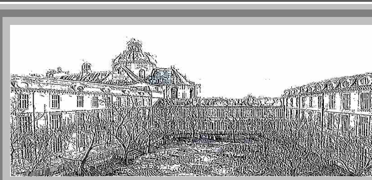
LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 27 mai
M.P.S.I.2



2023 2024

IS30

♡ 0 ♡ Prolongez par continuité en 0 $x \longmapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$. Est elle alors dérivable ? 3 pt.

♡ 1 ♡ Montrez que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. 2 pt.

Le reste d'une série convergente de terme général a_n est la somme $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.
Existe-t-il une série convergente non nulle de terme général a_n vérifiant $\forall n,\ R_n = -a_n$? 1 pt.
Existe-t-il une série convergente non nulle de terme général b_n vérifiant $\forall n,\ R_n = -2.b_n$? 1 pt.

```
S, L = ' ', [ ]
for k in range(1, 100) :
....S += str(k)
for k in range(63) :
....L.append(S[3*k : 3*k+3])
```

Donnez les deux premiers et les deux derniers éléments de L. 2 pt. Donnez les réponses booléennes : `'222' in L`, `'444' in L`, `'666' in L`, `'888' in L`. 4 pt.

◊ 0 ◊ Une involution de E est une application σ de E dans lui même vérifiant $\sigma \circ \sigma = Id_E$. Pour tout n, on note d_n le nombre d'involutions de $range(n)$. Calculez d_n pour n de 0 à 4. 3 pt.

◊ 1 ◊ Montrez : $d_{n+2} = d_{n+1} + (n+1).d_n$ (pas de récurrence, du dénombrement). 3 pt.

♯ 0 ♯ Écrivez un script Python qui pour n donné va retourner la liste des n+1 valeurs de d_0 à d_n. 2 pt.

◊ 2 ◊ On pose $f = x \longmapsto e^x.e^{x^2/2}$. Montrez que f admet en 0 un développement limité d'ordre n pour tout n $f(0+h) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k.h^k + o(h^n)$ et justifiez $a_k = \sum\limits_{p+2.q=k} \dfrac{1}{p!.2^q.q!}$. 3 pt.

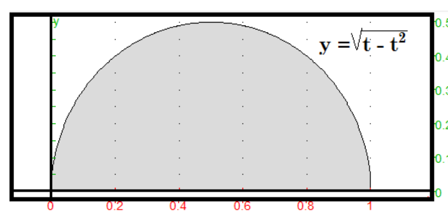
◊ 3 ◊ Montrez : $f'(x) = (1+x).f(x)$ pour tout x. Déduisez $d_n = n!.a_n$ pour tout n. 3 pt.

♣ 0 ♣ On note E l'ensemble des applications f de classe C^2 vérifiant $\forall (x,\ y),\ f(x-y).f(x+y) \leqslant (f(x))^2$. Lesquelles sont dans E : exp, $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto e^{-x^2}$. 3 pt.

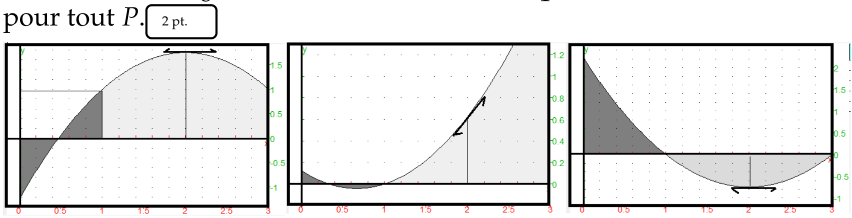
♣ 1 ♣ Soit f une application de classe D^2, montrez $(f(x))^2 - f(x-h).f(x+h) = (f(x))^2.h^2 - f(x).f''(x).h^2 + o(h^2)_{h\to 0}$pour tout x 2 pt. On suppose que f est dans E, montrez : $\forall x,\ f(x).f''(x) \leqslant (f(x))^2$. 3 pt.

☼1 Montrez : $\forall x > 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. 2 pt.

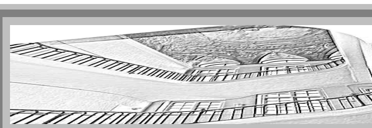
☼2 On pose $v_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{\sqrt{k.(n-k)}}{n^2}\right)$. Montrez que $\ln(v_n)$ converge vers $\int_0^1 \sqrt{x.(1-x)}.dx$. 3 pt. ☼3 Calculez cette intégrale et donnez la limite de v_n quand n tend vers l'infini. 3 pt.



♠ 0 ♠ L'élève affirme : si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 et que je connais $P(1)$, $P'(2)$ et $\int_0^1 P(t).dt$ alors je sais calculer $\int_0^2 P(t).dt$ sous la forme $\int_0^1 P(t).dt = a.P(1) + b.P'(2) + c.\int_0^1 P(t).dt$. Mais il a refusé de vous donner a, b et c. Il vous a quand même donné un indice : prenez $P_0(X) = \dfrac{-3.X^2 + 12.X - 5}{4}$, puis $P_1(X) = \dfrac{3.X^2 - 4.X + 1}{8}$ et $P_3(X) = \dfrac{3.X^2 - 12.X + 9}{4}$. 4 pt. Démontrez ensuite que sa formule est bien valable pour tout P. 2 pt.

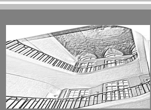


	$P(1)$	$P'(2)$	$\int_0^1 P(t).dt$
P_0			
P_1			
P_2			



LYCEE CHARLEMAGNE
Mardi 27 mai
M.P.S.I.2

2023 2024
IS30
CORRECTION



Petites questions. IS30

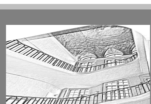
On suppose $g\circ f$ injective.
On prouve alors l'injectivité de f.
On se donne a et b dans le domaine de définition de f. On suppose $f(a)=f(b)$.
On applique g (application) : $g(f(a))=g(f(b))$.Par injectivité de $g\circ f$ on obtient tout de suite $a=b$.

L'application $x\longmapsto\dfrac{x}{e^x-1}$ n'est pas définie en 0 mais se prolonge par la valeur 1 (inverse d'un taux d'accroissment de l'exponentielle en 0).

Maintenant, pour la dérivabilité, on étudie un taux d'accroissement de la fonction prolongée, pour lequel on a eecours à un développement limité

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{\dfrac{h}{e^h-1}-1}{h}=\frac{h+1-e^h}{h.(e^h-1)}=\frac{-\frac{h^2}{2}+o(h^2)}{h.(e^h-1)}\sim\frac{-h^2/2}{h^2}=\frac{-1}{2}$$

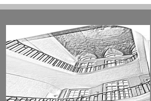
Les taux ont une limite, l'application (que j'ai notée f alors qu'aucun nom ne lui était donné) est dérivable en 0 de dérivée $-\dfrac{1}{2}$.



Séries et restes. IS30

La relation qui va nous servir : $R_{n+1}=R_n-(a_{n+1})$.
Si on veut pour tout n $2.a_n=-R_n$ alors on demande $2.a_{n+1}=-R_{n+1}=-(R_n-a_{n+1})=-R_n+a_{n+1}=2.a_n+a_{n+1}$ et ceci donne $a_{n+2}=2.a_n$.
Je suis désolé, mais une suite géométrique de raison 2 ne tend pas vers 0 et ne peut pas donner une série convergente. La réponse est donc « non ».

Si on veut pour tout n $2.a_n=-R_n$ alors on demande $2.a_{n+1}=R_{n+1}=(R_n-a_{n+1})=2.a_n-a_{n+1}$ et ceci donne $a_{n+1}=\dfrac{2}{3}.a_n$.
Une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ convient et c'est bien le terme général d'une série convergente (de somme $a_0.\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}$).



Mots et listes. IS30

On part d'un mot vide. On lui ajoute des string comme `'1'`, `'2'`, `'3'` jusqu'à `'99'` inclus (en passant par `'9'`, `'10'`, `'11'`).
La chaine S est donc faite des entiers de 1 à 99 collés bout à bout.
'123456789101112131415161718192021222324252627282930313233343536373839404142434445464748495051525354555657585960616263646566676869707172737475767778798081828384858687888990919293949596979899'

On crée une liste vide, et dedans, on met les coupes de S par paquets de trois chiffres.

```
['123', '456', '789', '101', '112', '131', '415', '161', '718', '192', '021', '222', '324', '252',
'627', '282', '930', '313', '233', '343', '536', '373', '839', '404', '142', '434', '445', '464',
'748', '495', '051', '525', '354', '555', '657', '585', '960', '616', '263', '646', '566', '676',
'869', '707', '172', '737', '475', '767', '778', '798', '081', '828', '384', '858', '687', '888',
```

```
'990', '919', '293', '949', '596', '979', '899']
```

Pour avoir `'111'`, la seule possibilité est `11` suivi de `12`. Mais la coupe ne se fait pas au bon moment.

Pour avoir `'222'` : la seule possibilité est la découpe `22` suivi de `23`.
Et la coupe se fait après les nombres de `1` à `21`. 33 chiffres. C'est bon.

Pour avoir `'888'`, c'est `88` suivi de `89`. On compte à partir de la fin. On a des paquets de trois chiffres. C'est bon.

Applications vérifiant $f(x-y).f(x+y) \leqslant (f(x))^2$. IS30

fonction	$f(x-y).f(x+y)$	$(f(x))^2$	verdict	
exp	$e^{x+y}.e^{x-y}$	$e^{2.x}$	oui	égalité
$x \longmapsto x^2$	$((x+y).(x-y))^2 = (x^2-y^2)^2$	$(x^2)^2$	non	$x=0$ et $y=1$
$x \longmapsto e^{-x^2}$	$e^{-(x^2-2.x.y+y^2)}.e^{-(x^2+2.x.y+y^2)} = e^{-2.x^2-2.y^2}$	$e^{-2.x^2}$	oui	$e^{-y^2} \leqslant 1$

On nous dit que f est de classe D^2 on peut donc écrire des développements limités d'ordre 2 en tout point x, puis effectuer leur produit

	$f(x)$	$+h.f'(x)$	$+\dfrac{h^2}{2}.f''(x)$	$+o(h^2)$
$f(x)$	$(f(x))^2$	$+h.f'(x).f(x)$	$+\dfrac{h^2}{2}.f(x).f''(x)$	
$-h.f'(x)$	$-h.f'(x).f(x)$	$-h^2.(f'(x))^2$		
$+\dfrac{h^2}{2}.f''(x)$	$+\dfrac{h^2}{2}.f(x).f''(x)$		$+o(h^2)$	
$+o(h^2)$				

On soustrait $(f(x))^2$, on voit les termes en h se simplifier, et on regroupe les termes en h^2. On a la formule demandée.

$$(f(x))^2 - f(x-h).f(x+h) = (f(x))^2.h^2 - f(x).f''(x).h^2 + o(h^2)_{h\to 0}$$

On suppose à présent f dans E. On a donc pour tout x et tout h : $f(x+h).f(x-h) - (f(x))^2 \leqslant 0$.
Ceci nous donne pour tout couple $(x,\ h)$: $(f'(x))^2.h^2 - f(x).f''(x).h^2 + o(h^2)_{h\to 0} \geqslant 0$.
Mais que dire ? On connaît le signe du $o(h^2)$? Non.
On divise par h^2 strictement positif (oubliez de dire ça, et c'est fichu) $(f(x))^2 - f(x).f''(x) + o(1)_{h\to 0} \geqslant 0$.
On fait tendre h vers 0, le terme correctif $o(1)$ tend vers 0 et il reste $(f(x))^2 - f(x).f''(x) + o(1)_{h\to 0} \geqslant 0$.

Proprement $\dfrac{f(x-h).f(x+h) - (f(x))^2}{h^2}$ est négatif pour tout h
et tend vers $f(x).f''(x) - (f'(x))^2$.
La limite est donc négative ou nulle : $f(x).f''(x) - (f'(x))^2 \leqslant 0$.

On note que ceci ne permet permet de valider : $x \longmapsto x^2$ n'est pas dans E puisque on a en fait $2.x^2 \leqslant (2.x)^2$.

Involutions. IS30

De l'ensemble vide vers lui même, il n'y a que l'identité, et elle vérifie $(Id_\emptyset)\circ(Id_\emptyset) = Id_\emptyset$.

De l'ensemble à un élément dans lui même, il n'y a que l'identité, et $(Id_{\{0\}})\circ(Id_{\{0\}}) = Id_{\{0\}}$.

De l'ensemble $\{0,\ 1\}$ dans lui même, il y a deux bijections : Id et $\overrightarrow{(0\ 1)}$ et les deux sont des involutions.

De l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2\}$ dans lui même, il y a Id, trois transpositions et deux tricycles (6 permutations). Seuls les tricycles ne sont pas des involutions.

De l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ dans lui même, il y a l'identité, six bicycles comme $\overrightarrow{(1\ 3)}$, et trois « bi-bicycles » comme $\overrightarrow{(1\ 3)}\circ\overrightarrow{(2\ 4)}$; les autres sont des tricycles et quadricycles, non involutives.

$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$d_0=1$	$d_1=1$	$d_2=2$	$d_3=4$	$d_4=10$

Remarque : comme on va montrer $d_{n+2} = d_{n+1} + (n+1).d_n$ il serait bon d'avoir effectivement $a_2 = a_1 + (0+1).a_0$ (et donc $a_0 = 1$) et $a_4 = a_3 + 3.a_2$ (et donc $a_4 = 10$).

Pour `n` donné, on initialise la liste `D` à ses deux premières valeurs `1` et `1`.
Ensuite, il en manque `n-1`, donc on effectue une boucle itérative `for k in range(n-1)` (et pour n petit, elle ne sera pas exécutée).
On calcule le nouvel élément à ajouter en fin de liste à l'aide des deux derniers, combinaison de `R[-1]` et `R[-2]`. Il faut mettre le bon coefficient sur `R[-2]`.

A l'étape de rang `k`, on est en train de calculer d_{k+2} puisqu'on a déjà d_0 et d_1. La bonne formule est donc `R[-1]+(k+1)*R[-2]`.
On peut de la même façon utiliser `R[k+1]+(k+1)*R[k]`.

```
def invol(n) :
....D = [1, 1]
....for k in range(n-1) :
........R.append(R[-1]+(k+1)*R[-2])
....return R
```

Cadeau : `[1, 1, 2, 4, 10, 26, 76, 232, 764, 2620, 9496, 35696, 140152, 568504, 2390480, 10349536]`.

Comment prouver $d_{n+2} = d_{n+1} + (n+1).d_n$ par dénombrement ?
On dit qu'on connait le nombre d'involutions d'un ensemble à n éléments et aussi le nombre d'involutions d'un ensemble à $n+1$ éléments.
Et on veut travailler sur $\{0,\ 1,\ \dots n+1\}$ (ensemble à $n+2$ éléments).
On discute suivant la valeur de $\sigma(n+2)$.
• Si on a $\sigma(n+1) = n+1$ (ce qui n'est pas contradictoire avec involution, puisque $\sigma^2(n+1)$ donne bien $n+1$), il reste $n+1$ éléments, et sur eux, σ est encore une involution.
On dénombre donc d_{n+1} involutions de ce type.

• Si on a $\sigma(n+2) \neq n+2$ alors on a $n+1$ choix pour cette image qu'on va noter k (avec k entre 0 et n inclus). Mais alors pour que σ soit involutive, il faut avoir $\sigma(k) = n+1$. Et il reste n éléments à mélanger involutivement entre eux. On a donc $(n+1).d_n$involutions.

Comme on a raisonné par disjonction de cas (partition de l'ensemble cherché), on a $d_{n+2} = d_{n+1} + (n+1).d_n$.

La fonction $x \longmapsto e^{x+\frac{x^2}{2}}$ est de classe C^∞ comme composée. Elle admet donc des développements à tout ordre en tout point.
En particulier en 0, à l'ordre n.
On ne va pas chercher à obtenir ce développement par dérivations successives, sauf à être enfermé dans une salle avec un colleur sadique.

On écrit le développement limité de l'exponentielle avec une fois la variable h et une fois la variable $\frac{h^2}{2}$ (les deux tendent vers 0).
On effectue le produit en ne gardant que les termes intéressants

$$e^h.e^{\frac{h^2}{2}} = \Big(\sum_{p=0}^{n} \frac{h^p}{p!} + o(h^n)\Big).\Big(\sum_{q=0}^{[n/2]} \Big(\frac{h^2}{2}\Big)^q + o(h^n)\Big)$$

en développant, on ne garde que les termes d'exposant plus petit que notre précision n

$$e^h.e^{\frac{h^2}{2}} = \sum_{p+2.q\leqslant n} \frac{1}{p!}.\frac{1}{2^q.q!}.h^{p+2.q} + o(h^n)$$

on regroupe en fonction de l'exposant et on a $a_k = \sum_{p+2.q=k} . \frac{1}{p!.2^q.q!}$.

Sachant que notre fonction s'écrit aussi sous la forme e^uavec $u = t \longmapsto t + \frac{t^2}{2}$ on a bien $f'(t) = (1+t).f(t)$ pour tout t.

D'ailleurs, f est une base de l'espace des solutions de cette équation différentielle.

Il y aurait un rapport avec notre développement limité ?
a_n est en fait $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, c'est Taylor qui le dit.

Mais si on écoutait aussi ce que dit Leibniz avec $f' = (1+Id).f$, en dérivant n fois

$$f^{(n+1)} = (f')^{(n)} = ((1+Id).f)^{(n)} = 1.(1+Id).f^{(n)} + n.(0+1).f^{(n-1)} + 0$$

En 0 ceci nous donne $f^{(n+1)}(0) = f^{(n)}(0) + n.f^{(n-1)}(0)$.
On écrit au rang $n+1$: $f^{(n+2)}(0) = f^{(n+1)}(0) + (n+1).f^{(n)}(0)$
Bon sang, la même relation de récurrence que les d_n.

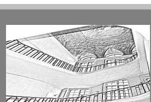
Mais ceci ne prouve pas que les deux suites sont égales. Si elles n'ont pas été initialisées de la même façon, il n'y a aucune raison qu'elles soient égales.

Mais quand même : $f^{(0)}(0) = 1 = d_0$, $f^{(1)}(0) = 1 = d_1$.
On a initialisé.
On passe à la double hérédité. Si pour un rang n quelconque donné on a $a_n = f^{(n)}(0)$ et $a_{n+1} = f^{(n+1)}(0)$, alors les deux relations $d_{n+2} = d_{n+1} + (n+1).d_n$ et $f^{(n+2)}(0) = f^{(n+1)}(0) + (n+1).f^{(n)}(0)$ donnent $f^{(n+2)}(0) = d_{n+2}$.

On a donc $d_n = f^{(n)}(0) = n!.a_n$ pour tout n (Taylor comme déjà dit).

$$1 + x + x^2 + \frac{2}{3}.x^3 + \frac{5}{12}.x^4 + \frac{13}{60}.x^5 + \frac{19}{180}.x^6 + \frac{29}{630}.x^7 + \frac{191}{10080}.x^8 + \frac{131}{18144}.x^9 + \frac{1187}{453600}.x^{10} + o(x^{10})$$

A vous de retrouver nos coefficients renormalisés, comme $\frac{9\,496}{10!} = \frac{1\,187}{453\,600}$.



Somme de Riemann. IS30

L'encadrement $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ vient d'une formule de Taylor. Par exemple avec reste intégrale.

$$\ln(1+x) = \ln(1) + x.\ln'(1) + x^2.\int_0^1 (1-t).\ln''(1+x.t).dt = x - x^2.\int_0^1 \frac{(1-t)}{(1+x.t)^2}.dt$$

Pour x positif, le reste est négatif, on a bien $\ln(1+x) \leqslant x$.
Pour x positif, on majore $\frac{1}{(1+x.t)^2}$ par 1 et on minore donc $\int_0^1 \frac{(1-t)}{(1+x.t)^2}.dt$ par $\int_0^1 (1-t).dt$, de valeur $\frac{1}{2}$.
L'encadrement est prouvé.

Toute référence à un développement limité et toute affirmation fumeuse sera lourdement sanctionné.
Zéro point, mais surtout ma haine indéfectible.

On va pouvoir encadrer $\ln(v_n)$ puisque $v_n$est un produit

$$\ln(v_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\sqrt{k.(n-k)}}{n^2}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k.(n-k)}}{n^2} = \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}.\left(1-\frac{k}{n}\right)}$$

Le majorant est une somme de Riemann qui va converger, par continuité de $t \longmapsto \sqrt{t.(1-t)}$ vers $\int_0^1 \sqrt{t.(1-t)}.dt$.

Pour la minoration, on va avoir $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k.(n-k)}}{n^2} - \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n} \frac{k.(n-k)}{n^4}$. On a le même terme qui converge vers la même intégrale.

Le second terme s'écrit $\displaystyle\frac{1}{n}.\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}.\Big(1-\frac{k}{n}\Big)$ avec $\displaystyle\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}.\Big(1-\frac{k}{n}\Big)$ qui converge vers une intégrale et $\dfrac{1}{n}$ qui converge vers 0.

Par encadrement, $\ln(v_n)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t.(1-t)}.dt$.

Dernière étape : la valeur de cette intégrale. Par parties, on tourne en rond et on n'efface pas les racines.

Par mise sous forme canonique : $\sqrt{t-t^2} = \sqrt{-(t-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}} = \frac{1}{2}.\sqrt{1-(2.t-1)^2}$.

On va donc poser $2.t-1=\sin(\theta)$ et obtenir

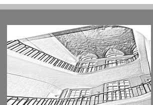
$$\int_{t=0}^{t=1} \sqrt{t-t^2}.dt = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(\theta)}.\cos(\theta).d\theta = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta).d\theta$$

On linéarise $\cos^2(\theta)$ en $\dfrac{1+\cos(2.\theta)}{2}$ et on intègre en $\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sin(2.t)}{2}$. Bref $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t.(1-t)}.dt = \frac{\pi}{8}$.

Mais en fait, $y=\sqrt{t.(1-t)}$ est l'équation d'un demi cercle de centre $\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$ comme on le voyait sur le dessin.

On mesure donc l'aire du demi-disque, et c'est tout. $\dfrac{\pi.R^2}{2}$ avec $R=\dfrac{1}{2}$.

La limite de $v_n$est donc $e^{\pi/8}$ en revenant à l'exponentielle (continue sur $\mathbb{R}$).



Intégration de polynômes. IS30

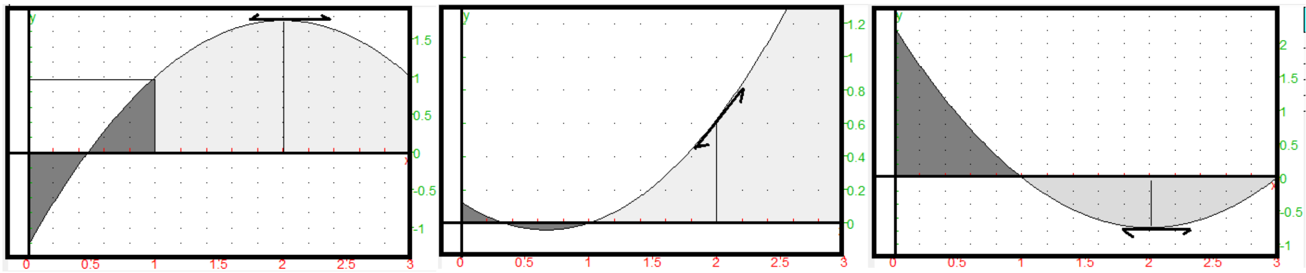
Étrange idée que de dire

$$\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \forall P\in\mathbb{R}_2[X],\ \int_0^2 P(t).dt = a.P(1)+b.P'(2)+c.\int_0^1 P(t).dt$$

D'autant qu'on serait tenté de dire que c serait égal à 1 par relation de Chasles. mais en quoi $\displaystyle\int_0^2 P(t).dt$ s'exprimerait sous la forme $a.P(1)+b.P'(2)$.

Mais si nous dit de tester trois polynômes étranges, c'est peut être parce qu'ils sont pratiques. calculons les au hasard en 1, dérivons les en 2 et calculons leur intégrale de 0 à 1.

	$P(1)$	$P'(2)$	$\displaystyle\int_0^1 P(t).dt$
$P_0(X)=\dfrac{-3.X^2+12.X-5}{4}$	$\dfrac{-3.1^2+12-5}{4}=1$	$\dfrac{-3.2.2X^2+12}{4}=0$	$\dfrac{1}{4}.\displaystyle\int_0^1(-3.t^2+12.t-5).dt=0$
$P_1(X)=\dfrac{3.X^2-4.X+1}{8}$	$\dfrac{3.1^2-4.1+1}{8}=0$	$\dfrac{3.2.2-4}{8}=1$	$\dfrac{1}{8}.\displaystyle\int_0^1(3.t^2-4.t+1).dt$
$P_3(X)=\dfrac{3.X^2-12.X+9}{4}$	$\dfrac{3.1^2-12.1+9}{4}=0$	$\dfrac{3.2.2-12.2}{4}=0$	$\dfrac{1}{4}.\displaystyle\int_0^1(3.t^2-12.t+9).dt=1$



Pour P_0, la formule, si elle est bonne, donne $\int_0^2 P_0(t).dt = a.1 + b.0 + c.0$. Pas le choix, a vaut $\dfrac{3}{2}$ (après calcul de l'intégrale).

Pour P_1, elle donnera $\int_0^2 P_1(t).dt = a.0 + b.1 + c.0$ et donc b vaut $\dfrac{1}{4}$.

De même, P_2 permet de récupérer c : $\int_0^2 P_2(t).dt = a.0 + b.0 + c.1$ et donc $c = \dfrac{1}{2}$.

La formule $\int_0^2 P(t).dt = \dfrac{3}{2}.P(1) + \dfrac{1}{4}..P'(2) + \dfrac{1}{2}.\int_0^1 P(t).dt$ est valable pour $P = P_0$, pour $P = P_1$ et $P = P_2$.
Elle l'est alors pour toutes leurs combinaisons linéaires.
Et avec ces trois polynômes on peut reconstituer tout un espace de dimension 3 c'est à dire tout $\mathbb{R}_2[X]$. Inutile d'en faire plus.