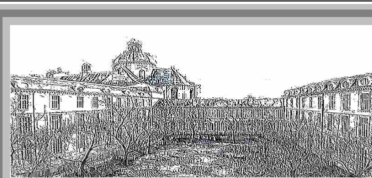
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 17 juin
M.P.S.I.2



2023 2024

TD32

∘0∘ ♡ Montrez que selon que vous regardez $(\mathbb{C}^3, +, .)$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, la famille
$\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+4.i \\ 2-3.i \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre ou liée.

∘1∘ ♡ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrez que $M \longmapsto A.M.B$ est un endomorphisme de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Montrez que c'est un automorphisme de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$.

Calculez l'image de chacun des quatre vecteurs de la base canonique : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donnez la matrice de cet endomorphisme sur cette base canonique.
Calculez son déterminant. Inversez la sans trop d'effort.

∘2∘ Inversez `[[1, 2, 1, 0], [1, 3, 3,-1], [1, 1, 0, 2], [1, 3, 5, 2]]` par méthode du pivot de Gauss.

∘3∘ On donne $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}$. Peut on choisir a et b pour avoir $Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = Vect(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d})$?

∘4∘ Montrez que $f \longmapsto f'' + f'$ est un endomorphisme de $Vect(ch,\ sh,\ ch^2,\ sh^2,\ ch.sh)$. Donnez la dimension de son noyau et de son image.

∘5∘ ♡ Combien y a-t-il d'endomorphismes f de $(\mathbb{R}^2, +, .)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j})$ et vérifiant $f(\overrightarrow{i} - 3.\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i}$?

∘6∘ Racines carrées de la dérivation *(oral de concours)*. On note $(E, +, .)$ l'espace vectoriel des polynômes et D l'endomorphisme de dérivation. On cherche à savoir si il existe un endomorphisme T de E vérifiant $T \circ T = D$ *(racine carrée de la dérivation)*. On suppose qu'un tel endomorphisme T existe. Montrez alors $\{0\} \subset Ker(T) \subset \mathbb{R}_0[X]$. Déduisez que la dimension de $Ker(T)$ vaut 0 ou 1.

Montrez que si $Ker(T)$ est de dimension 0, alors $Ker(T^2)$ l'est aussi. Concluez.

Montrez que si $Ker(T)$ est de dimension 1, alors $Ker(T^3)$ et $Ker(T^4)$ sont aussi de dimension 1. Concluez.

∘7∘ Sur les trois angles de $(A,\ B,\ C)$, le plus grand angle est le triple du plus petit, et le dernier angle est le double du petit. Que pouvez vous déduire ?

∘8∘

$X^3 + X^2 - 3.X + 1$	$X^2 - 3.X + 2$	$2.X^3 + 3.X^2 + X - 6$	$4.X^3 - 5.X^2 + 1$

Montrez que ces polynômes sont tous nuls en 1. Montrez (astucieusement ?) que la famille est liée.

∘9∘

Le but de ce petit (?) problème : étudier les matrices réelles symétriques. On va montrer le théorème spectral : elles se diagonalisent en base orthonormée. On montrera donc que leurs valeurs propres sont réelles, et qu'on peut construire une base faite de vecteurs propres deux à deux orthogonaux et normés pour le produit scalaire usuel sur $(\mathbb{R}^n, +, .)$. On commencera par une étude rapide en dimension 2, puis un exemple en dimension 3. Ensuite, on montre le théorème spectral par récurrence sur la taille des familles faites de vecteurs propres deux à deux orthogonaux. Le théorème spectral fera partie de votre cours l'an prochain.

I$\sim$0) Montrez que les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique de taille 2 sont réelles.
I$\sim$1) Pouvez vous construire une matrice réelle symétrique de taille 2 de spectre $\{1,\ 3\}$ dont au moins un coefficient vaut 5.
I$\sim$2) Pouvez vous construire une matrice réelle symétrique de taille 2 de spectre $\{1,\ 3\}$ dont au moins un coefficient vaut 2.
I$\sim$3) Montrez que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique mais non diagonalisable.

II$\sim$0) *On définit :* $M = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Donnez son spectre *(indice : il est dans $\mathbb{Z}$)*.
II$\sim$1) Trouvez un vecteur propre de norme 1 pour chaque valeur propre. Montrez qu'ils forment alors une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
II$\sim$2) Déduisez l'existence d'une matrice P et d'une matrice D vérifiant $M = P.D.P^{-1} = P.D.{}^tP$.

III$\sim$0) On pose $U = P.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculez ${}^tU.M.U$.
III$\sim$1) Trouvez un vecteur normé de $\mathbb{R}^3$ vérifiant ${}^tU_0.M.U_0 = 0$.
III$\sim$2) Trouvez un vecteur normé V_0 vérifiant ${}^tV_0.M.V_0 = 0$ et ${}^tV_0.U_0 = 0$.(calcul atroce)
III$\sim$3) Montrez que $(U_0,\ V_0,\ U_0 \wedge V_0)$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ et montrez que la matrice de f sur cette base a non seulement une trace nulle, mais même une diagonale nulle.(aucun calcul)

IV$\sim$0) $(E, +, ., \phi)$ *est un espace pré-hilbertien*[1]*, dans lequel on a pris deux vecteurs unitaires et orthogonaux* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$. *On définit* $f = \overrightarrow{u} \longmapsto \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a}$. Montrez que f est un endomorphisme de E. Donnez son noyau.
IV$\sim$1) Donnez son spectre et ses sous-espaces propres.
IV$\sim$2) Montrez : $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ \phi(f(\overrightarrow{u}),\ \overrightarrow{v}) = \phi(f(\overrightarrow{v}),\ \overrightarrow{u})$.

V$\sim$0) $(\mathbb{R}^n, +, .)$ *est l'espace euclidien muni de son produit scalaire usuel* ϕ, *et* f *est un endomorphisme de* $(\mathbb{R}^n, +, .)$ *de matrice* S *sur la base canonique vérifiant* $\forall(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) \in E^2,\ \phi(\overrightarrow{a},\ f(\overrightarrow{b})) = \phi(\overrightarrow{b},\ f(\overrightarrow{a}))$. Déduisez : ${}^tS = S$.
On pose note D_f *l'ensemble des familles* ϕ*-orthonormées formées de vecteurs propres de* f.
V$\sim$1) Montrez que $\det(S - \lambda.I_n)$ est un polynôme admettant au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Déduisez qu'il existe U et V dans $\mathbb{R}^n$ et μ dans C vérifiant $S.(U + i.V) = \mu.(U + i.V)$. En montrant ${}^t(U - i.V).S.(U + i.V) = {}^tU.S.U + {}^tV.S.V = \mu.({}^tU.U + {}^tV.V)$, montrez que μ est réel, et que U ou V est vecteur propre de S.
V$\sim$2) Déduisez qu'il y a dans D_f des familles de cardinal 1.

VI$\sim$0) *On suppose qu'une famille* $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k})$ *est une famille de* D_f, *avec* $k < n$. *On pose alors* $P = Vect(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k})$ (donnez sa dimension) *et* $Q = \{\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \overrightarrow{u} \in P,\ \phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{u}) = 0\}$. Montrez que Q est un espace vectoriel non réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$. Montrez : $\forall \overrightarrow{u} \in P,\ f(\overrightarrow{u}) \in P$. Montrez : $\forall \overrightarrow{a} \in Q,\ f(\overrightarrow{a}) \in Q$.
VI$\sim$1) Montrez qu'il existe dans Q au moins un vecteur propre de f de norme 1, noté $\overrightarrow{c}$.
VI$\sim$2) Montrez que $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{c})$ est dans D_f.
VI$\sim$3) Déduisez qu'il existe dans D_f une famille de cardinal n.

∘10∘ - a - Soit $(E, +, .)$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y^{(3)} + 3.y'' + 2.y' + 5.y = 0$. Montrez que la translation $\tau = \Big(f \longmapsto \big(t \longmapsto f(t+1)\big)\Big)$ est un endomorphisme de $(E, +, .)$, donnez sa trace ou son déterminant (ne cherchez pas les racines de l'équation caractéristique, on n'en a pas besoin, mais attention, deux d'entre elles sont complexes conjuguées).
- b - Montrez que la dérivation d est un endomorphisme de E et calculez sa trace et son déterminant.
- c - Justifiez : $\tau \circ d = d \circ \tau$.
- d - Montrez que $(f,\ g) \longmapsto f(0).g(0) + f'(0).g'(0) + f''(0).g''(0)$ est un produit scalaire sur $(E, +, .)$. Existe-t-il une base orthonormée de $(E, +, .)$ pour ce produit scalaire ?
- e - Trouvez une équation différentielle linéaire dont l'espace des solutions contient tous les carrés des éléments de $(E, +, .)$.

∘11∘ On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminez les dimensions des ensembles suivants en donnant à chaque fois une base :

1. *espace vectoriel avec un produit scalaire*

$C_A = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ $C_B = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid B.M = M.B\}$ $C_A \cap C_B$ $T_A = \{A.M - M.A \mid M \in M_2(\mathbb{R})\}$ et $T_A \cap C_B$.

∘12∘ Montrez que $P \longmapsto P(0)$, $P \longmapsto P'(1)$ et $P \longmapsto \int_0^1 P(t).dt$ sont des formes linéaire sur $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$ (notées φ, ϕet ψ).
Trouvez P vérifiant $(\varphi(P),\ \phi(P),\ \psi(P)) = (1,\ 0,\ 0)$.
Trouvez P vérifiant $(\varphi(P),\ \phi(P),\ \psi(P)) = (0,\ 1,\ 0)$.
Trouvez P vérifiant $(\varphi(P),\ \phi(P),\ \psi(P)) = (0,\ 0,\ 1)$.
Trouvez P vérifiant $(\varphi(P),\ \phi(P),\ \psi(P)) = (0,\ 0,\ 0)$.

Montrez que $(\varphi,\ \phi,\ \psi)$ est libre.

∘13∘ ♡ Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 ; montrez que $\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3),\ P(X+4)\big)$ est liée. Donnez un exemple où $\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3)\big)$ est libre.
Peut elle être de sens opposé à celui de la base canonique de $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$?

∘14∘ ♡ A et B sont deux matrices carrées de taille n. On suppose A inversible. Simplifiez $A^{-1}.(A.B - x.I_n).A$. Déduisez que $A.B$ et $B.A$ ont le même spectre.
On suppose que ni A ni B n'est inversible. Montrez que $A - 2^{-p}.I_n$ *(notée A_p)* est inversible pour une infinité de valeurs de p. Montrez que pour ces valeurs de p, on a $\chi_{A_p.B}(X) = \chi_{B.A_p}(X)$. Déduisez $\chi_{A.B}(X) = \chi_{B.A}(X)$.

∘15∘ Vrai ou faux (un vrai, un faux) :
Dans $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ l'ensemble d'équation $Tr({}^tM.M) = 0$ est un espace vectoriel.
Dans $(M_n(\mathbb{C}), +, .)$ l'ensemble d'équation $Tr({}^tM.M) = 0$ est un espace vectoriel.

∘16∘ ♡ Soit $(U_1, \dots U_p)$ une famille de p vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ et M une matrice carrée de taille n, inversible. Montrez que si $(U_1, \dots U_p)$ est liée, alors $(M.U_1, \dots M.U_p)$ est liée.
On suppose M inversible ; montrez que si $(U_1, \dots U_p)$ est libre, alors $(M.U_1, \dots M.U_p)$ est libre.

∘17∘ Montrez que $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est nilpotente, prouvez le (trouvez le corps dans lequel ça se passe) ! Montrez que cette matrice est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

∘18∘ ♡ Faites en une famille liée : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ \spadesuit \\ \clubsuit \end{pmatrix}\right)$.

∘19∘ ♡ Vérifiez que la famille $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c},\ \overrightarrow{d})$ est liée dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$.
$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Donnez une équation cartésienne *(du type $\alpha.x + \beta.y + \gamma.z + \delta.t = 0$)* de l'hyperplan qu'elle engendre *(l'ensemble des combinaisons linéaires de ces quatre vecteurs)*.
Complétez $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$ en base de $\mathbb{R}^4$ de sorte que le premier vecteur de la base canonique ait pour composantes $(4,\ 3,\ 2,\ 1)$.

∘20∘ ♡ Montrez que si une famille est libre dans $(\mathbb{C}^n, +, .)$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors elle est libre dans $(\mathbb{C}^n, +, .)$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

∘21∘ Soient $(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5})$ cinq vecteurs d'un espace vectoriel $(E, +, .)$. Montrez
$\dim(Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3})) - 3 \geqslant \dim(Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5}) - 5$.

◦22◦ ♡ Faites en une famille liée dans l'espace vectoriel des matrices de format 2 sur 2 dont la trace est nulle :
$\left(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 6 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}\right)$

◦23◦ ♡ F et G sont deux sous espaces vectoriel d'un espace vectoriel $(E, +, .)$, vérifiant $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$. $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p})$ est une famille de vecteurs de F et $(\overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_q})$. Montrez que $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p}, \overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_q})$ est libre si et seulement si $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p})$ et $(\overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_q})$ le sont.

◦24◦ ♡ Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 ; montrez que $\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3),\ P(X+4)\big)$ est liée. Donnez un exemple où $\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3)\big)$ est libre.
Peut elle être de sens opposé à celui de la base canonique de $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$?

◦25◦ Soient $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{d}$ quatre vecteurs d'un espace vectoriel $(E, +, .)$. Montrez que $\{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b} + \gamma.\overrightarrow{c} + \delta.\overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}\}$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension si la famille $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d})$ est libre ?
Quelle est sa dimension si cette famille est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$?
Donnez un exemple où sa dimension vaut 1.

◦26◦ Montrez que $(\mathbb{R}, +, .)$ est un $(\mathbb{Q}, +, \times)$ espace vectoriel (pour x dans $\mathbb{R}$ et λ dans $\mathbb{Q}$, on pose évidemment $\lambda.x = \lambda.x$ au sens classique de la multiplication dans $\mathbb{R}$). Attention, ici, on doit tout démontrer (même si ce sont des évidences), car on n'est pas face à un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel usuel.
Montrez que $(1,\ \sqrt{2})$ est libre. Montrez que $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$ est libre. $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4})$ est elle libre ?

◦27◦ Montrez que $(9.\overrightarrow{i} + 12.\overrightarrow{j} + 32.\overrightarrow{k},\ -10.\overrightarrow{i} - 13.\overrightarrow{j} - 35.\overrightarrow{k},\ 2.\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} + 4.\overrightarrow{k})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Décomposez $\overrightarrow{j}$ sur cette base. Donnez un vecteur non nul qui garde les mêmes composantes sur cette base que sur la base canonique.

◦28◦ Parmi ces sous-ensembles de l'espace vectoriel des suites réelles, lesquels sont des sous-espaces vectoriels :

suites bornées	suites décroissantes à partir d'un certain rang
suites périodiques	suites qui convergent vers 0
suites monotones	suites équivalentes à $1/n$ quand n tend vers l'infini
suites en $O\left(\frac{1}{n}\right)$	suites dont le terme général est plus petit que 1 à partir d'un certain rang
suites en $o\left(\frac{1}{n}\right)$	

◦29◦ **Rappel des règles :** sur chaque ligne et sur chaque colonne, il y a chacun des cinq entiers 1, 2, 3, 4et 5. Et il des signes « plus grand que » et « plus petit que » ; bien entendu, ils doivent être corrects.

☐		☐		☐		☐	>	☐
$\wedge$								$\wedge$
☐	>	**3**		**1**	<	**2**		☐
$\vee$		$\wedge$		$\wedge$				
☐		☐	>	**2**	>	**1**		**3**
		$\vee$						
1		☐		☐		**4**		☐
☐		☐		☐	>	☐	>	☐

et

5		☐	>	☐		☐		☐
2	>	**1**		☐	>	☐		☐
$\wedge$								
☐		☐		☐	<	☐	>	☐
		$\wedge$						$\wedge$
☐	<	**5**		☐		☐	<	**4**
$\vee$								
☐	<	**4**		**5**		☐	<	**3**

◦30◦ On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C_A = \{M \mid M.A = A.M\}$, $R_A = \{M \mid A.M + M.A = 0\}$, $T_A = \{M \mid Tr(A.M) = 0\}$.
Montrez que C_A, R_A, T_A, $C_A \cap R_A$ et $C_A + R_A$ sont des espaces vectoriels, et donnez une base et la dimension de chacun.
Existe-t-il H vérifiant $R_A \oplus H = T_A \oplus H = M_2(\mathbb{R})$?
Existe-t-il H vérifiant $R_A \oplus H = T_A + H = M_2(\mathbb{R})$?

◦31◦ ♣ Pouvez vous construire une matrice A de spectre réel $[1]$ et tel que le spectre de A^2 soit $[1, 4, 9]$? Même question avec cette fois $[1, 2]$ et $[1, 4, -9, -9]$?

∘32∘ On veut simuler un dé à six faces non équilibré avec les probabilités suivantes :

1	2	3	4	5	6
1/13	2/13	5/13	1/13	3/13	1/13

Écrivez un script **Python** qui s'en charge.

∘33∘ Calculez la trace et le déterminant en fonction de a de $P(X) \longmapsto P(X+a)$ comme endomorphisme de $(\mathbb{R}_n[X],+,.)$.

Pour tout n, on appelle « matrice binaire » toute matrice de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1. Et on désigne par U_n l'ensemble des matrices binaires de taille n comptant exactement deux 1 dans chaque ligne et dans chaque colonne. L'exemple suivant est une matrice de U_4 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

VII∼0) Écrivez un script **Python** qui prend en entrée une matrice A carrée de taille n (liste de listes) et retourne **True** si elle est dans U_n et **False** sinon.

∘34∘

VIII∼0) On note u_n le cardinal de U_n. Montrez : $u_2 = 1$ et $u_3 = 6$. Est il logique de poser $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$?
VIII∼1) On note X_n le vecteur de $(\mathbb{R}^n,+,.)$ formé de n nombres 1 et J la matrice de $(M_n,+,.)$ dont tous les coefficients valent 1. Montrez que X_n est vecteur propre de toute matrice A de U_n, ainsi que de sa transposée (valeur propre ?).
VIII∼2) On note H_n le sous-ensemble des éléments de U_n comportant un 1 en position $(1,\ 1)$ [2], et on note h_n le cardinal de H_n. Calculez $\sum_{A\in U_n} A$ en fonction de h_n et de J_n.

IX∼0) Établissez : $2.u_n = n.h_n$ (on pourra utiliser les deux questions précédentes).
IX∼1) On note K_n (de cardinal k_n) l'ensemble des éléments de H_n ayant un 1 en position $(1,2)$ et en position $(2,1)$. Établissez une relation donnant h_n en fonction de k_n et $(n-1)^2$.
IX∼2) En examinant les possibilités pour l'élément de position $(2,2)$, démontrez : $k_n = u_{n-2} + h_{n-1}$ (pour n supérieur ou égal à 4).
IX∼3) Trouvez la relation de récurrence à double hérédité que vérifie la suite (u_n).

X∼0) On pose $w_n = \dfrac{u_n}{(n!)^2}$. Montrez $w_n = \dfrac{(n-1).w_{n-1}}{n} + \dfrac{w_{n-2}}{2.n}$ pour tout n.
X∼1) Montrez pour tout n supérieur ou égal à 2 : $w_n \geqslant \dfrac{1}{2.n}$ et déduisez que la série de terme général w_n diverge.
X∼2) Montrez que pour tout x de $]-1,,\ 1[$, la série de terme général $w_n.x^n$ converge.

XI∼0) Résolvez l'équation différentielle $2.(1-t).y'_t = t.y_t$ d'inconnue y fonction de t, avec condition initiale $y_0 = 1$ (solution notée f). Donnez le domaine de définition de la solution.
XI∼1) On pose $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Calculez a_0, a_1 et a_2.
XI∼2) Montrez pour tout n : $a_n = \dfrac{(n-1).a_{n-1}}{n} + \dfrac{a_{n-2}}{2.n}$.
XI∼3) Déduisez $a_n = w_n$ pour tout n, et trouvez une citation du chat de Geluck sur les maths

---

XII∼0) *Cette suite de questions est maintenant indépendantes des parties II à V.* Pour tout n, on note E_n l'espace vectoriel engendré par la famille de tous les éléments de U_n. Montrez : $1 \leqslant \dim(E_n) < n^2$.
XII∼1) Justifiez : $\dim(E_2) = 1$ et $\dim(E_3) = 5$ (on pourra considérer $J_3 - A$ avec A décrivant U_3). Et calculez $\dim(E_1)$.

XIII∼0) On note V_4 l'ensemble des matrices M de $M_4(\mathbb{R})$ telles que M et ${}^tM$ admettent X_4 comme vecteur propre. Montrez que V_4 est un sous-espace vectoriel de $(M_4(\mathbb{R}),+,.)$ contenant E_4(attention, la réponse attend deux éléments).
XIII∼1) Soit M est dans V_4, avec X_4 vecteur propre de M de valeur propre λ et vecteur propre de ${}^tM$ de valeur propre μ. Montrez : $\lambda = \mu$.

---

2. toutes les indexations vont de 1 à n, n'en déplaise au Python suprême

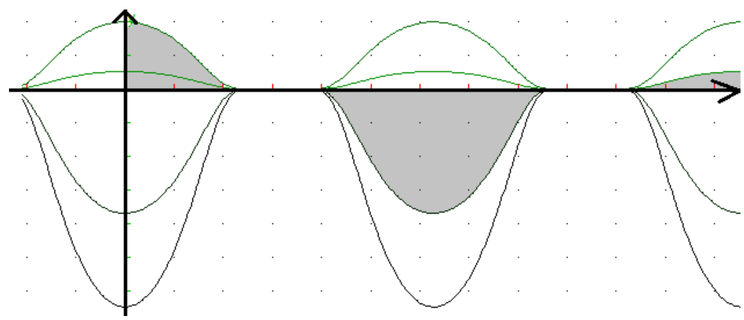
XIII∼2) Complétez ($\frac{1}{2}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$) en base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ (notée $(W_1,\ W_2,\ W_3,\ W_4)$.
XIII∼3) Montrez que pour tout i $\varphi_i = M \longmapsto^t W_i.M.W_1$ et $\psi_i = M \longmapsto^t W_i.^tM.W_1$ sont deux formes linéaires. Donnez la dimension du noyau de chacune.
XIII∼4) Montrez que $(\varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4)$ est une famille libre.
XIII∼5) Déduisez $\dim(E_4) \leqslant \dim(V_4) = 10$.

XIV∼0) Soit A une matrice de U_n comportant des 1 en positions $(1,1)$ et $(2,0)$ et des 0 en positions $(1,2)$ et $(2,1)$. Montrez qu'il existe B dans U_n telle que $A - B$ ne compte que des éléments nuls sauf en positions (i,j) avec i et j plus petits que 2.
XIV∼1) Déduisez $\dim(Vect(U - V \mid (U,V) \in U_n)) \geqslant (n-1)^2$.

XIV∼2) Concluez : $\dim(E_4) = 10$.

XIV∼3) Que vaut $\dim(E_n)$?

◦35◦ De quelle équation différentielle linéaire linéaire d'ordre 1 à coefficients continus et à second membre nul $t \longmapsto \exp\left(\frac{-1}{\cos^2(t)}\right)$ est elle solution ?



Quelle est la dimension de l'espace des solutions.

◦36◦ ♡ Sachant que u, v et w sont solutions de $y''_t + a_t.y'_t + b_t.y_t =_{\forall t} 0$, on pose $\omega = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$. Montrez $\omega' = \begin{vmatrix} u & v \\ u'' & v'' \end{vmatrix}$ puis $\omega'_t + a_t.\omega_t = 0$ $(\forall t)$.

◦37◦ ♡ Soient quatre matrices de taille 2 sur 2 de trace nulle. Montrez qu'elles forment une famille liée[3].

◦38◦ ♠ Il parait que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k}{(k+1)^2} = \zeta(3)$. C'est un sujet d'oral de Centrale.
Je n'ai pas la réponse pour l'instant.

◦39◦ On travaille avec le corps $\mathbb{K}$ des entiers de 0 à 12 et l'addition et la multiplication modulo 13. Montrez que $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}\right)$ est une base de $(\mathbb{K}^3, +.)$. Donnez la matrice de passage de la base canonique à cette base. Décomposez la base canonique suivant cette base.

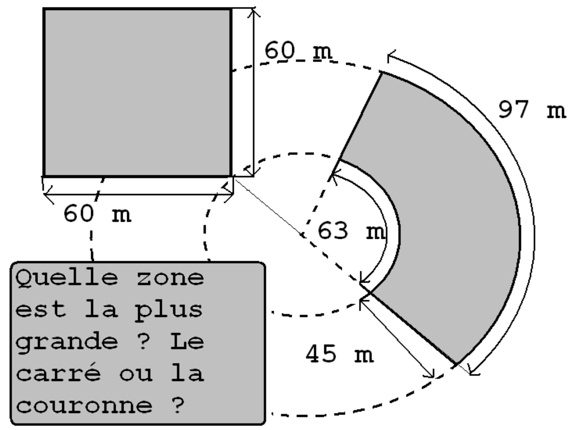
◦40◦ ♡ Donnez une base et la dimension de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ ensemble des matrices carrées de taille 2 sur 2. On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrez que $(A,\ A^2,\ A^3)$ est liée. Montrez que $(I_2,\ B,\ B^2)$ est liée. La famille $(I_2,\ A,\ B,\ B^2)$ est-elle une base de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Si oui, décomposez B^3 sur cette base, si non, $(I_2,\ A,\ B,\ A.B)$ est elle une base de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$?

◦41◦ ♡ Écrivez un script Python qui crée la matrice "en damier" de taille n Δ_n ainsi que son négatif ∇_n.

3. liée : l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres

$\Delta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\nabla_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La lettre Δ c'est delta *(majuscule)* et ∇ c'est nabla.
Calculez leurs déterminants en fonction de n.
Calculez $(\Delta_n)^p$. Calculez $\Delta_n.\nabla_n$ et $\nabla_n.\Delta_n$.
Calculez $(\nabla_n)^p$.

∘42∘ ♡ Ajustez a, b et c pour que $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$ ait pour spectre $\{0,\ 1,\ 4\}$. Prouvez sans effort qu'elle est alors diagonalisable.



La matrice B a pour valeurs propres 1, 3 et -2. Donnez son polynôme caractéristique : $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -24 & & 15 \\ & -4 & 3 \end{pmatrix}$.
Trouvez un vecteur propre de valeur propre 1.

∘43∘ Calculez $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

∘44∘ ♡ Donnez une base de l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $2.x + y - z = 0$, noté E.

Donnez une base de l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $2.x + 3.y + z = 0$, noté F.

Donnez une base de $E \cap F$.
Donnez une base et la dimension de l'ensemble des matrices M de taille 3 sur 3 vérifiant $\forall X \in \mathbb{R}^3,\ M.X \in E \cap F$.
Donnez une base et la dimension de l'ensemble des matrices M de taille 3 sur 3 vérifiant $\forall X \in E \cap F,\ M.X = 0_3$.

∘45∘ Montrez que $A = \begin{pmatrix} -6 & -10 & 17 \\ 5 & 9 & -13 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -7 & -12 & 20 \\ 4 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont le même polynôme caractéristique.
Calculez A^2 et B^2. A et B sont elles semblables ?

∘46∘ ♡ Donnez la dimension de l'espace des matrices réelles carrées de taille 4 vérifiant ${}^tM = 5.M$.
Donnez la dimension du $\mathbb{C}-$espace vectoriel des matrices carrées de taille 4 vérifiant ${}^tM = i.M$.
Rappel : si la matrice A a pour terme général a_i^k, alors la matrice ${}^tA$ a pour terme général a_k^i. Pensez à regarder ${}^t({}^tA)$.

∘47∘ Existe-t-il une matrice de $M_5(\mathbb{R})$ dont le carré est $-I_5$?

∘48∘ Montrez que toute matrice réelle symétrique $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ admet deux valeurs propres distinctes ou est de la forme $a.I_2$.

Montrez qu'une matrice complexe symétrique $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ peut admettre la valeur propre 0 (valeur propre double) sans pour autant être la matrice nulle.

∘49∘ Montrez que toutes les puissances d'une matrice symétrique sont symétriques. Qu'en est il des matrices antisymétriques ?
Montrez que le produit de deux matrices symétriques n'est pas forcément une matrice symétrique. Même question avec antisymétrique.

∘50∘ ♡ Soit f linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(\overrightarrow{u}) = 3.\overrightarrow{u}$ pour tout $\overrightarrow{u}$ du plan de vecteur normal $2.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ et $f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$. Calculez l'image de $x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k}$.

∘51∘ Combien existe-t-il d'endomorphismes de $(E, +, .)$ de noyau $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, d'image $Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix})$ et de trace 5.

Attention, on travaille avec $E = \mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}$ égal à l'ensemble des entiers de 0 à 10 pour l'addition et la multiplication (et la division) modulo 11.

Combien existe-t-il d'endomorphismes de $(E, +, .)$ d'image $Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix})$ et de trace 5.

∘52∘ On pose $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$, $D = Vect(\overrightarrow{i} + \alpha.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k})$. Résolvez $D \oplus P = \mathbb{R}^3$ d'inconnue réelle α.

∘53∘ A et B sont deux sous espaces vectoriels de $(E, +, .)$ (espace de dimension finie) vérifiant $A + B = E$.

Montrez qu'il existe $\begin{array}{llll} C & \text{sous espace vectoriel de } A & \text{vérifiant} & C \oplus B = E \\ D & \text{sous espace vectoriel de } D & \text{vérifiant} & A \oplus D = E \end{array}$.

Que pouvez vous dire si $C + D = E$?

∘54∘ ♣ Il y a trente nombres anagrammes de 123 456 789 qui sont des carrés parfaits, comme $361\,874\,529 = (19\,023)^2$. Dressez en la liste avec l'aide du `Python` suprême.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A	□	□	□	□	□	□	□	□	□
B	□	□	□	□	□	□	□	□	□
C	□	□	□	□	□	□	□	□	□
D	□	■	□	□	■	■	■	□	□
E	□	□	□	□	□	□	□	□	□
F	□	□	□	□	□	□	□	□	□
G	□	□	□	□	□	□	□	□	□
H	□	□	□	□	□	□	□	□	□
I	□	□	□	□	□	□	□	□	□

`A`, `B`, `a`, `c`, `d`, `h` et `i` sont justement des carrés anagrammes de 412 739 856 (les racines carrées de deux d'entre eux sont en `b2` et `e2`). `F` est aussi un anagramme de 123456789 mais n'est pas un carré parfait. Les premiers de `b`, `e`, `f` et `g` sont des palindromes (comme 161). La somme des chiffres de `G` vaut 36. Le produit des chiffres de `D1` vaut 27, et la somme des chiffres de `D2` vaut 63.
Et si vous avez de bonnes lunettes à défaut d'un serpent :

(11826, 139854276) (12363, 152843769) (12543, 157326849) (14676, 215384976) (15681, 245893761) (15963, 254817369) (18072, 326597184) (19023, 361874529) (19377, 375468129) (19569, 382945761) (19629, 385297641) (20316, 412739856) (22887, 523814769) (23019, 529874361) (23178, 537219684) (23439, 549386721) (24237, 587432169) (24276, 589324176) (24441, 597362481) (24807, 615387249) (25059, 627953481) (25572, 653927184) (25941, 672935481) (26409, 697435281) (26733, 714653289) (27129, 735982641) (27273, 743816529) (29034, 842973156) (29106, 847159236) (30384, 923187456)