\gamma)^2 + (d+\delta)^2}$ et la somme

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}$$

> *Disons le tout net, l'élève qui affirme "il est évident que" ou "par un calcul rapide" n'a pas sa place en Prépas, c'est un futur danger public.*

Pour comparer ces réels positifs, on va comparer leurs carrés en effectuant la différence de leurs carrés : $(\sqrt{\ldots}+\sqrt{\ldots})^2-(\sqrt{\ldots+\ldots})^2$.
Il reste
$$(a^2+b^2+c^2+d^2)+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)+2.\sqrt{\ldots}.\sqrt{\ldots}-\Big((a+\alpha)^2+\ldots+(d+\delta)^2\Big)$$
On développe les carrés et on élimine, il reste
$$2.\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}.\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}-2.(a.\alpha+b.\beta+c.\gamma+d.\delta)$$
Notre objectif est de montrer que ce réel est positif.
Si $a.\alpha+b.\beta+c.\gamma+d.\delta$ est négatif, c'est gagné.
Mais de toutes façons, en posant $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix}$, on reconnaît $2.|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|-2.(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$. Or, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ s'écrit aussi $|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|.\cos(\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}})$. Il est donc plus petit que $|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|$ (un cosinus ne dépasse pas 1). La différence $2.|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|-2.(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$ est donc positive. C'est ce que l'on voulait obtenir.

On se donne une matrice $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ *(notée A)* de déterminant 1 : $a.d-b.c=1$. On calcule sa norme $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$. Comme indiqué, on introduit les deux vecteurs $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}d\\-c\\-b\\a\end{pmatrix}$ et on calcule de deux façons leur produit scalaire :
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=a.d+b.(-c)+c.(-b)+d.a=2.(a.d-b.c)=2$$
car la matrice est dans
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|.\cos(\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}})=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}.\sqrt{d^2+(-c)^2+(-b)^2+a^2}.\cos(\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}})=N(A).\cos(\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}})$$
On égalise : $N(A).\cos(\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}})=2$. Comme la norme est positive, tandis que le cosinus ne dépasse pas 1, on a forcément $N(A)2$.

Comme la hauteur d'un complexe z du demi-plan se calcule par la norme d'une matrice A de vérifiant $A*i=z$, la hauteur d'un complexe vaut au moins $\sqrt{2}$ *(atteinte pour $z=i$).*

∘13∘

Calculez $\int_0^1 t.Arcsin(t).dt$.

Par parties.

$Arcsin(t)$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
t	$\hookleftarrow$	$\dfrac{t^2-1}{2}$

oh la belle astuce ! $\dfrac{t^2-1}{2}$ au lieu de $\dfrac{t^2}{2}$.

On a alors $\int_0^1 t.Arcsin(t).dt=\Big[\dfrac{t^2-1}{2}.Arcsin(t)\Big]_{t=0}^{t=1}-\dfrac{1}{2}.\int_0^1\dfrac{t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}.dt$.
On simplifie : $\int_0^1 t.Arcsin(t).dt=0+\dfrac{1}{2}.\int_0^1\sqrt{1-t^2}.dt$.
Or, $y=\sqrt{1-t^2}$ est l'équation d'un cercle de centre 0 et de rayon 1.
On calcule donc ici l'aire sous un quart de cercle (donc l'aire d'un quart de disque) de rayon 1.
L'intégrale vaut $\dfrac{\pi}{8}$.

∘14∘

♡ Une application linéaire f de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ dans $(\mathbb{R}_2[X],+,.)$ vérifie $f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})=X^2+X+1$, $f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})=X^2-X$ et $f(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})=X^2-X$.
Calculez $f(\overrightarrow{i})$, $f(\overrightarrow{j})$ et $f(\overrightarrow{k})$. Déterminez le noyau de f.

Tout repose sur la linéarité.
Et sur le fait que $(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{k})$ est une base.

Tout vecteur se décompose à l'aide de ces trois là.

$$\begin{array}{lcllll} \overrightarrow{i} & = & 0.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}) & +1.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) & -1.(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) & \textit{facile} \\ \overrightarrow{k} & = & -1.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}) & +1.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) & +0.(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) & \textit{facile aussi} \\ \overrightarrow{j} & = & 1.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}) & -1.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) & +1.(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) & \textit{avec les deux autres} \end{array}$$

On a donc les trois images : $\begin{array}{lcllll} f(\overrightarrow{i}) & = & 0 & & \\ f(\overrightarrow{j}) & = & X^2 & +X & +1 \\ f(\overrightarrow{k}) & = & & -2.X & -1 \end{array}$

On peut vérifier en recalculant $f'(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$ et autres.

Il saute que yeux que $\overrightarrow{i}$ est dans le noyau.
Ainsi que ses multiples.

Est il tout seul ? En tout cas, le noyau est il uniquement cette droite ?

On peut résoudre et montrer que $f(x.\overrightarrow{i}+.\overrightarrow{j}+z.\overrightarrow{k})=0$ conduit à $y=z=0$ et x quelconque.

Sinon, on peut se dire que si le noyau avait été plus gros, il aurait été de dimension 2.
L'image aurait alors été de dimension 1.
Et visiblement, on trouve des vecteurs non colinéaires.

Oui, les polynômes à l'arrivée sont appelés vecteurs.

Pour l'ensemble image, la formule du rang nous prévient qu'il sera de dimension 2 seulement (inclus dans $(\mathbb{R}_2[X],+,.)$ qui est de dimension 3).
On sait que les vecteurs $f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})=X^2+X+1$, $f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})=X^2-X$ et $f(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})=X^2-X$. sont dans l'ensemble image.
Ils en forment une famille génératrice, puisque l'image de n'importe que $.\overrightarrow{i}+y.\overrightarrow{j}+z.\overrightarrow{k}$ est une combinaison des trois.
Mais comme on a un vecteur en double, on ne le met qu'une fois.

$$Im(f)=Vect(X^2+X+1,\ X^2-X)$$

Et en revanche on ne sait que l'ensemble image ne fait pas partie des questions posées...

Au fait, qui a été perturbé par le fait qu'on envoyait des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sur des polynômes ?
Qui a dit « c'est pas cohérent » ?
Après tout, on définit ce qu'on veut, du moment que c'est linéaire !

∘15∘

E est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 nuls en 1.
Complétez le tableau.
Pour celles qui sont des bases, regroupez les en deux groupes en fonction de leur orientation relative.

	génératrice	base
$(1,X,X^2,X^3)$		
$((X-1),\ (X-1)^2,\ (X-1)^3)$		
$(X-1),\ (X-1).(X-2),\ (X-1).(X-2).(X-3))$		
$(X-1),\ (X-1).(X-2),\ (X-1).(X-2)^2)$		
$(X-1,\ (X-1)^2,\ (X-1).(X-2),\ (X-1).(X-3))$		
$((X-1)^2.(X-2),\ (X-1).(X-2)^2,\ X-1)$		
$((X-1),\ (X-1).X,\ (X-1).X^2)$		

∘16∘

Montrez que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\right)$ est liée dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles vous pouvez enlever n vecteurs de la famille alors qu'elle reste liée.
Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles vous pouvez enlever n vecteurs de la famille pour qu'elle devienne libre.

Cinq vecteurs dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$.
Et en plus, il y a le vecteur nul !

Si j'en enlève cinq, elle est vide, et donc libre.
Si j'en enlève plus que 5, je suis fort !
Si j'en enlève un, deux, trois ou quatre, je peux choisir de garder le vecteur nul. Et elle reste liée.

Si j'en enlève un seul (quel qu'il soit) elle a toujours trop de vecteurs.
Si j'en enlève deux, et que je garde ($\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$), j'ai mal joué, elle est liée.
Mais si je garde ($\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$) elle est libre (déterminant non nul). C'est donc le choix que je ferai.
Si on me demande d'en enlever plus, je commence par en enlever deux : ($\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$), et l'en enlève encore à cette famille libre. Elle reste libre.

◦17◦

Soient A et B deux matrices carrées de taille 2. Montrez que la famille $(A^2,\ B^2,\ A.B,\ A.B.A,\ B.A.B)$ est liée.

Mais c'est idiot ! Cinq matrices dans un espace vectoriel de dimension 4 ! L'exercice est fini.
Oui, l'espace des matrices 2 sur 2 est de dimension 4 et pas 2, il faut quand même être un peu logique et compter les nombres à choisir...

◦18◦

♡ Un élève a l'intention de démontrer que la famille $(\cos,\ \cos^2,\ \cos^3,\ \sin)$ est liée dans $(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,.)$. Il veut pour un quadruplet donné $(a,\ b,\ c,\ d)$: $a.\cos + b.\cos^2 + c.\cos^3 + d.\sin = 0$ *(fonction nulle)*. Il calcule en 0 en $\pi/4$ et en $\pi/2$.
Il aboutit au système $\left\{\begin{array}{ccccc} a & +b & +c & & = 0 \\ \sqrt{2}.a/2 & +b/2 & +\sqrt{2}.c/4 & +\sqrt{2}.d/2 & = 0 \\ & & & +d & = 0 \end{array}\right.$. Il trouve une solution non nulle $(a,b,c,d) = (\sqrt{2}/2,\ -(2+\sqrt{2})/2,\ 1,\ 0)$ *(vérifiez)*. Pourquoi son raisonnement est il faux ?

L'élève a prouvé

$$\Big(a.\cos + b.\cos^2 + c.\cos^3 + d.\sin = 0\Big) \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} a & +b & +c & & = 0 \\ \sqrt{2}.a/2 & +b/2 & +\sqrt{2}.c/4 & +\sqrt{2}.d/2 & = 0 \\ & & & +d & = 0 \end{array}\right.$$

puis

$$\Big((a,b,c,d) = (\sqrt{2}/2,\ -(2+\sqrt{2})/2,\ 1,\ 0)\Big) \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} a & +b & +c & & = 0 \\ \sqrt{2}.a/2 & +b/2 & +\sqrt{2}.c/4 & +\sqrt{2}.d/2 & = 0 \\ & & & +d & = 0 \end{array}\right.$$

Et alors ?

Ce que l'on n'a pas c'est

$$\Big((a,b,c,d) = (\sqrt{2}/2,\ -(2+\sqrt{2})/2,\ 1,\ 0)\Big) \Rightarrow \Big(a.\cos + b.\cos^2 + c.\cos^3 + d.\sin = 0\Big)$$

Au mieux :

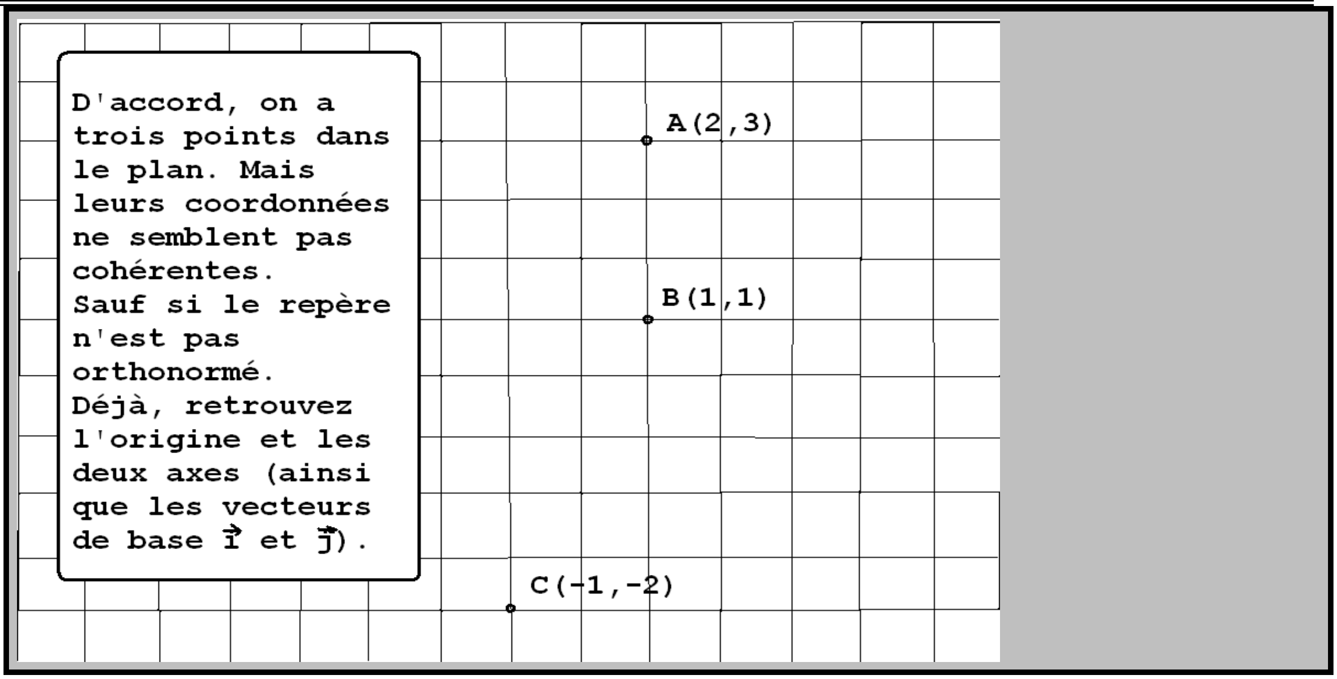
$$\Big((a,b,c,d) = (\sqrt{2}/2,\ -(2+\sqrt{2})/2,\ 1,\ 0)\Big) \Rightarrow \Big(\exists x,\ a.\cos(x) + b.\cos^2(x) + c.\cos^3(x) + d.\sin(x) = 0\Big)$$

Pour famille liée, on aurait voulu

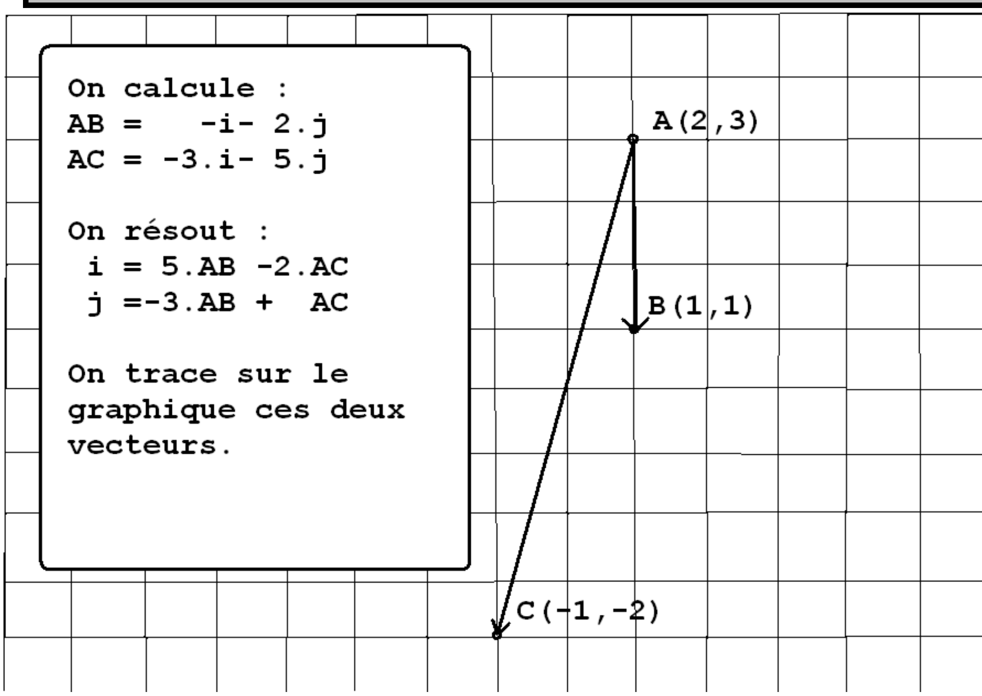
$$\Big((a,b,c,d) = (\sqrt{2}/2,\ -(2+\sqrt{2})/2,\ 1,\ 0)\Big) \Rightarrow \Big(\forall x,\ a.\cos(x) + b.\cos^2(x) + c.\cos^3(x) + d.\sin(x) = 0\Big)$$

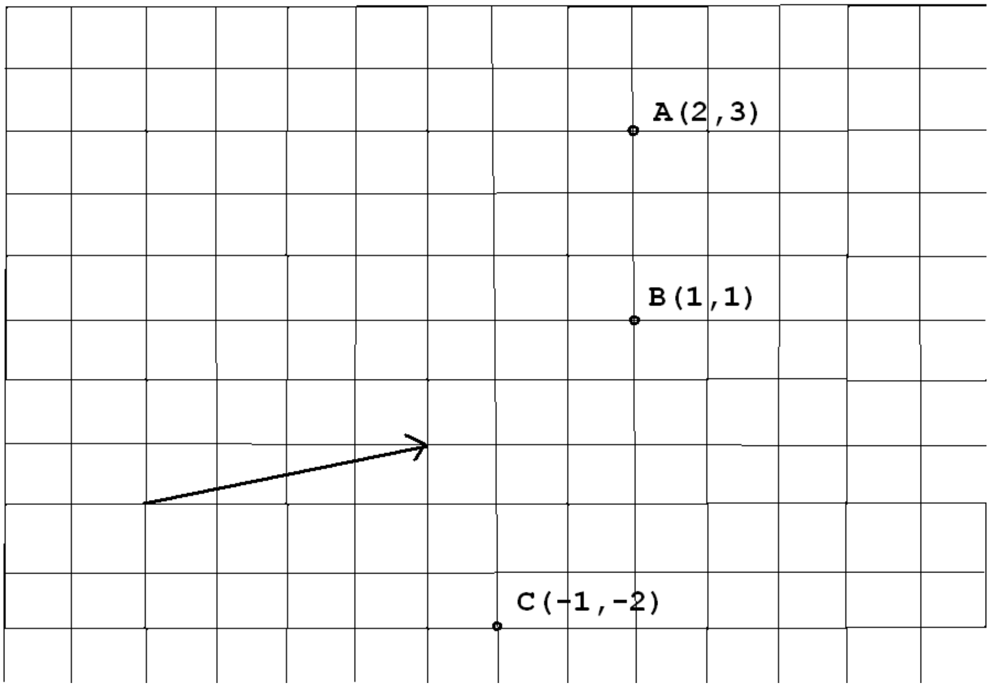
Et sinon, on peut montrer : $\Big(\forall x,\ a.\cos(x) + b.\cos^2(x) + c.\cos^3(x) + d.\sin(x) = 0\Big) \Rightarrow \Big((a,b,c,d) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)\Big)$.
Calculez par exemple en $\pi/2$, puis en 0.
Ensuite, dérivez et calculez en 0. Terminez en calculant en $\pi/3$.

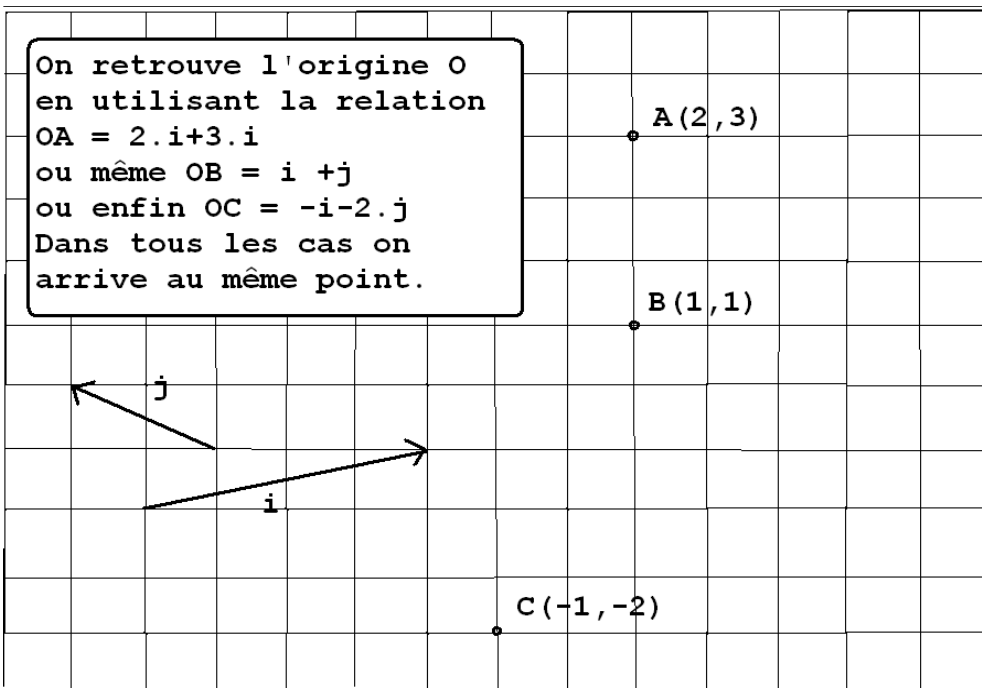
D'ailleurs, d'un point de vue logique, partir de $\left(a.\cos + b.\cos^2 + c.\cos^3 + d.\sin = 0\right)$ *et n'utiliser que trois valeurs de x sent mauvais.*
On a quatre nombres à déterminer a, b, c et d. Il vaut mieux avoir quatre relations pour bien avancer !

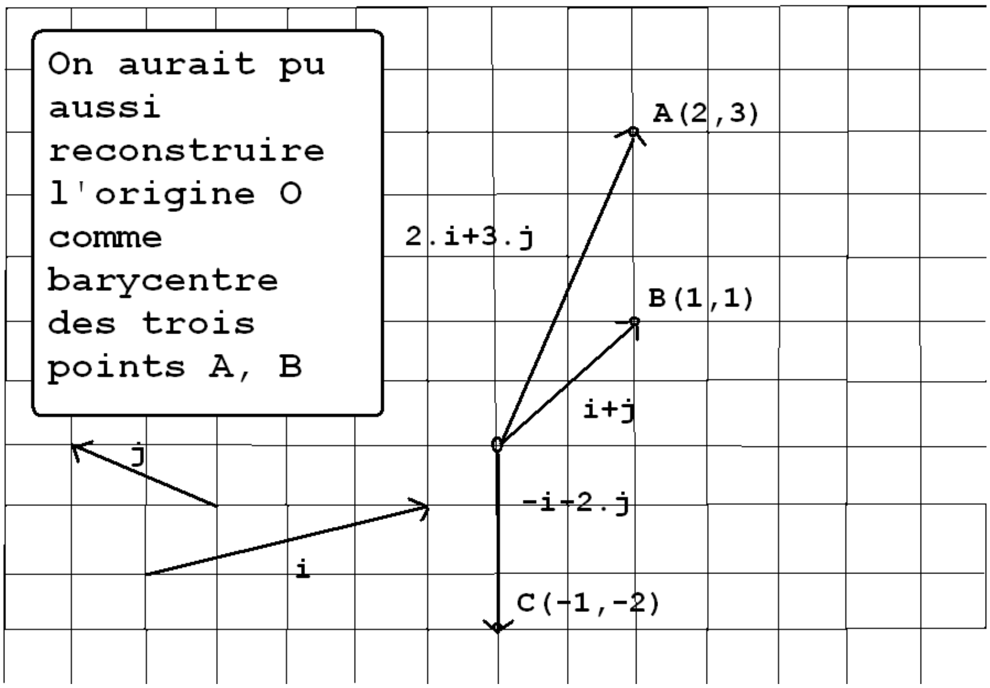


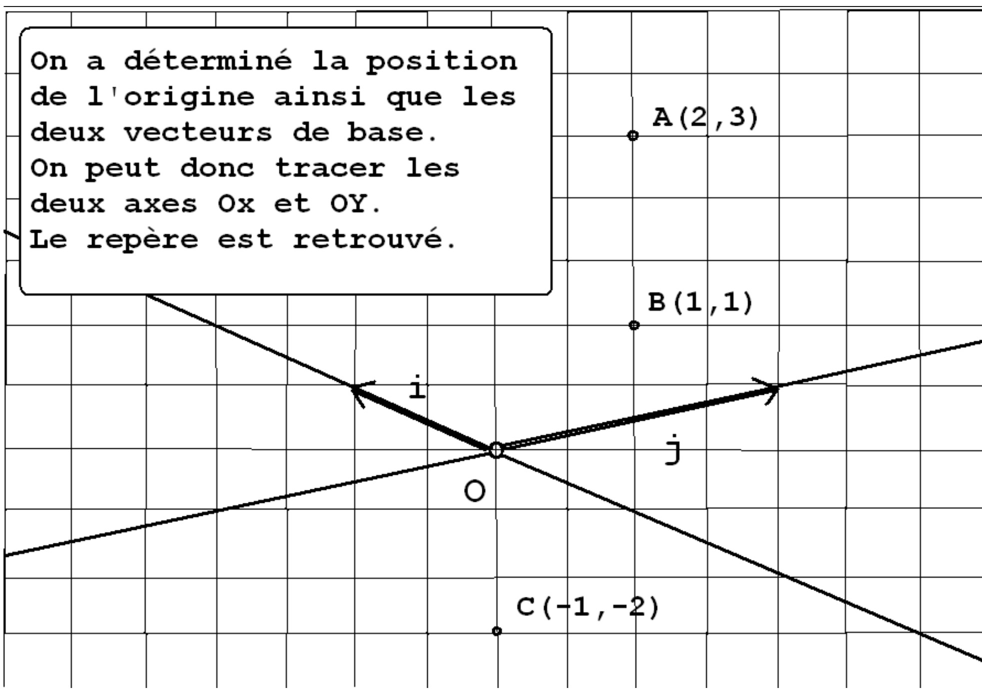
∘19∘

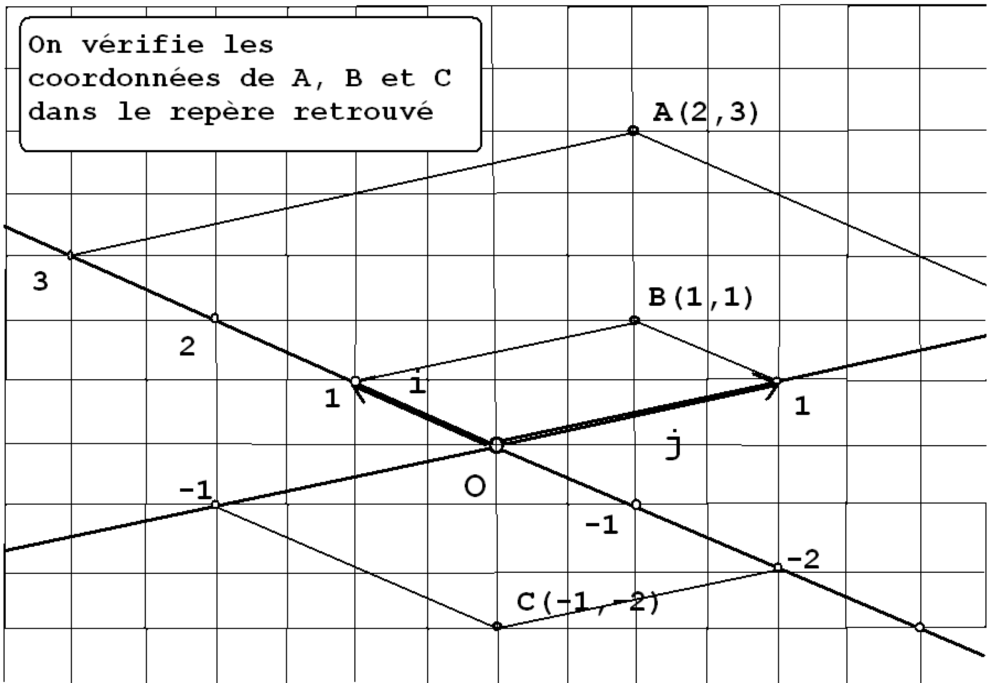



A(2,3)
B(1,1)
C(-1,-2)


On retrouve l'origine O
en utilisant la relation
OA = 2.i+3.i
ou même OB = i +j
ou enfin OC = -i-2.j
Dans tous les cas on
arrive au même point.
A(2,3)
B(1,1)
j
i
C(-1,-2)


On aurait pu aussi reconstruire l'origine O comme barycentre des trois points A, B
A(2,3)
2.i+3.j
B(1,1)
i+j
j
-i-2.j
i
C(-1,-2)


On a déterminé la position de l'origine ainsi que les deux vecteurs de base.
On peut donc tracer les deux axes Ox et OY.
Le repère est retrouvé.
A(2,3)
B(1,1)
i
j
O
C(-1,-2)



∘20∘

Montrez que si $(S_1, \ldots S_p)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ et $(A_1, \ldots A_q)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$, alors $(S_1, \ldots S_p, A_1, \ldots A_q)$ n'est pas forcément une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$.
Montrez que si $(S_1, \ldots S_p)$ est une famille libre de $(S_n(\mathbb{R}), +, .)$ et $(A_1, \ldots A_q)$ est une famille libre de $(A_n(\mathbb{R}), +, .)$, alors $(S_1, \ldots S_p, A_1, \ldots A_q)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$.
Rappel : $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ est l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n sur n ; S_n en est le sous-espace des matrices symétriques (définition : ${}^tS = S$) et enfin A_n en est le sous-espace des matrices antisymétriques (définition : ${}^tA = -A$) .

Pour le cas « $(S_1, \ldots S_p)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ et $(A_1, \ldots A_q)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ », un contre-exemple suffit.
La famille (I_n) est libre (un vecteur, non nul).
La famille $(2.I_n)$ l'est aussi (même raison).
Mais la famille $(I_n,\ 2.I_n)$ ne l'est pas (vecteurs colinéaires).

Passons au cas où on met bout à bout • une famille libre de matrices symétriques
• une famille libre de matrices antisymétriques
Traduisons les hypothèses :
• $\forall(\alpha_1, \ldots \alpha_p) \in \mathbb{R}^p,\ \Big((\alpha_1.S_1 + \ldots + \alpha_p.S_p = 0_{n,n}) \Rightarrow (\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0)\Big)$
• $\forall(\beta_1, \ldots \beta_q) \in \mathbb{R}^q,\ \Big((\beta_1.A_1 + \ldots + \beta_q.A_q = 0_{n,n}) \Rightarrow (\beta_1 = \ldots = \beta_q = 0)\Big)$
mais aussi $\forall i,\ {}^t(S_i) = S_i$ et $\forall i,\ {}^t(A_j) = -A_j$.

Surtout, on n'invente pas un truc débile du style « on additionne les hypothèses et on met ensemble les conclusions », ce serait un truc idiot sans queue ni tête, et pire encore, sans logique.

Exemple : Que pensez vous de l'élève qui écrit : $\forall x,\ \cos^2(x) = 1/2 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$
$\forall x,\ \sin(x)^2 = 1/2 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$
donc
$\forall x,\ \cos^2(x) + \sin(x)^2 = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$
Oui, il faudrait le mettre dans tous les livres de maths cet exemple de raisonnement d'élève...

On va s'intéresser à la liberté de la grande famille des S_i et A_j.
On se donne donc $p + q$ réels qu'on note naturellement α_i et β_j.
On suppose $\alpha_1.S_1 + \ldots + \alpha_p.S_p + \beta_1.A_1 + \ldots + \beta_q.A_q = 0_{n,n}$.
On veut arriver à la nullité des α_i et des β_j.
Mais pour cela, il faudrait passer de $\alpha_1.S_1 + \ldots + \alpha_p.S_p + \beta_1.A_1 + \ldots + \beta_q.A_q = 0_{n,n}$ à $\alpha_1.S_1 + \ldots + \alpha_p.S_p = 0_{n,n}$ et $\beta_1.A_1 + \ldots + \beta_q.A_q = 0_{n,n}$
ce qui n'est pas évident, car on ne passe pas d'une égalité à deux (c'est la base même des raisonnements bien bâtis,

on n'écrit rien sans réfléchir).
Mais si on part de
$$\alpha_1.S_1+\ldots+\alpha_p.S_p+\beta_1.A_1+\ldots+\beta_q.A_q=0_{n,n}$$
et qu'on transpose ?
$$\alpha_1.{}^t(S_1)+\ldots+\alpha_p.{}^t(S_p)+\beta_1.{}^t(A_1)+\ldots+\beta_q.{}^t(A_q)={}^t\,(0_{n,n})=0_{n,n}$$
On tient compte des hypothèses « (anti)-symétriques :
$$\alpha_1.S_1+\ldots+\alpha_p.S_p-\beta_1.A_1+\ldots-\beta_q.A_q=0_{n,n}$$
Mais on a aussi toujours $\alpha_1.S_1+\ldots+\alpha_p.S_p+\beta_1.A_1+\ldots+\beta_q.A_q=0_{n,n}$.
On somme, et on soustrait : $\alpha_1.S_1+\ldots+\alpha_p.S_p=0_{n,n}$ et $\beta_1.A_1+\ldots+\beta_q.A_q=0_{n,n}$.
cette fois, on a nos deux égalités.
Il est temps d'utiliser les deux hypothèses « famille libre » pour conclure d'une part les α_i sont nuls
d'autre part les β_j sont nuls.

◦21◦

Montrez que dans $(\mathbb{R},+,.)$, vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la famille $(\cos(\theta),\cos(2.\theta),\cos(3.\theta))$ est liée pour tout θ.
Pour quelles valeurs de θ dans $(\mathbb{R},+,.)$, vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, la famille $(\cos(\theta),\cos(2.\theta),\cos(3.\theta))$ est-elle libre ?
$\theta=0,\theta=\dfrac{\pi}{3},\theta=\dfrac{\pi}{12},\theta=\dfrac{\pi}{4},\theta=\dfrac{\pi}{2},\theta=\dfrac{\pi}{5}$

$(\cos(\theta),\cos(2.\theta),\cos(3.\theta))$ est une famille de trois réels.
C'est à dire de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 1 (la droite). Bien sûr qu'elle est liée.
Tous ces réels sont proportionnels entre eux (le rapport de proportion dépend de θ, mais surveillez bien la position du « $\forall\theta$ »).

Mais en revanche, quand on regarde $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel, c'est plus étrange.
Les coefficients dans les combinaisons linéaires sont uniquement des rationnels.
1 et 2 sont donc colinéaires, avec rapport de proportionnalité 2.
Mais 1 et π ne sont pas proportionnels, et forment donc une famille libre.
De même, 1, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ forme une famille libre (trois directions d'espaces différentes puisque sur la droite engendrée par 1, il n'y a que les rationnels, et dans $Vect(1,\sqrt{2})$, on n'a que les $a+b.\sqrt{2}$ avec a et b rationnels ; raté pour attraper $\sqrt{3}$).

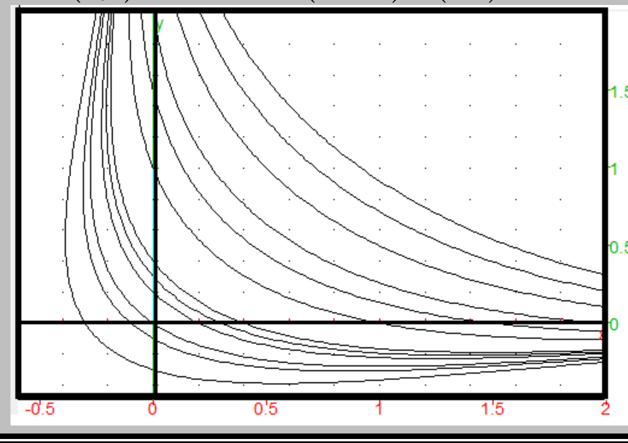
θ	$\cos(\theta)$	$\cos(2.\theta)$	$\cos(3.\theta)$	
0	1	1	1	liée : $1.1+(-1).1+0.1=0$
$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	-1	liée : $2.\dfrac{1}{2}+0.\dfrac{-1}{2}+1.(-1)=0$
$\dfrac{\pi}{12}$	$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	libre (mais c'est long)
$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	liée, à cause de 0, mais pas que..
$\dfrac{\pi}{2}$	0	-1	0	liée, encore à cause de 0
$\dfrac{\pi}{5}$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$	$\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$	liée $0.\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}+1.\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}+(-1).\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

◦22◦

On définit $\phi=(u,\ v)\longmapsto(x,\ y)$ de $(\mathbb{R}^+)^2$ dans $\mathbb{R}^2$ avec $x=u^2-v^2$ et $y=u.v$. Déterminez $\dfrac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}$ (c'est $\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$).
Résolvez $\det\left(\dfrac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right)=0$ d'inconnues u et v.
Montrez : $\phi(a+h,\ b+k)=\phi(a,b)+\begin{pmatrix}h & k\end{pmatrix}.\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}+\overrightarrow{o(\sqrt{h^2+k^2})}$ (et expliquez la présence de cette flèche sur le petit o).
On admet que ϕ^{-1} est différentiable en $(0,\ 1)$. Donnez son développement limité d'ordre 1 en $(0,\ 1)$.

∘23∘

On définit : $F = (x,\ y) \longmapsto x.e^y + y.e^x$. Calculez les dérivées d'ordre 1 et 2 de F en $(a,\ b)$.
Retrouvez les coefficients : $F(1+h,\ 0+k) = z_0 + \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(h^2+k^2)$.



x et y sont liés par l'équation (impossible à résoudre par fonctions usuelles) $x.e^y + y.e^x = 1$. Calculez y pour $x = 0$.
Calculez y pour $x = 1$.
Montrez que si x et y sont liées ainsi, alors on a $y' = -\dfrac{y.e^x + e^y}{x.e^y + e^x}$.
Réciproque ?

∘24∘

♡ A est une matrice 2×2 donnée. H est une matrice donnée.
Donnez le développement limité d'ordre 1 de $t \longmapsto \det(A + t.H)$ sous la forme $\det(A) + t.☺ + o(t)$ où vous exprimerez le réel ☺ à l'aide de A et H (et si possible pas à l'aide de leurs coefficients).

A est une matrice de taille n sur n donnée, inversible. Donnez le développement limité d'ordre 1 de $t \longmapsto \det(A + t.H)$ sous la forme $\det(A) + t.☻ + o(t)$ où vous mettrez ☻ sous la forme de la trace d'une matrice simple.

On va prendre des lettres de début d'alphabet pour A et de fin pour H

$$\det(A + t.H) = \begin{vmatrix} a+t.u & b+t.v \\ c+t.x & d+t.y \end{vmatrix} = (a+t.u).(d+t.y) - (b+t.v).(x+t.x)$$

Comme t va tendre vers 0, on met dans $o(t)$ les termes en t^2 et on met dans $\det(A)$ les termes constants.
Il reste

$$\det(A + t.H) = \det(A) + t.(a.y + d.u - b.x - c.v) + o(t)$$

Le smiley vaut $(a.y + d.u - b.x - c.v)$ et on ne voit pas quoi deire de plus.
sauf le prof qui dit que c'est la trace de

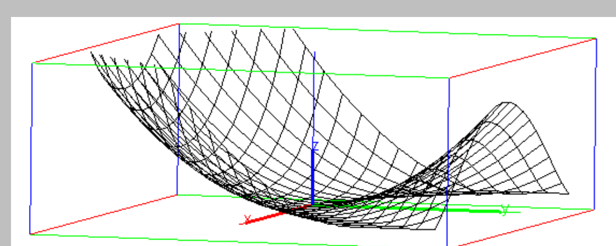
$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$$

Notre coefficient est $Tr(Com(A).H)$. Il est linéaire en H.

~~A faire en dimension n avec la formule de développement d'un déterminant par rapport à une colonne. Le coefficient est $TrCom(A).H)$.~~

∘25∘

On définit : $F = (x,\ y) \longmapsto (x^2 - y).(x^2 - 2.y)$.



Donnez son développement limité d'ordre 2 en $(0,\ 0)$.
Montrez que $x \longmapsto F(x, 0)$ et $y \longmapsto F(0, y)$ admettent en 0 un minimum.
Montrez que pour tout θ l'application $r \longmapsto F(0 + r.\cos(\theta),\ 0 + r.\sin(\theta))$ admet un minimum en $r = 0$.
Montrez que F n'admet pas un minimum local en $(0,\ 0)$ en trouvant des points aussi proches de $(0,\ 0)$ qu'on veut vérifiant $F(x,\ y) < 0$.

Cette application est continue en tout point car polynomiale.
Elle est même de classe C^1, donc différentiable en tout point.

On peut même effectuer des développements limités à tout ordre.
En particulier en $(0,\ 0)$:

$$F(0+h,\ 0+k) = (h^2 - k).(h^2 - 2.k) = 2.k^2 - 3.h^2.k + k^4$$

et en y mettant un peu d'ordre

$$F(0+h,\ 0+k) = 0 + (0.h + 0.k) + (0.h^2 + 0.h.k + 2.k^2) + o(h^2 + k^2)$$

J'espère que vous n'avez pas calculé les dérivées partielles. On est en maths, pas en calcul !

Passons aux fonctions partielles :

$$F(x,\ 0) = x^2 \text{ et } F(0,\ y) = 2.y^2$$

Ces deux applications partielles ont un minimum en 0.

Passons aux fonctions radiales

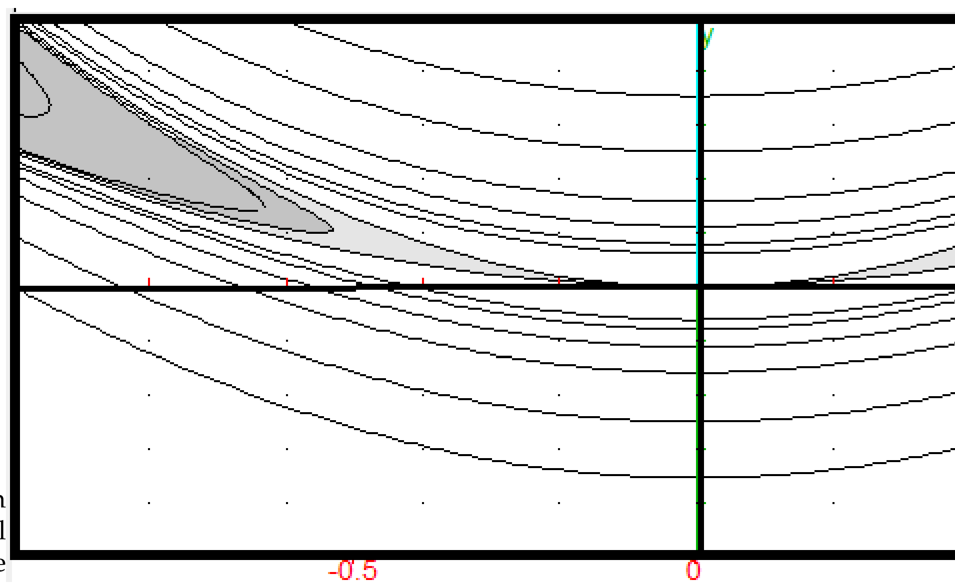
$$F(0 + r.\cos(\theta,\ 0 + r.\sin(\theta)) = r^2.s^2 - 3.r^3.c^2.s + r^4.c^4$$

avec nos notations usuelles en c et s.
Ce polynôme en r admet un minimum LOCAL en $r = 0$.
Pardonc ? Une étude de variations ? Ca ne va pas non ?
Un développement limité :

$$F(r.c,\ r.s) = 0 + 0.r + (s^2).r^2 + o(r^2)$$

c'est quand même plus intelligent.

les fonctions radiales ont toutes un minimum local.



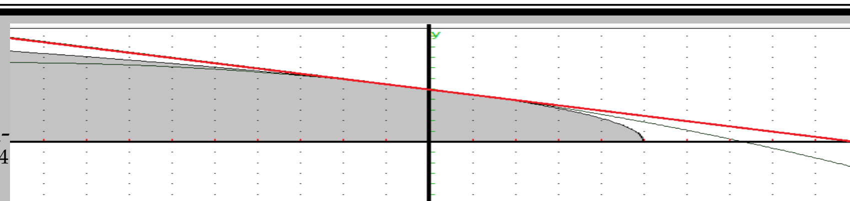
lignes de niveau (les lignes de niveau nég

Mais la fonction n'admet pas un minimum local en $(0,\ 0)$. La preuve : $F(0,0) = 0$ et il y a des points où F est négative au voisinage de $(0,0)$.
Il suffit de faire un tableau de signe pour F et de se situer entre deux paraboles : $y = x^2$ et $y = 2.x^2$.

L'idée peut vous venir de prendre $y = 3.x^2/2F(x,\ 3.x^2/2)$ est négatif pour tout x.
On n'a donc pas un minimum en $(0,\ 0)$.

En fait, quand on fait tourner le plan de coupe pour les minima locaux en $(0,0)$, on voit un autre minimum un peu plus loin, un peu plus bas, et qui se rapproche quand l'angle varie.

∘26∘ On veut utiliser $\sqrt{1-x} \simeq 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.
Sur quel intervalle peut on se placer pour qu'elle soit correcte à 10^{-4} près ?



L'erreur est à l'ordre 3 : $f(1-x) = f(1) - x.f'(1) + \frac{x^2}{2}.f''(1) - \frac{x^3}{2}.\int_0^1 (1-t)^2.f^{(3)}(1-t.x).dt$.

On dérive et calcule : $f^{(3)} = t \longmapsto \dfrac{3}{8.(1+x)^{5/2}}$.
Dans l'intégrale $f^{(3)}(1-t.x)$ est facile à majorer pour x négatif.
Pour x positif, il faut éviter d'aller trop près de 0 sous la racine.
Mais si on impose de toutes façons à x d'être plus petit que 10^{-1} en valeur absolue, ça va aller.
Et ensuite, $\dfrac{x^3}{2}$ sera encore un peu trop grand si on a pour objectif « majoration par 10^{-4} ».

◦27◦ $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & +4.b & -c & \\ & b & +c & \\ a & & +3.c & +d \end{pmatrix}$ va de $(\mathbb{R}^4,+,.)$ dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$. Donnez son image et son noyau (base et équations cartésiennes).

On ne demande pas de prouver que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & +4.b & -c & \\ & b & +c & \\ a & & +3.c & +d \end{pmatrix}$ est un endomorphisme ? Dommage, il est sous la forme $U \longmapsto M.U$.

Pour avoir son noyau, on résout $\begin{matrix} a & +4.b & -c & & =0 \\ & b & +c & & =0 \\ a & & +3.c & +d & =0 \end{matrix}$. On trouve $Vect(\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix})$, de dimension 1.

Le noyau est de dimension 1, l'image est de dimension 3.

Elle est engendrée par $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Elle a pour base $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix})$ par exemple (trois vecteurs indépendants), on a efface le dernier qui est combinaison linéaire des autres :
$5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 8.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)
Dimension 3 dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$. L'image est $\mathbb{R}^3$, d'équation $0.x+0.y+0.z=0$ si on y tient.

Quant au noyau, il est formé des vecteurs vérifiant justement $\begin{matrix} a & +4.b & -c & & =0 \\ & b & +c & & =0 \\ a & & +3.c & +d & =0 \end{matrix}$. Que voulez vous d'autre comme jeu d'équations ?

◦28◦ ♣ ou ♡ ? Calculez la limite (étonnante ?) de $\dfrac{e.\sqrt[3]{e}.\sqrt[5]{e}.\sqrt[7]{e}.\sqrt[9]{e}\ldots\sqrt[2.n+1]{e}}{\sqrt[2]{e}.\sqrt[4]{e}.\sqrt[6]{e}.\sqrt[8]{e}.\sqrt[10]{e}\ldots\sqrt[2.n]{e}}$ quand n tend vers l'infini (mot clef : $\ln(1+h) = \sum_{k=1}^{n}\ldots+\ldots$ avec $h=1$).

En notation « fractionnaire » : $\dfrac{e.\sqrt[3]{e}.\sqrt[5]{e}.\sqrt[7]{e}.\sqrt[9]{e}\ldots\sqrt[2.n+1]{e}}{\sqrt[2]{e}.\sqrt[4]{e}.\sqrt[6]{e}.\sqrt[8]{e}.\sqrt[10]{e}\ldots\sqrt[2.n]{e}} = \dfrac{e.e^{\frac{1}{3}}.e^{\frac{1}{5}}.e^{\frac{1}{7}}.e^{\frac{1}{9}}\ldots e^{\frac{1}{2.n+1}}}{e^{\frac{1}{2}}.e^{\frac{1}{4}}.e^{\frac{1}{6}}.e^{\frac{1}{8}}.e^{\frac{1}{10}}\ldots e^{\frac{1}{2.n}}}$.
On passe tout à un seul exposant, avec des signes moins pour le dénominateur.

$$\frac{e.\sqrt[3]{e}.\sqrt[5]{e}.\sqrt[7]{e}.\sqrt[9]{e}\ldots\sqrt[2.n+1]{e}}{\sqrt[2]{e}.\sqrt[4]{e}.\sqrt[6]{e}.\sqrt[8]{e}.\sqrt[10]{e}\ldots\sqrt[2.n]{e}} = e^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2.n+1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2.n}} = e^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots-\frac{1}{2.n}+\frac{1}{2.n+1}}$$

Et que fait cet exposant ? C'est la série harmonique alternée. Elle converge vers $\ln(2)$
(écrire la formule de Taylor avec reste intégrale $\ln(1+1)$ et regarder le reste tendre vers 0 quand n tend vers l'infini).
La limite donne $e^{\ln(2)}$. Et ça, c'est 2 ! et je peux même écrire $\boxed{\text{« et ça c'est 2! »}}$

∘29∘

♡ Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie. On suppose $E = Ker(f) + Ker(g)$ et $E = Im(f) + Im(g)$.
Montrez que l'on a alors $E = Ker(f) \oplus Ker(g)$ et $E = Im(f) \oplus Im(g)$.
Si vraiment vous avez besoin d'une indication : utilisez la formule du rang et la formule de Grassmann.

On écrit les formules de Grassmann : $\begin{array}{lcl} \dim(E) & = & \dim(Ker(f)) + \dim(Ker(g)) - \dim(Ker(f) \cap Ker(g)) \\ \dim(E) & = & \dim(Im(f)) + \dim(Im(g)) - \dim(Im(f) \cap Im(g)) \end{array}$

On additionne les deux, et on utilise $\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(E)$:
$2.\dim(E) = \dim(E) + \dim(E) - \dim(Ker(f) \cap Ker(g)) - \dim(Im(f) \cap Im(g))$.
Il vient $\dim(Ker(f) \cap Ker(g)) + \dim(Im(f) \cap Im(g)) = 0$.
Comme une dimension est positive ou nulle, chacun est nulle.
Quand la dimension est nulle, l'espace est réduit à $\overrightarrow{0}$.
On a donc $Ker(f) \cap Ker(g) = \{\overrightarrow{0}\}$ et $Im(f) \cap Im(g) = \{\overrightarrow{0}\}$.
C'est ce qui permet de dire que les sommes sont directes.

∘30∘

Déterminez le noyau de $f \longmapsto f' - f$ de $C^\infty(\mathbb{R})$ dans lui même.
Déterminez le noyau de $P \longmapsto P' - P$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui même.

Si on résout $f' - f = 0$, on trouve que f est un multiple de l'exponentielle (et pas de e^x, on est d'accord !).
Le noyau de $f \longmapsto f' - f$ est $Vect(\exp)$.
Il est de dimension 1.

Mais avec des polynômes, on ne peut avoir $P' = P$ (degré), sauf avec $P = 0$.
Le noyau est réduit au vecteur nul. Et il est de dimension 0.

Passons à l'idée géniale de l'algèbre linéaire pour les suites récurrentes et/ou les équations différentielles linéaires.

L'opérateur $(u_0,\ u_1, \ldots u_n, \ldots) \longmapsto (u_1,\ u_2, \ldots u_{n+1}, \ldots)$ est linéaire. C'est juste celui qui décale tout le monde d'un cran.

Son carré, c'est $(u_0,\ u_1, \ldots u_n, \ldots) \longmapsto (u_2,\ u_3, \ldots u_{n+2}, \ldots)$.
Tout élève soucieux de la rigueur écrire bien $(\sigma(u))_n = u_{n+1}$ pour tout n, et n'écrira jamais $\sigma(u_n) = u_{n+1}$ qui n'a aucun sens.

> Vous me direz « on se comprend, pas grave ».
> Je vous dirai que ce n'est pas une raison pour mal parler et écorcher les mathématiques.
> C'est aussi moche que d'écrire $(f(x))'$. On se comprend dans les bas-fonds, mais ça ne veut rien dire.

Le noyau $Ker(\sigma - a.Id)$ est formé des suites vérifiant pour tout n $u_{n+1} = a.u_n$. Ce sont les suites géométriques de raison a.

Le noyau $Ker(\sigma^2 - (a+b).\sigma + a.b.Id)$ est formé des suites vérifiant pour tout n $u_{n+2} - (a+b).u_{n+1} + (a.b).u_n = 0$.
Avec $a = b = 1$ et $a.b = -1$ c'est la suite de Fibonacci.

Notre preuve sur les noyau dit que toute suite du gros noyau est la somme de deux suites des petits noyaux.

Toute solution de $\forall n,\ u_{n+2} = (a+b).u_{n+1} - (a.b).u_n$ est combinaison linéaire de deux suites géométriques d raisons a et b.

Toute la théorie et même la pratique des suites récurrentes linéaires racontée par des sommes de noyaux.

> Pour les équations différentielles, σ est l'opérateur $f \longmapsto f'$ (avec justement $f'(x)$ qui a un sens, mais pas $(f(x))'$ comme le monde est petit.

∘31∘

Montrez qu'il existe un endomorphisme f de E vérifiant $Ker(f) = Im(f)$ si et seulement si $\dim(F)$ est paire.
Pour un sens, on construira un endomorphisme sur la base $(\overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \ldots \overrightarrow{e_{2.p}})$ en donnant sa matrice avec bon nombre de 0.

Une partie de la réponse doit tomber en un mot : « formule du rang » (oui, trois).

$\dim(F) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = 2.rg(f)$

Ensuite, si $(E, +, .)$ est de dimension $2.p$, on se donne déjà une base faite de $2.p$ vecteurs, et on construit un endomorphisme qui répond à la requête.
On va imposer $Ker(f) = Vect(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_p})$, ce qui revient à avoir les p premières colonnes nulles (et les suivantes indépendantes).
Ensuite, comme l'image doit être $Vect(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_p})$, les p dernières lignes sont nulles.
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la bloc en faut doit juste être inversible. Facile : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

◦32◦

On définit $f = X \longmapsto M.X$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & & 1 & \\ & -3 & & 3 \end{pmatrix}$ et $P = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Donnez la dimension de P et une équation cartésienne de P.

Ajustez les coefficients de M pour avoir $Im(f) \subset P$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \in Ker(f)$. A-ton $Im(f) = P$? Donnez une base et la dimension de $Ker(f)$ (rappelle : $Ker(f)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs dont l'image est nulle).

L'application $X \longmapsto M.X$ va bien de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ (formats compatibles). Et c'est la seule possibilité.
Elle est linéaire, puisque $M.(\lambda.X + \mu.Y) = \lambda.M.X + \mu.M.Y$ par distributivité.

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont indépendants. Ils engendrent donc un plan de $(\mathbb{R}^3, +,)$. On en trouve une équation par condition de coplanarité :
$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. On peut aussi proposer $2.x - .y + .z = 0$. C'est l'équation d'un plan (dimension). il contient les deux vecteurs, c'est lui le plan cherché.

Chaque image $\begin{pmatrix} x & +2.y & +a.z & +t \\ 3.x & +c.y & +z & +d.t \\ e.x & -3.y & +f.z & +3.t \end{pmatrix}$ doit vérifier ce jeu d'équations.
Mais sous cette forme, on s'y perd un peu pour savoir qui on cherche,
sachant $2.(x + 2.y + a.z + t) - (3.x + c.y + z + d.t) + (e.x - 3.y + f.z + 3.t) = 0$.
Mais quel est le rôle de x , de y et ainsi de suite...

La bonne approche de matheux, c'est de dire qu'on va regarder pour une base, ou pour l'image d'une base.
Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est l'image du premier vecteur de $\mathbb{R}^4$. Elle doit être dans P. On a donc $2.1 - 3 + e = 0$.
On recommence avec $\begin{pmatrix} 2 \\ c \\ -3 \end{pmatrix}$, image du second vecteur. Cette fois : $2.2 - c - 3 = 0$.
Et ainsi de suite.

> On notera que par exemple la dernière équation $2.1 - d + 3 = 0$ correspond à avoir pris $x = y = z = 0$ et $t = 1$ dans une condition qui doit être vraie pour tout quadruplet $(x,\ y,\ z,\ t)$.
> Sinon, la condition qui semble n'être que nécessaire est aussi suffisante.
> L'image de chaque vecteur $x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+x_3\overrightarrow{e_3}+x_4\overrightarrow{e_4}$ est $x_1.\text{f}(\overrightarrow{e_1})+x_2.\overrightarrow{f(e_2)}+x_3.\text{f}(\overrightarrow{e_3})+x_4.\text{f}(\overrightarrow{e_4})$, et la voilà dans P par stabilité.

A ce stade : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & & 3 \end{pmatrix}$ avec une relation entre les deux coefficients qui manquent.

On notera qu'on a en fait $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ou en transposant : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ & 1 & \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ce serait ça, transposer une matrice .

Mais il nous reste une information : le noyau : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On tient la matrice : $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$

On vérifie quand même que le troisième vecteur est dans P.

Pour le noyau, on doit juste résoudre : $\begin{array}{ccccccc} x & +2.y & & +t & = & 0 \\ 3.x & +y & +z & +5.t & = & 0 \\ x & -3.y & +z & +3.t & = & 0 \end{array}$.

Trois équations pour quatre inconnues. On va avoir un espace de dimension $4-3$ ce qui fait 1.

On connaît déjà un vecteur dedans ! On a donc $Ker(f) = Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix})$. De dimension 1.

Sauf que...
Une des équations ne sert à rien. C'est par exemple $L_3 = -2.L_1 + L_2$.

Le noyau est de dimension 2 : $\begin{array}{cccccc} x & +2.y & & +t & = & 0 \\ 3.x & +y & +z & +5.t & = & 0 \end{array}$

On se donne x et y, et on trouve t et z.

Les vecteurs du noyau sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2.x+9.y \\ -x-2.y \end{pmatrix}$. Plus propre : $\begin{pmatrix} x & \\ & y \\ 2.x & +9.y \\ -x & -2.y \end{pmatrix}$.

Le noyau est de dimension 2, et c'est $\boxed{Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix})}$

∘33∘ ♡ Donnez le développement asymptotique de la suite $\left(\exp\left(\frac{n+4}{n+1}\right)\right)_n$ sous la forme $a.n + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o(n^{-2})_{n\to+\infty}$ *(oui, certains coefficients sont peut être nuls)*.

∘34∘ Donnez la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$ si elle existe.

Passons au logarithme :

$$\sqrt{n+1}.\ln(n) - \sqrt{n}.\ln(n+1) = \sqrt{n}.\sqrt{1+\frac{1}{n}}.\ln(n) - \sqrt{n}.\Big(\ln(n) + \ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big)$$

Développons ce qui est limite/limite (elle existe encore cette chaine YouTube de blagues lourdes et déjà connues ?)

$$\sqrt{n}.\Big(1+\frac{1}{2.n} - \frac{1}{8.n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big).\ln(n) - \sqrt{n}.\Big(\ln(n) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2.n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big)$$

Tout tend vers 0. La limite sera égale à 1.

Fonction de n croissante puis décroissante à partir de 50 ou quelquchose comme ça.

∘35∘

Complétez $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$ (notée A) pour que le noyau de $X \longmapsto A.X$ soit $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Déterminez alors son image. Diagonalisez alors A.

∘36∘

Donnez la limite de $(x+1).\ln(x) - x.\ln(x+1)$ quand n tend vers l'infini. Trouvez alors un équivalent en $a.x^b.(\ln(x))^c$.

∘37∘

1	3	2					4
		1	4	3	2		1
1	4		4	1		4	3
	1	5		5	5	3	
		1	5				
4	3	3			5	5	5
2	4	3			9	3	
			4	1	3		

3	1	2	1		4	3	
					2		
1	4	3		3	1	4	
4			2	1	3	3	
4			1			3	4
2	3		2		4	2	1
	1	4	1	3			5
				3			

La grille doit être découpée en « maisons » (suites des cases contigües par au moins un côté. Dans une maison de taille n toutes les cases sont marquées « n ». Deux maisons de même taille ne peuvent pas avoir de côté commun. Complétez.

1	3	2	2	3	3	4	4
3	3	1	4	3	2	4	1
1	4	4	4	1	2	4	3
4	1	5	5	5	5	3	3
4	4	1	5	9	9	9	9
4	3	3	9	9	5	5	5
2	4	3	9	9	9	3	5
2	4	4	4	1	3	3	5

3	1	2	1	4	4	3	3
3	3	2	4	4	2	2	3
1	4	3	3	3	1	4	4
4	4	2	2	1	3	3	4
4	3	3	1	4	4	3	4
2	3	2	2	4	4	2	1
2	1	4	1	3	5	2	5
4	4	4	3	3	5	5	5

∘38∘

A Paris, un mariage sur deux se termine par un divorce dans les dix ans. Sachant que je n'ai pas divorcé sur les dix dernières années, calculez la probabilité que ma femme en ait fait de même.

Je réponds, ou je glisse un dessin du Chat ?

∘39∘

Montrez : $Ker(g \circ f) = Ker(f) \Leftrightarrow Im(f) \cap Ker(g) = \{\overrightarrow{0}\}$ après avoir précisé les ensembles de départ et d'arrivée de ces morphismes.

f est linéaire de E dans F
g est linéaire de F dans G.
$\boxed{\mathbb{H}}$ $Ker(g \circ f) = Ker(f)$ $\boxed{?}$ $Im(f) \cap Ker(g) = \{\overrightarrow{0}\}$
$\supset$ $Im(f)$ et $Ker(g)$ sont des sous-espaces vectoriels de $(F, +, .)$, il est normal qu'on ait $\overrightarrow{0} \in Im(f) \cap (Ker(g)$
$\subset$ On prend $\overrightarrow{u}$ dans $Im(f) \cap Ker(g)$. On l'écrit $f(\overrightarrow{a})$ car il est dans $Im(f)$.
On sait $g(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ par définition du noyau.
On traduit : $g(f(\overrightarrow{a})) = \overrightarrow{0}$. Ceci signifie que $\overrightarrow{a}$ est dans $Ker(g \circ f)$.
Par $\mathbb{H}$ il est dans $Ker(f)$, ce qui se traduit par $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$. Or, qui est $f(\overrightarrow{a})$? C'est $\overrightarrow{u}$.
On a sû passer de $\overrightarrow{u} \in Ker(g) \cap Im(f)$ à $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

$\boxed{\mathbb{H}}$ $Im(f) \cap Ker(g) = \{\overrightarrow{0}\}$ $\boxed{?}$ $Ker(g \circ f) = Ker(f)$
$\supset$ On a toujours $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$ puisque $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ entraine $g(f(\overrightarrow{u})) = \overrightarrow{0}$.
$\subset$ On se donne $\overrightarrow{u}$ dans $Ker(g \circ f)$. On traduit : $g(f(\overrightarrow{u})) = \overrightarrow{0}$.
Regardons « comme par hasard » le vecteur $f(\overrightarrow{u})$. Il est dans $Im(f)$ par définition même.
Il est dans $Ker(g)$ puisque son image par g est nulle.

Il est dans $Im(f) \cap Ker(g)$.
Il est donc nul, par $\mathbb{H}$.
On a obtenu $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$. On reconnaît $\overrightarrow{u} \in Ker(f)$.

∘40∘

♡ Sachant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, montrez que $M \longmapsto M.A - Tr(M).A$ est un endomorphisme de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$.
Donnez la dimension de son noyau.

Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Si M est une matrice carrée de taille 2, alors $M.A - Tr(M).A$ est une matrice de taille 2. Le caractère « endo » est établi.

Pour la linéarité, on se donne M et N ainsi que α : $(M+N).A - Tr(M+N).A = M.A - Tr(M).A + N.A - Tr(N).A$
$(\alpha.M).A - Tr(\alpha.M).A = \alpha.(M.A - Tr(M).A)$
Pour le noyau, on résout $M.A - Tr(M).A = 0_{2,2}$ (matrice carrée de taille 2 sur 2) d'inconnue matricielle M.
Mais ceci donne $(M - Tr(M).I_2).A = 0_{2,2}$ et même $M - Tr(M).I_2 = 0_{2,2}$ car A est inversible.
On obtient alors $M = Tr(M).I_2$ et en passant à la trace : $Tr(M) = 2.Tr(M)$; la trace de M est nulle. On reporte : M est nulle.
Le noyau est réduit à $0_{2,2}$.

Il n'était pas utile de redescendre jusqu'aux coefficients, avec des systèmes de quatre équations à quatre inconnues.

Le cas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est différent car $(M - Tr(M).I_2).A = 0_{2,2}$ ne conduit pas à $M - Tr(M).I_2 = 0_{2,2}$.
Il conduit à des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$. On repart de $M - Tr(M).I_2 = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$.
On passe à la trace (nécessaire, pas forcément suffisant) : $Tr(M) - 2.Tr(M) = a - b$ donc $Tr(M) = b - a$.
On reporte $M = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix} + (b-a).I_2 = \begin{pmatrix} b & -a \\ b & -a \end{pmatrix}$.
On a trouvé cette forme par conditions nécessaires. On se demande si elles sont suffisantes.
On vérifie : $\begin{pmatrix} b & -a \\ b & -a \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} b & -a \\ b & -a \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - (b-a).\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} b & -a \\ b & -a \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} b-a & 2.(b-a) \\ b-a & 2.(b-a) \end{pmatrix} - (b-a).\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
Le noyau est de dimension 2.

∘41∘

♠ Donnez la limite de $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}.dx$ *(notée I_n)*. Calculez I_0 et I_1. Donnez une relation de récurrence sur la suite I.
Donnez un équivalent en $+\infty$ de $\int_0^1 x^n \ln(1+x^2).dx$.

Chaque I_n existe.
Chaque I_n se minore par 0 et se majore par $\int_0^1 x^n.dx$.
Avec $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ on a par encadrement $I_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$.
On note au passage, par soustraction $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}.(x-1).dx$. On déduit que (I_n) décroit.

I_0 vaut $\frac{\pi}{4}$ (arctangente) et I_1 vaut $\frac{\ln(2)}{2}$.

$I_{n+2} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^{n+1}}{1+x^2}.dx = \int_0^1 x^n.dx = \frac{1}{n+1}$.
On peut donc avancer de deux en deux.

∘42∘

♡ f et g sont linéaires de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$, α et β sont deux réels. Montrez : $Ker(f) \cap Kar(g) \subset Ker(\alpha.f + \beta.g)$.

On prend $\overrightarrow{a}$ dans $Ker(f) \cap Ker(g)$. On traduit : $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0_F}$ et $f(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0_F}$.

On calcule $(\alpha.f+\beta.g)(\overrightarrow{a})=\alpha.f(\overrightarrow{a})+\beta.f(\overrightarrow{a})$ par définition de la somme d'applications.
On remplace : $(\alpha.f+\beta.g)(\overrightarrow{a})=\alpha.\overrightarrow{0_F}+\beta.\overrightarrow{0_F}=\overrightarrow{0_F}$.
On reconnaît : $\overrightarrow{a}\in Ker(\alpha.f+\beta.g)$.

∘43∘

♡ a- Limite en 0 si elle existe de $x^{\frac{1}{1+2.\ln(x)}}$.
b- Limite en 0 si elle existe de $x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.
c- Limite en e si elle existe (par valeur inférieure) de $\Big(\ln(x)\Big)^{\ln(e-x)}$.
d- Limite en 0 si elle existe (par valeur supérieure) de $\dfrac{1}{x.(x-\ln(x))^x}$.

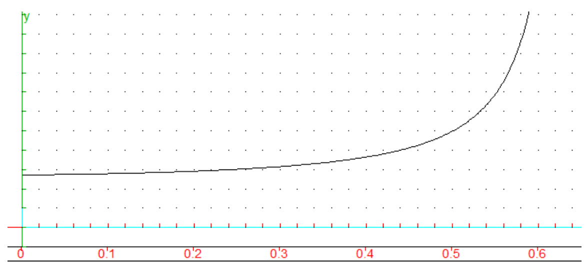
* ♡ a- Limite en 0 si elle existe de $x^{\frac{1}{1+2.\ln(x)}}$.

La fonction n'existe pas en 0 mais sur $\left]0,\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$ elle est C^∞et se met sous la forme $\exp\left(\dfrac{\ln(x)}{1+2.\ln(x)}\right)$.
Quand x tend vers 0^+, son logarithme tend vers l'infini, et le quotient $\dfrac{\ln(x)}{1+2.\ln(x)}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ (équivalent du numérateur et du dénominateur, ou division en haut et en bas par $\ln(x)$).
La quantité cherchée a pour limite $e^{\frac{1}{2}}$ c'est à dire $\sqrt{e}$.

b- Limite en 0 si elle existe de $x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

Même retour à l'exponentielle sur un intervalle convenable.

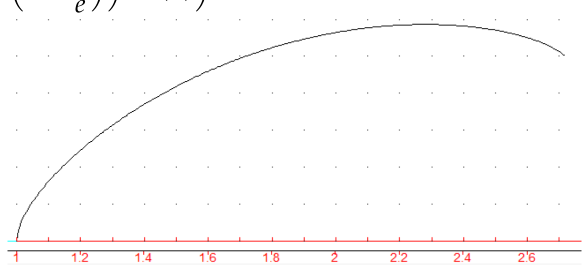
On étudie donc $\dfrac{\ln(x)}{\ln(e^x-1)}=\dfrac{\ln(x)}{\ln(x+o(x))}=\dfrac{\ln(x)}{\ln(x)+\ln(1+o(1))}$.
Ce terme tend vers 1. $\boxed{\exp\left(\dfrac{\ln(x)}{\ln(e^x-1)}\right)\longrightarrow_{x\to0^+} e}$



c- Limite en e si elle existe (par valeur inférieure) de $\Big(\ln(x)\Big)^{\ln(e-x)}$.

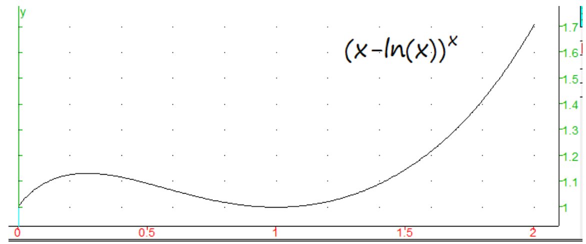
On pose impérativement $x=e-h$ avec h positif qui va tend vers 0.
$\Big(\ln(x)\Big)^{\ln(e-x)}=\exp\Big(\ln\big(\ln(e-h)\big).\ln(h)\Big)=\exp\Big(\ln\Big(1+\ln\Big(1-\dfrac{h}{e}\Big)\Big).\ln(h)\Big)$

Or, $\ln\Big(1+\ln\Big(1-\dfrac{h}{e}\Big)\Big)\sim_{h\to0^+}\ln\Big(1-\dfrac{h}{e}\Big)\sim_{h\to0^+}-\dfrac{h}{e}$
et donc $\ln\Big(1+\ln\Big(1-\dfrac{h}{e}\Big)\Big).\ln(h)\sim_{h\to0^+}-\dfrac{h.\ln(h)}{2}$ et ceci tend vers 0.
Notre quantité tend vers $\boxed{1}$



d- Limite en 0 si elle existe (par valeur supérieure) de $\dfrac{1}{x.(x-\ln(x))^x}$.

On va étudier $(x-\ln(x))^x$ ou même son logarithme : $x.\ln(x-\ln(x))$. Dans la parenthèse, c'est $-\ln(x)$ qui l'emporte.
Par souci de rigueur on écrit $x.\ln(x-\ln(x))=x.\ln\Big(-\ln(x).\Big(1-\frac{x}{\ln(x)}\Big)\Big)=x.\ln\big(-\ln(x)\big)+x.\ln.\Big(1-\frac{x}{\ln(x)}\Big)\Big)$
Quand x tend vers 0, $\dfrac{x}{\ln(x)}$ tend vers 0, et $x.\ln.\Big(1-\dfrac{x}{\ln(x)}\Big)\Big)$ tend vraiment bien vers 0.



Mais que fait vraiment $x.\ln\big(-\ln(x)\big)$ de la forme $0.\ln(+\infty)$ avec des guillemets ?
Posons $x = e^{-t}$ avec t qui tend vers l'infini. Ce terme devient $e^{-t}.\ln(t)$ et quitte à l'écrire $e^{-t}.t.\dfrac{\ln(t)}{t}$ il tend vers 0.
Bref : $x.\ln(x-\ln(x))$ tend vers 0 et $(x-\ln(x))^x$ tend vers 1.
La fraction de l'énoncé tend vers l'infini, à la vitesse de $\dfrac{1}{x}$.
Et l'usage d'une calculatrice graphique est ici utile...

◦44◦ Montrez $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{(t+i)^2}.dt = \frac{\pi}{4}-\frac{i.\ln(2)}{2}$ et puis montrez aussi $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\theta.\tan^2(\theta).d\theta = \frac{\pi.\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi^2}{18}-\ln(2)$ tiens, et pourquoi pas $\displaystyle\int_1^2\frac{dt}{t.(t^n+1)} = \frac{1}{n}.\ln\Big(\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\Big)$ et pour terminer $\displaystyle\int_0^1 3^{t+3^t}.dt$. Et $\displaystyle\int_1^2\frac{4}{x^2+2.i.x}.dx = i.\ln(2)-i.\ln(5)+Arctan\Big(\frac{3}{4}\Big)$.

Commençons par $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{(t+i)^2}.dt = \frac{\pi}{4}-\frac{i.\ln(2)}{2}$.

Pas de problème d'existence, tout est continu, le logarithme existe, et sincèrement, comment le dénominateur pourrait s'annuler.
La présence d'un logarithme nous incite à intégrer par parties, et tout est C^1. Mais on intègre avec des bornes finies :

$\displaystyle\int_1^a\frac{\ln(t)}{(t+i)^2}.dt = \Big[\frac{-\ln(t)}{t+i}\Big]_1^a+\int_1^a\frac{dt}{t.(t+1)}$ explication

$\ln(t)$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{1}{t}$
$\dfrac{1}{(t+i)^2}$	$\hookleftarrow$	$\dfrac{-1}{t+i}$

Allez, des éléments simples puis de la conjugaison : $\dfrac{1}{t.(t+i)} = \dfrac{-i}{t}+\dfrac{i}{t+i} = \dfrac{-i}{t}+\dfrac{i.(t-i)}{t^2+1}$

On sépare par linéarité : $\displaystyle\int_1^a\frac{dt}{t.(t+1)} = -i.\int_1^a\frac{dt}{t}+i.\int_1^t\frac{t.dt}{t^2+1}+\int_1^t\frac{dt}{1+t^2}$.

On intègre explicitement. $\displaystyle\int_1^a\frac{\ln(t)}{(t+i)^2}.dt = \Big[\frac{-\ln(t)}{t+i}+\frac{i}{2}.\ln(1+t^2)-i.\ln(t)+Arctan(t)\Big]_1^a$

Les valeurs en 1 sont simples : 0, $\dfrac{i}{2}.\ln(2)$ et $\dfrac{\pi}{4}$.

Les valeurs en a vont elles avoir une limite ? $\frac{-\ln(a)}{a+i}$ va tendre vers 0 par croissances comparées
$Arctan(t)$ va tendre vers $\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{i}{2}.\ln(1+t^2)$ et $i.\ln(t)$ vont diverger.

Mais ensemble : $\dfrac{i}{2}.\ln(1+t^2)-i.\ln(t) = \dfrac{i}{2}.\ln\Big(\dfrac{t^2+1}{t^2}\Big)$. Et là, la limite est $\dfrac{i}{2}.\ln(1)$.

Classique : Quand vous avez des limites en $+\infty$ (par exemple pour des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(t).dt$), pensez à regrouper les logarithmes ensemble.

Passons à $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\theta.\tan^2(\theta).d\theta = \frac{\pi.\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi^2}{18}-\ln(2)$.
L'intégrale existe par continuité, et comme tout est C^1, on peut intégrer par parties en écrivant

$$\tan^2 = (1+\tan^2)-1 = \tan'-1$$

$$\int_0^{\pi/3}\theta.\tan^2(\theta).d\theta = \Big[\theta.(\tan(\theta)-\theta)\Big]_0^{\pi/3}-\int_0^{\pi/3}1.(\tan(\theta)-\theta).d\theta$$

Le terme crochet donne $\dfrac{\pi.\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\pi^2}{9}$. On est sur la bonne voie.

Ensuite, $\theta\longmapsto-\tan(\theta)$ s'intègre en $\theta\longmapsto\ln(\cos(\theta)$ *(forme* $\dfrac{u'}{u}$*)*. Et $-\ln(1/2)$ vaut bien $\ln(2)$.

Et θ est facile à intégrer *(et c'est de là que vont (re)venir les* $\dfrac{(\pi/3)^2}{2}$*)*.

C'est au tour de $\int_1^2 \frac{dt}{t.(t^n+1)} = \frac{1}{n}.\ln\left(\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\right)$.

L'intégrale $\int_1^2 \frac{dt}{t.(t^n+1)}$ existe et va s'intégrer avec des logarithmes *(l'énoncé nous y amène)*.

Si on décomposait en éléments $\frac{u'}{u}$? $\frac{1}{t.(t^n+1)} = \frac{1}{t} - \frac{t^{n-1}}{t^n+1}$.

On peut séparer en $\int_1^2 \frac{dt}{t}$ et $\int_1^2 \frac{t^{n-1}.dt}{t^n+1}$ dont les valeurs sont $\Big[\ln(t)\Big]_1^2$ et $\Big[\frac{1}{n}.\ln(1+t^n)\Big]_1^2$.
La fin du calcul tient en deux lignes, et c'est un vrai cadeau.. sauf si on a tenté des changements de variables ou des intégrations par parties...

$\int_0^1 3^{t+3^t}.dt$ s'écrit $\int_0^1 3^t.3^{3^t}.dt$.
Si on posait $u = t \longmapsto 3^t$? Elle se dérive en $t \longmapsto \ln(3).3^t$.
Notre intégrale devient $\int_{u=1}^3 \frac{3^u}{\ln(3)}.du$ ou encore $\int_1^3 \frac{e^{u.\ln(3)}}{\ln(3)}.du$. On sera bon pour encore un $\ln(3)$ au dénominateur : $\boxed{\frac{24}{(\ln(3))^2}}$

On va décomposer en éléments simples : $\frac{4}{x.(x^2-2.i)} = \frac{4}{x.(x-(1+i).(x+(1+i))}$ puisque $1+i$ et $-1-i$ sont les racines de $2.i$ (élevez au carré).

$\frac{4}{x.(x^2-2.i)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-(1+i)} + \frac{c}{x+(1+i)}$.

On trouve a, b et c par la méthode des pôles ou par réduction et identification :

$4 = a.(x^2-2.i) + b.x.(x+(1+i)) + c.x.(x-(1+i))$
on calcule en 0 : $4 = a.(-2.i)$ d'où $a = \frac{4}{-2.i} = 2.i$
on calcule en $1+i$: $4 = 0 + b.(1+i).(2+2.i) + 0$: $b = \frac{4}{4.i} = -i$
et en $-1-i$: $c = \frac{4}{4.i} = -i$ aussi

On résume : $\boxed{\frac{4}{x.(x^2-2.i)} = \frac{2.i}{x} - \frac{i}{x-(1+i)} - \frac{i}{x+(1+i)}}$

On va donc calculer $\int_1^2 \frac{dx}{x}$: pas de problème : $\ln(2)$

$$\text{et } \int_1^2 \frac{dx}{x-1-i} = \int_1^2 \frac{(x-1)+i}{(x-1)^2+1}.dx = \int_1^2 \frac{(x-1)}{(x-1)^2+1}.dx + i.\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2+1}$$
$$\int_1^2 \frac{dx}{x-1-i} = \frac{1}{2}.\Big[\ln((x-1)^2+1)\Big]_1^2 + i.\Big[Arctan(x-1)\Big]_1^2$$
$$\int_1^2 \frac{dx}{x-1-i} = \frac{1}{2}.\ln(2) + i.Arctan(1)$$
$$\text{puis } \int_1^2 \frac{dx}{x+1+i} = \int_1^2 \frac{(x+1)-i}{(x+1)^2+1}.dx = \int_1^2 \frac{(x+1)}{(x+1)^2+1}.dx - i.\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$
$$\int_1^2 \frac{dx}{x+1+i} = \frac{1}{2}.\Big[\ln((x+1)^2+1)\Big]_1^2 - i.\Big[Arctan(x+1)\Big]_1^2$$
$$\int_1^2 \frac{dx}{x+1+i} = \frac{1}{2}.(\ln(10)-\ln(5)) - i.Arctan(3) + i.Arctan(2)$$

On rassemble les morceaux : après multiplication des

$$\frac{1}{2}.\Big[\ln((x+1)^2+1)\Big]_1^2 + i.\Big[Arctan(x+1)\Big]_1^2$$

par i la partie réelle ne contient que les arctangentes.
Si on les accumule : $-Arctan(3) + Arctan(2)$ et $Arctan(1) - Arctan(0)$.
Il parait que ça fait $Arctan\left(\frac{3}{4}\right)$.
En effet, c'est un angle entre 0 et $\pi/2$ dont la tangente se calcule :

$$\tan(Arctan(2) - Arctan(3)) = \frac{2-3}{1+2.3} = \frac{-1}{7}$$

$$\tan(Arctan(2) - Arctan(3) + Arctan(1)) = \frac{1 - \frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{7}} = \frac{6}{8}$$

On fusionne ensuite les logarithmes pour la partie imaginaire : $i.\ln(2)$.

◦45◦

Montrez que $M \longmapsto^t M + 2.M$ est un endomorphisme de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$.
Déterminez son noyau. Est-ce un automorphisme.
Montrez que c'est un automorphisme de $(S_3(\mathbb{R}), +, .)$.
Montrez que c'est un automorphisme de $(A_3(\mathbb{R}), +, .)$.
Donnez la matrice de cette application sur la base canonique de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ *(attention, elle est de taille 9 sur 9, mais rassurez vous, elle contient beaucoup de 0)*.
Calculez sa trace, et calculez *(sans effort, S.V.P.)* son déterminant.

On prend une matrice carrée et on lui associe une matrice carrée. Ca a un sens.
Et c'est même de $M_3(\mathbb{R})+, .)$ dans lui même : endo.

cette application est linéaire. proprement, il faut quantifier « on se donne M et N, λ et μ » puis on calcule dans le sens de la fusion

$$\lambda.\phi(M) + \mu.\phi(N) = \ldots = \phi(\lambda.M + \mu.N)$$

Sinon, on peut dire que c'est une combinaison de la transposition (linéaire) et de l'identité.

Pour le noyau, on résout ${}^tM + 2.M = 0$ d'inconnue M.
On peut si on est esprit « P+quelquechose » revenir aux coefficients et résoudre un système de neuf équations à autant d'inconnues.

On peut si on est esprit « M+quelquechose »[5] écrit ${}^tM + 2.M = 0_{3,3}$ puis transposer : $M + 2.{}^tM = {}^t0_{3,3} = 0_{3,3}$.
Il ne reste qu'à combiner ces deux équations pour aboutir à $M = 0_{3,3}$.Le tout sans calcul pour ainsi dire.

Le noyau est réduit à $0_{3,3}$, le morphisme ϕ est injectif.

Mais comme on est en dimension finie avec $\dim(depart) = \dim(arrivee)$ on trouve que ϕ est un isomorphisme (bijectif).

Si on se restreint à $M \in S_3$, on obtient $\phi(M) = 3.M$, c'est une homothétie. Automotphisme (réciproque facile à expiciter).

Si on se restreint à $M \in A_3$, on obtient $\phi(M) = M$, c'est une homothétie. Automotphisme (réciproque encore plus facile à expiciter).

On calcule l'image de chaque vecteur de la base canonique

5. il ya besoin d'autre chose que M ?

$E_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.E_1^1$	$\begin{pmatrix} 3&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&2&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&2&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&2&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&3&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&2&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&2&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&2&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&3 \end{pmatrix}$
$E_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.E_1^2 + E_2^1$	
$E_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.E_1^3 + E_3^1$	
$E_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.E_2^1 + E_1^2$	
$E_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.E_2^2$	
E_2^3	$\longmapsto$	$2.E_2^3 + E_3^2$	
E_3^1	$\longmapsto$	$2.E_3^1 + E_1^3$	
E_3^2	$\longmapsto$	$2.E_3^2 + E_2^3$	
$E_3^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3.E_3^3$	

Pour agir sur une matrice carrée $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, il faut la convertir en un vecteur de taille 9, fait de ses coefficients sur la base cannique.

On le pose sur la matrice caculée au dessus et on trouve les composantes de l'image sur la base canonique. On revient ensuite à la forme 3 sur

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&2&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&2&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&2&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&3&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&2&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&2&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&2&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \begin{pmatrix} 3.a & 2.b+d & 2.c+g \\ 2.d+b & 3.e & 2.f+h \\ 2.g+c & 2.h+f & 3.i \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice de taille 9 vaut $3.3 + 6.2$ ce qui fait 21.

Pour le déterminant, on dit qu'on a intérêt à travailler sur une autre base.

On prend une base de S_3 suivie d'une base de A_3.

$$\left(\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ -1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ -1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&-1&0 \end{pmatrix}\right.$$

Sur cette base, la matrice de l'endomorphisme est $\begin{pmatrix} 3&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&3&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&3&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&3&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&3&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&3&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$

On retrouve la trace déjà calculée et le déterminant 3^6.

◦46◦

Combien d'endomorphismes de $(P^2, +, .)$ ont pour noyau $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et vérifient $f \circ f = 0$? $(P, +, \times)$ est le corps des entiers de 0 à 10 pour l'addition modulo 11.

On les présente par leur matrice sur la base canonique.

Le noyau nous dit que les deux colonnes doivent être opposées : $\begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$.

Mais la relation $f^2 = 0$ donne $\begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mais aussi $Im(f) \subset Ker(f)$ qui est plus facile à raconter : $a = b$.
Ce sont des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a \end{pmatrix}$ (on retrouve une trace nulle, normal pour une nilpotente).
On va dire qu'il y a 11 valeurs possibles de 0 à 10.
Mais on refuse la valeur 0 qui donne $Ker(f) = P^2$ et non $Ker(f) = Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$.
Il y a donc dix matrices. par exemple $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$.

∘47∘

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Montrez que $M \longmapsto A.M$ est un endomorphisme de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Déterminez son noyau. Est il surjectif ? Déterminer son rang.

Attention, on a dit $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. On étudie donc $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
La matrice obtenue est aussi 2 sur 2. Endo !
Et la linéarité repose sur $A.(\alpha.M + \beta.N) = \alpha.A.M + \beta.A.N$.

Si l'on ne résolvait que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on trouverait $Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix})$.
ici, le noyau est fait des matrices dont les deux colonnes sont dans cet espace.

$$Ker(M \longmapsto A.M) = Vect(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})$$

Ce noyau est de dimension 2.

L'ensemble de départ est de dimension 4.
L'ensemble image est par soustraction de dimension 2. L'application n'est pas surjective de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ dans lui même.

Son rang vaut 2. Les matrices images ont toutes une dixième ligne qui est le double de la première...

Mais le rang de A vaut 1.

∘48∘

Connaissez vous le principe mathématique de l'évidence ?

Beh je vous laisse le deviner !

∘49∘

Le théorème des accroissements finis dit, pour f dérivable de I dans $\mathbb{R}$: $\forall(a, b) \in I^2$, $\exists c \in]a, b[$, $f(b) - f(a) = (b-a).f'(c)$. Déterminez c en fonction de a et b pour l'application $f = x \longmapsto \dfrac{1+x}{2+x}$.
Déterminez la limite de $\dfrac{c-a}{b-a}$ ci dessus défini quand b tend vers a.

On dérive cette application sur $]-2, +\infty[$ par exemple $x \longmapsto \dfrac{-1}{(x+2)^2}$.
On se donne a et b plus grand que -2 (ou plus petits, mais en tout cas tous les deux du même côté), et on écrit la formule

$$\frac{1+b}{2+b} - \frac{1+a}{2+a} = (b-a).\frac{-1}{(2+c)^2}$$

et on résout (on suppose a différent de b)

$$(2+c)^2 = (2+a).(2+b)$$

On extrait $c = \sqrt{(2+a).(2+b)} - 2$ si on travaille sur $]-2, +\infty[$.

Il nous faut la limite de $\dfrac{\sqrt{(2+a).(2+b)} - (2+a)}{b-a}$ quand b tend vers a.
On pense évidemment à conjuguer et la limite vaut $\dfrac{1}{2}$.

Ou alors on pose $b = a + h$ et on développe

$$\frac{\sqrt{(2+a).(2+a+h)}-(2+a)}{h} = \frac{\sqrt{(2+a)^2+(a+h).h}-(2+a)}{h} = \frac{(2+a).\left(1+\frac{h}{2+a}\right)^{1/2}-(2+a)}{h}$$

∘50∘

Donnez deux matrices qui ont le même polynôme caractéristique mais ne sont pas semblables, en taille 2 puis en taille 3.

Rappelons que le seul sens vrai est « semblables implique même polynôme caractéristique ».

> *Sincèrement, qu'à l'issue de vos études vous soyez incapable de diagonaliser une matrice, de calculer la trajectoire d'un électron soumis à une force électromagnétique ou de décomposer un torseur antisymétrique, on s'en fout. Royalement. Mais que vous ne soyez pas capable de comprendre la différence entre « il faut » et « il suffit », et c'est foutu, vous allez faire perdre des milliers d'euros à votre entreprise et mettre la vie des gens en danger. C'est tout ce que j'avais à dire...*

La seule solution à notre niveau pour montrer que deux matrices A et B de même format sont semblables est de trouver P inversible vérifiant $A.P = P.B$. Ou d'utiliser la transitivité de la relation « être semblable à ».

On peut proposer $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Même trace, même déterminant, même polynôme caractéristique, même spectre (la valeur double 0), mais pas semblables *(qui à part $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?).*

Mots clefs : valeur propre double.

Et en taille 3 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

∘51∘

Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de $\sqrt{n^2+2.n+5}-n$. Déduisez que $(\sqrt{n^2+2.n+5}-n)^n$ est une forme indéterminée. Calculez quand même sa limite, quitte à revenir à $\left(1-(\sqrt{n^2+2.n+5}-n-1)\right)^n$ et à la forme logarithmique *(indication : e^2).*

La première étape, c'est des quantités conjuguées : $\sqrt{n^2+2.n+5}-n = \frac{n^2+2.n+5-n^2}{\sqrt{n^2+2.n+5}+n}$. Ce quotient est équivalent à $\dfrac{2.n}{n+n}$. Il tend vers 1.

Mais on peut aussi le jouer « avec des gros outils » :

$$\sqrt{n^2+2.n+5} = n.\sqrt{1+\Big(\frac{2.n+5}{n^2}\Big)} = n.\Big(1+\frac{1}{2}.\Big(\frac{2.n+5}{n^2}\Big)+o\Big(\frac{1}{n}\Big)_{n\to+\infty}\Big)$$

en utilisant $\sqrt{1+u} = 1+\dfrac{u}{2}+o(u)_{u\to 0}$.
On soustrait : $\sqrt{n^2+2.n+5}-n = \dfrac{n}{2}.\Big(\dfrac{2.n+5}{n^2}\Big)+n.o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)_{n\to+\infty}$.
Évidemment on retrouve la limite 1.

1^∞ est une forme indéterminée. On va la lever en étudiant un logarithme et en forçant l'apparition de $1+u$ avec u tendant vers 0 : .

$$n.\ln\Big(\frac{2.n+5}{\sqrt{n^2+2.n+5}+n}\Big) = n.\ln\Big(1+\Big(\frac{2.n+5}{n+\sqrt{n^2+2.n+5}}-1\Big)\Big) \sim_{n\to} n.\Big(\frac{2.n+5}{n+\sqrt{n^2+2.n+5}}-1\Big)$$

Reste à trouver la limite de ce $n.\Big(\dfrac{n+5-\sqrt{n^2+2.n+5}}{n+\sqrt{n^2+2.n+5}}\Big)$ et moi, je conjugue encore
$\dfrac{n}{n+\sqrt{n^2+2.n+5}}.\dfrac{n^2+10.n+25-(n^2+2.n+5)}{n+5+\sqrt{n^2+2.n+5}}$.
La limite vaut $\dfrac{1}{2}.\dfrac{8}{2}$ ce qui ne fait pas loin de e (à 1 près).

La limite cherchée est donc $\boxed{e^2}$

Remarque : `limit(n*log(sqrt(n*n+2*n+5)-n), n=+inifinity)` donne la réponse 2 tout de suite avec Xcas...

Et sinon, la ligne mis en valeur plus haut se tape

```
n.\ln\Big(\frac{2.n+5}{\sqrt{n^{2}+2.n+5}+n}\Big)
=n.\ln\Big(1+\Big(\frac{2.n+5}{n+\sqrt{n^{2}+2.n+5}}-1\Big)\Big)
\sim_{n\rightarrow}
n.\Big(\frac{2.n+5}{n+\sqrt{n^{2}+2.n+5}}-1\Big)
```
.
mis entre des **$** pour passer en mode mathématique.
Et pour que la ligne soit centrée, avec des fractions « généreuses », mettrez **$$** au début de la formule et **$$** à la fin. Vous passerez en mode « emphatique » dit aussi « hors-ligne ».

◦52◦ **Donnez si elle existe, la limite en 0^+ de x^{1-x^x}.**

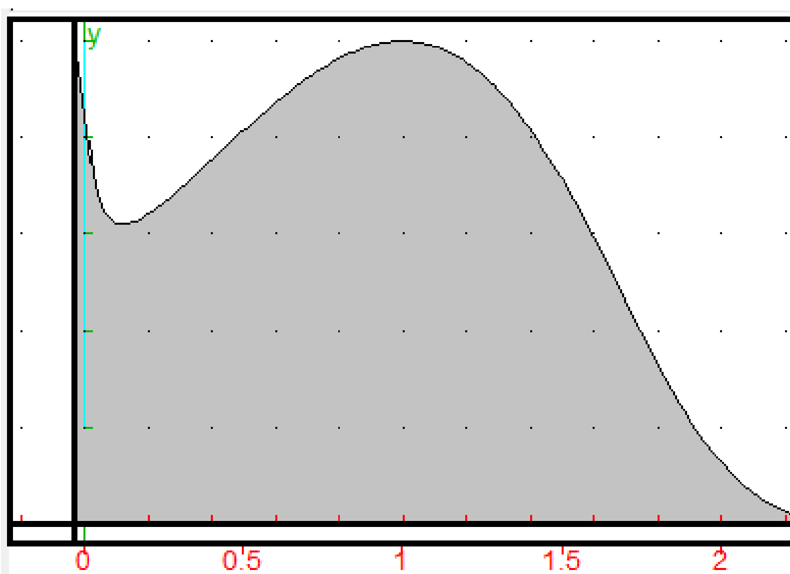
x^x est indéterminé en 0.
On l'écrit $e^{x.\ln(x)}$. Le classique $x.\ln(x)$ tend vers 0 *(on l'écrit $\frac{\ln(1/X)}{X}$ avec X qui tend vers l'infini).*
Bref,et pour la trente quatrième fois de l'année : $x^x \longrightarrow_{x\to 0} 1$.

L'exposant $1 - x^x$tend vers 0. Et re-voilà 0^0.

Bref, on passe au logarithme : $\ln(x^{1-x^x}) = (1 - x^x).\ln(x)$.
On ne peut pas développer le logarithme en 0. Il n'y a pas de formule.

Mais revenons à $x^x = e^{x.\ln(x)}$ avec $x.\ln(x)$ qui tend vers 0 en 0.
On peut donc écrire $1 - x^x = 1 - (1 + x.\ln(x)) + o(x.\ln(x)) = -x.\ln(x) + o(x.\ln(x))$.

Et on ne peut pas remplacer $o(x.\ln(x))$ par $o(1)$ ou $o(x)$. C'est juste un terme qui tend vers 0 plus vite que $x.\ln(x)$.



Mais à présent
$(1 - x^x).\ln(x) = x.(\ln(x))^2 + o(x.(\ln(x))^2)$.
Et cette fois, encore, dans l'indétermination $x.(\ln(x))^2$ c'est encore x qui l'emporte :.

Je vous le refais ?

$$x.((\ln(x))^2 = \frac{(\ln(1/X))^2}{X} = \Big(\frac{\ln(X)}{\sqrt{X}}\Big)^2$$

Bref, $\ln(x^{1-x^x}) = (1 - x^x).\ln(x)$ tend vers 0 et x^{1-x^x} tend vers 1.

∘53∘

Montrez que ce sont trois normes sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

$N_1(h,\ k)$	$N_2(h,\ k)$	$N_\infty(h,\ k)$
$\|h\|+\|k\|$	$\sqrt{h^2+k^2}$	$Max(\|h\|,\ \|k\|)$

Vérifiez que ce sont des normes (existence, positivité, homogénéité, séparation, inégalité triangulaire).
Trouvez les neuf constantes qui manquent, dont certes trois sont un peu simples : $\forall(h,\ k)\in\mathbb{R}$,

$N_1(h,\ k)\leqslant\ldots N_1(h,\ k)$	$N_1(h,\ k)\leqslant\ldots N_2(h,\ k)$	$N_1(h,\ k)\leqslant\ldots N_\infty(h,\ k)$
$N_2(h,\ k)\leqslant\ldots N_1(h,\ k)$	$N_2(h,\ k)\leqslant\ldots N_2(h,\ k)$	$N_2(h,\ k)\leqslant\ldots N_\infty(h,\ k)$
$N_\infty(h,\ k)\leqslant\ldots N_1(h,\ k)$	$N(h,\ k)\leqslant\ldots N_2(h,\ k)$	$N_\infty(h,\ k)\leqslant\ldots N_\infty(h,\ k)$

Les développements limités sur $\mathbb{R}^2$ se terminent par un $o(\sqrt{h^2+k^2})$ dans notre cours. Mais si on change de norme.
Montrez que si $r(h,k)$ est un $o(\sqrt{h^2+k^2})$ (c'est à dire $\dfrac{r(h,h)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ tend vers 0 quand h et k tendent vers 0), alors c'est aussi un $o(|h|+|k|)$ (c'est à dire $\dfrac{r(h,h)}{|h|+|k|}$ tend vers 0 quand h et k tendent vers 0). Montrez la réciproque et la comparaison avec les autres normes aussi.

∘54∘

Soit f croissante de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. On découpe suivant une équisubdivision, montrez : $R_g(f)\leqslant\int_a^b f(t).dt\leqslant R_d(f)$ et calculez $R_d(f)-R_g(f)$.
Déduisez que ce sont des approximations de $\int_a^b f(t).dt$ à $O\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ près.
Soit f de classe C^1 de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. On se donne k et on écrit $a_k=a+k.\dfrac{b-a}{n}$.
Montrez : $\forall x\in[a_k,\ a_{k+1}],\ |f(x)-f(a_k)|\leqslant\dfrac{b-a}{n}.||f'||$.
Déduisez $\Big|\int_a^b-\dfrac{b-a}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}f(a_k)\Big|\leqslant\dfrac{(b-a)^2}{n}.||f'||$.

A faire.

∘55∘

L'élève Hilaine *(duc Roupion)* dit que l'équation $n.\pi\in\{[2.k,\ 2.k+1[\ |\ k\in\mathbb{N}\}$ d'inconnue n dans Z n'a qu'un nombre fini de solutions. L'élève Axinée *(comte Laraje)* dit qu'au contraire elle en a une infinité. Qui a raison ? Prouvez le *(sauf si vous me dites que les deux ont raison)*.

C'est un piège. **Cette équation n'a pas de solution.**
Pourtant, connaissant même π de façon approchée, vous allez me dire : $2.\pi\in[6,\ 7[$ et aussi $4.\pi\in[12,\ 13[$ et ainsi de suite, en faisant attention avec par exemple $8.\pi$ qui ne convient plus tandis que $9.\pi$ convient.
Mais si vous partez dans un tel raisonnement, c'est que vous cherchez à résoudre $n.\pi\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2.k,\ 2.k+1[$ *(réunion d'intervalles)*.
Mais ici, la question est $n.\pi\in\{[2.k,\ 2.k+1[\ |\ k\in\mathbb{Z}\}$ *(ensemble d'intervalles $\{[0,1[,\ [2,3[,\ [4,5[,\ldots\}$)*. Le réel $n.\pi$ n'est jamais un des éléments de cet ensemble : $n.\pi\neq[0,\ 1[$, $n.\pi\neq[2,\ 3[$ et ainsi de suite.
L'équation n'a pas de solution. Et 0 est évidemment un nombre fini.

Eh oui,

être dans $\bigcup_{i\in I}[a_i,\ b_i]$	c'est être dans l'un des intervalles.	
être dans $\{[a_i,\ b_i]\ \|\ i\in I\}$	c'est être soi même l'un des intervalles.	
$\{[0,\ 1],\ [2,\ 3]\}$	a deux éléments	(des ensembles).
$[0,\ 1]\cup[2,\ 3]$	a une infinité d'éléments	(des réels).

∘56∘

On définit $F(x,\ y)=\dfrac{y^2}{x}$ si $x\neq0$ et $F(0,\ y))=0$ pour tout x.
Montrez que $x\longmapsto F(x,\ 0)$ et $y\longmapsto F(0,\ y)$ sont continues en 0.
Montrez que $r\longmapsto F(r.\cos(\theta),\ 0+r.\sin(\theta))$ est continue en $r=0$ pour tout θ fixé.
Montrez que F n'admet pas de DL_0 en $(0,\ 0)$ (en montrant qu'elle n'est pas bornée par exemple).

Par calcul $F(x,\ 0)=0$ et $F(x,\ 0)\longrightarrow_{\substack{x\to0\\x\neq0}}0$.

Par définition $F(0,\ y)=0$ et $F(0,\ y)\longrightarrow_{\substack{y\to0\\y\neq0}}0$.

Les deux fonctions partielles sont continues en $(0,\ 0)$.

On continue avec disjonction de cas :

$\theta \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi]$: $F(r.\cos(\theta),\ r.\sin(\theta)) = r.\dfrac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)} \longrightarrow_{r\to 0} 0.$
$\theta = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$: $F(r.\cos(\theta),\ r.\sin(\theta)) = 0 \longrightarrow_{r\to 0} 0.$

Les fonctions radiales sont continues.

Mais F n'est pas continue en 0.
On étudie $F(h,\ k)$ avec $h = k^2$ (les deux vont tendre vers 0 quand k va tendre vers 0) :

$$F(k^2,\ k) = 1$$

et ceci ne tend pas vers 0 quand k tend vers 0.

C'est ici un défaut de continuité suivant une brache de parabole diront certains.

Pire encore $F(k^3,\ k)$ « explose » en 0.