LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 30 avril
M.P.S.I.2

2023 2024

IS26

♡ 0 ♡ Montrez qu'une application linéaire f de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$ est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\overrightarrow{0_E}$. 3 pt.

♡ 1 ♡ Enoncez et démontrez la seconde inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$. 3 pt.

♡ 2 ♡ Quel est le maximum sur $\mathbb{R}^+$ de $\sqrt[x]{x}$? 2 pt.

♡ 3 ♡ Quelle est la limite de $\dfrac{2^x - x^2}{x-2}$ quand x tend vers 2 ? (trouvez le taux d'accroissement caché). 3 pt.

♡ 4 ♡ Montrez que si f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et périodique, alors elle est bornée. 2 pt.

♡ 5 ♡ $\dfrac{x^2+1}{x^4+x^2+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^{10}}\right)_{x\to+\infty}$. Trouvez les a_k. 3 pt.

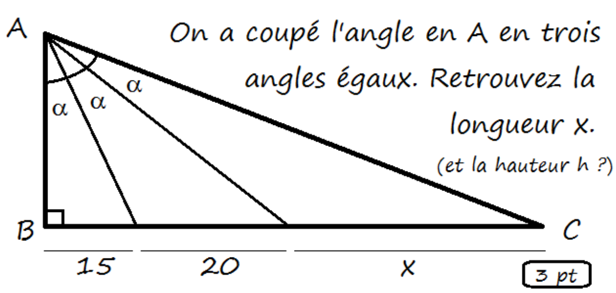
♢ 0 ♢ Montrez que la série de terme général $(-1)^n.n.e^{-n}$ converge, et montrez que sa somme est négative. 3 pt.

♢ 1 ♢ Montrez que la série de terme général $\dfrac{ch(n)}{ch(2.n)}$ converge. 2 pt.

♢ 2 ♢ On veut montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n}}$ diverge. Montrez pour tout entier naturel p : $\dfrac{2.p+1}{\sqrt{p^2+2.p+1}} \leqslant \left|\displaystyle\sum_{n=p^2}^{p^2+2.p} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{2.p+1}{\sqrt{p^2}}$. Concluez. 3 pt.

♣ 0 ♣ On note S l'ensemble des entiers naturels dont l'écriture de base 10 ne contient aucun chiffre 7. Déterminez le cardinal de $S \cap [10^n,\ 10^{n+1}[$ (ensemble noté S_n). Montrez : $\displaystyle\sum_{p\in S_n} \frac{1}{p} \leqslant \frac{8.9^n}{10^n}$. Déduisez que la famille $\left\{\dfrac{1}{p} \mid p \in S\right\}$ est sommable. 3 pt. Un script Python pour estimer la somme ? 2 pt.

♣ 1 ♣ Un élève a confondu et au lieu d'écrire $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ il a écrit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n!}}{n!}$. Montrez que se série converge pour x dans $[-1,\ 1]$. Calculez la valeur de sa série pour $x = -1$. Montrez qu'elle diverge grossièrement pour $|x|$ strictement plus grand que 1. 3 pt.

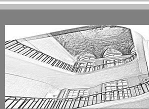


Le nombre 2184 est particulier (suite A130171 de l'OEIS) : chacun des entiers 2184+i (pour i de 0 à 16) a au moins un diviseur commun autre que 1 avec le produit des seize autres (par exemple 2189 et $2184 \times 2185 \times 2186 \times 2187 \times 2188 \times 2190 \times 2191 \times \ldots \times 2200$ ont pour diviseur commun 11).
Écrivez un script python qui trouve les suivants jusqu'à 10^6.

♣ 2 ♣ Montrez : $\displaystyle\sum_{\substack{p\in\mathbb{N}^*,\ q\in\mathbb{N}^* \\ p \text{ divise } q}} \frac{1}{p^2.q^2} = \zeta(2).\zeta(4)$. 3 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 30 avril
M.P.S.I.2

2023 2024
IS26
CORRECTION



Questions de cours. IS26

On suppose f injective.
dans le noyau, il y a déjà le vecteur nul de $(E, +, .)$. En effet, $f(\overrightarrow{0_E}) = f(0.\overrightarrow{0_E}) = 0.f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$.
Par injectivité de f, le seul antécédent de $\overrightarrow{0_F}$ est donc $\overrightarrow{0_E}$, le noyau se réduit à $\overrightarrow{0_E}$.

Rappel : $Ker(f) = \{\overrightarrow{a} \in \mathbb{E} \mid f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0_F}\}$; mais ça, ce n'est même pas la question de cours, c'est lé définition.

Supposons maintenant le noyau réduit à $\overrightarrow{0_E}$ et prenons deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ ayant la même image. On traduit $f(\overrightarrow{a}) - f(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0_F}$ puis par linéarité : $f(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0_F}$. Le vecteur $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ est dans le noyau. C'est donc le vecteur nul de E et on arrive à $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$. C'est l'injectivité.

On définit $x \longmapsto \sqrt[x]{x}$ c'est à dire $x \longmapsto x^{1/x}$.
Pour trouver son maximum, on ne la dérive pas tout de suite. On étudie les variations de son logarithme $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
Le maximum s'obtient quand la dérivé s'annule et change de signe : en $x = e$. On maximise $\forall x > 0,\ \sqrt[x]{x} \leqslant \sqrt[e]{e} = e^{1/e}$.

On peut écrire $\dfrac{x^2 - 2^x}{x-2} = \dfrac{x^2-4}{x-2} - \dfrac{2^x - 4}{x-2}$, ce qui fait qu'on a quand même des formes indéterminées.
Mais mon premier tend vers $(x \longmapsto x^2)'(2)$ et le second vers $(x \longmapsto 2^x)'(2)$.
On trouve 2.2 pour le premier et $\ln(2).2^2$ pour le second (il faut écrire $2^x = e^{x.\ln(2)}$. Bilan : $4 - \ln(16)$.

Sinon, en une fois, on construit $x \longmapsto x^2 - 2^x$ de dérivée $x \longmapsto 2.x - \ln(2).2^x$ et on regarde un taux d'accroissement en 2 et la limite de ceux ci.

On prend f périodique de période p. L'intervalle $]-\infty,\ +\infty[$ n'est pas un segment, on ne peut pas utiliser le théorème des bornes atteintes. Mais $[0,\ p]$ est un segment.
f est bornée de $[0,\ p]$ dans $\mathbb{R}$. Et sur les autres intervalles, on reprend les mêmes valeurs par périodicité $f(\mathbb{R}) = f([0,\ p])$.

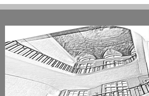
$\dfrac{x^2+1}{x^4+x^2+1} \sim \dfrac{1}{x^2}$ quand x tend vers l'infini.
On a déjà $\dfrac{x^2+1}{x^4+x^2+1} = 0 + \dfrac{0}{x} + \dfrac{1}{x^2} + o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)_{x\to+\infty}$.
On soustrait $\dfrac{x^2+1}{x^4+x^2+1} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{-1}{x^6+x^4+x^2} \sim \dfrac{-1}{x^6}$. On a donc

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} = 0 + \frac{0}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x^3} + \frac{0}{x^4} + \frac{0}{x^5} - \frac{1}{x^6} + o\Big(\frac{1}{x^6}\Big)_{x\to+\infty}$$

Enfin $\dfrac{x^2+1}{x^4+x^2+1} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^6} = \dfrac{x^2+1}{x^{10}+x^8+x^6} \sim \dfrac{1}{x^6}$ et $\dfrac{x^2+1}{x^4+x^2+1} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^6} - \dfrac{1}{x^8} = \dfrac{x^2+1}{x^{10}+x^8+x^6} \sim \dfrac{1}{x^6}$

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^8} + o\Big(\frac{1}{x^{10}}\Big)_{x\to+\infty}$$

les coefficients non indiqués sont nuls.



Série de terme général $(-1)^n.n.e^{-n}$. IS26

Le terme général est de signe quelconque. par d'argument de croissance ou de décroissance.
Le terme général tend vers 0 (croissances comparées). C'est bon signe mais ça ne prouve rien.

Étudions la convergence en valeur absolue, en regardant si la série de terme général positif $n.e^{-n}$ converge.

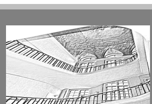
On compare à une série de référence : $\dfrac{1}{n^2}$ par réflexe riemannien, $\dfrac{1}{2^n}$ par réflexe de Sup.
Dans tous les cas : $\dfrac{n.e^{-n}}{1/n^2} = n^3.e^{-n} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$ et $\dfrac{n.e^{-n}}{2^n} = n.\Big(\dfrac{2}{e}\Big)^n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$.
Le terme général positif est un petit o du terme général d'une série convergente. Le théorème de domination sur les séries à termes positifs permet de conclure.

Avec la convergence absolue, on a la convergence.

Mais sinon, on peut aussi utiliser le théorème des séries alternées.
On a un terme général de la forme $(-1)^n.\alpha_n$ avec α_n qui tend vers 0 en décroissant.
Que $n.e^{-n}$ tend vers 0, d'accord. Que ce soit en décroissant, c'est moins évident. mais c'est vrai pour n plus grand que 1.
Il suffit en effet de dériver $x \longmapsto x.e^{-x}$.

Le critère spécial donne la convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.n.e^{-n}$.
Et la somme est comprise entre deux sommes partielles consécutives (suites oscillantes)

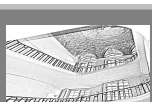
$$-e^{-1} = \sum_{n=1}^{1}(-1)^n.n.e^{-n} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.n.e^{-n} \leqslant \sum_{n=1}^{2}(-1)^n.n.e^{-n} = -e^{-1} + 2.e^{-2} < 0$$



Série avec des cosinus hyperboliques. IS26

Le terme général $\dfrac{ch(n)}{ch(2.n)}$ existe pour tout n. Il est positif (les sommes partielles vont en croissant).

Et si on majorait par une série de référence ce quotient $\dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2.n} + e^{-2.n}}$? En tout cas, ce quotient est équivalent à $\dfrac{e^n}{e^{2.n}}$quand n tend vers $+\infty$. Et la série de terme général $\Big(\dfrac{1}{e}\Big)^n$ converge.



Série avec des parties entières. IS26

$-\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{5}$	$+\frac{1}{6}$	$+\frac{1}{7}$	$+\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{10}$	$\dots$	$-\frac{1}{15}$	$+\frac{1}{16}$	$+\frac{1}{17}$	$\dots$	$+\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{25}$	

Le terme général a un signe qui change. plus ou moins lentement. Et le terme général tend vers 0.

La valeur absolue du terme général donne une série divergente $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$. Pas de convergence absolue.

On suit l'indication et on étudie $\sum\limits_{n=p^2}^{p^2+2.p}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n}}$ dans laquelle on identifie

$$\sum_{n=1}^{p^2+2.p}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{p^2-1}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n}}$$

par relation de Chasles. C'est la différence de deux sommes partielles $S_{p^2+2.p} - S_{p^2-1}$.
A quoi servent ces bornes ? Quand n est entre p^2 et $p^2 + 2.p$, on a $p^2 \leqslant n < (p+1)^2$ et donc $[\sqrt{n}] = p$.
Tous les termes de la suite ont le même signe. On le sort et on l'efface avec la valeur absolue

$$\Big|\sum_{n=p^2}^{p^2+2.p}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n}}\Big| = \sum_{n=p^2}^{p^2+2.p}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

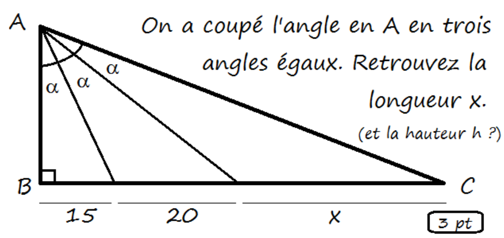
On sent venir la comparaison série intégrale. Sauf qu'il y a encore plus simple. On compte les termes : il y en a $2.p+1$ (mais si $range(p^2,\ p^2+2.p+1)$ voyons).
Le plus petit est le denier : $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{p^2+2.p}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{p^2+2.p+1}}$. Et le plus grand est le premier. On encadre donc « nombre de termes fois le plus $\frac{grand}{petit}$.

$$\Big|\sum_{n=p^2}^{p^2+2.p} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n}}\Big| = \sum_{n=p^2}^{p^2+2.p} \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sum_{n=p^2}^{p^2+2.p} \frac{1}{\sqrt{p^2+2.p+1}} = \frac{2.p+1}{\sqrt{p^2+2.p+1}}$$

On termine en raisonnant par l'absurde : si la série convergeait, ses termes généraux de suites extraites $S_{p^2+2.p}$ et S_{p^2-1} tendraient vers la même limite (somme de la série). Leur différence tendrait vers 0. Et par encadrement, $\dfrac{2.p+1}{\sqrt{p^2+2.p+1}}$ tendrait vers 0. Alors qu'il tend visiblement vers 2.
On tient notre contradiction.

Dans le cous où j'ai pris cet exercice, on étudie ensuite $\displaystyle\sum_{n=p^2}^{p^2+2.p} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n}}$ *pour lequel une comparaison série intégrale est à utiliser.*

Triangle. IS26



On note h la hauteur AB et on rappelle trois formules de trigonométrie en posant $t = \tan(\alpha)$

$\tan(\alpha) = t$	$\tan(2.\alpha) = \dfrac{2.t}{1-t^2}$	$\tan(3.\alpha) = \dfrac{3.t-t^3}{1-3.t^2}$
$\tan(\alpha) = \dfrac{15}{h}$	$\tan(2.\alpha) = \dfrac{35}{h}$	$\tan(3.\alpha) = \dfrac{35+x}{h}$

Les quatre premières permettent d'éliminer t et de trouver h : $\dfrac{35}{h} = \dfrac{2.\frac{15}{h}}{1-\frac{15^2}{h^2}}$ puis $h = \sqrt{7}.15$ (environ 40).

On retrouve alors $t = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$ (α vaut environ 20^o me dit la calculatrice) et enfin $\tan(3.\alpha) = \dfrac{5.\sqrt{7}}{7}$ et on trouve $35+x = 75$.
Assez cohérent, x vaut 40.

Python. IS26

Que doit on faire quand on nous donne un entier `n` tel que notre `2134` ?
On va considérer chacun des 17 entiers `n+i`, d'où `range(17)`.
Pour chacun d'entre eux, on va chercher un diviseur commun avec $\displaystyle\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant 16\\ k\neq i}} (n+k)$.

On va donc avoir besoin de la procédure `pgcd`.
Si l'un des pgcd vaut 1, on met un booléen à `False`, et on sort.

Et comment fabriquer $\displaystyle\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant 16\\ k\neq i}} (n+k)$ sans recommencer des produits p = 1

```
for k in range(17) :
....if k != i :
........p *= (n+k)
```

On va calculer une fois pour toutes le produit `p = 1`

```
for k in range(17) :
```

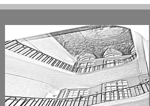
`....p *= k+n` et on le divisera par `n+i` pour le p.g.c.d.

```
def gcd(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = b, a%b
....return b
```

```
def test(n, r=17) : #int -> boolean
....p = 1
....for i in range(r) :
........p *= n+i
....boo = True
....for i in range(r) :
........if gcd(n+i, p//(n+i)) == 1 :
............boo = False
............break
....return boo
```

```
for n in range(10**6) :
....if test(n) :
........print(n)
```

2184, 27830, 32214, 57860, 62244, 87890, 92274, 117920, 122304, 147950, 152334, 177980, 182364, 208010, 212394, 238040, 242424, 268070, 272454, 298100, 302484, 328130, 332514, 358160, 362544, 388190, 392574, 418220, 422604, 448250, 452634, 478280, 482664, 508310, 512694, 538340, 542724, 568370, 572754, 598400, 602784, 628430, 632814, 658460, 662844, 688490, 692874, 718520, 722904, 748550, 752934, 778580, 782964, 808610, 812994, 838640, 843024, 868670, 873054, 898700, 903084, 928730, 933114, 958760, 963144, 988790, 993174



Une erreur sur la série exponentielle. IS26

On se donne x entre -1 et 1. le terme général $\dfrac{x^{n!}}{n!}$ est de signe quelconque. Cela dit, dès le rang 2, l'exposant $n!$ est pair, et le terme général est positif.

On domine à partir du rang 2 : $0 \leqslant \dfrac{x^{n!}}{n!} \leqslant \dfrac{1}{n!}$. La série de terme général positif $\dfrac{1}{n!}$ converge (somme $e^1 - 1 - 1$).

Par majoration, la série de terme général $\dfrac{x^{n!}}{n!}$ converge. On ajoute les deux premiers termes, et on a donné un sens à $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n!}}{n!}$.

Que vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n!}}{n!}$? C'est

$$\frac{(-1)^1}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = -2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = -4 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 4$$

Maintenant, si x est plus grand que 1, que fait la forme indéterminée $\dfrac{x^{n!}}{n!}$?

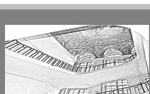
Sans effort, je pose $u_n = \dfrac{x^{n!}}{n!}$ et je calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{(n+1)!}}{(n+1)!}.\frac{n!}{x^{n!}} = \frac{x^{(n+1)!-n!}}{n+1} = \frac{x^{n.(n+1)!}}{n+1} \geqslant \frac{x^n}{n+1}$$

Comme x est plus grand que 1, le minorant tend vers $+\infty$ (croissances comparées). Le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $+\infty$.
A partir d'un certain rang, ce quotient dépasse 2.
On a alors $u_{n+1} \geqslant 2.u_n$ et la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ au moins aussi vite qu'une série géométrique.

Si vous préférez : appliquez le critère logarithmique à $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ qui vérifie bien $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$tend vers un réel de $[0,\ 1[$.

Le terme général ne tend pas vers 0 (pire, il tend vers $+\infty$). La série diverge grossièrement.



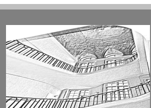
Une famille sommable à termes positifs. IS26

Dans $\displaystyle\sum_{p\ divise\ q} \frac{1}{p^2.q^2}$ les termes sont tous positifs. La famille est sommable, ou bien elle a une somme infinie.
Et si elle est sommable, on regroupe comme on veut. Et l'existence d'un résultat à l'issue un calcul prouve l'existence de toutes les sommes au long du calcul. On sépare

$$\sum_{p\ divise\ q} \frac{1}{p^2.q^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{p^2}.\sum_{p|q}\frac{1}{q^2}\Big) = \sum_{p=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{p^2}.\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k.p)^2}\Big) = \sum_{p=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{p^4}.\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\Big)$$

On a posé $q = k.p$ avec k entier pour répondre à la condition. On reconnaît la fonction ζ :

$$\sum_{p\ divise\ q} \frac{1}{p^2.q^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^4}.\zeta(2) = \zeta(2).\sum_{p}\frac{1}{p^2} = \zeta(2).\zeta(4)$$



Des nombres sans chiffre 7. IS26

Qu'est ce que $S \cap [10^n,\ 10^{n+1}[$? Ce sont les nombres à $n+1$ chiffres dont aucun n'est un chiffre 7.
On doit donc remplier $n+1$ cases avec des entiers de $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9\}$.
Naivement, comme le choix de chaque chiffre est indépendant, on a 9^{n+1} tels nombres.
Mais comme on veut un nombre à $n+1$ chiffres, le premier ne peut pas être nul.
On a donc 8 choix pour le premier chiffre, et 9 choix pour chacun des suivants.
On a boutit donc à 8.9^n.

Dans la somme $\displaystyle\sum_{p\in S_n}\frac{1}{p}$ il y a 8.9^n nombres. Comme par hasard.
Et chacun est plus petit que $\dfrac{1}{10^n}$ (c'est la condition « $\ldots \cap [10^n,\ 10^{n+1}\}$).
La somme se majore donc par « nombre de termes fois le plus grand ».

Ensuite, on a une partition

$$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Big(S_n \cap [10^n,\ 10^{n+1}]\Big)$$

On somme par tranches :

$$\sum_{p\in S}\frac{1}{p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\ \sum_{p\in S\cap[10^n,\ 10^{n+1}[}\frac{1}{p} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} 8.\Big(\frac{9}{10}\Big)^n = 8.\frac{1}{1-\dfrac{9}{10}} = 80$$

La dernière étape fait appel à une série géométrique de raison plus petite que 1.

On a majoré cette somme de termes positif, elle existe. Mais on ne connaît pas sa valeur.

```
S = 0
for k in range(1, beaucoup) :
....if not('7' in str(k)) :
........S += 1/k
```

Mais quelle valeur donner à beaucoup pour que l'erreur soit plus petite que 10^{-3} ?
Disons que sin on s'arrête à 10^{n+1}, on a ignoré les termes $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ \sum_{p\in S\cap[10^k,\ 10^{k+1}[}\frac{1}{p}$.
Ce terme abandonné peut s'encadrer entre $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{8.9^k}{10^{k+1}}$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{8.9^k}{10^k}$ par le même argument que précédemment.
L'erreur sera donc de l'ordre de $\Big(\dfrac{9}{10}\Big)^{k+1}.10$. On veut qu'elle ne dépasse par 10^{-3}.
On va donc exiger $(9/10)^{k+1} \leqslant 10^{-4}$. On passe au logarithme : $k \simeq 87$.
Si vous avez le courage de mettre en boucle avec « beaucoup = 10**87, moi je dis « non ».