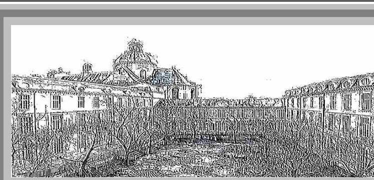
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 17 juin
M.P.S.I.2



2023 2024

TD32

∘0∘

♡ Montrez que selon que vous regardez $(\mathbb{C}^3,+,.)$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, la famille
$\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+4.i \\ 2-3.i \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre ou liée.

Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $(\mathbb{C}'',+,.)$ de dimension 3 (base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$), cette famille est liée, car de cardinal 4.
Si on y tient :

$$(15-13.i).\begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 1-i \end{pmatrix} + (-26+6.i).\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} + (12+11.i).\begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} 1+4.i \\ 2-3.i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $(\mathbb{C}^3,+,.)$ (base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}\right)$), la famille peut être libre (on n'en sait rien à l'avance), mais ne sera pas une base.
On se donne quatre réels a, b, c et d et on suppose que

$$a.\begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 1-i \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 1+4.i \\ 2-3.i \\ 0 \end{pmatrix}$$

est nul. On identifie par composante :

$$\begin{array}{ccccrc} a.(1+i) & +b & & +d.(1+4.i) & = & 0 \\ a.i & +b.(1+i) & +c.(1-i) & +d.(2-3.i) & = & 0 \\ a.(1-i) & +b & +2.c & & = & 0 \end{array}$$

On identifie sachant que les coefficients sont réels :
$$\begin{array}{ccccccccccccc} a & +b & & +d & = & 0 & & a.i & & & +4.d..i & = & 0 \\ & b & +c & +2.d & = & 0 & \text{puis} & a.i & +b.i & -c.i & +3.d.i & = & 0 \\ a & +b & +2.c & & = & 0 & & -a.i & & & & = & 0 \end{array}$$
On trouve $a=b=c=d=0$. C'est la liberté.

∘1∘

♡ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrez que $M \longmapsto A.M.B$ est un endomorphisme de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$. Montrez que c'est un automorphisme de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$.
Calculez l'image de chacun des quatre vecteurs de la base canonique : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Donnez la matrice de cet endomorphisme sur cette base canonique.
Calculez son déterminant. Inversez la sans trop d'effort.

Existence : OK par formats compatibles.
Endo : formats là encore.
Morphisme : $A.(\alpha.M+\beta.N).B = \ldots$
Auto : $A.M.B = 0_{2,2} \Leftrightarrow M = 0_{2,2}$ en multipliant à droite comme à gauche par A^{-1} et B^{-1}.
l'endomorphisme en injectif
on est en dimension finie, il est bijectif.
On pouvait aussi créer sa réciproque à droite et à gauche $M \longmapsto A^{-1}.M.B^{-1}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ 2 & . & . & . \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\longmapsto \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & . & . \\ 1 & 3 & . & . \\ 0 & -2 & . & . \\ 2 & 6 & . & . \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & . \\ 1 & 3 & 3 & . \\ 0 & -2 & 0 & . \\ 2 & 6 & 5 & . \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\longmapsto \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 0 & -5 \\ 2 & 6 & 5 & 15 \end{pmatrix}$

La matrice sur la base canonique de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ est donc $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 0 & -5 \\ 2 & 6 & 5 & 15 \end{pmatrix}$ qu'on lit par blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 & . & 0 & -3 \\ 1 & 3 & . & 3 & 9 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & -2 & . & 0 & -5 \\ 2 & 6 & . & 5 & 15 \end{pmatrix}$.

On reconnaît quatre multiples de ${}^tB$: $\begin{pmatrix} {}^tB & 3.{}^tB \\ 2.{}^tB & 5.{}^tB \end{pmatrix}$. Et les coefficients sont ceux de A.

Et son inverse ?
Esprit P.C. : pivot de Gauss.

Esprit MP et PSI : l'endomorphisme inverse est $M \longmapsto \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.M.\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, où l'on a remplacé A par A^{-1} et B par B^{-1}.

La matrice sera donc $\begin{pmatrix} -5.{}^tB^{-1} & 3.{}^tB^{-1} \\ 2.{}^tB^{-1} & -{}^tB^{-1} \end{pmatrix}$: $\boxed{\begin{pmatrix} -15 & -5 & . & 9 & 3 \\ 5 & 0 & . & -3 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 6 & 2 & . & -3 & -1 \\ -2 & 0 & . & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

Et si vous avez un doute : guess and check...

◦2◦ Inversez `[[1, 2, 1, 0], [1, 3, 3,-1], [1, 1, 0, 2], [1, 3, 5, 2]]` par méthode du pivot de Gauss.

Calcul du déterminant si on veut juste ça :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} L1 & L1 & L1 \\ L2 = L2 - L1 & L2 & L2 \\ L3 = L3 - L1 & L3 = L3 + L2 & L3 \\ L4 = L4 - L1 & L4 = L4 - L2 & L4 = L4 - 2.L3 \end{array}$$

Le déterminant vaut 1, la matrice est inversible.
Mais si on met un second membre ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ c-a \\ d-a \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccll} & & L1 & \\ L2 & = & L2 & -L1 \\ L3 & = & L3 & -L1 \\ L4 & = & L4 & -L1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ b+c-2.a \\ b+d-2.a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ b+c-2.a \\ 4.a-3.b-2.c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccll} & & L1 & \\ & & L2 & \\ L3 & = & L3 & +L2 \\ L4 & = & L4 & -L2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccll} & & L1 & \\ & & L2 & \\ & & L3 & \\ L4 & = & L4 & -2.L3 \end{array}$$

Connaissant $t = 4.a - 3.b - 2.c + d$, on peut remonter dans les lignes au dessus et trouver $c = -6.a + 4.c + 3.c - d$ puis $b = 15.a - 10.b - 8.c + 3.d$ et ainsi de suite.

On interprète : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & 16 & 13 & -5 \\ 15 & -10 & -8 & 3 \\ -6 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

Et la matrice qui exprime les inconnues à l'aide des paramètres est justement A^{-1}.

Mais on peut aussi coder le membre de droite sous forme matricielle :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccll} & & L1 & \\ L2 & = & L2 & -L1 \\ L3 & = & L3 & -L1 \\ L4 & = & L4 & -L1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccll} & & L1 & \\ & & L2 & \\ L3 & = & L3 & +L2 \\ L4 & = & L4 & -L2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccll} & & L1 & \\ & & L2 & \\ & & L3 & \\ L4 & = & L4 & -2.L3 \end{array}$$

Et pourquoi s'arrêter là ? On remonte :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -7 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 15 & -10 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccll} L1 & = & L1 & \\ L2 & = & L2 & +L4 \\ L3 & = & L3 & -L4 \\ & & L4 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccll} L1 & = & L1 & -L3 \\ L2 & = & L2 & -2.L3 \\ & & L3 & \\ & & L4 & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -23 & 16 & 13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 15 & -10 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccll} L1 & = & L1 & -2.L2 \\ & & L2 & \\ & & L3 & \\ & & L4 & \end{array}$$

on a reconstruit M^{-1}

Et c'est ainsi que Gauss est grand, même si ce n'est pas de lui l'idée.

Je vous le refais ?

On crée le domino et on combine

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 + L_2 \\ L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 - 2.L_3 \end{array}$$

$$\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + L_4 \\ L_3 - L_4 \\ \end{array}$$

$$\uparrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 7 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 15 & -10 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - L_3 \\ L_2 - 2.L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\uparrow$$

La matrice de droite est l'inverse cherché.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -23 & 16 & 13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 15 & -10 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

∘3∘ On donne $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}$. Peut on choisir a et b pour avoir $Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = Vect(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{d})$?

∘4∘

Montrez que $f \longmapsto f'' + f'$ est un endomorphisme de $Vect(ch, sh, ch^2, sh^2, ch.sh)$. Donnez la dimension de son noyau et de son image.

Dans « endomorphisme », il y a « endomorph » et « isme ».
Mais surtout il y a « endo » et « morphisme ».
Morphisme, c'est « linéaire ».
En notant T notre transformation, il faut vérifier $T(\alpha.f + \beta.g) = \alpha.T - f) + \beta.T(g)$ pour tout quadruplet de fonctions et réels.
On a bien $(\alpha.f + \beta.g)'' + (\alpha.f + \beta.g)' = \alpha.(f'' + f') + \beta.(g'' + g')$.

Difficulté ?

La seule difficulté ici, si il y en a une,
c'est de bien voir que ce qu'on appelle vecteurs, ce sont les fonctions.
Et la linéarité, c'est pour $\alpha.f + \beta.g$, combinaison de vecteurs.
Et pas $f(\alpha.x + \beta.y)$, qui n'aurait aucun rapport et serait d'ailleurs faux.
Argument direct : la dérivation est linéaire.
Et j'ai bien dit « dérivation » et pas « dérivée ».

« Endo », c'est d'un espace vectoriel dans lui même.
Si f est une combinaison de $(ch, sh, ch^2, sh^2, ch.sh)$, son image $f'' + f'$ est elle aussi combinaison de $(ch, sh, ch^2, sh^2, ch.sh)$.

Le réflexe est de poser $f = a.ch + b.sh + c.ch^2 + d.sh^2 + e.ch.sh$ et de dériver deux fois, regrouper et mettre sous la forme

$$\begin{array}{lccccc} a.(& ch & +sh) & & & \\ +b.(& sh & +ch) & & & \\ +c.(& 2.ch^2 & +2.sh^2 & +2.sh.ch & &) \\ +d.(& 2.ch^2 & +2.sh^2 & +2.sh.ch) & & \\ +e.(& 4.ch.sh & & & ch^2 & +sh^2) \end{array}$$

Mais c'est un réflexe qui manque de recul. Soyons matheux.
Si on prouve la propriété pour chacun des cinq vecteurs de la base, on aura le résultat général par linéarité. Et on aura moins de constantes inutiles comme a, b, c, d et e à trainer.
Et ordonnons un peu :

ch	a pour image	ch	$+sh$			
sh	a pour image	ch	$+sh$			
ch^2	a pour image			$2.ch^2$	$+2.sh^2$	$+2.ch.sh$
sh^2	a pour image			$2.ch^2$	$+2.sh^2$	$+2.ch.sh$
$ch.sh$	a pour image			ch^2	$+sh^2$	$+4.ch.sh$

On peut d'ailleurs créer une matrice qui liste colonne par colonne l'image de chaque vecteur de base sur la base :

ch a pour image $ch+sh$ donc $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$	sh a pour image $ch+sh$ donc $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$
ch^2 a pour image … donc $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\\2\end{pmatrix}$	sh^2 a pour image … donc $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\\2\end{pmatrix}$
$ch.sh$ a pour image … donc $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&2&2&1\\0&0&2&2&1\\0&0&2&2&4\end{pmatrix}$

On vérifie $\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&2&2&1\\0&0&2&2&1\\0&0&2&2&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\a+b\\2.c+2.d+e\\2.c+2.d+e\\2.c+2.d+4.e\end{pmatrix}$ Vous voyez le rapport avec l'approche « image d'une combinaison » ?
Sinon, c'est vrai qu'une application linéaire en dimension finie est toujours associée à une matrice.
Et comme on a un endomorphisme, la matrice est carrée.

Qui est l'ensemble image ? C'est toutes les images.
Certes, elles sont dans $Vect(ch,\ sh,\ ch^2,\ sh^2,\ ch.sh)$.
Mais elles ont une forme particulière.
On aura beau faire, les images ont toujours les deux mêmes premières composantes (avec nos notations : $a+b$).
On n'a donc pas $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ mais on a juste $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.
de même, les deux composantes suivantes sont aussi égales.
On a des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\beta\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$.
L'ensemble image est de dimension 3.

D'ailleurs, en toute rigueur, on part de la base canonique $(ch,\ sh,\ ch^2,\ sh^2,\ ch.sh)$.
L'image de cette base est une famille génératrice de l'ensemble image.
On a donc

$$Im(T)=Vect(T(ch),\ T(sh),\ T(ch^2),\ T(sh^2),\ T(ch.sh))$$

On remplace :

$$Im(T)=Vect(ch+sh,\ ch+sh,\ 2.ch^2+2.sh^2+2.ch.sh,\ 2.ch^2+2.sh^2+2.ch.sh,\ ch^2+sh^2+2.ch.sh)$$

On élimine les vecteurs inutiles :

$$Im(T)=Vect(ch+sh,\ 2.ch^2+2.sh^2+2.ch.sh,\ ch^2+sh^2+2.ch.sh)$$

On combine un peu mieux pour la lisibilité :

$$Im(T)=Vect(ch+sh,\ ch^2+sh^2,\ 2.ch.sh)$$

Ou si on préfère :
$$Im(T) = Vect((t \longmapsto e^t),\ (t \longmapsto ch(2.t)),\ t \longmapsto sh(2.t))$$

On a perdu deux dimensions dans l'image.
On va trouver un noyau de dimension 2.
Partant de $T(ch) = T(sh)$, on a aisément $T(ch - sh) = 0$ (linéarité).
On identifie : $ch - sh \in Ker(T)$.

De même $T(ch^2) = T(sh^2)$, donc $T(ch^2) - T - (sh^2) = 0$ puis $T(ch^2 - sh^2) = 0$.
$ch^2 - sh^2$ est dans le noyau. Normal, c'est $t \longmapsto -1$. Et cette application disparait par dérivation.

On a donc $Ker(T) = Vect(ch - sh,\ ch^2 - sh^2)$.
Et il n'est pas utile d'en chercher plus, sauf à vouloir contredire « $\dim(Ker(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(depart)$ ».

∘5∘

♡ Combien y a-t-il d'endomorphismes f de $(\mathbb{R}^2, +, .)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j})$ et vérifiant $f(\overrightarrow{i} - 3.\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i}$?

Le noyau nous dit $f(\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j}) = 0$ *(pour ses multiples aussi, mais ceci n'est pas une information plus intelligente)*.
L'autre information nous donne $f(\overrightarrow{i} - 3.\overrightarrow{j})$.
On connaît l'image d'une base !
On connait donc par linéarité l'image de tout vecteur.

En effet, $x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j}$ se décompose d'une façon unique en
$$\frac{3.x + y}{5}.(\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j}) + \frac{.x - y}{5}.(\overrightarrow{i} - 3.\overrightarrow{j})$$
(résolution directe d'un système).
Son image par f est donc $\frac{3.x + y}{5}.\overrightarrow{0} + \frac{.x - y}{5}.\overrightarrow{i}$.
Il n'y a donc qu'une application f linéaire vérifiant ces conditions.

∘6∘

Racines carrées de la dérivation *(oral de concours)*. On note $(E, +, .)$ l'espace vectoriel des polynômes et D l'endomorphisme de dérivation. On cherche à savoir si il existe un endomorphisme T de E vérifiant $T \circ T = D$ *(racine carrée de la dérivation)*. On suppose qu'un tel endomorphisme T existe. Montrez alors $\{0\} \subset Ker(T) \subset \mathbb{R}_0[X]$.
Déduisez que la dimension de $Ker(T)$ vaut 0 ou 1.
Montrez que si $Ker(T)$ est de dimension 0, alors $Ker(T^2)$ l'est aussi. Concluez.
Montrez que si $Ker(T)$ est de dimension 1, alors $Ker(T^3)$ et $Ker(T^4)$ sont aussi de dimension 1. Concluez.

On a sû définir la dérivation d'ordre $\frac{1}{2}$ sur les fonctions dans le cours d'analyse. Celle qui, quand on l'applique deux fois, donne la dérivation classique.
On a tout fait pour qu'elle soit linéaire. Mais elle a un défaut : elle transforme les polynômes en choses avec des exposants non entiers et des $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ qui traînent...
Mais ne peut on rêver de créer une application linéaire qui fasse « la moitié du chemin de la dérivation » ? On veut $T \circ T = (P \longmapsto P')$.
On va montrer par argument de dimensions que c'est impossible.
En gros, la dérivation d'ordre 1 a une noyau de dimension 1 (les constantes), quelle devrait être la dimension du noyau de la dérivation d'ordre $\frac{1}{2}$.
Pour la cohérence aussi, le noyau de $P \longmapsto P''$ est de dimension 2 formé des fonctions affines.

C'est parti. Le cours nous assure que le vecteur nul (ici le polynôme nul) est dans le noyau de T du moment que T est bien un morphisme.
En effet, $T(0) = 0$ par théorème dit de Paris 6.

Ensuite, si P est dans $Ker(T)$, alors on a $T(P) = 0$ et donc $T(T(P)) = T(0) = 0$ (en fait, je devrais écrire 0 avec une flèche au dessus pour bien dire « polynôme nul »).
On reconnaît que P est dans $Ker(T \circ T)$.
Mais comme $T \circ T$ est la dérivation, ceci signifie $P' = 0$. P est donc un polynôme constant.
On a prouvé $P \in Ker(T) \Rightarrow P \in \mathbb{R}_0[X]$.

L'inclusion des espaces se traduit sur les dimensions : $0 = \dim(\{0\}) \leqslant \dim(Ker(T)) \leqslant \dim(\mathbb{R}_0[x]) = 1$.

Montrez que si $Ker(T)$ est de dimension 0, alors $Ker(T^2)$ l'est aussi. Concluez.

On suppose donc $\dim(Ker(T)) = 0$, c'est à dire $Ker(T) = \{0\}$.
On s'interroge sur $Ker(T^2)$ sans retourner dire que c'est $Ker(P \longmapsto P')$.
Soit P dans $Ker(T^2)$. On traduit : $T(T(P)) = 0$. On reconnaît $T(P) \in Ker(T)$.
Comme on a supposé $Ker(T) = \{0\}$, ceci donne $T(P) = 0$.
Et en re-commençant : $P = 0$.

En fait, on a aussi directement $(Ker(T) = \{0\}) \Rightarrow (T \textit{ injective}) \Rightarrow (T^2 \textit{ injective}) \Rightarrow (Ker(T^2 = \{0\})$.

Mais on avait $Ker(T^2) = \mathbb{R}_1[X]$ d'où contradiction.

$Ker(T)$ ne peut pas être de dimension 0.

Il est donc de dimension 1 *? Beh non..*

Montrez que si $Ker(T)$ est de dimension 1, alors $Ker(T^3)$ et $Ker(T^4)$ sont aussi de dimension 1. Concluez.

Si l'on suppose $\dim(Ker(T)) = 1$, alors on a $Ker(T) = \mathbb{R}_0[X] = Ker(T^2)$.[1]

Regardons alors $Ker(T^3)$.
On prend P dans $Ker(T^3)$. On traduit $T^3(P) = 0$ et donc $T^2(T(P)) = 0$.
$T(P)$ est dans $Ker(T^2)$. Mais notre hypothèse sur les dimensions dit $Ker(T^2) = Ker(T)$.
Ayant $T(P) \in Ker(T)$, on a donc $T(T(P)) = 0$ soit $P \in Ker(T^2)$.
On vient de prouver $Ker(T^3) \subset Ker(T^2)$. Et on a toujours $Ker(T^2) \subset Ker(T^2)$.
On vient d'arriver à

$$Ker(T^3) = Ker(T^2) = Ker(T)$$

On poursuit avec un résultat déjà acquis $Ker(T^3) \subset Ker(T^4)$ (facile : $(T^3(P) = 0) \Rightarrow (T(T^3(P)) = 0)$).
On prend P dans $Ker(T^4)$. On traduit : $T^4(P) = 0$ et même $T^2(T^2(P)) = 0$.
On reconnaît $T^2(P) \in Ker(T^2)$.
Mais comme $Ker(T^2)$ est égal à $Ker(T)$, on a donc $T^2(P) \in Ker(T)$.
Ceci se traduit par $T(T^2(P)) = 0$ et P est dans $Ker(T^3)$.

On a donc $Ker(T) = Ker(T^2) = Ker(T^3) = Ker(T^4)$ en ayant juste utilisé $Ker(T) = Ker(T^2)$.

Mais T^4 n'est autre que $P \longmapsto P''$ et il a pour noyau $\mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2.
On a une contradiction.

Bref, $Ker(T)$ ne peut être que de dimension 0 ou 1, et chacun des deux cas conduit à une contradiction. On ne peut trouver T vérifiant $T^2 = (P \longmapsto P')$.

Plusieurs parties de cet exercice correspondant au grand classique des noyaux itérés :

$Ker(Id) \subset Ker(f) \subset (Ker(f^2) \subset (Ker(f^3) \ldots \subset Ker(f^n) \subset Ker(f^{n+1}) \subset$
et si à un moment le noyau n'a pas augmenté, il n'augmentera plus.

∘7∘

Sur les trois angles de $(A,\ B,\ C)$, le plus grand angle est le triple du plus petit, et le dernier angle est le double du petit. Que pouvez vous déduire ?

1. inclusion et égalité des dimensions

On nomme α, β et γ les trois angles, supposés triés par ordre croissant (symétrie des rôles).

On a alors le système $\begin{array}{ccccc} \gamma & = 3.\alpha & - & & \\ \beta & = 2.\gamma & & & \\ \alpha & +\beta & +\gamma & = \pi & \end{array}$. On trouve le triplet $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$. Un triangle bien connu, celui de votre équerre..

◦8◦

$X^3+X^2-3.X+1$	$X^2-3.X+2$	$2.X^3+3.X^2+X-6$	$4.X^3-5.X^2+1$

Montrez que ces polynômes sont tous nuls en 1. Montrez (astucieusement ?) que la famille est liée.

La première question n'est que calcul.

Pour la seconde, on n'est plus dans $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$ de dimension 4.
On est dans un sous-espace strict, celui des polynômes nuls en 0.
Il est donc au mieux de dimension 3.
Et dans cet espace, on a quatre vecteurs. Inutile de chercher d'avantage.

◦9◦

Le but de ce petit (?) problème : étudier les matrices réelles symétriques. On va montrer le théorème spectral : elles se diagonalisent en base orthonormée. On montrera donc que leurs valeurs propres sont réelles, et qu'on peut construire une base faite de vecteurs propres deux à deux orthogonaux et normés pour le produit scalaire usuel sur $(\mathbb{R}^n, +, .)$. On commencera par une étude rapide en dimension 2, puis un exemple en dimension 3. Ensuite, on montre le théorème spectral par récurrence sur la taille des familles faites de vecteurs propres deux à deux orthogonaux. Le théorème spectral fera partie de votre cours l'an prochain.

I∼0) Montrez que les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique de taille 2 sont réelles.
I∼1) Pouvez vous construire une matrice réelle symétrique de taille 2 de spectre $\{1,\ 3\}$ dont au moins un coefficient vaut 5.
I∼2) Pouvez vous construire une matrice réelle symétrique de taille 2 de spectre $\{1,\ 3\}$ dont au moins un coefficient vaut 2.
I∼3) Montrez que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique mais non diagonalisable.

II∼0) *On définit :* $M = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Donnez son spectre *(indice : il est dans $\mathbb{Z}$).*
II∼1) Trouvez un vecteur propre de norme 1 pour chaque valeur propre. Montrez qu'ils forment alors une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
II∼2) Déduisez l'existence d'une matrice P et d'une matrice D vérifiant $M = P.D.P^{-1} = P.D.{}^tP$.

III∼0) On pose $U = P.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculez ${}^tU.M.U$.
III∼1) Trouvez un vecteur normé de $\mathbb{R}^3$ vérifiant ${}^tU_0.M.U_0 = 0$.
III∼2) Trouvez un vecteur normé V_0 vérifiant ${}^tV_0.M.V_0 = 0$ et ${}^tV_0.U_0 = 0$.(calcul atroce)
III∼3) Montrez que $(U_0,\ V_0,\ U_0 \wedge V_0)$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ et montrez que la matrice de f sur cette base a non seulement une trace nulle, mais même une diagonale nulle.(aucun calcul)

IV∼0) $(E, +, ., \phi)$ *est un espace pré-hilbertien*[2]*, dans lequel on a pris deux vecteurs unitaires et orthogonaux* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$*. On définit* $f = \overrightarrow{u} \longmapsto \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a}$. Montrez que f est un endomorphisme de E. Donnez son noyau.
IV∼1) Donnez son spectre et ses sous-espaces propres.
IV∼2) Montrez : $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ \phi(f(\overrightarrow{u}),\ \overrightarrow{v}) = \phi(f(\overrightarrow{v}),\ \overrightarrow{u})$.

---

2. *espace vectoriel avec un produit scalaire*

V$\sim$0) $(\mathbb{R}^n, +, .)$ *est l'espace euclidien muni de son produit scalaire usuel* ϕ*, et* f *est un endomorphisme de* $(\mathbb{R}^n, +, .)$ *de matrice* S *sur la base canonique vérifiant* $\forall(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \in E^2$, $\phi(\overrightarrow{a}, f(\overrightarrow{b})) = \phi(\overrightarrow{b}, f(\overrightarrow{a}))$. Déduisez : ${}^tS = S$.
On pose note D_f *l'ensemble des familles* ϕ*-orthonormées formées de vecteurs propres de* f*.*
V$\sim$1) Montrez que $\det(S - \lambda.I_n)$ est un polynôme admettant au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Déduisez qu'il existe U et V dans $\mathbb{R}^n$ et μ dans C vérifiant $S.(U + i.V) = \mu.(U + i.V)$. En montrant ${}^t(U - i.V).S.(U + i.V) =^t U.S.U +^t V.S.V = \mu.({}^tU.U +^t V.V)$, montrez que μ est réel, et que U ou V est vecteur propre de S.
V$\sim$2) Déduisez qu'il y a dans D_f des familles de cardinal 1.

VI$\sim$0) *On suppose qu'une famille* $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k})$ *est une famille de* D_f*, avec* $k < n$*. On pose alors* $P = Vect(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k})$ (donnez sa dimension) *et* $Q = \{\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \overrightarrow{u} \in P, \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}) = 0\}$. Montrez que Q est un espace vectoriel non réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$. Montrez : $\forall \overrightarrow{u} \in P$, $f(\overrightarrow{u}) \in P$. Montrez : $\forall \overrightarrow{a} \in Q$, $f(\overrightarrow{a}) \in Q$.
VI$\sim$1) Montrez qu'il existe dans Q au moins un vecteur propre de f de norme 1, noté $\overrightarrow{c}$.
VI$\sim$2) Montrez que $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{c})$ est dans D_f.
VI$\sim$3) Déduisez qu'il existe dans D_f une famille de cardinal n.

Matrices symétriques de taille 2. TD32

On prend une matrice réelle symétrique de taille 2 : $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ *(les trois nombres a, b et c sont réels)*.
On écrit son polynôme caractéristique : $X^2 - (a + c).X + (a.c - b^2)$. On en calcule le discriminant : $(a + c)^2 - 4.(a.c - b^2) = (a - c)^2 + 4.b^2$. C'est une somme de carrés de réels, c'est donc un réel positif. On a deux valeurs propres réelles $\dfrac{a + c + \sqrt{(a - c)^2 + 4.b^2}}{2}$ et $\dfrac{a + c + \sqrt{(a - c)^2 + 4.b^2}}{2}$. Mais ce que je préfère encadrer c'est $\boxed{(a - c)^2 + 4.b^2}$ qui est l'argument, et parce que le développement/factorisation $(a + c)^2 - 4.a.c = (a - c)^2$ est à maitriser.

On en veut une de spectre $\{1, 3\}$. On pourrait prendre $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Mais il faut qu'au moins un coefficient vaille 5.
C'est quand même jouable si on impose une trace égale à 4 et un déterminant égal à 3 *(relations racines coefficients)*.
• On peut partir de $\begin{pmatrix} 5 & . \\ . & * \end{pmatrix}$ et compléter peu à peu $\begin{pmatrix} 5 & . \\ . & -1 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 5 & . \\ . & -1 \end{pmatrix}$ ah non il faut $-5 - a^2 = 3$!
• C'est pareil si on part de $\begin{pmatrix} * & . \\ . & 5 \end{pmatrix}$.
• On recommence $\begin{pmatrix} * & 5 \\ . & * \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} * & 5 \\ 5 & * \end{pmatrix}$ par symétrie ; il faut deux nombres a et b vérifiant $a + b = 4$ et $a.b - 25 = 3$, encore raté.
Bref, c'est impossible.

En revanche avec un coefficient égal à 2 : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ convient.

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique, c'est évident. Mais comme elle n'est pas réelle, le théorème spectral ne peut s'appliquer. On va montrer qu'elle n'est pas diagonalisable.

Trace	Déterminant	Polynôme caractéristique	Spectre
2	1	$X^2 - 2.X + 1$	$\{1, 1\}$

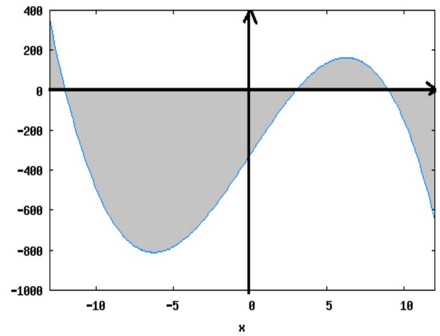
On trouve un vecteur propre de valeur propre 1 : $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Mais on n'en trouve pas d'autres *(à part ses multiples)*.
On peut même dire que la matrice n'est pas diagonalisable par un bref raisonnement par l'absurde. Si elle l'était, la seule matrice D possible serait $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mais alors $P.D.P^{-1}$ serait encore I_2, ce qui n'est pas le cas pour M.

A retenir : une matrice de taille 2 *ayant une valeur propre double n'est diagonalisable que si elle est déjà diagonale.*

La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. TD32

On cherche $\det(M - X.I_3)$. C'est $\begin{vmatrix} -1-X & 8 & -6 \\ 8 & -3-X & 2 \\ -6 & 2 & 4-X \end{vmatrix}$. On développe.

Ou alors on utilise trace *(0)* et déterminant *(−324)*, et somme des mineurs de taille 2 : $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = -117$. Bref, on trouve : $\boxed{-X^3 + 117.X - 324}$



On cherche les racines.
Pas évident. On ne va quand même pas utiliser les formules de Cardan. Si on profitait de l'indication : les racines sont entières.
Leur produit vaut -324. On factorise $-2.2.3.3.3.3$. Et leur somme est nulle.
On teste donc des racines comme $2, 4, 3, 6, 9$.
On trouve déjà 3. On factorise : $(3 - X).(X^2 + 3.X - 108)$. On résout cette fois l'équation de degré 2. On trouve le spectre : $\boxed{\{3,\ 9,\ -12\}}$

On résout alors $M.X = 3.X$: $\begin{array}{rrrl} -x & +8.y & -6.z & = 3.x \\ 8.x & -3.y & +2.z & = 3.y \\ -6.x & +2.y & +4.z & = 3.z \end{array}$.

Le système dégénère $\begin{array}{rrrl} -4.x & +8.y & -6.z & = 0 \\ 8.x & -6.y & +2.z & = 0 \\ -6.x & +2.y & +z & = 0 \end{array}$ qui donne $\begin{array}{rrrll} 2.x & -4.y & +3.z & = 0 & L_1/2 \\ & 10.y & -10.z & = 0 & L_2 + 2.L_1 \\ & 10.y & -10.z & = 0 & L_3 et L_1 \end{array}$.

Il reste deux équations : $Ker(M - 3.I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix})$. On veut un vecteur normé : $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

On fait de même avec les autres valeurs propres

3	9	-12
$\begin{array}{rrrl} -x & +8.y & -6.z & = 3.x \\ 8.x & -3.y & +2.z & = 3.y \\ -6.x & +2.y & +4.z & = 3.z \end{array}$	$\begin{array}{rrrl} -x & +8.y & -6.z & = 9.x \\ 8.x & -3.y & +2.z & = 9.y \\ -6.x & +2.y & +4.z & = 9.z \end{array}$	$\begin{array}{rrrl} -x & +8.y & -6.z & = -12.x \\ 8.x & -3.y & +2.z & = -12.y \\ -6.x & +2.y & +4.z & = -12.z \end{array}$
$Ker(M - 3.I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix})$	$Ker(M - 9.I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$	$Ker(M + 12.I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$
$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

Mais pourquoi persistez vous à rédiger comme un élève de collège avec des calculs à peu près bien présentés chacun l'un après l'autre, avec une obéissance butée et bornée à des consignes datant du collège. C'est gentil de montrer que vous savez calculer. mais ce n'est pas des calculateurs qu'on veut, c'est des ingénieurs. Et un ingénieur montre ce qui est essentiel : les résultats, et il les présente sous forme lisible par un tableau. On grandit, les mômes. L'objectif n'est plus d'avoir le brevet.

On vérifie leur orthogonalité deux à deux : $\begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = 0$ et ainsi de suite.
Ils forment une famille orthonormée, donc une famille libre.
Ils sont trois dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$, ils forment donc une base.

Qui s'est contenté de montrer "orthonormée" en calculant et a oublié "base" ? Bref, qui a eu encore le nez dans le guidon au lieu de se demander ce qu'on attend de vous ?
Mais sincèrement, j'en ai marre que vous ne preniez pas de recul et que vous soyez juste heureux d'avoir fait le bon calcul. J'ai déjà à la maison des enfants d'une dizaine d'année, j'en ai marre d'en avoir aussi au lycée.

On a des vecteurs propres et des valeurs propres. En quantité suffisante. La matrice est diagonalisée.
On vérifie quand même

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

ou aussi

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

On transforme en

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Il faudrait encore prouver que l'inverse de $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ est la transposée de $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. La démarche effectivement lourde est de calculer l'inverse et de montrer qu'il coïncide avec la transposée *(qui est ici la matrice elle même)*.
Intelligemment, pour prouver $P^{-1} = {}^t P$, il suffit de prouver ${}^tP.P = 0$.
Or, le calcul de ${}^tP.P$ consiste à faire tomber les colonnes de P sur les lignes de ${}^tP$ *(qui sont en fait les colonnes de P)*. Bref, les colonnes de P se rencontrent deux à deux. On trouve leurs produits scalaires deux à deux. Des 0 et des 1.

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On retient, en notant $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ trois vecteurs colonne qu'on écrit aussi en ligne :

$${}^tP.P = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\overrightarrow{a}|^2 & \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}.\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} & |\overrightarrow{b}|^2 & \overrightarrow{b}.\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{a}.\overrightarrow{c} & \overrightarrow{b}.\overrightarrow{c} & |\overrightarrow{c}|^2 \end{pmatrix}$$

c'est une matrice de Gram, et si la base est orthonormée, c'est I_3.

L'inverse d'une matrice de base orthonormée est sa transposée.
Et si on l'applique aux matrices de permutations, c'est un cadeau.

Qu'on ait pris ma matrice de passage P ou une autre, $P.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la somme des trois vecteurs propres. Dans mon exemple et dans les autres (l'ordre dans lequel on cite les vecteurs importe peu, ce qui importe, c'est les signes) :

$\begin{pmatrix} 1/3 & +2/3 & +2/3 \\ 2/3 & +1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & +1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/3 & +2/3 & -2/3 \\ 2/3 & +1/3 & +2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$
$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & +2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & +2/3 & +1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$	

Même si vous n'avez pas pris le même vecteur que votre voisin, vous trouvez ${}^tU.M.U = 0$.

Et c'est normal. U est la somme de trois vecteurs propres deux à deux orthogonaux $\overrightarrow{p_3}$, $\overrightarrow{p_9}$ et $\overrightarrow{p_{-12}}$. Le calcul ${}^tU.M.U$ correspond à $(\overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_9} + \overrightarrow{v_{-12}}).f(\overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_9} + \overrightarrow{v_{-12}})$. Comme ce sont des vecteurs propres, on trouve $(\overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_9} + \overrightarrow{v_{-12}}).(3 \times \overrightarrow{v_3} + 9 \times \overrightarrow{v_9} - 12 \times \overrightarrow{v_{-12}})$. Comme ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux, on trouve $3 \times \overrightarrow{v_3}.\overrightarrow{v_3} + 9 \times \overrightarrow{v_9}.\overrightarrow{v_9} - 12 \times \overrightarrow{v_{-12}}.\overrightarrow{v_{-12}}$. Comme ces vecteurs sont normés, il reste $3.1 + 9.1 - 12.1$ *(somme des valeurs propres)*. Bref, la somme est nulle *(et dans le cas général, c'est la trace)*.

La question suivante veut un vecteur normé vérifiant ${}^tU_0.M.U_0 = 0$. Il suffit de prendre U et de le renormer :

$\dfrac{1}{3.\sqrt{3}}.\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	ou $\dfrac{1}{3.\sqrt{3}}.\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$	ou $\dfrac{1}{3.\sqrt{3}}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$	ou même leurs opposés.

On cherche ensuite un vecteur orthogonal au premier vecteur trouvé : $5.x+y+z=0$ (ou $x+5.y-z=0$ ou $x-y+5.z=0$). On veut qu'il vérifie une histoire de "trace" $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$

J'ai fini par trouver le vecteur $\begin{pmatrix} 3.\sqrt{13}-13 \\ 13-15.\sqrt{13} \\ 52 \end{pmatrix}$ si si ! Il ne reste plus qu'à le normer.

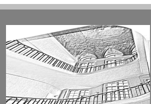
On a deux vecteurs normés U_0et V_0, orthogonaux entre eux. Le vecteur $U_0 \wedge V_0$ est par construction orthogonal à U_0 et à V_0. Sa norme vaut $|U_0| \times |V_0| \times \sin(\widehat{U_0, V_0})$, ce qui fait 1.
On a d'ores et déjà : $(U_0,\ V_0,\ U_0 \wedge V_0)$ est une famille orthonormée. Comme elle a le bon cardinal, c'est une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

Va-t-on calculer explicitement la matrice de passage et l'inverser ?
Non ! On sait quand même une chose : la matrice sur cette base est semblable à la matrice initiale. Sa trace reste nulle.
Ensuite, qui est le terme de position $(1,\ 1)$? C'est la composante de $f(U_0)$ suivant le vecteur U_0.

Mais comme la base $(U_0,\ V_0,\ U_0 \wedge V_0)$ est orthonormée, on récupère la composante par produit scalaire : ${}^tU_0.M.U_0$ vaut 0.

De même, le terme de position $(2, 2)$ est la composante de $f(V_0)$ suivant V_0. On la calcule aussi par produit scalaire : $V_0.M.V_0$. Là aussi, c'est 0.

Pour le dernier, on ne va pas calculer $f(U_0 \wedge V_0); (U_0 \wedge V_0)$, c'est trop lourd.
Mais il suffit de se souvenir que la somme des trois termes diagonaux est la trace. Elle est nulle. Les deux premiers sont nuls. Le dernier l'est donc aussi.



Une application en $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a}$. TD32

L'application $f = \overrightarrow{u} \longmapsto \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a}$ prend un vecteur de E et donne un vecteur de $Vect(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})$, donc de E.
On prouve la linéarité par $\phi(\overrightarrow{a}, \alpha.\overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \alpha.\overrightarrow{u}).\overrightarrow{a} = \alpha.(\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a})$ et un résultat similaire pour les sommes.

On détermine son noyau en résolvant $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ d'inconnue $\overrightarrow{u}$.
Comme $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont indépendants, on trouve la condition nécessaire $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} = 0$ et $\phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}) = 0$ *(sans flèche au dessus)*.
On trouve l'ensemble des vecteurs orthogonaux à la fois à $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$. Pas grand chose de plus à dire.
On a donc $Im(f) = Vect(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})$ et $Ker(f) = \left(Vect(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})\right)^{\perp}$.

On cherche des vecteurs propres $\overrightarrow{u}$ et les valeurs propres allant avec. Si on a des réflexes basiques, on se dit "je détermine la matrice, puis $\det(M - \lambda.I_n)$, puis je résous, puis je cherche des vecteurs propres".
C'est trop dur, on ne sait même pas en quelle dimension on travaille.
Si on revient à la définition : $f(\overrightarrow{u}) = \lambda.\overrightarrow{u}$.
On veut donc $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a} = \lambda.\overrightarrow{u}$.
Quitte à diviser par λ, $\overrightarrow{u}$ est dans $Vect(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})$. Mais on ne sait pas si tous les vecteurs de $Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ conviennent, et ceci ne donne pas la valeur de λ.
On écrit a priori : $\overrightarrow{u} = \alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b}$ et on reporte (on joue par condition nécessaire et suffisante en faisant des aller-retours).

$$f(\overrightarrow{u}) = \phi(\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} + \phi(\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{a}$$

on développe

$$f(\overrightarrow{u}) = \alpha \times \overrightarrow{b} + \beta \times \overrightarrow{a}$$

(orthonormalité)
On veut que ceci soit égal à $\lambda.\overrightarrow{u}$, c'est à dire à $\lambda.\alpha.\overrightarrow{a} + \lambda.\beta.\overrightarrow{b}$.

Par liberté de la famille orthonormée : $\lambda.\alpha = \beta$ et $\lambda.\beta = \alpha$.
On reporte l'une dans l'autre : $\lambda^2.\alpha = \alpha$ et $\lambda.\alpha = \beta$.
On n'a pas le choix : λ^2 vaut -1 (sinon, α est nul, puis β aussi et le vecteur $\overrightarrow{u}$ est nul, ce qui n'est pas accepté).
Pour λ égal à 1, on trouve $\alpha = \beta$ et on a les vecteurs propres : $\alpha.(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$.
Pour λ égal à -1, on trouve $\alpha = -\beta$ et on a les vecteurs propres : $\alpha.(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$.

On résume

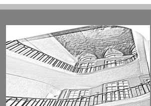
valeur propre	1	-1	1
vecteurs propres	$Vect(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$	$Vect(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$	$Vect(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^\perp$
multiplicité	1	1	$n-2$

Ah oui, il fallait garder aussi la valeur propre 0*. Il y a un moment où on a divisé par* λ*, il fallait donc traiter à part le cas* $\lambda = 0$*. Rappelons que le vecteur* $\overrightarrow{u}$ *ne doit pas être nul dans* $f(\overrightarrow{u}) = \lambda.\overrightarrow{u}$*, alors que* λ *peut l'être. Le noyau est le sous-espace propre de valeur propre* 0*.*

On se donne $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et on calcule

$$\phi(\overrightarrow{v}, f(\overrightarrow{u})) = \phi\Big(\overrightarrow{v}, \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b}\Big) = \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\phi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{b}) + \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\phi(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{b}$$

On fait le même calcul pour $\phi(\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{v}))$ et on trouve la même chose.
L'application f *est symétrique, au sens qui va être exploré dans la suite.*



Symétrie de la matrice S. TD32

On a supposé : $\forall(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, $\phi(\overrightarrow{a}, f(\overrightarrow{b})) = \phi(\overrightarrow{b}, f(\overrightarrow{a}))$.
On traduit : $\forall(A, B) \in \mathbb{R}^3$, ${}^tA.(S.B) = {}^tB.(S.A)$.

La fausse même pas bonne idée : on simplifie par A *ou par* B*.*
Pourquoi c'est n'importe quoi ? parce que ni A *ni* B *n'est une matrice carrée. Comment voulez vous pouvoir multiplier par l'inverse. Là encore, avoir de telles idées, c'est manipuler les formules sans chercher à savoir ce qu'il y a derrière. C'est comme le chimiste qui dirait : tiens, et si je mélange* $C_3H_5(OH)_3$ *avec* HNO_3*, ça peut donner* $C_3H_5(NO_3)_3$ *et* H_2O*, je vais essayer, c'est le même genre de formules que dans le cours sur l'eau.*

On a donc

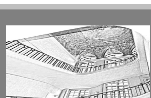
$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s_1^1 & s_1^2 & s_1^3 \\ s_2^1 & s_2^2 & s_2^3 \\ s_3^1 & s_3^2 & s_3^3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s_1^1 & s_1^2 & s_1^3 \\ s_2^1 & s_2^2 & s_2^3 \\ s_3^1 & s_3^2 & s_3^3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Ce n'est pas une manipulation cabalistique. C'est des maths. Et le plus important, c'est le $\forall(A, B)$.
On peut donc prendre des cas particuliers pour A et B, avec l'espoir qu'ils nous mènent à la bonne réponse. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s_1^1 & s_1^2 & s_1^3 \\ s_2^1 & s_2^2 & s_2^3 \\ s_3^1 & s_3^2 & s_3^3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s_1^1 & s_1^2 & s_1^3 \\ s_2^1 & s_2^2 & s_2^3 \\ s_3^1 & s_3^2 & s_3^3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On aboutit à $s_1^2 = s_2^1$. On fait de même avec chaque couple fait de deux vecteurs de la base canonique : $s_i^k = s_k^i$.
La matrice est symétrique.

D'accord, je l'ai rédigé ici pour une matrice de taille 3*. Il faudrait le faire en taille* n*. Avec des points de suspension. Ou dire que le "lemme d'identification" est dans le cours.*



Existence d'un vecteur propre. TD32

La quantité $\det(S - \lambda.I_n)$ est un polynôme en λ.
Qui a oublié cette partie de la question ?
C'est $\sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).\alpha_1^{\sigma(1)}.\alpha_2^{\sigma(2)} \dots \alpha_n^{\sigma(n)}$ où chaque α_i^k est s_i^k *(si i est différent de k)* ou $s_i^i - \lambda$ (si i est égal à k). Chaque $\alpha_i^{\sigma(i)}$ est une fonction de λ de degré 0 ou 1. Chaque produit $Sgn(\sigma).\alpha_1^{\sigma(1)}.\alpha_2^{\sigma(2)} \dots \alpha_n^{\sigma(n)}$ est un polynôme en λ dont le degré n'excèdera pas n. la somme est un polynôme dont le degré ne va pas excéder n.
Pour ceux qui ont besoin de tout voir, en taille 3 :

$$(s_1^1 - \lambda).(s_2^2 - \lambda).(s_3^3 - \lambda) - (s_1^1 - \lambda).s_2^3.s_3^2 - s_1^2.s_2^1.(s_3^3 - \lambda) + s_1^2.s_2^3.s_3^1 + \dots$$

Le polynôme est vraiment de degré n, car seul $\sigma = Id$ apporte une terme de degré n, qui est alors celui de $(s_1^1 - \lambda).(s_2^2 - \lambda) \dots (s_n^n - \lambda)$.

Il ne reste plus qu'à dire que le théorème fondamental de l'algèbre *(de d'Alembert-Gauss)* garantit l'existence d'au moins une racine pour un tel polynôme non constant *(et en fait autant que son degré)*.

On a une valeur propre. $\det(S - \lambda_0.I_n)$ est nul pour cette valeur μ. L'application $X \longmapsto (S - \mu.I_n).X$ *(de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$)* n'est ni injective ni surjective. Il y a au moins un vecteur non nul dans son noyau. Ce vecteur vérifie $(S - \mu.I_n).X_0 = 0_n$ *(vecteur nul de taille n)*.
Mais comme μ était dans $\mathbb{C}$, il a fallu travailler dans $\mathbb{C}^n$. Le vecteur X_0 est donc de la forme $U + i.V$ en séparant composante par composante partie réelle et partie imaginaire.
On a donc

$$S.(U + i.V) = \lambda_0.(U + i.V)$$

On peut séparer en partie réelle et partie imaginaire, mais attention, μ s'écrit $\alpha + i.\beta$ et c'est plus compliqué que ça n'en a l'air.

Pour comprendre qu'il fallait jouer entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$: la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -5 & 0 & -11 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $-X^3 + 3.X^2 - 4.X + 2$, pour spectre $\{1,\ 1 - i,\ 1 + i\}$. Mais si on cherche un vecteur propre de valeur propre $1 + i$, on est obligé d'aller le chercher dans $\mathbb{C}$, et on trouve par exemple $\begin{pmatrix} 2 + i \\ -2 - 3.i \\ -1 \end{pmatrix}$, que l'on peut désosser en $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + i.\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Étudions comme demandé ${}^t(U - i.V).S.(U + i.V)$. On développe par distributivité ou multilinéarité : ${}^tU.S.U + i.{}^tU.S.V - i.{}^tV.S.U + {}^tV.S.V$.
Que dire de ${}^tU.S.V - {}^tV.S.U$? On le lit comme $\phi(\overrightarrow{u},\ f(\overrightarrow{v})) - \phi(\overrightarrow{v},\ f(\overrightarrow{u}))$. Par symétrie de S, c'est nul. On a donc

$${}^t(U - i.V).S.(U + i.V) = {}^tU.S.U + {}^tV.S.V = \phi(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u}) + \phi(\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{v})$$

Mais si on prend d'une autre façon ce calcul, on trouve

$${}^t(U - i.V).S.(U + i.V) = {}^t(U - i.V).\mu.(U + i.V)$$

car on a un vecteur propre de valeur propre μ. On développe encore :

$$\mu.{}^t(U - i.V).(U + i.V) = \mu.({}^tU.U + {}^tV.V + i.{}^tU.V - i.{}^tV.U)$$

Les deux réels ${}^tU.V$ et ${}^tV.U$ sont égaux *(pour certains, c'est $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$, pour d'autres, c'est la transposée d'un réel)*.
On égalise tout :

$${}^t(U - i.V).S.(U + i.V) = {}^tU.S.U + {}^tV.S.V$$

et

$${}^t(U - i.V).S.(U + i.V) = \mu.({}^tU.U + {}^tV.V)$$

Quel intérêt ? Par transitivité : $\boxed{\mu.({}^tU.U + {}^tV.V) = {}^tU.S.U + {}^tV.S.V}$
Mais le membre de droite est réel, puisque U et V sont des vecteurs réels, de même que la matrice S.
C'est donc que le membre de gauche est réel. On simplifie, et μ est réel.
Quand je dis "on simplifie", c'est que on divise par le réel ${}^tU.U + {}^tV.V$. Encore faut il que ce réel soit non nul. C'est le cas, puisque on y reconnaît $|\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2$.
Il se peut que $\overrightarrow{u}$ soit nul, ou $\overrightarrow{v}$. Mais ce qui n'est pas possible c'est que les deux le soient, puisque leur somme est le vecteur propre.

Bilan : les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique sont réelles.

Vous recroiserez ce théorème en Spé.

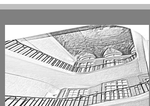
Attention, ne généralisez pas "les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles" ; ce serait faux. Il est important que la matrice soit réelle.

On revient à ce qu'on a prouvé : la matrice S a au moins une valeur propre μ et cette valeur propre est réelle.
On revient alors à $S.(U + i.V) = \mu.(U + i.V)$ *(vecteur propre)*.
On développe $S.U + i.S.V = \mu.U + i.\mu.V$.

Maintenant que la valeur propre est réelle, on peut identifier : $S.U = \mu.U$ et $S.V = \mu.V$.

On pourrait aller trop vite et affirmer : on a même deux vecteurs propres.
Mais attention, il se peut que l'un soit nul *(ou que les deux soient proportionnels)*.
Mais ce qui est impossible, c'est que les deux soient nuls *(leur somme est le vecteur propre pris dans $\mathbb{C}^n$ initialement)*.
On a donc non seulement une valeur propre réelle, mais aussi un vecteur propre réel.

On a montré que f admettait un vecteur propre de matrice U sur la base canonique et une valeur propre associée μ.
Mais on voulait des familles orthonormées de vecteurs propres.
cela dit, pour une famille de cardinal 1, c'est juste "normée".
Il suffit de prendre le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}$. Il est resté vecteur propre de valeur propre μ et il est normé.



Agrandissement de famille de D_f. TD32

On suppose donc que l'on a une famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k})$ dans D_f. Ce sont donc k vecteurs normés, deux à deux orthogonaux, et chacun est vecteur propre de f , de valeur propre μ_i puisqu'il faut bien donner un nom.
L'espace vectoriel engendré P est de dimension k *(famille orthonormée donc libre)*.
On regarde ensuite l'ensemble $Q = \{\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \overrightarrow{u} \in P,\ \phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{u}) = 0\}$.
C'est une partie de $\mathbb{R}^n$.
Le vecteur nul en fait partie, puisqu'il est orthogonal à tout le monde.
Si deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont dans Q, alors $\forall \overrightarrow{u} \in P,\ \phi(\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{u}) = \alpha.\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{u}) + \beta.\phi(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{u}) = 0 + 0 = 0$.
Le vecteur $\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b}$ est dans Q.
On a un espace vectoriel.

Pourquoi n'est il pas réduit au seul vecteur nul ?
Un vecteur $\overrightarrow{a}$ est dans Q si et seulement si il est orthogonal à chaque vecteur $\overrightarrow{e_1}$ de la base *(il faut être orthogonal à chacun car chacun est dans P, mais ensuite, l'orthogonalité à chacun entraine l'orthogonalité à leurs combinaisons)*.
Q est le noyau de $\overrightarrow{a} \longmapsto (\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e_1}), \dots \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e_k}))$
On a une application de E dans $\mathbb{R}^k$. Son ensemble image est inclus dans $\mathbb{R}^k$, il est donc au plus de dimension k.
Par soustraction, le noyau est au moins de dimension $n - k$ *(formule du rang)*.
En fait, Q est exactement de dimension $n - \dim(P)$.

Pour la stabilité, on prend $\overrightarrow{u}$ dans P. Il s'écrit comme combinaison $\alpha_1.\overrightarrow{e_1} + \dots + \alpha_k.\overrightarrow{e_k}$. On calcule son image par f : $f(\overrightarrow{u}) = \alpha_1.f(\overrightarrow{e_1}) + \dots + \alpha_k.f(\overrightarrow{e_k})$ par linéarité. Mais chaque $\overrightarrow{e_i}$ est un vecteur propre de f, son image est donc de la forme $\lambda_i.\overrightarrow{e_i}$ pour une valeur propre λ_i. On a donc $f(\overrightarrow{u}) = \alpha_1.\lambda_1.\overrightarrow{e_1} + \dots + \alpha_k.\lambda_k.\overrightarrow{e_k}$. C'est une combinaison des $\overrightarrow{e_i}$, c'est un vecteur de P.

On prend un vecteur $\overrightarrow{a}$ de Q. Il est orthogonal à tous les vecteurs de P. Qu'en est il de son image $f(\overrightarrow{a})$? On regarde donc si elle est orthogonale à tous les $\overrightarrow{u}$ de P. On calcule donc $\phi(f(\overrightarrow{a}),\ \overrightarrow{u})$ pour n'importe quel $\overrightarrow{u}$ de P. Mais par symétrie, ceci vaut $\phi(\overrightarrow{a},\ f(\overrightarrow{u}))$. D'après ce qu'on vient de montrer, $f(\overrightarrow{u})$ est encore dans P. Par appartenance de $\overrightarrow{a}$ à Q, ce produit scalaire est nul.
On résume : $\forall \overrightarrow{u} \in P,\ \phi(f(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{u}) = \phi(\overrightarrow{a}, f(\overrightarrow{u})) = 0$. On reconnaît : $f(\overrightarrow{a}) \in Q$.

On peut regarder f sur le sous-espace vectoriel Q. On vient de montrer que les images des éléments de Q sont dans Q. L'application f va de Q dans Q. On peut donc considérer f comme un endomorphisme de Q dans Q.
Proprement, on dit que la restriction $f_{|Q}$ de f à Q est un endomorphisme de Q.
La propriété $\forall(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}),\ \phi(\overrightarrow{a}, f(\overrightarrow{b})) = \phi(\overrightarrow{b}, f(\overrightarrow{a}))$ était valable sur $(\mathbb{R}^n)^2$, elle le reste sur Q^2.
Bref, f est un endomorphisme symétrique de Q.
On a montré que tout endomorphisme symétrique admettait au moins un vecteur propre normé *(si l'espace n'était pas réduit à $\overrightarrow{0}$, ce qui est le cas ici)*.
Il y a donc au moins un vecteur propre de f dans Q qui est de norme 1, on en prend un qu'on note $\overrightarrow{\varepsilon}$.

Mais alors la famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k},\ \overrightarrow{\varepsilon})$ est encore une famille de vecteurs propres de f. Ils sont tous normés, puisque $\overrightarrow{\varepsilon}$ l'est aussi.
Les premiers vecteurs étaient deux à deux orthogonaux. Le dernier est orthogonal aux précédents, car il est dans Q.
Bref, $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k},\ \overrightarrow{\varepsilon})$ est une famille de vecteurs propres de f, orthonormée.

Ceci peut correspondre à l'hérédité d'une récurrence. On agrandit peu à peu la famille de vecteurs propres deux à deux orthogonaux.
Jusqu'à atteindre la dimension de l'espace vectoriel ambiant.

En fait, la preuve conduit ici est un peu différente. On prend les familles de vecteurs propres deux à deux orthogonaux. On sait qu'il y en a *(au moins, il y en a de cardinal 1)*. Leur cardinal ne peut pas dépasser n. On en prend une dont le cardinal est le plus grand possible *(toute partie finie non vide majorée de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément)*. On le note k. Si k n'est pas égal à n, on peut agrandir en $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k}, \ \overrightarrow{\varepsilon})$ qui est encore dans D_f. ceci contredit la maximalité. C'est donc que k vaut n. Il y a au moins une famille orthonormée de vecteurs propres de cardinal n. Comme elle est orthonormée, elle est libre. Et par cardinalité, c'est une base. On a une base orthonormée faite de vecteurs propres.

On a bien prouvé que toute application linéaire symétrique admettait une base orthonormée de vecteurs propres.
Si on part d'une matrice symétrique, le même résultat dit qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres.
La matrice de passage P passe de la base canonique orthonormée à la nouvelle base, orthonormée aussi. Elle vérifie donc ${}^tP.P = I_n$. On a donc une formule en $S = P.D.P^{-1} = P.D.{}^tP$.

∘0∘

- a - Soit $(E, +, .)$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y^{(3)} + 3.y'' + 2.y' + 5.y = 0$. Montrez que la translation $\tau = \Big(f \longmapsto \big(t \longmapsto f(t+1)\big)\Big)$ est un endomorphisme de $(E, +, .)$, donnez sa trace ou son déterminant (ne cherchez pas les racines de l'équation caractéristique, on n'en a pas besoin, mais attention, deux d'entre elles sont complexes conjuguées).
- b - Montrez que la dérivation d est un endomorphisme de E et calculez sa trace et son déterminant.
- c - Justifiez : $\tau \circ d = d \circ \tau$.
- d - Montrez que $(f, g) \longmapsto f(0).g(0) + f'(0).g'(0) + f''(0).g''(0)$ est un produit scalaire sur $(E, +, .)$. Existe-t-il une base orthonormée de $(E, +, .)$ pour ce produit scalaire ?
- e - Trouvez une équation différentielle linéaire dont l'espace des solutions contient tous les carrés des éléments de $(E, +, .)$.

L'équation différentielle $y^{(3)} + 3.y'' + 2.y' + 5.y = 0$ admet des solutions de la forme $t \longmapsto a.e^{\lambda_1.t} + b..e^{\lambda_2.t} + +c..e^{\lambda_3.t}$. On a un espace vectoriel de dimension 3, engendré par trois fonctions exponentielles. En tout cas, sur $\mathbb{C}$.
Si y_t est solution, alors $y_t^{(3)} + 3.y_t'' + 2.y_t' + 5.y_t = 0$ pour tout t. Comme t est aussi quelconque que $t+1$, on a $y_{t+1}^{(3)} + 3.y_{t+1}'' + 2.y_{t+1}' + 5.y_{t+1} = 0$ pour tout t.
D'ailleurs, on écrit la matrice de cette application sur la base des $t \longmapsto e^{\lambda.t}$. Pour un tel vecteur $\overrightarrow{e}$, on a $\tau(e) = (t \longmapsto e^{\lambda.(t+1)}) = (t \longmapsto e^{\lambda}.e^{\lambda.t})$.
La matrice cherchée est donc $\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{pmatrix}$.
On ne connait aucun des λ_i , racines de l'équation caractéristique $\lambda^3 + 3.\lambda^2 + 2.\lambda + 5 = 0$.
Mais au moins, on calcule le déterminant : $e^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} = e^{-3}$.

Ah, au fait, $\tau(f+g) = (t \longmapsto f(t+1) + g(t+1)) = (t \longmapsto f(t+1)) + (t \longmapsto g(t+1)) = \tau(f) + \tau(g)$.
De même $\tau(\mu.f) = \mu.\tau(f)$.
Mais il est aisé sur ce type de question d'écrire des choses sans queue ni tête comme $\tau \circ f$ ou $\tau(f(t))$. En revanche, $(\tau(f))(t)$a bien du sens, c'est $f(t+1)$.

La dérivation est linéaire. C'est un endomorphisme de $(E, +, .)$ car si on a $y^{(3)} + 3.y'' + 2.y' + 5.y = 0$, on a aussi $y^{(4)} + 3.y^{(3)} + 2.y'' + 5.y' = 0$ juste en dérivant.
Pour ce qui est de la matrice : $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Sa trace vaut -3 *(somme des racines)* et son déterminant -5 *(produit des racines)*.

Mais au fait, comme il y a des racines complexes, est ce que cela change quelquechose à nos matrices ? On a un spectre de la forme $[\lambda, \ \mu + i.\omega, \ \mu - i.\omega]$.
Si on veut à tout prix travailler sur $\mathbb{R}$, on crée une base avec $t \longmapsto e^{\lambda.t}$ et $t \longmapsto e^{\mu.t}.\cos(\omega.t)$ et $t \longmapsto e^{\mu.t}.\sin(\omega.t)$.
La dérivation a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \omega \\ 0 & -\omega & \mu \end{pmatrix}$. La trace vaut $\lambda + 2.\mu$, c'est toujours la somme des racines.
Le déterminant vaut $\lambda.(\mu^2 + \omega^2)$. C'est encore le produit des racines.

Pour la translation, on aura $\begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu}.\cos(\omega) & e^{\mu}.\sin(\omega) \\ 0 & -e^{\mu}.\sin(\omega) & e^{\mu}.\cos(\omega) \end{pmatrix}$ et j'espère que vous aurez reconnu $e^{\mu+\mu.t}.\cos(\omega+\omega.t)$ et les formules en $\cos.\cos - \sin.\sin$.
Le déterminant vaut alors $e^{\lambda}.e^{2.\mu}$ et c'est bien $e^{\lambda+(\mu+i.\omega)+(\mu-i.\omega)}$ qui donne e^{-3}.

La formule $\tau \circ d = d \circ \tau$ doit se vérifier sur toute fonction :
pour $\tau \circ d(f)$, on applique τ à $d(f)$ c'est à dire à f' ; on trouve $t \longmapsto f'(t+1)$
pour $d \circ \tau(f)$, on applique d à $\tau(f)$ c'est à dire qu'on dérive $t \longmapsto f(t+1)$; on trouve aussi $t \longmapsto f'(t+1)$
On notera que si on avait pris $d \circ \gamma$ et $\gamma \circ d$, avec $\gamma = t \longmapsto f(2.t)$, on n'aurait pas obtenu la même chose.
C'est pourquoi la formule $(f(2.t))'$ est bien trop ambigüe.

Pour f et g solutions de l'équation différentielle, le réel $f(0).g(0) + f'(0).g'(0) + f''(0).g''(0)$ existe *(les éléments de $(E, +, .)$ sont de classe C^{∞}).*
Par commutativité de la multiplication, cette forme est symétrique.
Pour la bilinéarité, on se donne f, g et h ainsi que μ et on compare

$$f(0).(\mu.g)(0) + f'(0).(\mu.g)'(0) + f''(0).(\mu.g)''(0)$$

et

$$f(0).g(0) + f'(0).g'(0) + f''(0).g''(0)$$

puis on compare

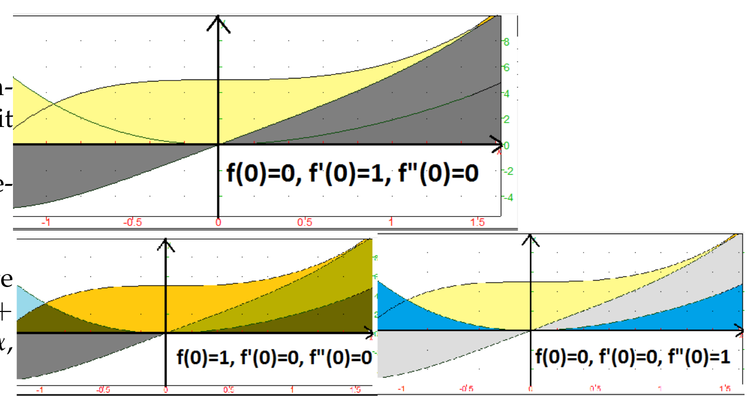
$$f(0).(g+h)(0) + f'(0).(g+h)'(0) + f''(0).(g+h)''(0)$$

et une autre somme.
On se donne un seul élément f, la somme $\big(f(0)\big)^2 + \big(f'(0)\big)^2 + \big(f''(0)\big)^2$ est positive *(somme de carrés de réels).*
Allons plus loin, on se donne f et on suppose $\big(f(0)\big)^2 + \big(f'(0)\big)^2 + \big(f''(0)\big)^2 = 0$. On a alors classiquement $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ *(simple : $0 \leqslant f(0)^2 \leqslant \big(f(0)\big)^2 + \big(f'(0)\big)^2 + \big(f''(0)\big)^2 = 0$ et on peut conclure par antisymétrie).*
De là à conclure que f est nulle ?
Mais f est dans $(E, +, .)$, donc de la forme $t \longmapsto a.e^{\lambda_1.t} + b.e^{\lambda_2.t} + c.e^{\lambda_3.t}$. Le lot de conditions donne $a+b+c=0$, puis $\lambda_1.a + \lambda_2.b + \lambda_3.c = 0$ et enfin $(\lambda_1)^2.a + (\lambda_2)^2.b + (\lambda_3)^2.c = 0$. Le système est digne de VanDerMonde, et son unique solution est $a = b = c = 0$ d'où $f = 0$.

On veut des applications f, g et h vérifiant un lot de conditions comme $f(0).g(0) + f'(0).g'(0) + f''(0).g''(0) = 0$, $f(0).h(0) + f'(0).h'(0) + f''(0).h''(0) = 0$ et

$$\big(f(0)\big)^2 + \big(f'(0)\big)^2 + \big(f''(0)\big)^2 = 1$$

Le choix est vaste.



Mais Il y a une piste. Raisonner façon « base canonique ». Si on demandait $\begin{matrix} f(0)=1 & g(0)=0 & h(0)=0 \\ f'(0)=0 & g'(0)=1 & h'(0)=0 \\ f''(0)=0 & g''(0)=0 & h''(0)=1 \end{matrix}$? Ce serait efficace !
Or, pour tout triplet (α, β, γ) imposé, il existe une solution $t \longmapsto a.e^{\lambda.t} + b.e^{\mu.t}.\cos(\omega.t) + c.e^{\mu.t}.\sin(\omega.t)$ (notée f) vérifiant $f(0) = \alpha$, $f'(0) = \beta$ et $f''(0) = \gamma$.
Il existe donc de telles application.

On veut que les carrés des fonctions soient solutions. Ceci force le nouvel espace vectoriel à contenir $t \longmapsto (e^{\lambda_i.t})^2$, c'est à dire chaque $t \longmapsto e^{2.\lambda_i.t}$.
On est tenté de demander juste un ordre 3 dont l'équation caractéristique ait pour racines les carrés des λ_i .
Mais si on part d'une combinaison $(t \longmapsto a.e^{\lambda_1.t} + b.e^{\lambda_2 t} + c.e^{\lambda_3.t})^2$ on voit qu'on attend aussi les $t \longmapsto e^{(\lambda_1+\lambda_2).t}$ à cause des double produits.
On va donc demander une équation caractéristique dont les racines soient non seulement les $2.\lambda_i$ mais aussi les $\lambda_i + \lambda_j$.

On va donc avoir besoin du degré 6.On crée le polynôme caractéristique :

$$X^6-(2.\lambda_1+2.\lambda_2+2.\lambda_3+\lambda_1.\lambda_2+\lambda_1.\lambda_3+\lambda_2.\lambda_3).X^5+(\ldots).X^4-(\ldots).X^3+(\ldots).X^2-(\ldots).X+(\ldots)$$

et il reste du travail avec les formules de Viète.

∘1∘ On donne $A=\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&0\\-2&1\end{pmatrix}$. Déterminez les dimensions des ensembles suivants en donnant à chaque fois une base :
$C_A=\{M\in M_2(\mathbb{R})\mid A.M=M.A\}$ $C_B=\{M\in M_2(\mathbb{R})\mid B.M=M.B\}$ $C_A\cap C_B$ $T_A=\{A.M-M.A\mid M\in M_2(\mathbb{R})\}$ et $T_A\cap C_B$.

Pour le commutant de A [3], le plus simple est d'en revenir aux coefficients.
On égalise $\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}$.
On a quatre équations pour quatre inconnues. C'est bon signe, mais si le système ne dégénérait pas, il n'y aurait que la solution nulle. Or, on sait qu'il n'y a pas qu'elle.
C'est donc que le système dégénère (et c'est normal, car on a par exemple $Tr(A.M)=Tr(M.A)$ qui nous enlève une équation).
Et on sait même que I_2 et A seront solutions.
L'espace des solutions est au moins de dimension 2.
C'est donc que le système dégénère d'avantage que d'une équation perdue.
On en perd au minimum deux.

Peut on en perdre trois ? les quatre équations seraient alors proportionnelles. Ce n'est pas le cas.

Le système de quatre équations va donc donner un espace de dimension supérieure ou égale à 2 (présence de I_2 et A)
et strictement inférieure à 3 (sinon quatre fois la même équation)
L'espace des solutions est de dimension 2, et les deux éléments I_2 et A en forment une base.

Oh la vache. Je viens de tout faire sans calcul. C'est le physicien qui sommeille en vous qui doit être surpris. Il n'a rien vu venir. Et le matheux qui vit en vous doit jubiler.

Bref : $C_A=\{M\in M_2(\mathbb{R})\mid A.M=M.A\}=Vect(I_2,\ A)$

Mais bon, je vais le faire façon élève de Sup (et donc bon élève), en me tapant le système.
On a donc obtenu

$$\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{array}{cccccccccc}a&&+3.c&&=&a&+b&&\\a&&-c&&=&&&c&+d\\&b&&+3.d&=&3.a&-b&&\\&b&&-d&=&&3.c&&-d\end{array}$$

Remarque : Comparez mon écriture du système avec $\begin{array}{ccccc}a&+3.c&=&a&+b\\a&-c&=&c&+d\\b&+3.d&=&3.a&-b\\b&-d&=&3.c&-d\end{array}$.
Comprenez vous pourquoi je dois non seulement vous apprendre à calculer juste (ça vous le faites sinon vous auriez moins de trois de moyennes toutes matières scientifiques confondues), mais aussi vous apprendre calculer proprement.
Ne vous contentez pas de « j'ai toujours sû résoudre mes systèmes même sans les présenter bien ».
Faites l'effort de casser vos MAUVAISES habitudes (pléonasme ?). Acceptez l'idée que vous pouvez rendre vos méthodes et calculs rigoureux et lisibles avec de petites idées à la con.

On poursuit :

$$\begin{array}{ccccccccc}a&&+3.c&&=&a&+b&&\\a&&-c&&=&&&c&+d\\&b&&+3.d&=&3.a&-b&&\\&b&&-d&=&&3.c&&-d\end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{cccccccc}&&3.c&&=&&b&&\\a&&&&=&&&2.c&+d\\&2.b&&+3.d&=&3.a&&&\\&b&&&=&&3.c&&\end{array}$$

3. puisque tel est le nom de l'ensemble des matrices M vérifiant $A.M=M.A$

On va pouvoir effacer une équation.

Re-remarque : Vous aviez quatre équations, il n'en reste plus que trois.
Votre cerveau doit tout de suite réagir : il s'est passé quelquechose.
Il est MILLE fois plus important que vos réflexes soient là dessus :
« combien d'équations » (une question de dimensions)
plutôt que « quand il passe de l'autre côté, c'est 3.c ou -3.c ? ».

Les deux équations du milieu sont à leur tour équivalentes. Il n'en reste que deux :

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & +3.c & & = & a & +b & & \\ a & & -c & & = & & & c & +d \\ & b & & +3.d & = & 3.a & -b & & \\ & b & & -d & = & & 3.c & & -d \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccccc} b & = & 3.c & & \\ a & = & 2.c & +d & \end{array}$$

Le travail est fini. Quatre inconnues, deux équations, dimension 2 (ah zut, je refais des maths au lieu de faire du calcul).

On a la forme des matrices : $\begin{pmatrix} 2.c+d & 3.c \\ c & d \end{pmatrix}$ qu'on écrit même $c.\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Une base est alors $(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ et notre espace est de dimension 2.

Si vous savez mener proprement ces étapes, avec des équivalences et non des implications qui se barrent en couille, si vous séparez en base à la fin, vous avez le niveau naturel d'un élève de Sup... Si ce type de question dépasse votre entendement, que faites vous ici ? Et comment avez vous eu votre bac ?

Remarque encore : On a obtenu $Vect(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ par cette méthode parfaite.
Avec ma méthode de matheux pur, j'avais obtenu $Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix})$.
Sont ces les mêmes ?
Réponse : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un sens.
Et vous avez les formules de changement de base dans l'autre sens.

Pour le commutant de B, on trouve $Vect(I_2, B)$.

Et pour $C_A \cap C_B$?
On sait que c'est un espace de dimension 0, 1 ou 2.
On sait que B est dedans. Sa dimension vaut au moins 1.
Peut elle valoir 2 ? On aurait alors $C_A = C_B$. Et A qui est dans $C_A$serait dans C_B.
Or, « A ne commute pas avec B ».
On s'arrête à la dimension 1 : $C_A \cap C_B = Vect(I_2)$.

Attention : Une réponse ratée pour une intersection de sous-espaces peut être :
$A = Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $B = Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ donc $A \cap B = Vect(\overrightarrow{u})$.
En quoi la ligne ci dessus est elle une énorme connerie ?
On a certes $\overrightarrow{u} \in A \cap B$ et donc $Vect(\overrightarrow{u}) \subset A \cap B$.
Mais on a peut être d'autres vecteurs encore en commun. Si une combinaison de \vu et $\overrightarrow{v}$ coïncide avec une combinaison de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$.
Tenez : $Vect(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) \cap Vect(\overrightarrow{i}, 2.\overrightarrow{i} - 3.\overrightarrow{j})$ ne se réduit pas à $Vect(\overrightarrow{i})$.
Si vous n'abordez les exercices qu'avec le point de vue formel et non géométrique, vous écrivez des bêtises avec une candeur de premier communiant.

Pour ce qui est de $T_A = \{A.M - M.A \mid M \in M_2(\mathbb{R})\}$, on a la forme générale de ses éléments :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.c - b & -3.a + 2.b + 3.d \\ a - 2.c - d & b - 3.c \end{pmatrix}$$

Les naïfs diront alors « dimension 4 ».
Pauvres de naïfs. Ils auraient alors $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ tout entier. Alors que les matrices en $A.M - M.A$ ont forcément une trace nulle, et ne recouvrent au mieux qu'un sous-espace de dimension 3.

Ce qu'on peut dire avec rigueur et calme, c'est

$$T_A = Vect(\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$$

La dimension est inférieure ou égale à 4.

Mais on élimine de la famille les vecteurs inutiles : le dernier est colinéaire au premier.

$$T_A = Vect(\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix})$$

la dimension ne dépassera pas 3.

Mais on a aussi $2.\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On peut encore en effacer une : $T_A = Vect(\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$.
Cette fois, les matrices sont indépendantes. La dimension vaut 2.

$T_A \cap C_B$ est de dimension 0, 1 ou 2.
Enfin, non, pas 2 car on n'a pas $T_A = C_B$ (I_2 est dans C_B mais pas dans T_A car T_A est inclus dans l'espace des matrices de trace nulle).

Existe-t-il une matrice non nulle à la fois dans T_A et C_B (si c'est le cas on aura une droite, sinon, on aura $\{0_{2,2}\}$).
Peut on trouver a, b, c et d vérifiant

$$a.\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = c.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note que ceci revient à se demander si la famille des quatre matrices est libre...
Et à se demander si elle engendre $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Ce qui donnerait $T_A + C_B = M_2(\mathbb{R})$, de dimension 4.

Allez, tous calculs faits : $T_A \cap C_B = \{0_{2,2}\}$.

∘2∘

Montrez que $P \longmapsto P(0)$, $P \longmapsto P'(1)$ et $P \longmapsto \int_0^1 P(t).dt$ sont des formes linéaire sur $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$ (notées φ, ϕet ψ).
Trouvez P vérifiant $(\varphi(P),\ \phi(P),\ \psi(P)) = (1,\ 0,\ 0)$.
Trouvez P vérifiant $(\varphi(P),\ \phi(P),\ \psi(P)) = (0,\ 1,\ 0)$.
Trouvez P vérifiant $(\varphi(P),\ \phi(P),\ \psi(P)) = (0,\ 0,\ 1)$.
Trouvez P vérifiant $(\varphi(P),\ \phi(P),\ \psi(P)) = (0,\ 0,\ 0)$.

Montrez que $(\varphi,\ \phi,\ \psi)$ est libre.

Ces applications sont bien définies.
Elles prennent un polynôme et associent un réel. Elles vont de $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$ das $(\mathbb{R}, +, .)$.
Pour la linéarité, j'écris en une fois : P et q donnés ainsi que α et β, on a bien
$(\alpha.P + \beta.Q)(0) = \alpha.P(0) + \beta.Q(0)$, $(\alpha.P + \beta.Q)'(1) = \alpha.P'(1) + \beta.Q'(1)$ et la dernière.
Conseil : utilisez P et q, et non pas P et P'.

Première requête : P doit vérifier $P(0) = 1$, $P'(0) = 0$ et $\int_0^1 P(t).dt = 0$.

On résout un petit système et on trouve $\boxed{P_0(X) = \frac{3.X^2}{2} - 3.X + 1}$ (vérifiez).

Le second système donne $\boxed{P_1(X) = \frac{3.X^2}{4} - \frac{X}{2}}$ et le dernier $\boxed{P_2(X) = -\frac{3.X^2}{2} + 3.X}$

Et le dernier ? Il donne le polynôme nul.

Montrez que $(\varphi,\ \phi,\ \psi)$ est libre.

Pour la liberté de $(\varphi,\ \phi,\ \psi)$ on se donne α, β et γ et on suppose $\alpha.\varphi + \beta.\phi + \gamma\psi = 0$ (forme linéaire nulle). Objectif : $\alpha = \beta = \gamma = 0$.[4]
Comme c'est vrai pour tout polynôme, on peut être tenté d'écrire

4. pensez dans ces petits raisonnements à indiquer votre objectif

$$\forall (a, b, c),\ (\alpha.\varphi + \beta.\phi + \gamma\psi)(a.X^2 + b.X + c) = 0$$

et d'en déduire des choses.

Mais comme c'est vrai pour tout polynôme, c'est vrai en particulier pour P_0, P_1 et P_2.
Pour P_0, cela donne $\alpha.1 + \beta.0 + \gamma.0 = 0$. D'où $\alpha = 0$.
Et pour P_1 ? On trouve $\beta = 0$.
Et pour P_2 : oui, c'est γ.

Les trois polynômes P_0, P_1 et P_2 forment d'ailleurs une base de $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$
(pour la liberté, partez de $a.P_0 + b.P_1 + c.P_2 = 0$ et appliquez φ, puis ϕ puis ψ).
On les appelle « base duale de $(\varphi,\ \phi,\ \psi)$ ».

∘3∘

♡ Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 ; montrez que $\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3),\ P(X+4)\big)$ est liée. Donnez un exemple où $\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3)\big)$ est libre.
Peut elle être de sens opposé à celui de la base canonique de $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$?

Si P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, il est dans $\mathbb{R}_3[X]$, de même que les cinq polynômes de la famille $\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3),\ P(X+4)\big)$. mais $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$ est de dimension 4. Sans calcul, la famille est liée.

Qui sont les physiciens qui ont fait des calculs, rien que pour me « faire plaisir » ?

Si P est simplement X^3, la famille $(X^3,\ (X+1)^3,\ (X+2)^3,\ (X+3)^3)$ est libre ; il suffit de calculer son déterminant sur la base canonique.
Un autre excellent candidat est $X.(X-1).(X-2).(X-3)$. Si vous partez de
$a.X.(X-1).(X-2).(X-3) + b.(X+1).(X).(X-1).(X-2) + c.(X+2).(X+1).(X).(X-1) + d.(X+3).(X+2).(X+1).(X) = 0$ et que vous calculez en 1, en 2, en 3 et en 4 vous avez $a = b = c = d = 0$.

∘4∘

♡ A et B sont deux matrices carrées de taille n. On suppose A inversible. Simplifiez $A^{-1}.(A.B - x.I_n).A$. Déduisez que $A.B$ et $B.A$ ont le même spectre.
On suppose que ni A ni B n'est inversible. Montrez que $A - 2^{-p}.I_n$ *(notée A_p)* est inversible pour une infinité de valeurs de p. Montrez que pour ces valeurs de p, on a $\chi_{A_p.B}(X) = \chi_{B.A_p}(X)$. Déduisez $\chi_{A.B}(X) = \chi_{B.A}(X)$.

Comment calcule–ton le spectre d'une matrice carrée ? En cherchant les racines de son polynôme caractéristique.

On va donc montrer sous nos hypothèses que les deux matrices $A.B$ et $B.A$ (existence évidente) ont le même polynôme caractéristique.

Or, on a justement

$$\det(B.A - x.I_n) = \det(A^{-1}.(A.B - x.I_n).A) = \det(A^{-1}).\det(B.A - x.I_n).\det(A) = \det(B.A - x.I_n)$$

On tient donc le résultat si A est inversible.

Mots clefs : matrices semblables.

Par symétrie des rôles, c'est vrai aussi si B est inversible en écrivant

$$A.B - x.I_n = B^{-1}.(B.A - x.I_n).B$$

Mots clefs symétrie des rôles.

Mais si aucune des deux n'est inversible ?

On l'approxime par des matrices inversibles.

$A - 2^{-p}.I_n$ a pour déterminant $\chi_A(2^{-p})$. Or, χ_A est un polynôme de degré n. Il n'a donc qu'un nombre fini de racines. Dans $\mathbb{C}$ il en a même exactement n.
Une fois que 2^{-p} est plus petit que le module de la plus petit racine non nulle de χ_A, on a l'assurance que $\chi_A(2^{-p})$ est inversible.

Mots clés : polynômes, nombre fini de racines, module.

Comme A_p est inversible, on déduit que $A_p.B$ et $B.A_p$ ont le même polynôme caractéristique.

Comme les coefficients du polynôme caractéristique dépendent continument des coefficients des matrices, on peut passer à la limite : $A.B$ et $B.A$ ont le même polynôme caractéristique (puisque A_p tend vers A et $A_p.B$ vers $A.B$).

Mots clef : continuité des coefficients du polynôme.

Je sais, en dimension 2 et 3, on peut le faire à la main, d'autant qu'on connaît des coefficients : $Tr(A.B) = Tr(B.A)$ et $\det(A.B) = \det(B.A)$.

∘5∘

> Vrai ou faux (un vrai, un faux) :
> Dans $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ l'ensemble d'équation $Tr({}^tM.M) = 0$ est un espace vectoriel.
> Dans $(M_n(\mathbb{C}), +, .)$ l'ensemble d'équation $Tr({}^tM.M) = 0$ est un espace vectoriel.

En fait, seule la matrice nulle vérifie $Tr({}^tM.M) = 0$ pour les matrices réelles.
C'est du au fait que $Tr({}^tM.M)$ est la somme des carrés de tous les éléments de M.
Regardez en taille 3 :

$$\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + a'^2 + a''^2 & & \\ & b^2 + b'^2 + b''^2 & \\ & & c^2 + c'^2 + c''^2 \end{pmatrix}$$

Et la matrice nulle en solo, ça fait un espace vectoriel. De dimension 0.

En revanche dans $\mathbb{C}$, une somme de carrés peut être nulle.

Rien qu'en taille 2 : $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $Tr(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = Tr(\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}) = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $Tr(\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}) = Tr(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 0$

On somme : $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \\ & -1 \end{pmatrix}$.

C'est raté pour la stabilité.

∘6∘

> ♡ Soit $(U_1, \dots U_p)$ une famille de p vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ et M une matrice carrée de taille n, inversible. Montrez que si $(U_1, \dots U_p)$ est liée, alors $(M.U_1, \dots M.U_p)$ est liée.
> On suppose M inversible ; montrez que si $(U_1, \dots U_p)$ est libre, alors $(M.U_1, \dots M.U_p)$ est libre.

Supposons la famille $(U_1, \dots U_p)$ liée par une relation du type $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k.U_k = 0_n$ avec au moins un α_k non nul.

Alors on a aussi

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k.M.U_k = M.0_n = 0_n$$

et c'est une relation de dépendance linéaire entre les $M.U_k$.

Si $(M.U_1, \dots M.U_p)$ était liée, alors $(M^{-1}.M.U_1, \dots M^{-1}.M.U_p)$ serait liée (par la « même combinaison, comme au dessus). Ce qui contredit que $(U_1, \dots U_p)$ soit libre.

On a raisonné par contraposée, non ?

∘7∘

> Montrez que $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est nilpotente, prouvez le (trouvez le corps dans lequel ça se passe) ! Montrez que cette matrice est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Les puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ auront toutes des coefficients positifs et ne pourront pas donner $0_{3,3}$... si on est

dans $\mathbb{R}$.
Mais on a le droit de se plonger dans $(\mathbb{F}_7, +, .)$ pour l'addition et la multiplication modulo 7.
Et là, tout va bien, il suffit de calculer M^2 et M^3 (on sait que son ordre ne dépassera pas 3) :

M	M^2	M^3
$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 41 & 30 & 4 \\ 30 & 45 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 266 & 336 & 49 \\ 336 & 315 & 42 \\ 49 & 42 & 14 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Devait on tout calculer à la main, et face à $\begin{pmatrix} 266 & 336 & 49 \\ 336 & 315 & 42 \\ 49 & 42 & 14 \end{pmatrix}$ se demander « ce sont tous des multiples de combien ? ».
Non, évidemment. On est matheux et pas....
On se dit qu'il faut montrer que M est nilpotente. Son déterminant vaudra donc 0 (et sa trace aussi, puisque M sera semblable à J_3).
On doit donc avoir $-63 = 0$ et $7 = 0$. On n'a plus le choix. C'est 7.
Et on calcule donc tout de suite « modulo 7 », dernière ligne des calculs matriciels.

Maintenant qu'elle est nilpotente d'ordre 3, il faut trouver une matrice P vérifiant $M.P = P.J_3$.
Et en écrivant $(U|V|W)$ la matrice P coupée en colonnes : $(M.U|M.V|M.W) = (V|W|0_3)$.
On résout donc déjà $M.W = 0_3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c \\ c' \\ c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est assez direct : $c + 2.c'' = 0$ et $6.c + 3.c' = 0$. Les vecteurs sont les multiples de $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ par exemple.

Remarque : | Vous n'avez pas le même vecteur mais un de ses multiples ? C'est pareil.
Sauf si ledit multiple est 0_3, n'abusons pas, on veut une base à la fin !

On résout ensuite $M.V = W$: $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b \\ b' \\ b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Une solution est $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ (on se fixe $z = 0$ et c'est direct, par conditions nécessaires/vérification).

Remarque : | ...mais on a d'autres solutions avec $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha . \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, comprenez vous pourquoi ?
Et comprenez vous pourquoi elles ne changent rien au fait de trouver une base à la fin ?

On termine avec $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ par exemple.

Remarque : | La difficulté : penser à découper le problème plutôt que de chercher tout de suite les neuf coefficients de P
prendre l'initiative de choisir une des composantes à chaque fois, car les systèmes sont dégénérés,
le prof le comprend,
l'élève qui le comprend mérite tout de suite l'étoile

On résume et vérifie :

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est fait !

8

♡ Faites en une famille liée : $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\3\\3\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4\\2\\\spadesuit\\\clubsuit\end{pmatrix}\right)$.

On n'a pas de déterminant 4 sur 4 à annuler.
On peut annuler des déterminants 3 sur 3 et vérifier ensuite :

$\begin{vmatrix}1&2&4\\2&3&2\\1&3&\spadesuit\end{vmatrix}=0$ et $\begin{vmatrix}1&2&4\\2&3&2\\2&2&\clubsuit\end{vmatrix}=0$

On peut aussi profiter des deux premières composantes pour forcer une relation de dépendance linéaire entre les trois vecteurs : $a.\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$. C'est d'ailleurs la seule possible.
On trouve $a=-8$ et $b=6$.

On complète $-8.\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}+6.\begin{pmatrix}2\\3\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\10\\-4\end{pmatrix}$

9

♡ Vérifiez que la famille $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c},\ \overrightarrow{d})$ est liée dans $(\mathbb{R}^4,+,.)$.

$\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{d}=\begin{pmatrix}0\\4\\2\\-1\end{pmatrix}$.

Donnez une équation cartésienne *(du type $\alpha.x+\beta.y+\gamma.z+\delta.t=0$)* de l'hyperplan qu'elle engendre *(l'ensemble des combinaisons linéaires de ces quatre vecteurs)*.
Complétez $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$ en base de $\mathbb{R}^4$ de sorte que le premier vecteur de la base canonique ait pour composantes $(4,\ 3,\ 2,\ 1)$.

Quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$, un déterminant suffit.

Il vaut bien 0 (soustraire la première colonne sur les suivantes avec coefficients 1 et 2, aboutir à $\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&-1&-5&4\\1&1&-1&2\\-1&2&3&-1\end{vmatrix}$

et développer par rapport à la première ligne.
On peut aussi poursuivre les combinaisons jusqu'à obtenir une colonne nulle. C'est la preuve que la famille est liée.
Et la combinaison est ici $C_0+C_1-C_2-C_3=0$.
On si vous préférez :

$$\begin{pmatrix}1&1&2&0\\2&1&-1&4\\1&2&1&2\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ces vecteurs sont donc « cospaciaux ».
Le dernier ne sert à rien (combinaison des autres).

Un vecteur est dans ce même espace vectoriel si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix}1&1&2&x\\2&1&-1&y\\1&2&1&z\\-1&1&1&t\end{vmatrix}$ est nul.

On développe : $3.x+5.y-7.z+6.t=0$.

Si on a un doute, on vérifie vecteur par vecteur (trois suffiront, le dernier est combinaison des autres).

On peut d'ailleurs se contenter de proposer vérifier.
C'est l'équation d'un hyperplan, et il contient nos quatre vecteurs.

Et en fait $\begin{pmatrix}3&5&-7&6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&2&0\\2&1&-1&4\\1&2&1&2\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\end{pmatrix}$.

S'il y a une combinaison sur les colonnes, il y en a aussi une sur les lignes.
On appelle ça de la dualité.

On peut compléter du moment que le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & -1 & b \\ 1 & 2 & 1 & c \\ -1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix}$ est non nul.
Mais on veut : $\overrightarrow{i} = 4.\overrightarrow{a} + 3.\overrightarrow{b} + 2.\overrightarrow{c} + \overrightarrow{u}$.
On n'a donc pas le choix : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - 4.\overrightarrow{a} - 3.\overrightarrow{b} - 2.\overrightarrow{c}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -10 \\ 2 & 1 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 1 & -12 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant vaut 3, c'est bon, et on a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -10 \\ 2 & 1 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 1 & -12 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

∘10∘

♡ Montrez que si une famille est libre dans $(\mathbb{C}^n, +, .)$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors elle est libre dans $(\mathbb{C}^n, +, .)$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On écrit l'hypothèse pour k vecteurs (en notant au passage $k \leqslant n$) :

$$\forall (\alpha_1, \dots \alpha_k) \in \mathbb{C}^k,\ \Big(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i.\overrightarrow{u_i} = 0 \Big) \Rightarrow (\forall i,\ \alpha_i = 0)$$

On se donne k réels $(a_1, \dots a_k)$ et on suppose $\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i.\overrightarrow{u_i} = 0 \Big)$.
Comme les réels sont des complexes, on peut appliquer l'hypothèse et trouver que tous les a_i sont nuls.

La réciproque n'a aucune raison d'être vraie.

∘11∘

Soient $(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5})$ cinq vecteurs d'un espace vectoriel $(E, +, .)$. Montrez $\dim(Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3})) - 3 \geqslant \dim(Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5}) - 5$.

On ne sait pas si la famille initiale est libre *(et donc ses sous familles aussi)*.
Notons que si elle l'est, alors $Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5})$ est de dimension 5 et $Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3})$ est de dimension 3 *(à chaque fois, la famille citée est une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre)*, et la formule demandée est une égalité.
Sinon, si elle est liée, la dimension de $Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5})$ descend d'au moins une unité, tandis que celle de $Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3})$ ne descend pas forcément *(exemple : $\overrightarrow{u_5}$ est combinaison de $Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4})$ mais $(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4})$ est libre...)*.

On écrit
$$Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5}) = Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3}) + Vect(\overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5})$$
(somme pas forcément directe).
On passe aux dimensions :

$$\dim(Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5})) = \dim(Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3})) + \dim(Vect(\overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5})) - \dim(Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3}) \cap Vect(\overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5}))$$

On majore :
$$\dim(Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5})) \leqslant \dim(Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3})) + \dim(Vect(\overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5}))$$
On majore encore :
$$\dim(Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5})) \leqslant \dim(Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3})) + 2$$
On remplace : $\dim(Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5})) \leqslant \dim(Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3})) + 5 - 3$.
On fait passer de l'autre côté et c'est fini.

Le résultat se généralise $\dim(Vect(\overrightarrow{u_1}, \dots,\ \overrightarrow{u_k})) - k \geqslant \dim(Vect(\overrightarrow{u_1}, \dots,\ \overrightarrow{u_k}, \dots,\ \overrightarrow{u_n}) - n$.

∘12∘

♡ Faites en une famille liée dans l'espace vectoriel des matrices de format 2 sur 2 dont la trace est nulle :
$\left(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 6 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}\right)$

Bon, il faut déjà que ce soient des matrices de trace nulle :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}\right)$$

Et ensuite ?
Facile, ce sont quatre matrices dans $Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ (dimension 3).
Quels que soient les coefficients choisis, la famille est liée...

∘13∘

♡ F et G sont deux sous espaces vectoriel d'un espace vectoriel $(E,+,.)$, vérifiant $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$. $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p})$ est une famille de vecteurs de F et $(\overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_q})$. Montrez que $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p}, \overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_q})$ est libre si et seulement si $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p})$ et $(\overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_q})$ le sont.

On suppose donc que F et G sont deux sous-espaces vectoriels vérifiant $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$.
On doit prouver une équivalence, on traite deux implications.
$\boxed{\mathbb{H}}$ La grande famille $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p}, \overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_q})$ est libre. $\boxed{?}$ Les deux petites familles sont libres.
Par résultat du cours, la sous famille $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p})$ est libre.
En effet, si on part de $\alpha_1.\overrightarrow{f_1}, + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{f_p} = \overrightarrow{0}$, on déduit

$$\alpha_1.\overrightarrow{f_1}, + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{f_p} + 0.\overrightarrow{g_1} + \dots + 0.\overrightarrow{g_q} = \overrightarrow{0}$$

et par liberté de la grande famille $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0 = \dots = 0$.

$\boxed{\mathbb{H}}$ Les deux familles $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p})$ et $(\overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_q})$ sont libres. $\boxed{?}$ La grande famille $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p}, \overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_q})$ est libre.
On se donne $p+q$ réels α_i et β_j. On suppose $\alpha_1.\overrightarrow{f_1}, + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{f_p} + \beta_1.\overrightarrow{g_1} + \dots + \beta_q.\overrightarrow{g_q} = \overrightarrow{0}$.
On a un nouvel objectif : les α_i et les β_j sont nuls.
On note $\overrightarrow{u}$ le vecteur $\alpha_1.\overrightarrow{f_1}, + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{f_p}$. Il est dans f. Mais en constatant $\overrightarrow{u} = -\beta_1.\overrightarrow{g_1} - \dots - \beta_q.\overrightarrow{g_q}$, le voilà dans G.
Étant à la fois dans F et G (d'intersection triviale), le voilà nul.
On repart donc de $\alpha_1.\overrightarrow{f_1}, + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{f_p} = \overrightarrow{0}$. par liberté de la petite famille, tous les α_i sont nuls.
Dans le même temps $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{u} = -\beta_1.\overrightarrow{g_1} - \dots - \beta_q.\overrightarrow{g_q}$, et c'est au tour des β_j d'être nuls par liberté de l'autre petite famille.

Un petit raisonnement d'une simplicité incroyable. Il ne demande aucune connaissance approfondie. Aucun apprentissage de lignes et de lignes. Aucun par cœur. Juste savoir mettre bout à bout des idées. Et surtout ne pas partir n'importe comment en tapant sur les hypothèses (quand déjà elles sont bien quantifiées).
Bref, des maths dans toute leur splendeur pour détecter votre capacité à raisonner.
D'autres branches des mathématiques testeront votre capacité à apprendre par cœur.

∘14∘

♡ Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 ; montrez que $\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3),\ P(X+4)\big)$ est liée. Donnez un exemple où $\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3)\big)$ est libre.
Peut elle être de sens opposé à celui de la base canonique de $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$?

Si P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, il est dans $\mathbb{R}_3[X]$, de même que les cinq polynômes de la famille

$$\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3),\ P(X+4)\big)$$

mais $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$ est de dimension 4. Sans calcul, la famille est liée.
Qui sont les physiciens qui ont fait des calculs, rien que pour me « faire plaisir » ?

Si P est simplement X^3, la famille $(X^3,\ (X+1)^3,\ (X+2)^3,\ (X+3)^3)$ est libre ; il suffit de calculer son déterminant sur la bas canonique.

Un autre excellent candidat est $X.(X-1).(X-2).(X-3)$. Si vous partez de

$$a.X.(X-1).(X-2).(X-3)+b.(X+1).(X).(X-1).(X-2)+c.(X+2).(X+1).(X).(X-1)+d.(X+3).(X+2).(X+1).(X)=0$$

et que vous calculez en 1, en 2, en 3 et en 4 vous avez

$$a=b=c=d=0$$

Avec X^3, le déterminant relatif à la base canonique $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 8 & 27 \\ 0 & 3 & 12 & 27 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ vaut 108, il est positif.

est liée. Donnez un exemple où $\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3)\big)$ est libre.
Peut elle être de sens opposé à celui de la base canonique de $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$?
On tente un polynôme de la forme $a.X^3+b.X^2+c.X+d$. On calcule les polynômes, et on les décompose sur la base canonique :

$$\begin{vmatrix} d & a+b+c+d & 8.a+4.b+2.c+d & 27.a+9.b+3.c+d \\ c & 3.a+2.b+c & 12.a+4.b+c & 27.a+6.b+c \\ b & 3.a+b & 6.a+b & 9.a+b \\ a & a & a & a \end{vmatrix}$$

Et ce déterminant vaut ... $108.a^4$ *(commencer par $C_2 \leftarrow C_2-C_1$, $C_3 \leftarrow C_3-C_1$ et $C_4 \leftarrow C_4-C_1$).*
Le sens sera toujours le même que celui de la base canonique.

∘15∘

Soient $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{d}$ quatre vecteurs d'un espace vectoriel $(E,+,.)$. Montrez que $\{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4 \mid \alpha.\overrightarrow{a}+\beta.\overrightarrow{b}+\gamma.\overrightarrow{c}+\delta.\overrightarrow{d}=\overrightarrow{0}\}$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension si la famille $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c},\ \overrightarrow{d})$ est libre ?
Quelle est sa dimension si cette famille est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$?
Donnez un exemple où sa dimension vaut 1.

Le truc est à l'envers. Ce sont les coefficients des combinaisons.
Bon, ce sont des quadruplets de réels. On va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^4,+,.)$.
Le quadruplet nul vérifie $0.\overrightarrow{a}+0.\overrightarrow{b}+0.\overrightarrow{c}+0.\overrightarrow{d}=\overrightarrow{0}$. On tient le neutre.
Si on a le quadruplet $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ qui vérifie $\alpha.\overrightarrow{a}+\beta.\overrightarrow{b}+\gamma.\overrightarrow{c}+\delta.\overrightarrow{d}=\overrightarrow{0}$
alors le quadruplet $(k.\alpha,k.\beta,k.\gamma,k.\delta)$ qui vérifie

$$(k\times\alpha).\overrightarrow{a}+(k\times\beta).\overrightarrow{b}+(k\times\gamma).\overrightarrow{c}+(k\times\delta).\overrightarrow{d}=k.\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$$

De même avec une somme si on a $\alpha.\overrightarrow{a}+\beta.\overrightarrow{b}+\gamma.\overrightarrow{c}+\delta.\overrightarrow{d}=\overrightarrow{0}$
et $\alpha'.\overrightarrow{a}+\beta'.\overrightarrow{b}+\gamma'.\overrightarrow{c}+\delta'.\overrightarrow{d}=\overrightarrow{0}$
alors on a $(\alpha+\alpha').\overrightarrow{a}+(\beta+\beta').\overrightarrow{b}+(\gamma+\gamma').\overrightarrow{c}+(\delta+\delta').\overrightarrow{d}=\overrightarrow{0}$

Si la famille est libre, la seule combinaison est $0.\overrightarrow{a}+0.\overrightarrow{b}+0.\overrightarrow{c}+0.\overrightarrow{d}=\overrightarrow{0}$.
Le sous-espace de $(\mathbb{R}^4,+,.)$ se réduit au seul vecteur nul.

$$\alpha.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\beta.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\gamma.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\delta.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

équivaut à

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha & +\beta & & +2.\delta & = & 0 & & L1 \\ \alpha & & +\gamma & +\delta & = & 0 & & L2 \\ & \beta & -\gamma & +\delta & = & 0 & & L3 \\ \alpha & & +\gamma & +\delta & = & 0 & & L4 \end{array}$$

Ce système est dégénéré. Et pas qu'un peu. $L3=L1-L2$ et $L4=L1-L3$
On peut choisir c et d comme on veut, et déduire a et b : $a=-c-d$ et $b=c-d$.
Les quadruplets sont de la forme $(-c-d,\ c-d,\ c,\ d)$ et sont combinaisons de $(-1,\ 1,\ 1,\ 0)$
et $(-1,\ -1,\ 0,\ 1)$

On est dans un espace de dimension 2.

Solution de facilité :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Les quadruplets sont de la forme $(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ t)$ avec t quelconque.
Ils forment un espace vectoriel de dimension 1.

En fait, on prend une famille liée, mais avec une seule relation de dépendance linéaire sur les vecteurs (à coefficient multiplicatif près effectivement).

∘16∘

Montrez que $(\mathbb{R}, +, .)$ est un $(\mathbb{Q}, +, \times)$ espace vectoriel (pour x dans $\mathbb{R}$ et λ dans $\mathbb{Q}$, on pose évidemment $\lambda.x = \lambda.x$ au sens classique de la multiplication dans $\mathbb{R}$). Attention, ici, on doit tout démontrer (même si ce sont des évidences), car on n'est pas face à un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel usuel.
Montrez que $(1,\ \sqrt{2})$ est libre. Montrez que $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$ est libre. $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4})$ est elle libre ?

$(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif, ça c'est sûr.

Ensuite : pour x dans $\mathbb{R}$et λ dans $\mathbb{C}$, le nombre $\lambda.x$ est bien dans $\mathbb{R}$.

On montre aussi :
$$\begin{array}{c} \forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{Q},\ \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall (\lambda,\ \mu) \in \mathbb{Q}^2,\ (\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall (\lambda,\ \mu) \in \mathbb{Q}^2,\ \lambda.(\mu.x) = (\lambda.\mu).x \\ \forall x \in \mathbb{R},\ 1.x = x \end{array}$$

Ces propriété sont vraies avec λ et μ dans $\mathbb{R}$, donc également dans $\mathbb{Q}$.

Prenons deux rationnels λ et μ et supposons $\lambda.1 + \mu.\sqrt{2} = 0$ (réel nul).
On a alors $\sqrt{2} = -\dfrac{\lambda}{\mu}$. C'est un rationnel. Contradiction.
A moins que μne soit nul.
Mais alors la formule devient $\lambda.1 + 0 = 0$, d'où $\lambda = 0$.
Finalement, la seule solution est bien $\lambda = \mu = 0$.

On se donne ensuite trois rationnels a, b et c et on suppose $a.1 + b.\sqrt{2} + c.\sqrt{3} = 0$ *(objectif : $a = b = c = 0$).*
Si c est nul, on est ramené au cas précédent, a et b le son aussi.
Sinon, on isole $c.\sqrt{3} = -a - b.\sqrt{2}$ et on élève au carré : $3.c^2 = a^2 + 2.b^2 + 2.a.b.\sqrt{2}$.
On isole : $(a^2 + 2.b^2 - 3.c^2) + 2.a.b.\sqrt{2} = 0$.
Les deux nombres $(a^2 + 2.b^2 - 3.c^2) + 2.a.b.\sqrt{2} = 0$ et $(a^2 + 2.b^2 - 3.c^2) + 2.a.b.\sqrt{2} = 0$ sont rationnels.
On est ramené au cas précédent : $a^2 + 2.b^2 - 3.c^2$ et $2.a.b$ sont nuls.
La nullité de $a.b$ conduit à celle de a ou b.
• Si a est nul, on reporte dans l'autre : $2.b^2 = 3.c^2$ et donc $b = \pm\sqrt{3/2}.c$.
Sachant que $\sqrt{3/2}$ est irrationnel, b et c sont nuls.

• Si b est nul $a^2 = 3.c^2$ et donc $a \pm \sqrt{3}.b = 0$.
Le raisonnement usuel sur l'irrationalité de $\sqrt{3}$ conduit à $a = b = 0$.

La famille $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4})$ est liée, puisque deux des vecteurs sont colinéaires : $\sqrt{4} = 2.1$. Avec $\sqrt{4}$ et 1 dans le rôle des vecteurs, et 1 dans le rôle du scalaire (il est rationnel, c'est autorisé).

∘17∘

Montrez que $(9.\overrightarrow{i} + 12.\overrightarrow{j} + 32.\overrightarrow{k},\ -10.\overrightarrow{i} - 13.\overrightarrow{j} - 35.\overrightarrow{k},\ 2.\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} + 4.\overrightarrow{k})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Décomposez $\overrightarrow{j}$ sur cette base. Donnez un vecteur non nul qui garde les mêmes composantes sur cette base que sur la base canonique.

On calcule son déterminant relatif à la base canonique : $\begin{vmatrix} 9 & -10 & 2 \\ 12 & -13 & 2 \\ 32 & -35 & 4 \end{vmatrix} = -6$. C'est bon, on a une famille libre de bon cardinal.

Pour décomposer $\overrightarrow{j}$, il suffit d'inverser la matrice et de n'en calculer que la colonne du centre : $\dfrac{1}{6}.\begin{pmatrix} ? & 30 & ? \\ ? & 28 & ? \\ ? & 5 & ? \end{pmatrix}$.

On cherche un vecteur qui a les mêmes composantes sur les deux bases ? On résout $P.U = U$ d'inconnue U (oh, un vecteur propre, mais il ne faut pas le dire).
Le système est dégénéré, fort heureusement. Le vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ est aussi égal à

$$1.(9.\overrightarrow{i} + 12.\overrightarrow{j} + 32.\overrightarrow{k}) + 1.(-10.\overrightarrow{i} - 13.\overrightarrow{j} - 35.\overrightarrow{k}) + 1.(2.\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} + 4.\overrightarrow{k})$$

∘18∘

Parmi ces sous-ensembles de l'espace vectoriel des suites réelles, lesquels sont des sous-espaces vectoriels :

suites bornées	suites décroissantes à partir d'un certain rang
suites périodiques	suites qui convergent vers 0
suites monotones	suites équivalentes à $1/n$ quand n tend vers l'infini
suites en $O\left(\frac{1}{n}\right)$	suites dont le terme général est plus petit que 1 à partir d'un certain rang
suites en $o\left(\frac{1}{n}\right)$	

∘19∘

Rappel des règles : sur chaque ligne et sur chaque colonne, il y a chacun des cinq entiers 1, 2, 3, 4et 5. Et il des signes « plus grand que » et « plus petit que » ; bien entendu, ils doivent être corrects.

☐		☐		☐		☐	>	☐
$\wedge$								$\wedge$
☐	>	**3**		**1**	<	**2**		☐
$\vee$		$\wedge$		$\wedge$				
☐		☐	>	**2**	>	**1**		**3**
		$\vee$						
1		☐		☐		**4**		☐
☐		☐		☐	>	☐	>	☐

et

5		☐	>	☐		☐		☐
2	>	**1**		☐	>	☐		☐
$\wedge$								
☐		☐		☐	<	☐	>	☐
		$\wedge$						$\wedge$
☐	<	**5**		☐		☐	<	**4**
$\vee$								
☐	<	**4**		**5**		☐	<	**3**

3		1		4		5	>	2
$\wedge$								$\wedge$
5	>	**3**		**1**	<	**2**		4
$\vee$		$\wedge$		$\wedge$				
4		5	>	**2**	>	**1**		**3**
		$\vee$						
1		2		3		**4**		5
2		4		5	>	3	>	1

et

5		3	>	1		4		2
2	>	**1**		4	>	3		5
$\wedge$								
4		2		3	<	5	>	1
		$\wedge$						$\wedge$
3	<	**5**		2		1	<	**4**
$\vee$								
1	<	**4**		**5**		2	<	**3**

∘20∘

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C_A = \{M \mid M.A = A.M\}$, $R_A = \{M \mid A.M + M.A = 0\}$, $T_A = \{M \mid Tr(A.M) = 0\}$.
Montrez que C_A, R_A, T_A, $C_A \cap R_A$ et $C_A + R_A$ sont des espaces vectoriels, et donnez une base et la dimension de chacun.
Existe-t-il H vérifiant $R_A \oplus H = T_A \oplus H = M_2(\mathbb{R})$?
Existe-t-il H vérifiant $R_A \oplus H = T_A + H = M_2(\mathbb{R})$?

On ne montrera pas ici les stabilités attendues pour « sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$.
A cela deux raisons : c'est répétitif
certains d'entre vous ne savent de toutes façons pas le rédiger, avec des variables non quantifiées/présentées
si on commence par montrer $C_A = Vect(A, I_2)$, c'est automatiquement un espace vectoriel !

On écrit les équations, puis la forme des solutions, puis la forme « combinaison linéaire » et enfin une base

$C_A : A.M = M.A$	$R_A : AM + MA = 0$	$T_A : Tr(A.M) = 0$
$b + 4.c = 0$ et $a = b + d$	$a + d = 0$, $b = 4.a + 4.c$	$2.a - b + 4.c - 2.d = 0$
$\begin{pmatrix} d - 4.c & -4.c \\ c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -d & -4.d + 4.c \\ c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 2.a + 4.c - 2.d \\ c & d \end{pmatrix}$
$\left(\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$	$\left(\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -4. \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$	$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$
dimension 2	dimension 2	dimension 3

L'intersection $C_A \cap R_A$ est formée de matrices vérifiant à la fois $A.M = M.A$ et $A.M = -M.A$. Et donc $A.M = 0_{2,2}$.

C'est possible ça ? Oui, il y a A elle même ! (car A est nilpotente).
L'intersection est au moins de dimension 1.
Pourrait elle être de dimension 2 ? Dans ce cas, on aurait $C_A = R_A$. Or, l'élément I_2 est dans C_A mais pas dans R_A.
L'intersection est de dimension 1. Et c'est $Vect(\begin{pmatrix} 2 & 4. \\ -1 & -2 \end{pmatrix})$.
En notant $\begin{pmatrix} 2 & 4. \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 4. \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour se convaincre qu'elle est dans l'intersection.

Pour ce qui est de $C_A + R_A$ c'est évidemment un espace vectoriel, par définition de la somme (ici non directe).
Il est de dimension 3 (Grassmann).
On a une base avec trois matrices indépendantes comme $\left(\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ (on prend les quatre et on en enlève une).

Peut on avoir $R_A \oplus H = T_A \oplus H = M_2(\mathbb{R})$? Il faudrait avoir $\dim(H) = 2$ pour la première et $\dim(H) = 1$ pour la seconde.

Pour $R_A \oplus H = T_A + H = M_2(\mathbb{R})$, c'est un espace de dimension 2 qu'il nous faut. Avec deux matrices indépendantes qui ne sont pas dans $R_A$et dont au moins une n'est pas dans T_A.

∘21∘

♣ Pouvez vous construire une matrice A de spectre réel $[1]$ et tel que le spectre de A^2 soit $[1, 4, 9]$? Même question avec cette fois $[1, 2]$ et $[1, 4, -9, -9]$?

Je traite d'abord la dernière :

matrice	polynôme	spectre réel	spectre complexe
$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$(X-1).(X-2).(X^2+9)$	$[1,\ 2]$	$[1,\ 2,\ 3.i,\ -3.i]$
$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$	$(X-1).(X-4).(X+9)^2$	$[1,\ 4,\ -9,\ -9]$	$[1,\ 4,\ -9,\ -9]$

Les valeurs propres de A^2 sont les carrés des valeurs propres de A.

Pour la première question, si le spectre de A^2 a trois termes, c'est qu'on est en dimension 3 au moins.
Si A n'a qu'une valeur propre réelle, c'est qu'il lui reste deux valeurs propres complexes. Conjuguées puisque son polynôme caractéristique est à coefficients réels.
Mais alors avec le spectre complexe $[1,\ \alpha,\ \overline{\alpha}]$, le passage au carré donne $[1,\ \alpha^2,\ \overline{\alpha}^2]$ on ne peut pas avoir $[1, 4, 9]$.

A finir.

∘22∘

On veut simuler un dé à six faces non équilibré avec les probabilités suivantes :

1	2	3	4	5	6
1/13	2/13	5/13	1/13	3/13	1/13

Écrivez un script `Python` qui s'en charge.

Finalement, on a un dé à treize faces équiprobables, c'est comme ça qu'il faut le voir.

```
def tirage() :
....L = [1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6]
....choix = randrange(13)
....return L[choix]
```

On peut faire tenir en une seule instruction `return([1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6][randrange(13)])` si on y tient.

∘23∘

Calculez la trace et le déterminant en fonction de a de $P(X) \longmapsto P(X+a)$ comme endomorphisme de $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$.

$P(X) \longmapsto P(X+a)$ prend un polynôme et en fait un polynôme.
Le degré ne change pas. Et on a bien $(\lambda.P + \mu.Q)(X)$ qui devient $(\lambda.P + \mu.Q)(X+a)$ et donc $\lambda.P(X+a) + \mu.Q(X+$

a).

La matrice de cet endomorphisme, sur la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2.a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2.a & 3.a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3.a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et ainsi de suite.
Le déterminant vaut toujours 1 et la trace $n+1$.

VII$\sim$0) Établissez : $2.u_n = n.h_n$ (on pourra utiliser les deux questions précédentes).
VII$\sim$1) On note K_n (de cardinal k_n) l'ensemble des éléments de H_n ayant un 1 en position $(1,2)$ et en position $(2,1)$. Établissez une relation donnant h_n en fonction de k_n et $(n-1)^2$.
VII$\sim$2) En examinant les possibilités pour l'élément de position $(2,2)$, démontrez : $k_n = u_{n-2} + h_{n-1}$ (pour n supérieur ou égal à 4).
VII$\sim$3) Trouvez la relation de récurrence à double hérédité que vérifie la suite (u_n).

VIII$\sim$0) On pose $w_n = \dfrac{u_n}{(n!)^2}$. Montrez $w_n = \dfrac{(n-1).w_{n-1}}{n} + \dfrac{w_{n-2}}{2.n}$ pour tout n.
VIII$\sim$1) Montrez pour tout n supérieur ou égal à 2 : $w_n \geqslant \dfrac{1}{2.n}$ et déduisez que la série de terme général w_n diverge.
VIII$\sim$2) Montrez que pour tout x de $]-1,,\ 1[$, la série de terme général $w_n.x^n$ converge.

IX$\sim$0) Résolvez l'équation différentielle $2.(1-t).y'_t = t.y_t$ d'inconnue y fonction de t, avec condition initiale $y_0 = 1$ (solution notée f). Donnez le domaine de définition de la solution.
IX$\sim$1) On pose $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Calculez a_0, a_1 et a_2.
IX$\sim$2) Montrez pour tout n : $a_n = \dfrac{(n-1).a_{n-1}}{n} + \dfrac{a_{n-2}}{2.n}$.
IX$\sim$3) Déduisez $a_n = w_n$ pour tout n, et trouvez une citation du chat de Geluck sur les maths

---

X$\sim$0) *Cette suite de questions est maintenant indépendantes des parties II à V.* Pour tout n, on note E_n l'espace vectoriel engendré par la famille de tous les éléments de U_n. Montrez : $1 \leqslant \dim(E_n) < n^2$.
X$\sim$1) Justifiez : $\dim(E_2) = 1$ et $\dim(E_3) = 5$ (on pourra considérer $J_3 - A$ avec A décrivant U_3). Et calculez $\dim(E_1)$.

XI$\sim$0) On note V_4 l'ensemble des matrices M de $M_4(\mathbb{R})$ telles que M et ${}^tM$ admettent X_4 comme vecteur propre. Montrez que V_4 est un sous-espace vectoriel de $(M_4(\mathbb{R}), +, .)$ contenant E_4(attention, la réponse attend deux éléments).
XI$\sim$1) Soit M est dans V_4, avec X_4 vecteur propre de M de valeur propre λ et vecteur propre de ${}^tM$ de valeur propre μ. Montrez : $\lambda = \mu$.

XI$\sim$2) Complétez $\left(\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ en base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ (notée $(W_1,\ W_2,\ W_3,\ W_4)$.
XI$\sim$3) Montrez que pour tout i $\varphi_i = M \longmapsto^t W_i.M.W_1$ et $\psi_i = M \longmapsto^t W_i.{}^tM.W_1$ sont deux formes linéaires. Donnez la dimension du noyau de chacune.
XI$\sim$4) Montrez que $(\varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4)$ est une famille libre.
XI$\sim$5) Déduisez $\dim(E_4) \leqslant \dim(V_4) = 10$.

XII$\sim$0) Soit A une matrice de U_n comportant des 1 en positions $(1,1)$ et $(2,0)$ et des 0 en positions $(1,2)$ et $(2,1)$. Montrez qu'il existe B dans U_n telle que $A - B$ ne compte que des éléments nuls sauf en positions (i,j) avec i et j plus petits que 2.
XII$\sim$1) Déduisez $\dim(Vect(U - V \mid (U,V) \in U_n)) \geqslant (n-1)^2$.

XII$\sim$2) Concluez : $\dim(E_4) = 10$.

XII$\sim$3) Que vaut $\dim(E_n)$?

Petites dimensions. TD32

On va parcourir les lignes une par une et compter les 0 et les 1.
Si on trouve autre chose qu'un 0 ou un 1, on sort tout de suite.
Si on trouve trop de 1, on sort.
Ou trop de 0 aussi.

```
nb0, nb1 = 0, 0
for k in range(n) :
....a = A[i][k]
....if a != 0 and a != 1 :
........return(False)
....if a == 0 :
........nb0 += 1
............if nb0 > n-2 :
................return(False)
....if a == 1 :
........nb1 += 1
............if nb1 >2 :
................return(False)
```

Et on passe à la ligne suivante.

On a eu intérêt à poser `a= A[i][k]` *pour faire ensuite des tests sur* `a`*,*
plutôt que de faire trois tests du type `if A[i][k] != 0 and A[i][k] != 1 :` *puis* `if A[i][k] == 0` *puis ainsi de suite.*
Ces appels répétitifs de `A[i][k]` *font plonger* `Python` *à de multiples reprises dans la matrice, avec recherche d'un terme. Plus long que d'aller chercher une variable directe a.*

On recommence ensuite avec les colonnes.

```
def Test(A) :
....n = len(A)
....for i in range(n) : #ligne par ligne
........nb0, nb1 = 0, 0 #remise à zéro des compteurs
........for k in range(n) : #parcours de la ligne
............a = A[i][k] #lecture de l'élément
............if a != 0 and a != 1 : #négation de a ==0 or a==1
................return(False) #sortie directe
............nb0 += int(a==0) #un 0 de plus
............nb1 += int(a==1) #ou un 1 de plus
............if nb0 > n-2 or nb1 > 2 : #trop de 0 ou de 1
................return(False) #sortie directe
.....for k in range(n) : #colonne par colonne
........nb0, nb1 = 0, 0
........for i in range(n) :
............a = A[i][k]
............if a != 0 and a != 1 :
................return(False)
............nb0 += int(a==0)
............nb1 += int(a==1)
............if nb0 > n-2 or nb1 > 2 :
................return(False)
....return(True) #tout s'est bien passé
```

Petites dimensions. TD32

En taille 1, impossible de mettre deux 2.

En taille 0, étrange. Mais ce sera pour la cohérence de la formule de récurrence plus loin.
De plus, il demeure une cohérence si on demande $\forall\ ligne$ dans la mesure où la requête est alors « pour tout élément du vide ». Ce qui est vrai.

En taille 2, une seule matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

En taille 3, tout est dit dès qu'on sait où mettre un 0 par colonne et par ligne. On part de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis on permute les lignes (3! possibilités).

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Le code binaire de la première colonne (ou de la première ligne) dit tout.

Quand on transpose une matrice de U_n, on a encore une matrice de U_n, autant le dire tout de suite.
Ça ne nous aidera pas forcément pour le décompte, car on peut retomber sur la même..

De même, si on permute l'ordre des colonnes ou des lignes, on a encore on a encore une matrice de U_n.

Par définition de deux 1 et $n-2$ 0 sur une ligne, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_i^k = 2$ pour tout i et donc $A.X_n = 2.X_n$.
Le vecteur non nul X_n est bien vecteur propre, de valeur propre 2 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
Pour une matrice comme pour sa transposée.
La condition est nécessaire, mais pas suffisante si les coefficients de la matrice ne sont pas des 0 *et des* 1.

> *Il ne fallait surtout pas partir à la recherche du polynôme caractéristique de la matrice :* $\det(M - \lambda.I_n)$.
> *C'est onze fois sur dix la mauvaise idée. Celle qui consiste à dire « j'ai une définition/caractérisation dans le cours, je m'en tiens à celle là ». Cette attitude est la meilleure en maths et en physique jusqu'au bac. Et c'est la pire ensuite.*
> *Il faut varier les points de vue.*
> *Et se dire que vecteur propre, c'est M.U et U sont colinéaires. C'est visuel et aux antipodes des formules...*

Comme il y a un 1 sur la première ligne, quitte à permuter les colonnes, on peut le mettre en première colonne. On a toujours une matrice de U_n.
Quand on additionne toutes les matrices de U_n, on obtient des coefficients entiers naturels.
Et chaque case finit par contenir un certain total.
A priori même, toutes les cases contiendront le même, par symétrie des rôles, d'où J_n.
La somme de tous les éléments de U_3 vaut $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

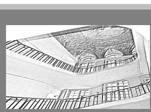
Et justement, h_3 vaut 4 :

non	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
non	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On va donc justifier $\boxed{\sum_{A\in U_n} A = h_n.J_n}$
On commence par affirmer la symétrie des rôles. La somme des a_1^1 (quand on prend toutes les matrices de U_n) est égale à la somme des a_i^k.
Quand on a un 1 en position $(1,1)$, on peut le placer en position (i,k).
Et la somme des a_1^1 est un somme de 0 et de 1.
Il suffit de compter les 1. Et il y en a exactement h_n.

Je vous le raconte comme dans le corrigé d'un collègue.
Commençons par remarquer que si i et j sont deux indices distincts entre 1 *et n et A un élément de U_n, alors l'échange des lignes i et j ou des colonnes i et j donne comme résultat une nouvelle matrice de U_n.Fixons un couple* (i,j). *L'ensemble des matrices de U_n ayant un* 1 *dans la position* (i,j) *est en bijection avec H_n par l'application qui à chaque matrice fait associer la matrice obtenue de celle-ci en échangeant les*

lignes 1 et i et les colonnes 1 et j. Donc les matrices de $U_n$ayant un 1 dans la position (i,j) sont en nombre de h_n. Par suite $\sum\limits_{A\in U_n} A = h_n.J_n$.



Approfondissement sur le cardinal de U_n. TD32

L'astuce va consister à calculer $\sum\limits_{A\in U_n} A.X_n$.
C'est $\sum\limits_{A\in U_n} 2.X_n$ car X_n est toujours vecteur propre de A.
On somme donc des termes tous égaux à $2.X_n$. Et il y en a u_n (nombre de termes de la somme).
On a donc $\sum\limits_{A\in U_n} A.X_n = 2.u_n.X_n$.
Mais on a aussi en factorisant $\sum\limits_{A\in U_n} A.X_n = (\sum\limits_{A\in U_n} A).X_n$.
Avec la question précédente, ceci devient $h_n.J_n.X_n$.
Mais le produit $J_n.X_n$ fait tomber des 1 sur des 1 sur tout une ligne de longueur n : $J_n.X_n = n.X_n$: $\begin{pmatrix} 1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$

On a donc par transitivité : $2.u_n.X_n = h_n.n.X_n$.

Comme X_n est un vecteur non nul : $\boxed{2.u_n = h_n.n}$
C'est pas parce qu'il y a un n qu'il faut croire qu'il y a une récurrence sur n. Une fois de plus, halte aux réflexes de Terminable.

Pour K_n, on met deux 1. On va chercher des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0\\1&o&o&o&o\\0&o&o&o&o\\0&o&o&o&o\\0&o&o&o&o\end{pmatrix}$ avec des coefficients à la place des o respectant la règle des deux 1 par ligne et colonne..

Mais de quelle forme étaient les matrices de H_n ? Par exemple $\begin{pmatrix} 1&0&1&0&0\\0&o&o&o&o\\0&o&o&o&o\\1&o&o&o&o\\0&o&o&o&o\end{pmatrix}$ avec toujours la même règle.

Mais il y a autant de matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1&0&1&0&0\\0&o&o&o&o\\0&o&o&o&o\\1&o&o&o&o\\0&o&o&o&o\end{pmatrix}$ que de la forme $\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0\\1&o&o&o&o\\0&o&o&o&o\\0&o&o&o&o\\0&o&o&o&o\end{pmatrix}$.
Il suffit d'échanger des lignes et des colonnes.

On va écrire les choses proprement. On note $H_{n,i,k}$ l'ensemble des éléments de H_n ayant leurs 1 en positions $(1,1)$, $(1,k)$ et $(i,1)$.

Par exemple $\begin{pmatrix} 1&0&1&0&0\\0&o&o&o&o\\0&o&o&o&o\\1&o&o&o&o\\0&o&o&o&o\end{pmatrix}$ est dans $H_{n,4,3}$. Et $\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0\\1&o&o&o&o\\0&o&o&o&o\\0&o&o&o&o\\0&o&o&o&o\end{pmatrix}$ est dans $H_{n,2,2}$, qu'on note K_n.

Par échange des colonnes 2 et k on crée une bijection entre $H_{n,i,k}$ et K_n.
échange des lignes i et 2
Et la réunion disjointe des $H_{n,i,k}$ c'est H_n tout entier.
Le cardinal de H_n est donc la somme de ces cardinaux. produit du nombre de classes par taille de chaque classe.
Il y a $n-1$ choix pour placer le i
$n-1$ choix pour placer le k
$k_n$éléments dans chaque classe
On trouve $h_n = (n-1)^2.k_n$.

On montre $k_n = Card(K_n) = Card(U_{n-2}) + Card(H_{n-1})$.

Les matrices de K_n sont de la forme suivante : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & o & o & o \\ 0 & o & o & o & o \\ 0 & o & o & o & o \\ 0 & o & o & o & o \end{pmatrix}$ avec des 0 et des 1 à la place de x et des o, obéissant à la contrainte « deux 1 par ligne et par colonne ».
On a deux possibilités, s'excluant mutuellement, d'où la somme qui va venir.

• $x = 1$. la matrice est donc de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & o & o & o \\ 0 & o & o & o & o \\ 0 & o & o & o & o \\ 0 & o & o & o & o \end{pmatrix}$ et même $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & o & o & o \\ 0 & 0 & o & o & o \\ 0 & 0 & o & o & o \end{pmatrix}$.
Le bloc qui reste est de taille $n-2$ et est en fait dans U_{n-2}.
On a donc u_{n-2} matrices de ce type.
Proprement, partant de A de terme général a_i^k, on a crée B de terme général $b_i^k = a_{i+2}^{k+2}$ si $1 \leqslant i \leqslant n-2$ et $1 \leqslant k \leqslant n-2$.

• $x = 0$. la matrice est donc de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & o & o & o \\ 0 & o & o & o & o \\ 0 & o & o & o & o \\ 0 & o & o & o & o \end{pmatrix}$. Effaçons la première colonne et la première ligne : $\begin{pmatrix} 0 & o & o & o \\ o & o & o & o \\ o & o & o & o \\ o & o & o & o \end{pmatrix}$.
Mais c'est une matrice d'un type un peu spécial.
Sur un exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
La nouvelle matrice est certes binaire, mais dans aucun des U_{n-1} ou H_{n-1} ou K_{n-1}. Sa première ligne et sa première colonne n'ont qu'un 1.
Mais si on regarde $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en changeant juste le coefficient de position $(1,1)$ (ancienne position $(2,2)$ avant effacement), on retrouve une matrice de H_n (deux 1 par ligne et pas colonne et un 1 en haut à gauche).
En toute généralité, partant de A dans K_n on crée B dans H_{n-1} de terme général $b_i^k = \begin{matrix} 1 & si & i = k = 1 \\ a_{i+1}^{k+1} & sinon & \end{matrix}$.
Et cette fois, on a mis notre matrice en bijection avec une matrice de K_{n-1}.

En réunissant les deux cas, on a toutes les matrices de K_n.
On a donc bien $Card(K_n) = Card(A_{n-2}) + Card(H_{n-1})$.

On déduit : $u_n = \frac{n}{2}.h_n$ par la relation $2.u_n = n.h_n$

$u_n = \frac{n}{2}.(n-1)^2.k_n$ par la relation $h_n = (n-1)^2.k_n$

$u_n = \frac{n}{2}.(n-1)^2.(u_{n-2} + h_{n-1})$ par la relation $Card(K_n) = Card(U_{n-2}) + Card(H_{n-1})$

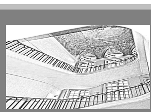
$u_n = \frac{n.(n-1)^2}{2}.u_{n-2} + n.(n-1).u_{n-1}$ par le relation $2.u_{n-1} = (n-1).h_{n-1}$

On a donc établi $\boxed{u_n = \frac{n.(n-1)^2}{2}.u_{n-2} + n.(n-1).u_{n-1}}$ pour tout n.

Y compris pour n « petit », grâce aux conventions sur u_0 et u_1, $u_2 = \frac{2.1^2}{2}.1 + 2.1.0 = 1$

$u_3 = \frac{3.2^2}{2}.0 + 3.2.1 = 1$

Si on sait lire la suite de l'énoncé, on peut trouver la formule à partir de $w_n = \dfrac{(n-1).w_{n-1}}{n} + \dfrac{w_{n-2}}{2.n}$, *et savoir au moins où on doit aller. Cela dit, dans le sujet des Mines, aucune des formules n'était offerte.*



Quelques séries. TD32

On remplace u_n par $(n!)^2.w_n$ et on reporte dans

$$u_n = \frac{n.(n-1)^2}{2}.u_{n-2} + n.(n-1).u_{n-1}$$

$$(n!)^2.w_n = \frac{n.(n-1)^2}{2}.((n-2)!)^2.w_{n-2} + n.(n-1).((n-1)!)^2.w_{n-1}$$

On regroupe en multipliant même par n :

$$n.(n!)^2.w_n = \frac{n^2.(n-1)^2}{2}.((n-2)!)^2.w_{n-2} + n^2.(n-1).((n-1)!)^2.w_{n-1}$$

$$n.(n!)^2.w_n = \frac{(n!)^2}{2}..w_{n-2} + (n-1).(n!)^2.w_{n-1}$$

On simplifie par $(n!)^2$: $\boxed{n.w_n = \dfrac{w_{n-2}}{2} + (n-1).w_{n-1}}$

Comme on a des cardinaux : $n.w_n \geqslant (n-1).w_{n-1}$.
La suite $(n.w_n)$ est croissante. Son terme d'indice 2 vaut $2.\frac{1}{(2!)^2}$.
On a donc $n.w_n \geqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout n d'où $w_n \geqslant \dfrac{1}{2.n}$ (à partir du rang 2).

Le théorème de minoration des séries à termes positifs donne la divergence de la série de terme général $(w_n)_{n\geqslant 2}$ (comparaison avec la série harmonique).
Sans théorème précis cité, vous êtes foutu. C'est le cadre où on a quand même justement quelques théorèmes...

Sinon, w_n est toujours plus petit que 1.
En effet, u_n est plus petit que $(n!)^2$.
On commence par dénombrer les matrices qui ont un 1 par ligne et par colonne, dites « matrices de permutations ».
Pour les définir : on part de I_n et on applique une permutation des lignes.
Il y a donc $n!$ matrices de permutation, d'où un ensemble P_n de cardinal $n!$.

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

On prend ensuite l'application « addition » qui va de $P_n \times P_n$ dans $M_n(\mathbb{R})$.
La somme de deux matrices de permutations peut donner une matrice de U_n :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

ou autre chose $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

Mais en tout cas, on aura « tous les éléments de U_n plus des éléments avec quelques 2 ».
On a donc moins d'éléments dans $U_n$que dans $P_n \times P_n$ (d'autant qu'un même élément de $U_n$peut être atteint plusieurs fois).
On a donc une majoration grossière : $Card(U_n) \leqslant (n!)^2$.

Prenons x dans $]-1, 1[$.
La série de terme général $|w_n.x^n|$ est une série à terme positifs, majorée terme à terme par x_n.
Et la série (géométrique) de terme général x_n converge.
Par domination sur les séries à termes positifs, la série de terme général $|w_n.x^n|$ converge.
Par théorème de convergence en valeur absolue, la série de terme général $w_n.x^n$ converge.
Soit en deux étapes : domination sur les séries à termes positif
puis convergence en valeur absolue

soit critère tout prêt $w_n.x^n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ *qui marche bien, mais dans lequel on ne saisit plus ce qu'on fait vraiment.*

Une équation différentielle. TD32

On résout cette équation différentielle linéaire sur le domaine où on peut la mettre sous forme de Cauchy-Lipschitz : $]-\infty,\ 1[$:
$y'_t - \dfrac{t}{2.(1-t)}.y_t = 0$ en posant naturellement $a_t = \dfrac{t}{2.(t-1)} = \dfrac{t-1+1}{2.(t-1)}$
On décompose en $a_t = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2.(t-1)}$ et on intègre : $A_t = \frac{t}{2} + \frac{\ln(1-t)}{2}$ sur $]-\infty,\ 0[$ (choix de la primitive nulle en 0).
La solution est $t \longmapsto \dfrac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{1-t}}$ valable sur $]-\infty,\ 1[$ par Cauchy-Lipschitz, et pas plus, par explosion en 1.

On a $f(0) = 1$ car on a tout fait pour ça.
On n'a même pas besoin de dériver : $2.(1-t).y'_t = t.y_t$ donc en 0 : $1.y'_0 = 0$.
On redérive : $-2.y'_t + 2.(1-t).y''_t = y_t + t.y'_t$
On calcule en 0 : $-2.y'_0 + 2..y''_0 = y_0 + 0$ d'où $y''_0 = \dfrac{1}{2}$.
Qui s'est pris la tête à dériver $t \longmapsto \dfrac{e^{-t/2}}{\sqrt{1-t}}$ *? Qui est bête comme un calculateur ?*

Une relation de récurrence sur des dérivées ? C'est encore la formule de Leibniz.
Partons de $2.(1-t).f'(t) = t.f(t)$ (pour tout t) et dérivons n fois de chaque côté.
Rappelons que

$$(t \longmapsto t.f(t))^{(n)} = (t \longmapsto t.f^{(n)}(t) + \binom{n}{1}.1.f^{(n-1)}(t) + 0)$$

On a donc :

$$2.f^{(n+1)}(t) - 2.\Big(t.f^{(n+1)}(t) + n.f^{(n)}(t)\Big) = t.f^{(n)}(t) + n.f^{(n-1)}(t)$$

On calcule en 0 :

$$2.f^{(n+1)}(0) - 2.n.f^{(n)}(t) = n.f^{(n-1)}(t)$$

On l'écrit

$$2.(n+1)!.a_{n+1} - 2.n.n!.a_n = n.(n-1)!.a_{n-1}$$

On simplifie les factorielles :

$$2.(n+1).a_{n+1} - 2.n.a_n = a_{n-1}$$

On fait passer de l'autre côté, et on décale d'un cran : $2.n.a = 2.(n-1).a_{n-1} + a_{n-2}$.
On divise par $2.n$: $a_n = \dfrac{(n-1).a_{n-1}}{n} + \dfrac{a_{n-2}}{2.n}$.

Les deux suites (w_n) et (a_n) ont la même initialisation aux rangs 0 et 1 et vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2. Elles sont égales pour tout n.
On le prouve par récurrence forte sur n.
Mais attention, le fait qu'elles vérifient la même relation de récurrence ne suffit pas. Il faut s'assurer aussi de la même graine de démarrage. Rappelons que la suite nulle et la suite factorielle vérifient $u_{n+1} = (n+1).u_n$. *Mais ça ne suffit pas à en faire des suites égales...*

La suite du sujet profitait de cette coïncidence $w_n = \dfrac{f^{(\grave{a}}(0)}{n!}$ pour obtenir un équivalent « simple » de w_n et de u_n, en étudiant en toute généralité les applications $t \longmapsto \dfrac{e^{\alpha.t}}{(1-t)^\beta}$ et leur développement limité en 0 : $u_n \sim 2.\left(\frac{n}{e}\right)^{2.n+\frac{1}{2}}.\sqrt{\pi}$ (oui, on avait le droit d'utiliser la formule de Stirling, et peut être préférez vous $u_n \sim \frac{(2.n)!}{2^{2.n}.\sqrt{e}}$.

Dimension d'espace engendré. TD32

Pour n égal à 1, l'ensemble $U_n$est vide. Il engendre $\{0_{1,1}\}$, de dimension 0.

Pour n égal à 1, E_1 est la droite $Vect(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$, de dimension 1.

Ici, ne confondez pas, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1, mais c'est en tant que lecture de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ (les colonnes).
Et c'est un rang dans $M_2(\mathbb{R})$ qu'on regarde. Espace de matrices.

Pour n égal à 3, on a six matrices. La dimension est entre 0 et 6.
Et elle vaut au moins 3 car il y a trois matrices indépendantes.
On va chercher des relations de dépendance linéaire entre les six matrices suivantes :

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On peut deviner avec astuce des choses.
Quoi qu'il en soit, prenons effectivement leur somme, et divisions la par 4.

La famille

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

engendre le même espace vectoriel.
La clef est « pivot de Gauss », du type : $Vect(A,\ B,\ C) = Vect(A,\ B,\ C,\ A+B+C)$.
Soustrayons alors chacune à la dernière.

La famille

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

engendre le même espace vectoriel.
La clef est « pivot de Gauss », du type : $Vect(A,\ B,\ C) = Vect(A-B,\ B-C,\ C)$.
On y vit déjà plus clair.

On élimine celles qui se déduisent des autres :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	hop

car elle est la demi somme de toutes les autres. Elle a rendu service, on n'en a plus besoin.

On continue :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	hop

car par exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il reste à montrer que les cinq matrices qui restent sont indépendantes.
Pas trop long que de partir de

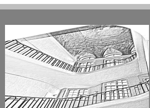
$$a.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + e.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour arriver à

$$a = b = c = d = e = 0$$

L'encadrement $0 \leqslant \dim(E_n) \leqslant n^2$ repose juste sur $E_n \subset M_n(\mathbb{R})$.
Mais peut on avoir $\dim(E_n) = 0$?
Non, car $E_n$serait alors réduit au vecteur nul. Or, il y a dans $E_n$des matrices non nulles.

Peut on avoir $\dim(E_n) = n^2$?
Non, car on aurait $E_n = M_n(\mathbb{R})$. Or, on connaît des matrices n'ayant pas X_n comme vecteur propre.
Et même, cette condition doit nous faire perdre encore plus de dimensions.



Travail en dimension 4. TD32

Les matrices M vérifiant $\exists \lambda,\ M.X_4 = \lambda.X_4$ forment un sous-espace vectoriel de $M_4(\mathbb{R})$.
La matrice nulle admet tout vecteur comme vecteur propre (valeur propre 0[5]).
Si M et N admettent X_4 comme vecteur propre (valeurs propres α et β), alors $\lambda.M + N$ admet encore X_4 comme vecteur propre (valeur propre $\lambda.\alpha + \beta$).

La preuve reste la même en imposant aussi « transposée ».

Vous pouviez bien sûr tout écrire avec des coefficients partout. Mais ce ne serait pas des maths. Ce serait du calcul bourrin. Ça aboutirait, mais vous ne comprendriez pas ce que vous faisiez...

On prend M, et on suppose donc $M.X_4 = \lambda.X_4$ et ${}^tM.X_4 = \mu.X_4$.
On peut alors le faire en revenant aux équations :

$\begin{array}{ccccc} a_1^1 & +a_1^2 & +a_1^3 & +a_1^4 & = \lambda \\ a_2^1 & +a_2^2 & +a_2^3 & +a_2^4 & = \lambda \\ a_3^1 & +a_3^2 & +a_3^3 & +a_3^4 & = \lambda \\ a_4^1 & +a_4^2 & +a_4^3 & +a_4^4 & = \lambda \end{array}$	et aussi	$\begin{array}{ccccc} a_1^1 & +a_2^1 & +a_3^1 & +a_4^1 & = \mu \\ a_1^2 & +a_2^2 & +a_3^2 & +a_4^2 & = \mu \\ a_1^3 & +a_2^3 & +a_3^3 & +a_4^3 & = \mu \\ a_1^4 & +a_2^4 & +a_3^4 & +a_4^4 & = \mu \end{array}$
en ligne : $M.X_4 = \lambda.X_4$		en colonne : ${}^tM.X_4 = \lambda.X_4$
$\sum_{i,k} a_i^k = 4.\lambda$		$\sum_{i,k} a_i^k = 4.\mu$

On retrouve dans les deux cas la somme de tous les termes de la matrice. Par transitivité : $4.\lambda = 4.\mu$.
Mais c'est parce que le vecteur X_4 est « sympa ».

On peut le faire aussi sans revenir aussi bas, avec de l'habitude.
On part de $M.X_4 = \lambda.X_4$ et ${}^tM.X_4 = \mu.X_4$.
On transpose la seconde : $M.X_4 = \lambda.X_4$ et ${}^t(X_4).M = \mu.{}^tX_4$ (formats compatibles).
On calcule alors de deux façons ${}^t(X_4).M.X_4$ qui vaut à la fois $\lambda.{}^tX_4.X_4$ et aussi $\mu.{}^tX_4.X_4$ par associativité.
Par transitivité (et en simplifiant par ${}^tX_4.X_4$ qui vaut justement 4) : $\lambda = \mu$.

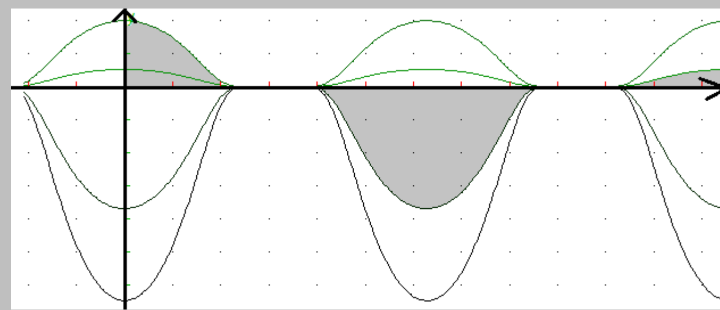
> *Un résultat classique dit « si λ est valeur propre de M, alors λ est aussi valeur propre de ${}^tM$ « . Il suffit de passer par $\det(M - \lambda.I_n)$ et $\det({}^tM - \lambda.I_n)$.*
> *Mais ici, c'est une histoire de « pour le même vecteur propre » ; ce qui change bien des choses.*
> *Et en plus, on part de la fin.*

---

5. 0 est autorisée comme valeur propre, c'est le noyau... ce qu'on refuse c'est « vecteur propre nul » pour pouvoir former des bases de vecteurs propres, c'est logique, non ?

∘24∘

De quelle équation différentielle linéaire linéaire d'ordre 1 à coefficients continus et à second membre nul $t \longmapsto \exp\left(\frac{-1}{\cos^2(t)}\right)$ est elle solution ?



Quelle est la dimension de l'espace des solutions.

Deux approches possibles.

On calcule y' et on ajuste pour avoir $y'_t + a_t.y_t = 0$ (ou même on calcule le quotient $\frac{y'_t}{y_t}$, comme dans la résolution physicienne).

On sait que les solutions sont de la forme $\lambda.\exp(-A_t)$. Pour retrouver a, il suffit d'identifier A et de dériver.

Ici, $A_t = \frac{1}{\cos^2(t)}$ et donc $a_t = \frac{2.\sin(t)}{\cos^3(t)}$ (dérivez $\cos^{-2}$, c'est tout).

J'ai pour équation $\boxed{y'_t + \frac{2.\sin(t)}{\cos^3(t)}.y_t = 0}$

La résolution se fait sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Et on a un espace des solutions de dimension 1.

Si on connaît y_0, on connaît y_t pour tous les t de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Sur le schéma, on a quatre solutions tracées en fonction de la valeur de y_0 justement.

Mais si l'équation est $\cos^3(t).y'_t + 2.\sin(t).y_t = 0$, qu'est ce qui change ?

Sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, rien.

Mais arrivé en $\frac{\pi}{2}$?

L'application $t \longmapsto \lambda.e^{-1/\cos^2(t)}$ tend vers 0 (forme $e^{-\infty}$). Quel que soit le choix de λ.

Et elle arrive avec une belle tangente horizontale (à démontrer proprement).

Et sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3.\pi}{2}\right[$, que fait elle ? Elle repart sous la forme $t \longmapsto \lambda.e^{-1/\cos^2(t)}$?

Oui, mais aussi $t \longmapsto 2.\lambda.e^{-1/\cos^2(t)}$, c'est pareil, le raccordement sera de classe continue et dérivable.

Ou $t \longmapsto -3.\lambda.e^{-1/\cos^2(t)}$ ou $t \longmapsto \pi.\frac{\lambda}{7}.e^{-1/\cos^2(t)}$.

On peut repartir sur n'importe que $t \longmapsto \mu.e^{-1/\cos^2(t)}$.

La connaissance de y_0 impose la valeur de λ, mais pas celle de μ.

La forme de la solution sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3.\pi}{2}\right[$ ne dépend plus de la valeur en 0.

On a deux univers séparés par un big crunch suivi d'un big bang (tout contraire à la physique de niveau Sup peut être, mais éclairant pour la physique en général).

L'espace des solutions est de dimension infinie. car à chaque intervalle de longueur π on peut choisir une nouvelle constante.

∘25∘

♡ Sachant que u, v et w sont solutions de $y''_t + a_t.y'_t + b_t.y_t =_{\forall t} 0$, on pose $\omega = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$. Montrez $\omega' = \begin{vmatrix} u & v \\ u'' & v'' \end{vmatrix}$ puis $\omega'_t + a_t.\omega_t = 0$ $(\forall t)$.

On développe $\omega = u.v' - u'.v$ (oui, on dirait un numérateur connu).

On dérive et simplifie : $\omega' = u'.v' + u.v'' - u''.v - u'.v' = u.v'' - u''.v$.

On remplace : $\omega' = u.(-a.v' - b.v) - (-a.u' - b.u).v$ car u et v sont solutions de l'équation.
Il reste : $\omega' = -a.v'.u + a.u'.v$.
On reconnaît : $\omega' = -a.\omega$ (le tout écrit sans t, à l'étage des fonctions).

On pouvait aussi au passage comparer ω' à $\begin{vmatrix} u & v \\ u'' & v'' \end{vmatrix}$ et trouver qu'il y avait égalité.

ω est le wronskien.

◦26◦

♡ Soient quatre matrices de taille 2 sur 2 de trace nulle. Montrez qu'elles forment une famille liée[a].

[a]. liée : l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres

Les matrices de format 2 sur 2 et de trace nulle, c'est $Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$. De dimension 3.
Quatre éléments de cet ensemble forment nécessairement une famille liée.

Plus algèbre linéaire que cet argument, tu meurs...

Sinon, on prend quatre matrices, avec leur douze coefficients en $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ et il fait en exprimer une à l'aide des quatre autres.

Ce sont comme quatre vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ -a \end{pmatrix}$ dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$. On peut calcule rleur déterminant : $\begin{vmatrix} a & a' & a'' & a^\circ \\ b & b' & b'' & b^\circ \\ c & c' & c'' & c^\circ \\ -a & -a' & -a'' & d^\circ \end{vmatrix}$,
il est nul. La famille est liée.

Et même : $\begin{pmatrix} a & b & c & -a \\ a' & b' & c' & -a' \\ a'' & b'' & c'' & -a'' \\ a^\circ & b^\circ & c^\circ & -a^\circ \end{pmatrix}$ a deux colonnes proportionnelles (relation de dépendance linéaire). Son déterminant est donc nul.
La transposée $\begin{pmatrix} a & a' & a'' & a^\circ \\ b & b' & b'' & b^\circ \\ c & c' & c'' & c^\circ \\ -a & -a' & -a'' & d^\circ \end{pmatrix}$ a à son tour un déterminant nul.
C'est donc que l'une des colonnes est combinaison des autres.
C'est donc qu'une des matrices est combinaison des autres.

Et on dit quoi au physicien qui réclame : « laquelle, et quelle combinaison ? ».
On lui répnd qu'on a prouvé son existence sans la construire explicitement ! N'est ce pas le sommet de la créativité ? Mieux qu'un artiste et mieux qu'un dieu !

◦27◦

♠ Il parait que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k}{(k+1)^2} = \zeta(3)$. C'est un sujet d'oral de Centrale.

H est la série harmonique : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}}{(k+1)^2} = \sum_{1\leqslant i\leqslant k} \frac{1}{i.(k+1)^2}$
La calculatrice me confirme vaguement la chose, mais avec une convergence plutôt lente.

◦28◦

On travaille avec le corps $\mathbb{K}$ des entiers de 0 à 12 et l'addition et la multiplication modulo 13. Montrez que $(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix})$ est une base de $(\mathbb{K}^3, +.)$. Donnez la matrice de passage de la base canonique à cette base. Décomposez la base canonique suivant cette base.

On ne se prend pas la tête, on calcule un déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 15 & +2 & +0 \\ -6 & -0 & -5 \end{matrix} = 6$.

Il est non nul (d'inverse 11).

Ceci assure que le système d'inconnues x, y et z et de paramètres a, b et c $\left\{\begin{array}{cccc|c} x & +y & +z & = & a \\ x & +3.y & & = & b \\ 2.x & +2.y & +5.z & = & c \end{array}\right.$ admet bien une unique solution.

On inverse la matrice par la comatrice :

◦29◦

♡ Donnez une base et la dimension de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ ensemble des matrices carrées de taille 2 sur 2. On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrez que $(A,\ A^2,\ A^3)$ est liée. Montrez que $(I_2,\ B,\ B^2)$ est liée. La famille $(I_2,\ A,\ B,\ B^2)$ est-elle une base de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$. Si oui, décomposez B^3 sur cette base, si non, $(I_2,\ A,\ B,\ A.B)$ est elle une base de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$?

Base canonique : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ à l'ordre près sur les deux du milieu. Et avec des parenthèses car c'est une famille.

On sait d'avance : $A^2 = 2.A + 3.I_2$ (relation $A^2 - Tr(A).A + \det(A).I_2 = 0_{2,2}$ pour les matrices de taille 2 sur *é*).
On multiplie par A : $A^3 = 2.A^2 + 3.A$. Ceci lie la famille.

De même $B^2 - 3.B + I_2 = 0_{2,2}$.

Pour que $(I_2,\ A,\ B,\ B^2)$ soit une base, il faudrait qu'elle soit libre.
Or, déjà $(I_2,\ B,\ B^2)$ est liée. Il n'y a pas à chercher plus loin, c'est fichu.

Pour $(I_2,\ A,\ B,\ A.B)$, la bonne nouvelle est qu'elle a le bon cardinal.
Il fut et il suffit donc que ce soit une famille libre.
On se donne quatre réels a, b, c et d et on suppose $a.I_2 + b.A + c.B + d.A.B = 0_{2,2}$.
On obtient

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 2.b \\ 2.b & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ 2.c & 3.c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4.d & 6.d \\ 2.d & 5.d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est un système de quatre équations à quatre inconnues qu'on résout.
Quand je dis qu'on le résout, pas tout à fait. On est en maths, bordel ! On l'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule juste le déterminant de la matrice 4 sur 4 : 26.
La matrice st inversible. Le système n'a qu'une solution. Et c'est $a = b = c = d = 0$.
On notera que cette matrice est matrice de passage. On retrouve en colonne les décompositions de I_2, A, B et $A.B$ sur la base canonique déjà citée.

Si ensuite vous voulez inverser cette matrice, elle vous permettra d'exprimer $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (et plus généralement $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$) à l'aide de I_2, A, B et $A.B$.

Globalement, à peu près zéro calcul à part un déterminant.
Mais tout est dans « l'art » de se poser la bonne question, au bon étage.
Facile pour qui a l'esprit mathématique. Torture pour qui a l'esprit juste calculatoire et par-coeuresque.

∘30∘

♡ Écrivez un script Python qui crée la matrice "en damier" de taille n Δ_n ainsi que son négatif ∇_n.
$\Delta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\nabla_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La lettre Δ c'est delta *(majuscule)* et ∇ c'est nabla.
Calculez leurs déterminants en fonction de n.
Calculez $(\Delta_n)^p$. Calculez $\Delta_n.\nabla_n$ et $\nabla_n.\Delta_n$.
Calculez $(\nabla_n)^p$.

Il suffit de créer les deux lignes avec des 1 et des 0 (avec modulo) puis de les coller.

```
def Delta(n) :
....I = [k%2 for k in range(n)]
....P = [(k%2)+1 for k in range(n)]
....M = [ ]
....for i in range(n) :
........if i %2 == 0 :
............M.append(P[ :])
........else :
............M.append(I[ :])
....return M
```

Ou si on y tient :

```
def Nabla(n) :
....return [[(i+k)%2 for k in range(n)] for i in range(n)]
```

Elle nécessite quand même de calculer à chaque fois les coefficients, alors que ce sont toujours les m^mes (copies de) lignes qu'on voit.

Dans Δ_n comme dans ∇_n, il y a deux colonnes égales. Le déterminant est donc nuls
Sauf pour n trop petit (0, 1 ou 2).

On les calcule à part :

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n \geqslant 3$
Δ_n	1	1	1	0
∇_n	1	0	-1	0

∘31∘

♡ Ajustez a, b et c pour que $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$ ait pour spectre $\{0,\ 1,\ 4\}$. Prouvez sans effort qu'elle est alors diagonalisable.

On va ajuster trace, déterminant et somme des mineurs 2 sur 2 par les formules de Viète :

Trace	$a+b+c$	$=0+1+4$
Mineurs	$a.b-1+a.c-1+b.c-1$	$=0.1+0.4+1.4$
Déterminant	$a.b.c+1+1-a-b-c$	$=0.1.4$

On résout $\begin{matrix} a & +b & +c & = & 5 \\ a.b & +a.c & +b.c & = & 7 \\ a & \times b & \times c & = & 3 \end{matrix}$ avec des rôles symétriques.
a, b et c sont les racines de $X^3 - 5.X^2 + 7.X - 3$.

On trouve deux racines dont une double : 1, 1 et 3.
Les matrices possibles sont $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ensuite, on a trois valeurs propres distinctes.
Chacune apporte un vecteur propre (une droite en fait), et on a de quoi remplir les trois colonnes d'une matrice de passage P.
Je vous offre même P (et D dans le premier cas) :

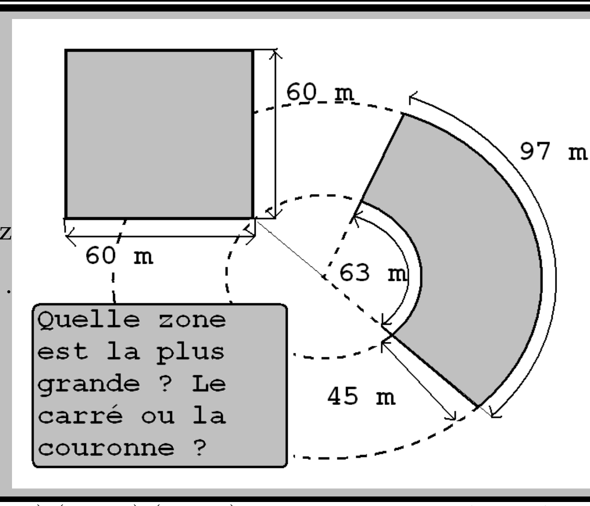
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

◦32◦

La matrice B a pour valeurs propres 1, 3 et -2. Donnez son polynôme caractéristique : $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -24 & & 15 \\ & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Trouvez un vecteur propre de valeur propre 1.

Calculez $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.



Le polynôme caractéristique de la matrice est forcément $X-1).(X-3).(X+2)$ puisqu'on nous a donné les trois valeurs propres ! Pas besoin de chercher plus loin.

Si on est physique, on le développe :

$$X^3 - 2.X^2 - 5.X + 6$$

et le matheux dit « c'est bon, tu as bien retrouvé la somme des racines (2), le produit : (-6) et le troisième terme $(1.3 + 1.(-2) + 3.(-2) = -5)$

Mais alors on en profite pour retrouver les coefficients qui manquent : $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -24 & a & 15 \\ b & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Ou même, sans calcul ou presque.

La trace est la somme des valeurs propres (M et D ont la même trace car elles sont semblables) : $7 + a + 3 = 1 + 3 - 2$.

Le réel a vaut -8.

> *« Ce n'est pas un réel, c'est un entier » s'écrie l'élève.*
> *Oui, cet élève est aussi con que celui qui dit « 3 n'est pas un complexe, c'est un réel ».*

Avec le déterminant (calcul sans intérêt, même financier, désolé Agathe) : $b = -6$.

La matrice est donc $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -24 & -8 & 15 \\ -6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ et on vérifie le terme qui nous manque. Il coïncide bien.

On cherche alors un vecteur propre de valeur propre 1 en résolvant le système sous-contraint

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -24 & -8 & 15 \\ -6 & -4 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ou le système de Cramer

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -24 & -8 & 15 \\ -6 & -4 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On trouve le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et ses multiples.

Et si vous voulez :

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -24 & -8 & 15 \\ -6 & -4 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant est un faux VanDerMonde.

Mais il vient d'un déterminant de VanDerMonde. Classique. On considère $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$.

C'est un vrai déterminant de VanDerMonde, de valeur $\begin{array}{llll} (x-a) & (x-b) & (x-c) & (x-d) \\ (d-a) & (d-b) & (d-c) & \\ (c-a) & (c-b) & & \\ (b-a) & & & \end{array}$ qu'on peut considérer comme un polynôme en x.

Et justement, notre déterminant initial de taille 4 est le cofacteur de x^3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \\ a & b & c & d & \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & \\ & & & & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & \end{vmatrix}$.

Il nous suffit de trouver le coefficient de x^3 dans $A.(x-a).(x-b).(x-c).(x-d)$ avec $A = \begin{array}{lll} (d-a) & (d-b) & (d-c) \\ (c-a) & (c-b) & \\ (b-a) & & \end{array}$
.

Viète nous souffle donc à l'oreille la forme factorisée

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = - \begin{array}{lll} (d-a) & (d-b) & (d-c) \\ (c-a) & (c-b) & \\ (b-a) & & \end{array} .(a+b+c+d)$$

Pour la couronne ou portion de couronne, on introduit des notations naturelles : r, R et α pour le petit rayon, le grand rayon et l'angle au centre.
On a alors plusieurs informations

$$\begin{array}{ccccc} r & \times & \alpha & = & 63 \\ R & \times & \alpha & = & 97 \\ R & - & r & = & 45 \end{array}$$

La longueur d'arc est proportionnelle à l'angle au centre et quand cet angle vaut $2.\pi$ la longueur vaut $2.\pi.R$.

Trois inconnues pour trois équations, c'est bon.

On calcule ensuite l'aire de la portion de couronne en soustrayant l'aire d'une portion de disque à une autre portion de disque

$$R^2.\frac{\alpha}{2} - r^2.\frac{\alpha}{2}$$

Rappel : l'aire est proportionnelle à l'angle au centre, et quand cet angle vaut $2.\pi$, l'aire vaut $\pi.R^2$.
Qui a appris $\frac{R^2.\alpha}{2}$? pas moi.
Qui a constaté qu'une des formules était la dérivée de l'autre ?

Mais en fait, sans même se précipiter dans les calculs :

$$R^2.\frac{\alpha}{2} - r^2.\frac{\alpha}{2} = \frac{(R-r).(R.\alpha + r.\alpha)}{2} = \frac{45.(97+63)}{2} = 3600$$

Et le carré a pour aire 3600. Égalité parfaite !

∘33∘

♡ Donnez une base de l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $2.x+y-z=0$, noté E.
Donnez une base de l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $2.x+3.y+z=0$, noté F.
Donnez une base de $E\cap F$.
Donnez une base et la dimension de l'ensemble des matrices M de taille 3 sur 3 vérifiant $\forall X\in\mathbb{R}^3,\ M.X\in E\cap F$.
Donnez une base et la dimension de l'ensemble des matrices M de taille 3 sur 3 vérifiant $\forall X\in E\cap F,\ M.X=0_3$.

Même pas de méthode à apprendre par cœur. Juste se laisser porter.

On a les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2.x+y \end{pmatrix}$.

On les écrit $x.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}+y.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Et la base est directement lisible : $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ qui permet d'écrire tous les vecteurs, d'une façon unique.

Pour F on fait de même : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -2.x-3.y \end{pmatrix}=x.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}+y.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ (notez que les vecteurs de base correspondent à des choix particuliers de x et y et sont bien dans F).

Quand ensuite un vecteur vérifie à la fois $2.x+y-z=0$ et $2.x+3.y+z=0$, il s'écrit $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix}$ après résolution du système (on exprime y et z à l'aide de x par exemple).

Une base de $E\cap F$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour aller plus vite : on sait que l'intersection des deux plans est de dimension 1, il reste juste à y trouver un vecteur non nul pour avoir une base.

Les matrices M de taille 3 sur 3 vérifiant $\forall X\in\mathbb{R}^3,\ M.X\in E\cap F$ sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ (nécessaire et suffisant).

Une base est donc $(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$.

Et pour $\forall X\in E\cap F,\ M.X=0_3$, on a cette fois $\begin{pmatrix} a & a+c & c \\ a' & a'+c' & c' \\ a'' & a''+c'' & c'' \end{pmatrix}$ et une base sera faite de six vecteurs que je vous laisse expliciter.

∘34∘

Montrez que $A=\begin{pmatrix} -6 & -10 & 17 \\ 5 & 9 & -13 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -7 & -12 & 20 \\ 4 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont le même polynôme caractéristique.
Calculez A^2 et B^2. A et B sont elles semblables ?

Juste du calcul : $\chi_A(X)=\chi_B(X)=-(X^3-X^2-X+1)$.
Le spectre, commun aux deux, est $[1,\ 1,\ -1]$.

Remarque : Le fait que 1 soit valeur propre de B doit se lire directement, même si c'est « valeur propre de ${}^tB$ » qui est le plus naturel car on a alors un vecteur propre.
Mais si, regardez : ${}^tB=\begin{pmatrix} -7 & 4 & 0 \\ -12 & 7 & 0 \\ 20 & -10 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -7 & 4 & 0 \\ -12 & 7 & 0 \\ 20 & -10 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=1.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si A et B étaient semblables, A^2 serait semblable àB^2 ($A^2 = P.B^2.P^{-1}$). Or, rien, à part I_3 n'est semblable à I_3.

Remarque : Les deux matrices sont le même spectre, mais seule B se diagonalise en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Et A se trigonalise en $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. C'est à dire « est semblable à cette matrice trigonale.
Un trigône est un polygône à trois côtés.
Ou, c'est un triangle, et la matrice est triangulaire ou trigonale...

∘35∘

♡ Donnez la dimension de l'espace des matrices réelles carrées de taille 4 vérifiant ${}^tM = 5.M$.
Donnez la dimension du $\mathbb{C}-$espace vectoriel des matrices carrées de taille 4 vérifiant ${}^tM = i.M$.
Rappel : si la matrice A a pour terme général a_i^k, alors la matrice ${}^tA$ a pour terme général a_k^i. Pensez à regarder ${}^t({}^tA)$.

Ces ensembles sont bien des espaces vectoriels. La matrice nulle vérifie ceci.
Et si on a ${}^tM = 5.M$ et ${}^tN = 5.N$ alors on a bien ${}^t(\alpha.M + \beta.N) = 5.(\alpha.M + \beta.N)$.

Mais en fait, c'est très rapide. Si on a ${}^tM = 5.M$ alors on a aussi ${}^t({}^tM) = 5.{}^tM$ en transposant
$M = 5.{}^tM$ en simplifiant
$M = 5.(5.M)$

La seule matrice possible est la matrice nulle.

Remarque : Il était inutile de redescendre jusqu'aux coefficients.

La dimension vaut 0.
Il en est de même avec i.

∘36∘

Existe-t-il une matrice de $M_5(\mathbb{R})$ dont le carré est $-I_5$?

Je pose 25 coefficients, j'écris 25 équation...
Et je finis à l'E.N.S.F.C.C. (ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE FABRICATION DES CUVETTES DE CHIOTTES, ça finira bien par exister, pour que les élèves bas de plafond aient un débouché).

Non, on réfléchit et on se dit qu'il doit y avoir une solution simple, avec la présence du mot « réel » et la dimension 5.
Par l'absurde, si il existe une telle matrice M, alors $M^2 = -I_n$.
On passe au déterminant :

$$(\det(M))^2 = \det(M^2) = \det(-I_5) = (-1)^5.\det(I_5) = -1$$

Et on a notre contradiction.

∘37∘

Montrez que toute matrice réelle symétrique $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ admet deux valeurs propres distinctes ou est de la forme $a.I_2$.
Montrez qu'une matrice complexe symétrique $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ peut admettre la valeur propre 0 (valeur propre double) sans pour autant être la matrice nulle.

Le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est $X^2 - (a + c).X + (a.c - b^2)$.
Son discriminant vaut $(a - c)^2 + 4.b^2$.
Si $a = c$ et $b = 0$, le discriminant est nul, on a une racine double, mais la matrice est $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, déjà diagonale[6]

6. donc diagonalisable avec $P = I_2$ par exemple)

Sinon, le discriminant est strictement positif, on a deux valeurs propres distinctes et le corolaire de VanDerMonde fait que la matrice est diagonalisable.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ a pour trace et déterminant 0.
Son équation caractéristique est $x^2 = 0$ d'inconnue x.
Elle n'a qu'une valeur propre : 0.
Si elle se diagonalisait, on aurait $M = P.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.P^{-1}$ pour P convenable, ce qui est impossible.
Elle ne se diagonalise pas, mais se trigonalise en $M = P.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.P^{-1}$ (forme $M = P.\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.P^{-1}$ avec λ nul).
Il suffit de prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$ par exemple.
Vérifiez

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

∘38∘

Montrez que toutes les puissances d'une matrice symétrique sont symétriques. Qu'en est il des matrices antisymétriques ?
Montrez que le produit de deux matrices symétriques n'est pas forcément une matrice symétrique. Même question avec antisymétrique.

∘39∘

♡ Soit f linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(\overrightarrow{u}) = 3.\overrightarrow{u}$ pour tout $\overrightarrow{u}$ du plan de vecteur normal $2.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ et $f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$. Calculez l'image de $x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k}$.

f est définie pour les vecteurs suivants : $\overrightarrow{i}$ mais aussi $\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ (tous deux dans le plan).
f est alors définie partout par linéarité *(histoire de somme directe)*.
Il suffit alors de décomposer

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On résout un système (ou on inverse $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{2.x + y - z}{2}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-y + z}{2}.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et par linéarité de f :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{2.x + y - z}{2}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-y + z}{2}.\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le reste n'est plus que calcul *(le début aussi, mais au moins, le début c'est des calculs intelligents)*.

∘40∘

Combien existe-t-il d'endomorphismes de $(E, +, .)$ de noyau $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, d'image $Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix})$ et de trace 5.
Attention, on travaille avec $E = \mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}$ égal à l'ensemble des entiers de 0 à 10 pour l'addition et la multiplication (et la division) modulo 11.
Combien existe-t-il d'endomorphismes de $(E, +, .)$ d'image $Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix})$ et de trace 5.

On veut un endomorphismes de $(E, +, .)$ de noyau $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, d'image $Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix})$ et de trace 5. Les dimensions sont cohérentes.
On écrit la matrice d'un tel endomorphisme sur la base canonique de $\{0, \ldots 10\}^2$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et on traduit les

exigences :

les colonnes sont multiples de $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 2.a & 2.b \\ 5.a & 5.b \end{pmatrix}$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans le noyau : $\begin{matrix} 2.a & +2.b & = 0 \\ 5.a & +5.b & = 0 \end{matrix}$

L'élève gentillet écrit : il faut que tous les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ *sont dans le noyau, donc* $\begin{matrix} 2.a.x & +2.b.x & = 0 \\ 5.a.x & +5.b.x & = 0 \end{matrix}$ *. Et si il est un peu plus intelligent que gentillet, il ajoute : c'est vrai pour tout x, c'est équivalent à* $\begin{matrix} 2.a & +2.b & = 0 \\ 5.a & +5.b & = 0 \end{matrix}$ *(et si il est idiot, il ajoute « sauf pour* $x = 0$ *», alors même qu'il avait un* $\forall x$*.*
Pourquoi je le traite de gentillet ? parce que il regarde pour tous les vecteurs au lieu de se contenter de regarder pour une base. Or, se limiter à des bases, à des sous-espaces qui forment une somme directe, c'est justement avoir l'intelligence de l'algèbre linéaire.

On exige donc $a + b = 0$. la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} 2.a & -2.a \\ 5.a & -5.a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 2.a & 9.a \\ 5.a & 6.a \end{pmatrix}$.
Il reste une exigence sur la trace : $-3.a = 5$ ou $8.a = 5$. On n'a plus qu'une valeur pour a : 2.

La matrice cherchée est donc $\boxed{\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}}$ et il n'y en a qu'une.

On oublie l'exigence de noyau : la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} 2.a & 2.b \\ 5.a & 5.b \end{pmatrix}$ avec $2.a + 5.b = 5$.
Pour chaque valeur de b, il y a une unique valeur de a : $a = 5.(1-b)/2 = 5.(1-b).6 = 8.(1-b)$.
On trouve 11 solutions dont on peut donner la liste
$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

◦41◦

On pose $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$, $D = Vect(\overrightarrow{i} + \alpha.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k})$. Résolvez $D \oplus P = \mathbb{R}^3$ d'inconnue réelle α.

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ est un plan. On en donne une base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$Vect(\overrightarrow{i} + \alpha.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k})$ est une droite de base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Les deux espaces sont supplémentaires si et seulement si ces trois vecteurs forment une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
On calcule le déterminant et on demande qu'il soit non nul. La seule valeur interdite est $\alpha = 1$ *(auquel cas le dernier est la somme des deux premiers[7]).*

Autre approche : il faut et il suffit que le droite ne soit pas incluse dans le plan. Le vecteur $\overrightarrow{i} + \alpha.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}$ ne doit pas vérifier l'équation du plan : $A + \alpha - 2 \neq 0$.

◦42◦

A et B sont deux sous espaces vectoriels de $(E, +, .)$ (espace de dimension finie) vérifiant $A + B = E$.
Montrez qu'il existe $\begin{matrix} C & \text{sous espace vectoriel de } A & \text{vérifiant} & C \oplus B = E \\ D & \text{sous espace vectoriel de } D & \text{vérifiant} & A \oplus D = E \end{matrix}$.
Que pouvez vous dire si $C + D = E$?

Les deux résultats sont symétriques dans les rôles de A et B. On va démontrer le premier. : l'existence de D.

Commençons par prendre une base de A : $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_p})$ et une base de B : $(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_q})$.
On est en dimension finie, on en profite, il y a des bases.
On sait déjà que $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_p}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \dots, \overrightarrow{b_q})$ est génératrice de $(E, +, .)$, mais pas forcément une base (sinon on aurait écrit $E = A \oplus B$).
On pourrait enlever des vecteurs pour la libérer en base. mais on peut tout aussi bien enlever des $\overrightarrow{a_i}$ que des $\overrightarrow{b_j}$.

7. *comme le dit le chat de Philippe Geluck : « le jour où les premiers seront les derniers... et les derniers les premiers... alors ça ne changera strictement rien pour ceux qui sont au milieu*

Mais on a un théorème qui permet de compléter une famille libre en base.
On part de la famille libre $(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_p})$ (en tant que base de A, elle est libre dans A donc dans E).
On lui ajoute un par un des vecteurs de B tant que la famille reste libre jusqu'à ce qu'on ne puisse plus.
Algorithme précis :

- prendre un vecteur $\overrightarrow{\beta_1}$ de B tel que $(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_p},\ \overrightarrow{\beta_1})$ soit libre

- prendre un vecteur $\overrightarrow{\beta_2}$ de B tel que $(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_p},\ \overrightarrow{\beta_1},\ \overrightarrow{\beta_2})$ soit libre

- prendre un vecteur $\overrightarrow{\beta_3}$ de b tel que $(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_p},\ \overrightarrow{\beta_1},\ \overrightarrow{\beta_2},\ \overrightarrow{\beta_3})$ soit libre

- continuer ainsi tant que c'est possible.

La chose s'arrête impérativement car la taille des familles libres de $(E,+,.)$ est limitée par la dimension.
Quand l'algorithme s'arrête, la famille $(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_p},\ \overrightarrow{\beta_1},\ldots,\overrightarrow{\beta_r})$ est libre.
Est ce alors une base de E ? Elle est libre.
Par l'absurde : si elle n'est pas génératrice, il ; existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ de E qui lui échappe et n'est pas combinaison linéaire de cette famille.
Un tel vecteur $\overrightarrow{u}$ s'écrit $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ avec $\overrightarrow{a}$ dans A et $\overrightarrow{b}$ dans B puisque $E=A+B$.
Comme $(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_p},\ \overrightarrow{\beta_1},\ldots,\overrightarrow{\beta_r}\ \overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$ est libre, $(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_p},\ \overrightarrow{\beta_1},\ldots,\overrightarrow{\beta_r}\ \overrightarrow{b})$ l'est aussi (on efface $\overrightarrow{a}$ à l'aide de $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_p})$ et ceci contredit le fait que l'algorithme aurait du s'arrêter.

Il suffit ensuite de prendre $D=Vect(\overrightarrow{\beta_1},\ \overrightarrow{\beta_2},\ldots,\overrightarrow{\beta_r})$. C'est un sous-espace vectoriel de B (construit avec des combinaisons de vecteurs de B).
Et on a bien $A\oplus D=E$ puisqu'on a une base de E cette fois en mettant bout à bout une base de chacun.

On fait de même en partant de $(\overrightarrow{b_1},\ \overrightarrow{b_2},\ldots,\overrightarrow{b_q})$ qu'on agrandit avec des $\overrightarrow{\alpha_i}$ bien choisis dans A.

Si on a $E=A+B$ et $E=C+D$, avec $C\subset A$, $C\oplus B=E$, $D\subset B$ et $A\oplus D=E$, on a, déjà en termes de dimensions :

1	$\dim(A)+\dim(B)\geqslant\dim(E)$		3	$\dim(C)+\dim(D)\geqslant\dim(E)$		5	$\dim(A)\geqslant\dim(C)$
2	$\dim(A)+\dim(D)=\dim(E)$		4	$\dim(C)+\dim(B)=\dim(E)$		6	$\dim(B)\geqslant\dim(D)$

$$\dim(E)=\dim(A)+\dim(D)\geqslant\dim(C)+\dim(D)\geqslant\dim(E)$$

(on a utilisé 2, 5 et 3).
Par antisymétrie, on a donc des égalités, et ainsi 5 devient forcément $\dim(A)=\dim(C)$.
Comme on a une inclusion : $A=C$.
On reporte dans $B\oplus C=E$: B est un supplémentaire de A.
Et vice versa.

On fait de même avec 4, 6 et 3 : $\dim(B)=\dim(D)$. On a donc $B=D$.
A la fin : $A+C$ et $B=D$ puis $A\oplus B=E$.

◦43◦ ♣ Il y a trente nombres anagrammes de 123 456 789 qui sont des carrés parfaits, comme 361 874 529 $=(19\,023)^2$.
Dressez en la liste avec l'aide du `Python` suprême.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
B	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
C	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
D	☐	■	☐	☐	■	■	■	☐	☐
E	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
F	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
G	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
H	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
I	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

`A`, `B`, `a`, `c`, `d`, `h` et `i` sont justement des carrés anagrammes de 412 739 856 (les racines carrées de deux d'entre eux sont en `b2` et `e2`). `F` est aussi un anagramme de 123456789 mais n'est pas un carré parfait. Les premiers de `b`, `e`, `f` et `g` sont des palindromes (comme 161). La somme des chiffres de `G` vaut 36. Le produit des chiffres de `D1` vaut 27, et la somme des chiffres de `D2` vaut 63.
Et si vous avez de bonnes lunettes à défaut d'un serpent :

(11826, 139854276) (12363, 152843769) (12543, 157326849) (14676, 215384976) (15681, 245893761) (15963, 254817369) (18072, 326597184) (19023, 361874529) (19377, 375468129) (19569, 382945761) (19629, 385297641) (20316, 412739856) (22887, 523814769) (23019, 529874361) (23178, 537219684) (23439, 549386721) (24237, 587432169) (24276, 589324176) (24441, 597362481) (24807, 615387249) (25059, 627953481) (25572, 653927184) (25941, 672935481) (26409, 697435281) (26733, 714653289) (27129, 735982641) (27273, 743816529) (29034, 842973156) (29106, 847159236) (30384, 923187456)