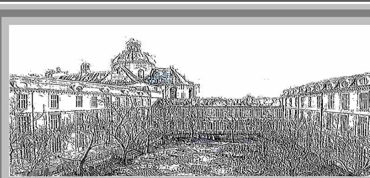
LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 7 mai
M.P.S.I.2



2023 2024

IS27

$\boxed{\heartsuit\ 0\ \heartsuit}$ Énoncez et démontrez le critère de domination sur les séries numériques à termes positifs. $\boxed{\text{3 pt.}}$

$\boxed{\heartsuit\ 1\ \heartsuit}$ Dérivez $Arcsin'$, $Arccos'$ et $Arctan'$ (formule et domaine, preuve non demandée). $\boxed{\text{3 pt.}}$

$\boxed{\diamondsuit\ 0\ \diamondsuit}$ f et g sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, contractantes. f est croissante et g décroissante. Montrez que $f+g$ est contractante. $\boxed{\text{3 pt.}}$

$\boxed{\diamondsuit\ 1\ \diamondsuit}$ On définit $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2.x+y-z \\ x+y-2.z \end{pmatrix}$. Montrez que f est linéaire, non injective. Donnez une base de son noyau. Vérifiez que f est surjective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. $\boxed{\text{3 pt.}}$

$\boxed{\spadesuit\ 0\ \spadesuit}$ Montrez que si la série de terme général positif a_n ($n>0$) converge, alors la série de terme général $\dfrac{1}{n.(n+1)}.\sum\limits_{k=0}^{n} k.a_k$ ($n>0$) converge aussi, et comparez leurs sommes. $\boxed{\text{3 pt.}}$

I∼0) Soit f une application continue, strictement positive. On suppose que $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a f(t).dt$ existe, et on la note $\int_0^{+\infty} f(t).dt$. On définit $g = x \longmapsto \dfrac{1}{x}.\int_0^x t.f(t).dt$ et $h = x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}.\int_0^x t.f(t).dt$. Montrez que $g(x)$ admet une limite quand x tend vers 0 par valeur supérieure et calculez la *(indication : on pourra noter F une primitive de f et Φ une primitive de $Id.f$)*. $\boxed{\text{2 pt.}}$

I∼1) ε strictement positif donné, montrez qu'il existe A_ε vérifiant $\forall a \geqslant A_\varepsilon,\ 0 \leqslant \int_{A_\varepsilon}^a f(t).dt \leqslant \varepsilon$. Déduisez alors $\forall x \geqslant A_\varepsilon,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{x}.\int_{A_\varepsilon}^x t.f(t).dt \leqslant \varepsilon$. $\boxed{\text{3 pt.}}$

I∼2) Montrez $\exists B_\varepsilon,\ \forall x \geqslant B_\varepsilon,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{x}.\int_0^{A_\varepsilon} t.f(t).dt \leqslant \varepsilon$. Déduisez que g admet une limite en $+\infty$ que vous préciserez. $\boxed{\text{2 pt.}}$

I∼3) Démontrez que $\int_\alpha^a h(x).dx$ admet une limite quand α tend vers 0 et a tend vers $+\infty$ et montrez même $\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}.\int_0^x t.f(t).dt\right).dx = \int_0^{+\infty} f(x).dx$ *(indication : par parties)*. $\boxed{\text{3 pt.}}$

II∼0) Montrez pour tout couple de réels $(a,\ b)$ et tout t entre 0 et 1 : $e^{(1-t).a+t.b} \leqslant (1-t).e^a + t.e^b$ *(indication : variations de $t \longmapsto (1-t).e^a + t.e^b - e^{(1-t).a+t.b}$ pour t de 0 à 1)*. $\boxed{\text{2 pt.}}$

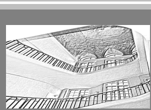
II∼1) Montrez : $\exp\left(\dfrac{1}{n}.\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k\right) \leqslant \dfrac{1}{n}.\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{\alpha_k}$ pour tout entier n et toute famille de réel $(\alpha_0, \dots \alpha_{n-1})$ *(indication : $a = \dfrac{1}{n}.\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_k$, $b = a_n$ et $t = \dfrac{1}{n+1}$)*. $\boxed{\text{3 pt.}}$

II∼2) Déduisez pour g continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$: $\exp\left(\dfrac{1}{b-a}.\int_a^b g(t).dt\right) \leqslant \dfrac{1}{b-a}.\int_a^b e^{g(t)}.dt$ *(indication : Riemann)*. $\boxed{\text{3 pt.}}$

II∼3) Déduisez $\exp\left(\dfrac{1}{x}.\int_0^x \ln(f(t)).dt\right) \leqslant \dfrac{e}{x^2}.\int_0^x t.f(t).dt$ *(indication : $\ln(t.f(t))$ sur $[a,\ x]$)*. $\boxed{\text{3 pt.}}$ (Centrale 2023)

LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 7 mai
M.P.S.I.2

2023 2024
IS27
CORRECTION



Cours et petits exercices. IS27

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques à termes positifs. On suppose $a_n = O(b_n)$ et $\sum b_n$converge. Alors $\sum a_n$converge.

On se ramène aux sommes parties : $A_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n$ et $B_N = \sum\limits_{n=0}^{N} b_n$. Les deux sont croissantes (termes positifs). La seconde converge (et sa limite $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$est alors son plus petit majorant).

L'hypothèse $a_n = O(b_n)$ nous dit $\exists K,\ \forall n,\ a_n \leqslant K.b_n$ (rapport borné). En sommant de 0 à N, on déduit

$$A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \leqslant K.\sum_{n=0}^{N} a_n \leqslant K.\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Le majorant ne dépend plus de N, les sommes partielles convergent (théorème de convergence des suites réelles croissantes majorées). Mais rien ne nous donne la valeur de la somme.

			domaine
$Arcsin$	$Arcsin' = x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arcsin'' = x \longmapsto \dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$	$]-1,\ 1[$
$Arccos$	$Arccos' = x \longmapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arccos'' = x \longmapsto \dfrac{-x}{(1-x^2)^{3/2}}$	$]-1,\ 1[$
$Arctan$	$Arctan' = x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$Arctan'' = x \longmapsto \dfrac{-2.x}{(1+x^2)^2}$	$]-\infty,\ +\infty[$

Oh, l'énoncé était vicieux. Il ne fallait pas calculer $Arcsin'$, mais dérivée $Arcsin'$, c'est à dire bien aller jusqu'à $Arcsin''$.

On suppose f croissante et lipschitzienne de rapport k (plus petit que 1) et g décroissante de rapport k' plus petit que 1.
Le seul usage de l'inégalité triangulaire donne au mieux $|(f+g)(y) - (f+g)(x)| \leqslant (k+k').|x-y|$ et ceci n'est pas pertinent.
On va donc encadrer au lieu de majorer en valeur absolue. On se donne x et y avec $x \leqslant y$ (sans perte de généralité).
On traduit les deux hypothèses en rappelant la croissance de f et la décroissance de g

$$0 \leqslant f(y) - f(x) \leqslant k.(y-x)$$

$$0 \leqslant g(x) - g(y) \leqslant k'.(y-x)$$
$$-k'.(y-x) \leqslant g(y) - g(x) \leqslant 0$$

Additionnons la première et la troisième (il est légitime d'additionner des inégalités)

$$-k'.(y-x) \leqslant (f+g)(y) - (f+g)(x) \leqslant k.(y-x)$$

On note K le maximum de k et k' (donc plus petit que 1), et on trouve

$$-K.(y-x) \leqslant -k'.(y-x) \leqslant (f+g)(y) - (f+g)(x) \leqslant k.(y-x) \leqslant K.(y-x)$$

On reconnaît que $f+g$ est lipschitzienne de rapport K plus petit que 1.

Autre vision : les taux d'accroissement de $f+g$ ne sont pas la somme de ceux de f et de ceux de g mais plutôt une différence de taux positifs puisque les deux applications n'ont pas le même sens de variations. Et quand on soustrait deux réels entre 0 et 1 et reste entre -1 et 1.

Autre point de vue encore, quitte à se placer dans un univers idéalisé. On suppose f et g dérivables. Alors f' est entre 0 et k. Et g' est entre $-k$ et 0. La somme $(f+g)'$ est entre $-k'$ et k. Elle reste en valeur absolue plus petite que $K = Max(k, k')$ et on remonte à $(f+g)$ est Kcontractante.

La linéarité de $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2.x+y-z \\ x+y-2.z \end{pmatrix}$ se démontre soit en calculant $f(\lambda.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mu.\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix})$ et en le comparant à $\lambda.f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) + \mu.f(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix})$, soit en écrivant sous forme matricielle $f = U \longmapsto M.U$ avec $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (et on vérifie par les règles de calcul$M.(\lambda.U + \mu.U') = \lambda.M.U + \mu.M.U'$).

Pour la non injectivité, il suffit de trouver deux vecteurs ayant la même image.
On peut certes y aller au hasard. Mais autant attendre la question suivante. On cherche le noyau, c'est à dire tous les antécédents de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (et si il y en a plusieurs, ce sera bien la preuve que f n'est pas injective).

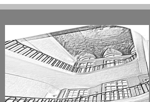
On résout donc $\begin{matrix} 2.x & +y & -z & = & 0 \\ x & +y & -2.z & = & 0 \end{matrix}$ et on trouve $\begin{matrix} x & = & -z \\ y & = & 3.z \end{matrix}$ (équivalences).

Le noyau est formé des multiples de $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, il est de dimension 1 (droite, deux équations de plan).
Notre application n'est effectivement pas injective.

En revanche, son noyau est de dimension 1, son ensemble image sera par soustraction de dimension 2.
Ce sera donc le plan $(\mathbb{R}^+, +, .)$ tout entier.

Tout vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ admet au moins un antécédent (ex. : $\begin{pmatrix} a-b \\ -a+2.b \\ 0 \end{pmatrix}$ et en fait tous les $\begin{pmatrix} a-b \\ -a+2.b \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda.\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On peut aussi montrer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans l'ensemble image (antécédents $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ par exemple), et toutes leurs combinaisons y sont alors aussi.



Séries à terme spositifs. IS27

Si la série à termes positifs converge, on peut traduire : les sommes partielles $\sum_{n=1}^{N} a_n$convergent en croissant vers $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$,
mais aussi la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

La série de sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\dfrac{1}{n.(n+1)}.\sum_{k=1}^{n-1} k.a_k\Big)$ est à termes positifs, et on peut se ramener à une famille sommable à double indice.
Tout ce qui suit va reposer sur le théorème de Fubini et sera donc « sous réserve d'existence d'une des sommes »

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n.(n+1)}.\sum_{k=1}^{n} k.a_k\Big) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n<+\infty} \frac{k.a_k}{n.(n+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k.a_k}{n.(n+1)}\Big)$$

Mais chaque somme $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{k.a_k}{n.(n+1)}$ se factorise $k.a_k.\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n.(n+1)}$ se décompose $k.a_k.\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n.}-\frac{1}{n+1}\Big)$ puis télescope (à horizon fini) $k.a_k.\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\Big(\frac{1}{k.}-\frac{1}{N+1}\Big)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n.(n+1)}.\sum_{k=0}^{n}k.a_k\Big)=\sum_{0\leqslant k\leqslant n<+\infty}\frac{k.a_k}{n.(n+1)}=\sum_{k=1}^{+\infty}k.a_k.\frac{1}{k}$$

L'une des sommes existe (celle de la fin), toutes les sommes existent.

Et il y a égalité $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n.(n+1)}.\sum_{k=0}^{n}k.a_k\Big)=\sum_{k=1}^{+\infty}a_k}$

On va faire la même chose juste après sur les intégrales.

Prolongement de g en 0. IS27

On écrit pour x strictement positif

$$g(x)=\frac{\int_0^x t.f(t).dt}{x}=\frac{\Phi(x)-\Phi(0)}{x-0}$$

Ceci tend vers $\Phi'(0)$ c'est à dire $0.f(0)$. g se prolonge en 0 par la valeur 0.

Limite de g en $+\infty$. IS27

On va utiliser une méthode de type Cesàro, car finalement, $g(x)$ est la moyenne de f sur l'intervalle $[0,\ x]$.

Pour ε donné, il existe un rang A_ε à partir duquel la différence $|\int_0^x f(t).dt-\int_0^{+\infty}f(t).dt|$ est plus petite que ε (convergence d'une fonction).

Mais avec simultanément $\int_0^{A_\varepsilon}f(t).dt\in[I-\varepsilon,\ I]$ et $\int_0^x f(t).dt\in[I-\varepsilon,\ I]$ on obtient $0\leqslant\int_{A_\varepsilon}^x f(t).dt\leqslant\varepsilon$ (la positivité vient de ce que la fonction intégrée est positive et l'intervalle pris dans le sens croissant).

Mais quand t va de A_εà x le rapport $\dfrac{t}{x}$ est plus petit que 1 (et positif) et on a

$$0\leqslant\frac{1}{x}.\int_{A_\varepsilon}^x t.f(t).dt=\int_{A_\varepsilon}^x\frac{t}{x}.f(t).dt\leqslant\int_{A_\varepsilon}^x 1.f(t).dt\leqslant\varepsilon$$

A présent que $A_\varepsilon$est connu, $\int_0^{A_\varepsilon}t.f(t)$ est juste un réel. Il ne dépend pas de x et on peut rendre $\dfrac{1}{x}.\int_0^{A_\varepsilon}t.f(t)$ plus petit que ε (il suffit de prendre $B_\varepsilon=\dfrac{\int_0^{A_\varepsilon}t.f(t).dt}{\varepsilon}$(sans partie entière, puisque x est un réel, et pas un entier).

Mais alors à partir du rang $Max(A_\varepsilon,\ B_\varepsilon)$ on a

$$0\leqslant\frac{1}{x}.\int_0^{A_\varepsilon}t.f(t).dt\leqslant\varepsilon\ et\ 0\leqslant\frac{1}{x}.\int_{A_\varepsilon}^x t.f(t).dt\leqslant\varepsilon$$

ce qui donne en sommant $0\leqslant g(x)\leqslant 2.\varepsilon$.
On recolle les morceaux $\forall\varepsilon>0,\ \exists C_\varepsilon,\ \forall x\geqslant C_\varepsilon,\ 0\leqslant g(x)\leqslant 2.\varepsilon$. C'est la quantification de $g(x)\longrightarrow_{x\to+\infty}0$.

Intégration par parties. IS27

On travaille pour l'instant sur un segment en nommant les objets pour les maîtriser

$$\int_{\alpha}^{a} h(x).dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x^2}.\Big(\int_0^x t.f(t).dt\Big).dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x^2}.\Phi(x).dx$$

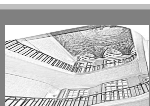
On glisse le mot C^1 et on intègre par parties

$\frac{1}{x^2}$	$\hookleftarrow$	$\frac{-1}{x}$
$\Phi(x)$	$\hookrightarrow$	$x.f(x)$

$$\int_{\alpha}^{a} h(x).dx = \Big[-\frac{\Phi(x)}{x}\Big]_{\alpha}^{a} - \int_{\alpha}^{a} \frac{-1}{x}.x.f(x).dx$$

La seconde intégrale donne $\int_{\alpha}^{a} f(t).dt$ et le crochet donne justement $-g(\alpha)+g(a)$.
Quand α tend vers 0, $g(\alpha)$ tend vers 0.
Quand a tend vers l'infini, $g(a)$ tend vers 0.
On peut donc faire tendre a vers l'infini et α vers 0 et il reste

$$\int_0^{+\infty} h(t).dt = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ a\to+\infty}} \int_{\alpha}^{a} h(x).dx = -\lim_{a\to+\infty} g(a) + \lim_{\alpha\to 0} g(\alpha) + \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ a\to+\infty}} \int_{\alpha}^{a} f(x).dx = \int_0^{+\infty} f(t).dt$$



Exponentielle et moyennes. IS27

On se donne a et b, et on définit la fonction différence $t \longmapsto (1-t).e^a + t.e^b - e^{(1-t).a+t.b}$ qu'on va noter φ (et qu'il faudrait noter $\varphi_{a,b}$ pour marquer la dépendance.
On constate très vite : $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 0$. Reste à s'assurer qu'elle reste positive entre 0 et 1.

On la dérive : $\varphi' = t \longmapsto e^b - e^a - (b-a).e^{(1-t).a+t.b}$. On re-dérive : $\varphi'' = t \longmapsto -(b-a)^2.e^{(1-t).a+t.b}$.
La dérivée seconde est négative, φ' va s'annuler une fois et une seule.

On peut d'ailleurs résoudre $e^{(1-t).a+t.b} = \frac{e^b - e^a}{b-a}$ soit $t = \frac{\ln\left(\frac{e^b-e^a}{b-a}\right) - a}{b-a}$.

φ' sera d'abord positive, puis négative. φest donc croissante puis décroissante.
Comme elle est nulle en 0 et 1, le changement de variations se fait entre 0 et 1.

φ croit après 1, elle est donc positive de 0 à t_0.
Elle décroit et finit avec $\varphi(1) = 0$. Elle est donc positive aussi de t_0 à 1.

Bref, φ est positive de 0 à 1.

On va montrer $\exp\left(\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k}{n}\right) \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n-1} e^{\alpha_k}}{n}$ par récurrence sur n.
Pour n égal à 1, cette forme se réduit à $\exp\left(\frac{\sum_{k=0}^{0}\alpha_k}{1}\right) = e^{a_0} = \frac{\sum_{k=0}^{0} e^{\alpha_k}}{1}$. C'est une égalité. Donc une inégalité.

Pour n égal à 2, on doit comparer $\exp\left(\frac{a_0+a_1}{2}\right)$ et $\frac{e^{a_0}+e^{a_1}}{2}$. C'est notre forme $e^{(1-t).a+t.b} \leqslant (1-t).e^a + t.e^b$ pour $a = a_0$, $b = a_1$ et $t = \frac{1}{2}$.

On se donne un entier naturel n et on suppose $\exp\left(\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k}{n}\right) \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n-1} e^{\alpha_k}}{n}$.
Comme proposé, on pose $a = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k}{n}$, $b = a_n$ et $t = \frac{1}{n+1}$. On calcule

$$(1-t).a + t.b = \frac{n}{n+1}.\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k}{n} + \frac{1}{n+1}.a_n = \frac{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}{n+1}$$

comme par hasard. Et on continue

$$(1-t).e^a + t.e^b = \frac{n}{n+1}.\exp\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\Big) + \frac{1}{n+1}.e^{a_{n+1}}$$

L'hypothèse de rang n permet de majorer

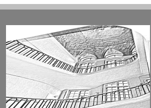
$$(1-t).e^a + t.e^b \leqslant \frac{n}{n+1}.\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{a_k}}{n} + \frac{1}{n+1}.e^{a_{n+1}} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} e^{a_k}}{n+1}$$

La majoration $e^{(1-t).a+t.b} \leqslant (1-t).e^a + t.e^b$ donne exactement

$$\exp\left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k}{n+1}\right) \leqslant \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} e^{a_k}}{n+1}$$

et la récurrence s'achève.

La formule démontrée est la grande inégalité de convexité pour l'exponentielle : image de la moyenne et moyenne des images.



Inégalités intégrales. IS27

On nous donne mg continue et on regarde $\exp\left(\frac{1}{b-a}.\int_a^b g(t).dt\right)$ et $\frac{1}{b-a}.\int_a^b e^{g(t)}.dt$.

Le facteur $\frac{1}{b-a}$ nous fait penser à la valeur moyenne. Et justement, on parlait de moyennes.

Et l'énoncé nous dit de parler de sommes de Riemann. $\int_a^b e^{g(t)}.dt$ est la limite de $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n}.\exp\left(g\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right)\right)$ quand n tend vers l'infini.

Et $\exp\left(\frac{1}{b-a}.\int_a^b g(t).dt\right)$ est la limite quand n tend vers l'infini de

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}.\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}.g\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

(continuité de l'exponentielle). Les $b-a$ se simplifient, et on écrit alors pour $a_k = g\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right)$ notre grande inégalité de convexité

$$\exp\left(\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} g\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(g\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

On fait tendre n vers l'infini et il reste

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t).dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a}.\int_a^b \exp(g(t)).dt$$

C'est l'inégalité de Jensen, image de la moyenne et moyenne des images.

Prenons pour couple $(a,\ b)$ le couple $(0,\ x)$ avec x donné,
g sera l'application suggérée par l'énoncé (y compris celui de Centrale) : $t \longmapsto \ln(f(t))$ (existence assurée par stricte positivité qui allait bien finir par servir).

$$\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t)).dt \leqslant \frac{1}{x}.\int_0^x f(t).dt\right.$$

Ah non, ce n'est pas le résultat demandé.

On relit l'énoncé et on prend cette fois $g = t \longmapsto \ln(t.f(t))$ (avec un problème en 0, mais l'application doit bien s'intégrer sur $[a,\ x]$)

$$\exp\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x \ln(t.f(t)).dt \leqslant \frac{1}{x-a}.\int_a^x t.f(t).dt\right.$$

On sépare le premier membre

$$\exp\left(\frac{1}{x-a}\int_a^x \ln(f(t)).dt + \frac{1}{x-a}.\int_a^x \ln(t).dt\right) \leqslant \frac{1}{x-a}.\int_a^x t.f(t).dt$$

On intègre explicitement

$$\frac{1}{x-a}.\int_a^x \ln(t).dt = \frac{1}{x-a}.\Big[t.\ln(t)-t\Big]_{t=a}^{t=x} = \frac{x.\ln(x)-x}{x-a} - \frac{a.\ln(a)-a}{x-a}$$

On peut faire tendre a vers 0 dans la formule et un peu abusivement (mais on dit merci aux croissances comparées)

$$\frac{1}{x}.\int_0^x \ln(t).dt = \ln(x)-1$$

Il reste maintenant

$$\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t)).dt + \ln(x)-1\right) \leqslant \frac{1}{x}.\int_0^x t.f(t).dt$$

Le $e^{\ln(x)-1}$ à gauche donne $\dfrac{x}{e}$ et on a après multiplication $\dfrac{e}{x}$ à droite.

Extrait de centrale 2023, partie I (sur trois), questions 1 à 6 (sur 10),
avec quelques indications en plus,
mais avec quelques théorèmes en moins dans votre sac à dos.
Le problème s'intéressait aux inégalites de Carleman, dont la plus classique est

$$\sum_{n=1}^{++\infty} \sqrt[n]{a_1.a_2\dots a_n} \leqslant e.\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

pour une famille sommable positive, et ses variantes sur les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x}.\int_0^x \ln(f(t)).dt\right).dx \leqslant e.\int_0^{+\infty} f(x).dx$$

(inégalité de Knopp).