Table des matières

Six théorèmes d'algèbre linéaire, bilinéaire et multilinéaire

8 avril 2025

Première partie

Théorème fondamental de la dimension finie

1 Lemme d'agrandissement

> Soit $(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2}, \dots \overrightarrow{a_r})$ une famille libre de l'espace vectoriel $(E, +, .)$ et $\overrightarrow{b}$ un vecteur de $(E, +, .)$.
> La famille agrandie $(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2}, \dots \overrightarrow{a_r})$ reste libre si et seulement si $\overrightarrow{b}$ n'est pas combinaison linéaire de $(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2}, \dots \overrightarrow{a_r})$.

Formulation par contraposée de l'équivalence :
La famille agrandie $(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2}, \dots \overrightarrow{a_r})$ devient liée si et seulement si $\overrightarrow{b}$ est combinaison linéaire de $(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2}, \dots \overrightarrow{a_r})$.

En algèbre linéaire, une famille de vecteurs est juste une liste de vecteurs (éventuellement vide, qui est un cas particulier à ne pas oublier).
On pourra envisager des familles infinies dénombrables (comme la base canonique de $(\mathbb{R}[X], +, .)$) ou même non dénombrables comme la famille de tous les vecteurs de l'espace, ou même les basses (non explicitables) de l'espace des suites réelles.

2 Familles liées

2.1 Définition : L'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Pour deux vecteurs, on dira colinéaires.
Pour trois vecteurs, on dira coplanaires.
Il n'y a pas de formulation agréable pour n vecteurs (co-hyperplanaires ?).
Si la famille contient le vecteur nul, alors elle est liée (non réciproque).
Si la famille contient deux vecteurs colinéaires, alors elle est liée (non réciproque évidemment).

2.2 Quand on agrandit une famille liée, elle reste liée.

Il suffit de ne pas utiliser le nouveau vecteur (coefficient nul dans une relation de dépendance linéaire).

2.3 Comment prouver qu'une famille est liée.

1. Exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres en donnant des α_k vérifiant $\overrightarrow{a_i} = \sum\limits_{k\neq i} \alpha_k.\overrightarrow{a_k}$.

2. Trouver une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs $\sum_k \lambda_k.\overrightarrow{a_k} = \overrightarrow{0}$ avec au moins un λ_k non nul.
3. Trouver une sous famille visiblement liée.
4. Compter les vecteurs (en anticipant sur la suite).
5. Montrer que c'est l'image d'une famille liée bien choisie.par une application linéaire bien choisie.

3 Familles libres (= non liées)

3.1 Quantifications équivalentes

Il est lourd de quantifier « aucun vecteur n'est combinaison des autres ».
On quantifiera plutôt « il n'existe pas de relation de dépendance linéaire entre les vecteurs ».

$$\overline{\exists(\alpha_1, \ldots \alpha_r) \in \mathbb{R}^r, \ \Big(\sum_{k=1}^{r} \alpha_i.\overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{0}\Big) \ et \ \Big(\exists i, \ \alpha_i \neq 0\Big)}$$

Et très logiquement, ceci donne

$$\forall(\alpha_1, \ldots \alpha_r) \in \mathbb{R}^r, \ \Big((\sum_{k=1}^{r} \alpha_i.\overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{0}) \Rightarrow (\forall i, \ \alpha_i = 0)\Big)$$

Il faudra être très méticuleux sur l'introduction des variables et ne pas quantifier n'importe comment.

La seule combinaison linéaire donnant $\overrightarrow{0}$ est la combinaison linéaire triviale.

La famille $(\overrightarrow{a_1}, \ldots \overrightarrow{a_r})$ est libre si et seulement si $(\lambda_1, \ldots \lambda_r) \longmapsto \sum_{k=1}^{r} \lambda_k.\overrightarrow{a_k}$ est injective de $(\mathbb{R}^n, +, .)$ dans $(E, +, .)$.

C'est la liberté d'une famille de vecteurs (et uniquement elle) qui permet d'effectuer une identification dans des formules comme

$$(\alpha_r.\overrightarrow{a_r} + \ldots + \alpha_r.\overrightarrow{a_r} = \alpha_r.\overrightarrow{a_r} + \ldots + \alpha_r.\overrightarrow{a_r}) \Rightarrow (\alpha_1 = \beta_1, \ldots \alpha_r = \beta_r)$$

3.2 Comment prouver qu'une famille est libre

1. Poser puis résoudre un système.
2. Calculer un déterminant si la famille a le bon cardinal.
3. Agrandir la famille puis calculer un déterminant.
4. Montrer que son image par une application linéaire bien choisie (projection...) reste libre.
5. Pour les familles de fonctions : prendre les valeurs en des points bien choisis, dériver, regarder le comportement asymptotique...

4 Sous-espace engendré par une famille

C'est l'espace vectoriel de toutes les combinaisons linéaires (finies) des vecteurs de la famille.

L'ordre des vecteurs n'a aucune importance.

Si l'on transforme la famille par une transformation réversible [1], le sous-espace engendré reste le même.

Une famille de vecteurs est toujours génératrice... de l'espace vectoriel qu'elle engendre.

La famille $(\overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_n})$ engendre $(E, +, .)$ si et seulement si $(\lambda_1, \dots \lambda_n) \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.\overrightarrow{g_k}$ est surjective de $(\mathbb{R}^n, +, .)$ dans $(E, +, .)$.

5 Preuve du lemme d'agrandissement.

On suppose donc la famille $(\overrightarrow{a_1}, \dots \overrightarrow{a_r})$ libre (inutile de quantifier).

On va montrer une double implication entre « $(\overrightarrow{a_1}, \dots \overrightarrow{a_r}, \overrightarrow{b})$ liée » et « $\overrightarrow{b} \in Vect((\overrightarrow{a_1}, \dots \overrightarrow{a_r})$ ».

5.1 • Sens direct.

On suppose $(\overrightarrow{a_1}, \dots \overrightarrow{a_r}, \overrightarrow{b})$ liée par une relation de la forme $(\overrightarrow{a_1}, \dots \overrightarrow{a_r}, \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0}$ (avec au moins un des coefficients non nuls).
Si β était nul, on aurait avec au moins un des α_i non nul, ce qui contredit l'hypothèse « $(\overrightarrow{a_1}, \dots \overrightarrow{a_r})$ libre ».
Ayant éliminé « β est nul », on peut diviser par β et obtenir $\overrightarrow{b} = \dfrac{\alpha_1.\overrightarrow{a_1} + \dots + \alpha_r.\overrightarrow{a_r}}{\beta} \in Vect(\overrightarrow{a_1}, \dots . \overrightarrow{a_r})$.

5.2 • Sens indirect.

On suppose que $\overrightarrow{b}$ est combinaison linéaire de $(\overrightarrow{a_1}, \dots . \overrightarrow{a_r})$ alors, par définition même, $(\overrightarrow{a_1}, \dots . \overrightarrow{a_r}, \overrightarrow{b})$ est liée.

6 Applications du lemme d'agrandissement

On a équivalence entre les propriétés suivantes pour une famille de vecteurs

base de $(E, +, .)$	tout vecteur se décompose, d'une façon unique
libre et génératrice	
libre maximale	libre, et devient liée quand on l'agrandit
génératrice minimale	génératrice, cesse de l'être quand on enlève un vecteur

7 Théorème fondamental de la dimension finie

7.1 Énoncé

Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

1. combinaisons, multiplication de certains vecteurs par des coefficients non nuls

Formulations équivalentes en sous-entendant déjà la notion de dimension.
La dimension d'un espace est supérieure ou égale au cardinal d'une famille libre.
La dimension d'un espace est inférieure ou égale au cardinal d'une famille génératrice.

			génératrices	
libres				E engendre E
			bases	
$0 = \dim(\{\overrightarrow{0}\})$	$\dim(F)$ sev de E		$n = \dim(E)$	
$Vect(\emptyset) = \{\overrightarrow{0}\}$	droites			

Attention, la famille vide est libre, en revanche, le vecteur nul forme une famille liée.
Un sous-espace vectoriel ne peut pas être vide.

7.2 Démonstration

Par récurrence sur le cardinal de la famille génératrice.
Voir « Beaux théorèmes de Sup ».

8 Corolaires du théorème fondamental

8.1 Dans un espace vectoriel, les bases ont toutes le même cardinal

Il suffit de considérer la première base comme une famille libre, et la seconde comme une famille génératrice,
puis d'inverser les rôles.

C'est ce qui permet de définir la dimension d'un espace vectoriel : cardinal d'une base et donc de toutes les bases.

8.2 Comment on détermine la dimension d'un espace vectoriel

1. On trouve une base explicite.
2. On encadre sa dimension en trouvant une famille libre et une famille génératrice de même cardinal.
3. On trouve un isomorphisme [2] avec un autre espace vectoriel dont la dimension est connue.

8.3 Démonstrations pour flemmards

Si $(E, +, .)$ est un espace vectoriel de dimension n (parce qu'on en connaît une base) alors

• toute famille libre de cardinal n est directement une base de $(E, +, .)$

• toute famille génératrice de $(E, +, .)$ de cardinal n est automatiquement une base de $(E, +, .)$.

8.4 Dimension des sous-espaces vectoriels

Si $(E, +, .)$ est un espace vectoriel de dimension n (on en connaît une base), alors tous ses sous-espaces sont de dimension inférieure ou égale à n.
De plus, si F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ vérifiant $\dim(F) = \dim(E)$ alors on a $F = E$.

2. application linéaire bijective ; elle conserve donc les dimensions

Deuxième partie
Base incomplète

9 Complétion d'une famille libre en base

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel muni d'une famille génératrice $(\overrightarrow{g_1},\dots\overrightarrow{g_p})$ et d'une famille libre $(\overrightarrow{a_1},\dots\overrightarrow{a_r})$ (éventuellement vide).
Alors, on peut choisir des vecteurs de la famille $(\overrightarrow{g_1},\dots\overrightarrow{g_p})$ pour compléter $(\overrightarrow{a_1},\dots\overrightarrow{a_r})$ en une base de $(E,+,.)$ $(\overrightarrow{a_1},\dots\overrightarrow{a_r},\ \overrightarrow{g_{i_1}},\dots\overrightarrow{g_{i_{n-r}}})$.

Remarque : même si on ne dispose pas d'une famille génératrice donnée, on peut estimer que E est elle même une famille génératrice de $(E,+,.)$ et on complète donc toute famille libre en base.
En dimension infinie, le résultat n'est plus évident e nécessite l'axiome du choix. Et c'est la porte ouverte aux phénomènes paradoxaux dans quelques cas.

9.1 Existence de bases en dimension finie

Un espace vectoriel est dit de dimension finies si il admet une famille génératrice finie.

On sait alors majorer le cardinal des familles libres.

On part alors de la famille libre la plus petite : la famille vide. Tant qu'on peut l'agrandir en famille libre, on le fait. Quand on ne peut plus, on a obtenu une base.

10 Formule de Grassmann $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$

Si F et G sont deux sous-espaces de $(E,+,.)$, on commence par construire une base de $F\cap G$.
On la complète d'un côté en base de F.
On la complète de l'autre côté en base de G.
On fusionne les trois familles, on trouve une base de $F+G$.
On compte les vecteurs et on trouve

$$\boxed{\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)}$$

Il est capital de partir d'une base de $F\cap G$ et non pas « d'une base de F et d'une base de G ».

10.1 Cas particulier de la somme directe

On a alors $\dim(F\oplus G)=\dim(F)+\dim(G)$.

Une bonne lecture de la formule de Grassmann permet éventuellement de montrer qu'une somme de sous-espaces est justement directe.

10.2 Existence de supplémentaires en dimension finie

Si $(E,+,.)$ est un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$.
On part de la famille vide qu'on voit comme famille libre de F.

On l'agrandit jusqu'à obtenir une base de F : $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_d})$.
On la considère comme une famille libre de $(E,+,.)$.
On l'agrandit en base de $(E,+,.)$: $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_d}, \overrightarrow{e_{d+1}}, \dots \overrightarrow{e_n})$.
On peut alors montrer que $Vect(\overrightarrow{e_{d+1}}, \dots \overrightarrow{e_n})$ est un supplémentaire de F dans E et sa dimension vaut $\dim(E) - \dim(F)$.

Tout sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie admet des supplémentaires.

Attention, un sous-espace vectoriel a plusieurs supplémentaires. Il suffit de penser à toutes les droites qui sont supplémentaires d'un plan de $(\mathbb{R}^3,+,.)$.
Il reste évidemment le cas particulier $\{\overrightarrow{0}\}$ *et E qui sont d'ailleurs supplémentaires l'un de l'autre.*
Une fois qu'on aura fixé un produit scalaire sur notre espace, on pourra (voir Gram-Schmidt) parler de l'unique supplémentaire orthogonal.
Enfin, il ne faudra jamais confondre supplémentaire et complémentaire (ce dernier n'est d'ailleurs pas un espace vectoriel).
Le complémentaire est une notion ensembliste, élément par élément. Un supplémentaire est une notion algébriste, avec juste des vecteurs formant une base.

Troisième partie

Théorème du rang

11 Définitions du rang

11.1 Rang d'une famille de vecteurs dans un espace vectoriel $(E,+,.)$

C'est la dimension de l'espace vectoriel qu'elles engendrent.
C'est donc le cardinal de la plus grande famille libre qu'on peut en extraire.

La famille vide est de rang 0*, de même que la famille réduite au vecteur nul.*
Une famille formée d'un vecteur non nul est de rang 1*.*
Une famille formée de deux vecteurs non colinéaires est de rang 2*.*

Le rang d'une famille de p vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est majoré à la fois par n et par p.

11.2 Rang d'une application linéaire de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$

C'est la dimension de son ensemble image.

Il suffit de prendre une base de l'espace de départ et de regarder le rang de la famille image.

Le rang est donc déjà majoré par la dimension de l'espace d'arrivée, mais aussi par la dimension de l'espace de départ.

11.3 Rang et composition (première inégalité)

Le rang diminue par composition : $rg(g \circ f) \leqslant rg(g)$.
En effet, $Im(g \circ f)$ est un sous-espace vectoriel de $Im(g)$.

11.4 Rang par colonnes d'une matrice rectangulaire (ou carrée)

C'est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice.

C'est donc le nombre de colonnes linéairement indépendantes.
Si on détecte un déterminant extrait non nul, de taille r sur r alors le rang vaut au moins r.

Le rang est inférieur au nombre de colonnes mais aussi au nombre de lignes.

11.5 Rang par lignes d'une matrice rectangulaire (ou carrée)

C'est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les lignes de la matrice.
On pourra considérer que c'est le rang « en colonnes » de la transposée de la matrice.
Mais on pourra aussi le lire comme le rang d'un système d'équations (nombre d'équations linéairement indépendantes donc vraiment utiles »).

11.6 Équivalence des différentes définitions

En considérant l'expression d'une famille de vecteurs sur une base, on passe du rang « vecteurs » au rang « matrice », et vice versa.
En assimilant une application linéaire f de $(E, \mathcal{B})$ dans $(F, \odot)$ à sa matrice $Mat_{\beta}^{B}(f)$, on passe au rang « morphisme » au rang « matrice », et vice versa.

11.7 Encadrements

Comme indiqué à chaque fois, on peut majorer le rang par à la fois le nombre de vecteurs (nombre de colonnes, dimension de l'espace de départ)
et la dimension de l'espace ambiant (nombre de lignes, dimension de l'espace d'arrivée).
On peut minorer aussi le rang en comptant les vecteurs ou colonnes indépendantes.

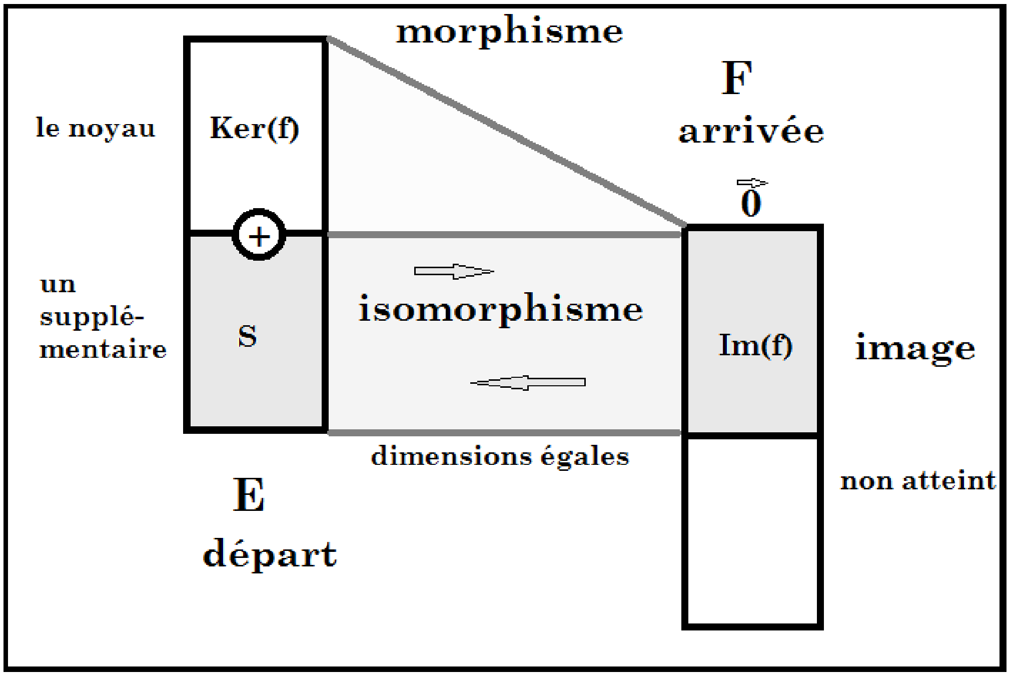
12 Théorème du rang : isomorphisme entre un supplémentaire du noyau et l'image

Si f est une application linéaire de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$ alors sa restriction à un supplémentaire de $Ker(f)$ réalise un isomorphisme entre ce supplémentaire et l'espace image.

Une fois qu'on se place sur un supplémentaire du noyau, tout défaut d'injectivité est effacé.
Une fois qu'on se restreint à l'espace image au lieu de l'espace d'arrivée, le morphisme devient bijectif.

12.1 Démonstration

On prend donc f linéaire de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$, espaces vectoriels sur un même corps $(\mathbb{K}, +, .)$ *(on ne supposera E de dimension finie que pour les versions "base" et "dimension", et la dimension de $(F, +, .)$ n'a aucune importance).*



12.1.1 Version "isomorphisme".

On note S un supplémentaire de $Ker(f)$ dans E, on a donc $E = Ker(f) \oplus S$ *(tout vecteur de E se décompose d'une façon unique comme somme d'un vecteur de Ker(f) et d'un vecteur de S).*

On sait déjà que f reste linéaire sur le sous-espace vectoriel S.

On notera $\overline{f}$ l'application f quand on la considèrera de S dans F *(cas particulier)*.
L'image de tout vecteur de S est dans $Im(f)$, comme image d'un vecteur de E (c'est $Im(\overline{f}) \subset Im(f)$, et on verra $Im(\overline{f}) = Im(f)$).
$\overline{f}$ est alors injective de S dans $Im(f)$. On passe pour cela par le noyau de $\overline{f}$. On prend un vecteur $\overrightarrow{s}$ de S d'image nulle par $\overline{f}$. Il vérifie $\overline{f}(\overrightarrow{s}) = \overrightarrow{0}$. Le vecteur $\overrightarrow{s}$, vu comme vecteur de E est donc dans $Ker(f)$. Étant à la fois dans $Ker(f)$ et S, il est nul *(somme directe)*.
Enfin, $\overline{f}$ est surjective de S sur $Im(f)$. On prend un vecteur $\overrightarrow{v}$ dans $Im(f)$. Par définition, il a au moins un antécédent $\overrightarrow{u}$ dans E. Par définition de la somme *(directe)*, $\overrightarrow{u}$ s'écrit $\overrightarrow{k} + \overrightarrow{s}$ avec $\overrightarrow{k}$ dans $Ker(f)$ et $\overrightarrow{s}$ dans S. On a alors $\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{k} + \overrightarrow{s}) = f(\overrightarrow{k}) + f(\overrightarrow{s}) = \overline{f}(\overrightarrow{s})$. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ de $Im(f)$ a donc un antécédent $\overrightarrow{s}$ dans S *(unique comme vu plus haut)*.

12.1.2 Version "bases".

On suppose $(E, +, .)$ de dimension finie n. Comme $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$, il est aussi de dimension finie, et par théorème de la base incomplète *(en partant de la famille vide)*, on peut le doter d'une base *(éventuellement vide si f est injective)* : $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k})$ avec $k = \dim(Ker(f)) \leqslant n$.
Encore par théorème de la base incomplète, on agrandit en base de E : $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{e_{k+1}}, \dots \overrightarrow{e_n})$.

On sait déjà que la famille image de cette base $(f(\overrightarrow{e_1}), \dots f(\overrightarrow{e_k}), f(\overrightarrow{e_{k+1}}), \dots f(\overrightarrow{e_n}))$ est génératrice de $Im(f)$.
Comme $f(\overrightarrow{e_1})$ à $f(\overrightarrow{e_k})$ sont nuls, on a déjà $(f(\overrightarrow{e_{k+1}}), \dots f(\overrightarrow{e_n}))$ qui engendre $Im(f)$.

On montre à présent que cette famille est libre. On part d'une combinaison $\alpha_{k+1}.f(\overrightarrow{e_{k+1}}), \dots + \alpha_n.f(\overrightarrow{e_n})$ qu'on suppose nulle *(objectif : les α_i sont nuls)*. Par linéarité, on a donc $f(\alpha_{k+1}.\overrightarrow{e_{k+1}}, \dots + \alpha_n.\overrightarrow{e_n}) = \overrightarrow{0_F}$. On reconnaît que $\alpha_{k+1}.\overrightarrow{e_{k+1}}, \ldots + \alpha_n.\overrightarrow{e_n}$ est dans $Ker(f)$ et s'écrit donc $\beta_1.\overrightarrow{e_1} + \ldots + \beta_k.\overrightarrow{e_k}$. On écrit alors

$$\beta_1.\overrightarrow{e_1} + \ldots + \beta_k.\overrightarrow{e_k} - \alpha_{k+1}.\overrightarrow{e_{k+1}} - \ldots - \alpha_n.\overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0_E}$$

Par liberté de la base : les α_i et les β_j sont nuls.

13 Formule du rang $\dim(E) - \dim(Ker(f)) = \dim(Im(f))$

Il suffit de dire que si il existe un isomorphisme entre deux espaces, alors ils ont la même dimension (une base de l'un devient une base de l'autre).
Or, la dimension d'un supplémentaire de $Ker(f)$ est $\dim(E) - \dim(Ker(f))$.

On pourra retenir la formule $\dim(E) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f))$, *mais elle comporte un risque de confusions. En effet, $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont deux espaces qu'on ne peut guère comparer, puisque l'un est un sous-espace de l'espace de départ et l'autre un sous-espace de l'espace d'arrivée.*

On pourra aussi écrire $rg(f) = \dim(E) - \dim(Ker(f))$ *puisque c'est la définition du rang.*
Plus le noyau est grand, plus l'image est petite. Toute dimension gagnée sur le noyau fait perdre une dimension sur l'image.

13.1 Rang et composition (deuxième inégalité et suivantes)

Le rang ne peut que diminuer par composition $rg(g \circ f) \leqslant Min(rg(g),\ rg(f))$.

On sait déjà $Im(g \circ f) \subset Im(g)$ (et ceci nous donne $rg(g \circ f) \leqslant rg(g)$).

Mais on sait aussi $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$. On passe aux dimensions, on soustrait à $\dim(E)$ (espace de départ de f et $g \circ f$) et on obtient $rg(g \circ f) \leqslant rg(f)$.

En revanche, la composition par un isomorphisme ne modifie pas le rang.

Il existe de multiples exercices qui permettent d'encadrer le rang d'une somme, d'une composée, comme $rg(f+g) \leqslant rg(f) + rg(g)$.

14 Théorèmes pour flemmards (cas des endomorphismes en dimension finie)

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

Il y a alors équivalence entre

f est bijective
f est injective
f est surjective

Ceci implique qu'une matrice carrée inversible à droite est alors aussi inversible à gauche, et de surcroit c'est le même inverse qui sert des deux côtés.

En revanche, en dimension infinie, comme on ne peut pas utiliser la formule du rang, le théorème n'est plus valable. On tient deux exemples avec $P(X) \longmapsto P'(X)$ *(surjective non injective) et* $P(X) \longmapsto X.P(X)$ *(injective, non surjective) de* $(\mathbb{R}[X], +, .)$ *dans lui même.*

15 Théorèmes pour flemmards (cas des morphismes généraux)

Dans ce qui suit, $(P,+,.)$ est un espace vectoriel de dimension p et $(Q,+,.)$ est un espace vectoriel de dimension q. On supposera pour la lisibilité $p<q$.
Alors on sait qu'il ne peut pas exister d'application surjective de P dans Q.
Et on sait aussi qu'il ne peut pas exister d'application injective de Q dans P.

> *Exemple : pas d'application linéaire surjective de* $(\mathbb{R}^3,+,.)$ *dans* $M_2(\mathbb{R}),+,.)$.
> *Et pas d'applications linéaire injective de* $(S_3(\mathbb{R}),+,.)$ *dans* $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$. *On sait même que le noyau sera au moins de dimension* 2.

On retrouve aussi certains réflexes qu'on peut avoir sur les systèmes linéaires rien qu'en comptant le nombre d'équations et le nombre d'inconnues (système sous-contraints et sur-contraints).

16 Équivalence de matrices et rang

16.1 Réduction d'une matrice de rang r en une matrice élémentaire

Soit A une matrice rectangulaire à q colonnes et n lignes.
On la considère alors comme matrice d'une application linéaire $f=X\longmapsto A.X$ de $(\mathbb{R}^q,+,.)$ dans $(\mathbb{R}^n,+,.)$.

Les colonnes de A sont alors les images dans $(\mathbb{R}^n,+,.)$ des q vecteurs de la base canonique de $(\mathbb{R}^q,+,.)$.

On considère alors le noyau de f : $Ker(f)=\{X\in\mathbb{R}^q \mid A.X=0_n\}$.
On en prend une base qu'on complète en base de $(\mathbb{R}^q,+,.)$.
Pour la commodité, les premiers vecteurs de la base de $(\mathbb{R}^q,+,)$ forment une base d'un supplémentaire de $Ker(f)$ $(U_1,\dots U_r)$ et ce sont les derniers qui forment une base de $Ker(f)$: $(K_{r+1},\dots K_q)$.
On sait alors que $(A.U_1,\dots A.U_r)$ est une base de $Im(f)$ (sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^n,+,.)$).
On la complète en base de $(\mathbb{R}^n,+,.)$: $(A.U_1,\dots A.U_r,\ I_{r+1},\dots I_n)$.

On considère alors la matrice de f mais cette fois de la base $(U_1,\dots U_r,\ K_{r+1},\dots K_q)$ vers la base $(A.U_1,\dots A.U_r,\ I_{r+1},\dots I_n)$.

1	0	$\dots$	0	0	$\dots$	0	$(f(U_1))^*$
0	1	$\dots$	0	0		0	$(f(U_2))^*$
$\vdots$	$\vdots$			$\dots$		$\dots$	$\vdots$
0	0	$\vdots$	1	0		0	$(f(U_r))^*$
0	0		0	0		0	$(I_{r+1})^*$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\dots$	0	0	$\dots$	0	$(I_n)^*$
$f(U_1)$	$f(U_2)$	$\dots$	$f(U_r)$	$f(K_{r+1})$	$\dots$	$f(K_q)$	

Les dernières colonnes sont nulles, et on a juste des 1 sur une partie de la « diagonale ».

La matrice obtenue est notée $J_{q,n,r}$ les deux premiers nombres indiquent son format (espace de départ, espace d'arrivée), et le dernier désigne le rang r.

> *Exemples des quatre matrices* $J_{3,4,r}$: $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.
> *La première est celle de l'application nulle de* $(\mathbb{R}^3,+,.)$ *dans* $(\mathbb{R}^4,+,.)$. *La seconde a un noyau de dimension* 2 *(formé du plan engendré par les deux derniers vecteurs de base).*
> *La troisième a un noyau de dimension* 1 *(droite* $Vect(\overrightarrow{k})$*). La dernière correspond à un morphisme injectif, mais non*

> *surjectif.*
> *Et il n'y a pas de matrice de rang* 4.

Le changement de base au départ et le changement de base à l'arrivé font intervenir des matrices inversibles (carrées) :
on obtient alors $M = P.J_{q,n,r}.Q$.

Toute matrice rectangulaire M est équivalente (définition ci après) à une matrice de type $J_{q,n,r}$, où r désigne justement le rang de la matrice M.

16.2 Matrices équivalentes

> Deux matrices rectangulaires A et B de même format (p lignes et q colonnes) sont équivalentes si il existe deux matrices inversibles P et Q (de formats p sur p et q sur q) vérifiant $A = P.B.Q$.

Cette relation est réflexive, symétrique et transitive.

En fait, A et B sont deux matrices d'une même application linéaire f de $(\mathbb{R}^q, +, .)$ dans $(\mathbb{R}^p, +, .)$, mais avec un changement de base au départ (c'est Q) et à l'arrivée (c'est P).

$$\begin{array}{ccccc} & (\mathbb{R}^q,\ B) & \stackrel{f}{\longrightarrow} & (\mathbb{R}^p,\ C) & \\ Id_{\mathbb{R}^q} & \downarrow & & \uparrow & Id_{\mathbb{R}^p} \\ & (\mathbb{R}^q,\ \beta) & \underset{f}{\longrightarrow} & (\mathbb{R}^p,\ \Gamma) & \end{array} \quad f = Id_{\mathbb{R}^p} \circ f \circ Id_{\mathbb{R}^q} \text{ puis}$$

$$Mat_C^B(f) = Mat_C^\Gamma(Id_{\mathbb{R}^p}).Mat_\Gamma^\beta(f).Mat_\beta^B(Id_{\mathbb{R}^q})$$

Si deux matrices sont équivalentes alors elles ont le même rang, car la multiplication par des matrices inversibles P et Q (composition avec des automorphismes) ne modifie pas le rang.

Si deux matrices de même format ont le même rang, elles sont équivalentes, car elles sont équivalentes toutes deux à une même matrice $J_{p,q,r}$.

Il ne faut pas confondre équivalentes et semblables.

équivalentes	**semblables**
matrices rectangulaires	matrices carrées
$M = P.R.Q^{-1}$	$A = P.B.P^{-1}$
même morphisme	même endomorphisme
un changement de base au départ	un changement de base
un changement de base à l'arrivée	le même au départ qu'à l'arrivée
$\begin{array}{ccccc} & (\mathbb{R}^q,\ B) & \stackrel{f}{\longrightarrow} & (\mathbb{R}^p,\ C) & \\ Id_{\mathbb{R}^q} & \downarrow & & \uparrow & Id_{\mathbb{R}^p} \\ & (\mathbb{R}^q,\ \beta) & \underset{f}{\longrightarrow} & (\mathbb{R}^p,\ \Gamma) & \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} & (\mathbb{R}^n,\ B) & \stackrel{f}{\longrightarrow} & (\mathbb{R}^n,\ B) & \\ Id_{\mathbb{R}^n} & \downarrow & & \uparrow & Id_{\mathbb{R}^n} \\ & (\mathbb{R}^n,\ \beta) & \underset{f}{\longrightarrow} & (\mathbb{R}^n,\ \beta) & \end{array}$
C.N.S. : même rang	CN : même trace, déterminant, charpoly, spectre
systèmes, équations	diagonalisation, réduction

16.3 Lien avec le pivot de Gauss

Les matrices du type $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont inversibles.
Elles correspondant à des changements de bases simples dans un espace vectoriel de dimension n (ici $n = 4$).
Mais elles correspondent aussi aux opérations du type pivot de Gauss.
La multiplication à gauche par ces matrices agit sur les lignes (espace d'arrivée, équations).
La multiplication à droite agit sur les colonnes (espace de départ, inconnues).

16.4 Corolaire M et M^T ont le même rang

On se donne une matrice M à q colonnes et p lignes et de rang r (plus petit que $Min(p,\ q)$).
En écrivant $M = P.J_{p,q,r}.Q$, on obtient $M^T = Q^T.(J_{p,q,r})^T.Q^T = Q^T.J_{q,p,r}.P^T$ et on reconnaît que M^T est aussi de rang r.

Quatrième partie

Inégalité de Cauchy-Schwarz

17 Produit scalaire sur un espace vectoriel réel

Forme	à valeurs dans $\mathbb{R}$
bi-	prend deux vecteurs au départ $\phi = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \longmapsto \phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$
$-$ linéaire	$\forall(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{v}) \in E^3,\ \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha.\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{v}) + \beta.\phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{v}) = \phi(\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b}, \overrightarrow{v})$ $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \in E^3,\ \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha.\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{a}) + \beta.\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{b}) = \phi(\overrightarrow{u}, \alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b})$
symétrique	$\forall(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) \in E^3,\ \phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) = \phi(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a})$
positive	$\forall \overrightarrow{a} \in E,\ \phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}) \geqslant 0$
défini positive	$\forall \overrightarrow{a} \in E,\ (\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}) = 0) \Leftrightarrow (\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}))$

18 Inégalité de Cauchy-Schwarz / inégalité triangulaire

$$(\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}))^2 \leqslant \phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a}).\phi(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{b})$$

avec égalité si et seulement si $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont colinéaires

18.1 Preuve

Il suffit d'étudier le signe de $\lambda \longmapsto \phi(\lambda.\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b},\ \lambda.\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$, de voir que c'est un trinôme de signe constant et d'en calculer le discriminant. [3]

On a juste besoin pour cela de « forme bilinéaire symétrique positive ».

Pour le cas d'égalité, le trinôme réussit à s'annuler pour λ_0 bien choisi et on regarde ce que signifie $\phi(\lambda_0.\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b},\ \lambda_0.\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = 0$.

18.2 Version $(\mathbb{R}^n, +, .)$ et $C^0([a,\ b],\ \mathbb{R})$

Pour prouver $|\sum_{k=1}^{n} a_k.b_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2}.\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2}$

et sa version intégrale $\int_a^b f(t).g(t).dt| \leqslant \sqrt{\int_a^b (f(t))^2.dt}.\sqrt{\int_a^b (g(t))^2.dt}$ une démonstration alternative existe.

On pose $A = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2}$ et $B = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(b_k)^2}$. Pour chaque indice i de 1 à n on écrit la formule de comparaison des moyennes $x.y \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$ appliquée au couple $\Big(\frac{a_i}{A},\ \frac{b_i}{B}\Big)$: $\frac{a_i.b_i}{A.B} \leqslant \frac{1}{2}.\Big(\frac{(a_i)^2}{A} + \frac{(b_i)^2}{B}\Big)$. On somme ensuite de 1à n

$$\frac{1}{A.B}.\sum_{i=1}^{n}(x_i.y_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i.b_i}{A.B} \leqslant \frac{1}{2}.\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i)^2}{A} + \sum_{i=1}^{n}\frac{(b_i)^2}{B}\Big) = \frac{1}{2}.\Big(\frac{A}{A} + \frac{B}{B}\Big) = 1$$

et on refait passer $A.B$ du côté droit de l'inégalité.

18.3 Corolaire :

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{\phi(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})} \leqslant \sqrt{\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{a})} + \sqrt{\phi(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{b})} \\ \\ ||\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}||_\phi \leqslant ||\overrightarrow{a}||_\phi + ||\overrightarrow{b}||_\phi\end{array}}$$

On peut alors poser

$$\alpha = Arccos\Big(\frac{\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})}{||\overrightarrow{a}||_\phi.||\overrightarrow{b}||_\phi}\Big)$$

L'angle entre deux vecteurs dépend de ces vecteurs mais dépend aussi du produit scalaire choisi.

3. en toute rigueur il faut traiter à part le cas $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$

19 Formules de polarisation (de la norme au produit scalaire)

$$\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{||\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}||_\phi^2 - ||\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}||_\phi^2}{4}$$
$$\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{||\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}||_\phi^2 - ||\overrightarrow{a}||_\phi^2 - ||\overrightarrow{b}||_\phi^2}{2}$$
$$\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{||\overrightarrow{a}||_\phi^2 + ||\overrightarrow{b}||_\phi^2 - ||\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}||_\phi^2}{2}$$

Si vous savez mesurer toutes les longueurs alors vous savez aussi mesurer les angles.

Démonstration : il suffit de développer par bilinéarité des formules telles que $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = a.b$ et autres.

Cinquième partie
Orthonormalisation de Gram-Schmidt

20 Vecteur orthogonaux deux à deux

Attention, le fait que deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ soient orthogonaux dépend du produit scalaire choisi sur l'espace.

En revanche, le vecteur nul est orthogonal à tout le monde.
C'est même le seul vecteur orthogonal à tout le monde.
Si $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont deux vecteurs linéairement indépendants dans $(\mathbb{R}^{n,+,.})$ il est toujours possible de créer un produit scalaire ϕ pour lequel ils sont orthogonaux.

Quand deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont orthogonaux entre eux pour ϕ, on a la formule de Pythagore$||\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}||_\phi^2 = ||\overrightarrow{a}||_\phi^2 + ||\overrightarrow{b}||_\phi^2$.
Sinon, on a la formule d'Euclide-Héron [4].

20.1 Liberté des familles orthogonales sans vecteur nul

Si $(\overrightarrow{a_1}, \dots \overrightarrow{a_r})$ sont r vecteurs de $E - \{\overrightarrow{0}\}$ deux à deux orthogonaux pour un produit scalaire ϕ alors ils forment une famille libre.

Démonstration. On se donne r réels $(\alpha_1, \dots \alpha_r)$ et on suppose que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i.\overrightarrow{a_i}$ est nul.

On déduit alors : $(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i.\overrightarrow{a_i}, \sum_{j=1}^{r} \alpha_j.\overrightarrow{a_j}) = 0$.

On développe par bilinéarité : $\sum_{\substack{i\leqslant r\\ j\leqslant r}} \alpha_i.\alpha_j.\phi(\overrightarrow{a_i}, \overrightarrow{a_j}) = 0$.

On efface la grande majorité des termes par orthogonalité : $\sum_{i\leqslant r} (\alpha_i)^2.\phi(\overrightarrow{a_i}, \overrightarrow{a_i}) = 0$.

4. encore appelée d'Al-Kashi

Cette somme de r réels tous positifs ne peut être nulle que si chacun est nul : $\forall i \leqslant r,\ (\alpha_i)^2.||\overrightarrow{a_i}||^2 = 0$.
Par stricte positivité du produit scalaire, chaque $(\alpha_i)^2$ est nul.

Corolaire : on ne peut pas avoir plus de n vecteurs deux à deux orthogonaux dans un espace de dimension n. D'autre part, n vecteurs deux à deux orthogonaux dans un espace de dimension n forment une base.

21 Bases orthonormées

21.1 Composantes d'un vecteur sur une base orthonormée

Une base orthonormée est une base dont les vecteurs sont tous de norme 1 et deux à deux orthogonaux.

L'orthogonalité suffit à en faire une famille libre, le bon cardinal en fait une base, et ensuite il suffit si nécessaire de re-normer ces vecteurs.

Rappel : si $\overrightarrow{a}$ est non nul, alors $\dfrac{\overrightarrow{a}}{||\overrightarrow{a}||}$ est un vecteur de norme 1 colinéaire à $\overrightarrow{a}$.

Si le vecteur $\overrightarrow{a}$ se décompose sous la forme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\overrightarrow{e_i}$ sur une base orthonormée, alors on a $\alpha_i = \phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{e_i})$ pour tout i.

21.2 Formules de type « Parseval »

On généralise même ces formules pour tout couple de vecteurs sur une base orthonormée

$$\overrightarrow{a} = \sum_{i=1}^{n} \phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{e_i}) \times \overrightarrow{e_i}$$

$$||\overrightarrow{a}||_\phi^2 = \sum_{i=1}^{n} (\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{e_i}))^2$$

$$\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) = \sum_{i=1}^{n} \phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{e_i}) \times \phi(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{e_i})$$

Il existe des formules sur les bases non-orthonormées, mais elles font intervenir l'inverse de la matrice de Gram [5].

Il faudra être prudent quand vous écrirez (si le produit scalaire est usuel) : $\overrightarrow{a} = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{e_i}) \times \overrightarrow{e_i}$ en distinguant « produit scalaire » et « produit réel fois vecteur ».

Finalement, sur une base orthonormée les calculs se font comme on en a l'habitude sur $(\mathbb{R}^n, +, .)$ muni du produit scalaire usuel.

Si on veut projeter un vecteur $\overrightarrow{a}$ sur $Vect(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_r})$, parallèlement à $Vect(\overrightarrow{e_{r+1}}, \dots \overrightarrow{e_n})$ [6], il suffit de prendre $\sum_{i=1}^{r} \phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{e_i}) \times \overrightarrow{e_i}$. C'est ce qui va servir dans la méthode de Gram-Schmidt.

5. *matrice de terme général $\phi(\overrightarrow{e_i},\ \overrightarrow{e_j})$*
6. donc « projeter orthogonalement sur $Vect(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_r})$ »

22 Transformation pas à pas d'une base en base orthonormée

22.1 Existence de bases orthonormées

On se donne une base de $(E,+,.,\phi)$ $(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\dots\overrightarrow{a_n})$. On construit alors une base orthonormée $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\dots\overrightarrow{e_n})$, et cette famille est unique si on impose que la matrice de passage soit triangulaire à diagonale positive.

Premier vecteur :

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{\overrightarrow{a_i}}{||\overrightarrow{a_1}||}$$

Il est bien colinéaire à $\overrightarrow{e_1}$ et de norme 1.

Deuxième vecteur :

$$\overrightarrow{e_2} = \frac{\overrightarrow{a_2} - \phi(\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{e_1}) \times \overrightarrow{e_1}}{||\overrightarrow{a_2} - \phi(\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{e_1}) \times \overrightarrow{e_1}||}$$

Le dénominateur est bien non nul. Ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{e_1}$. Il est de norme 1.

Troisième vecteur :

$$\overrightarrow{e_3} = \frac{\overrightarrow{a_3} - \phi(\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{e_1}) \times \overrightarrow{e_1} - \phi(\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{e_2}) \times \overrightarrow{e_2}}{||\overrightarrow{a_3} - \phi(\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{e_1}) \times \overrightarrow{e_1} - \phi(\overrightarrow{a_3},\overrightarrow{e_2}) \times \overrightarrow{e_2}||}$$

Le dénominateur est bien non nul. Ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$. Il est de norme 1.

k^{ieme} vecteur (en utilisant les vecteurs construits auparavant)[7] :

$$\boxed{\overrightarrow{e_k} = \frac{\overrightarrow{a_k} - \phi(\overrightarrow{a_k},\overrightarrow{e_1}) \times \overrightarrow{e_1} - \phi(\overrightarrow{a_k},\overrightarrow{e_2}) \times \overrightarrow{e_2} - \dots - \phi(\overrightarrow{a_k},\overrightarrow{e_{k-1}}) \times \overrightarrow{e_{k-1}}}{||\overrightarrow{a_k} - \phi(\overrightarrow{a_k},\overrightarrow{e_1}) \times \overrightarrow{e_1} - \phi(\overrightarrow{a_k},\overrightarrow{e_2}) \times \overrightarrow{e_2} - \dots - \phi(\overrightarrow{a_k},\overrightarrow{e_{k-1}}) \times \overrightarrow{e_{k-1}}||}}$$

23 Base du supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$. On construit une base de $(F,+,.)$: $(\overrightarrow{a_1},\dots\overrightarrow{a_r})$.
On complète en base de $(E,+,.)$: $(\overrightarrow{a_1},\dots\overrightarrow{a_r},\overrightarrow{a_{r+1}},\dots\overrightarrow{a_n})$.
On lui applique la méthode de Gram-Schmidt : $(\overrightarrow{e_1},\dots\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_{r+1}},\dots\overrightarrow{e_n})$ est une base orthonormée de $(E,+,.)$.
Comme la matrice de passage est triangulaire, on a alors

$$F = Vect(\overrightarrow{e_1},\dots\overrightarrow{e_r})\ et\ F^{\perp} = (\overrightarrow{e_{r+1}},\dots\overrightarrow{e_n})$$

$F^{\perp}$est le sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$ formé des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F.
C'est un supplémentaire de F, et parmi les supplémentaires de F, c'est le seul vérifiant

$$\forall \overrightarrow{a} \in F,\ \forall \overrightarrow{b} \in F^{\perp},\ \phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) = 0$$

On retrouve ce dont on se doutait :

$$\boxed{(F^{\perp})^{\perp} = F\ et\ \dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)}$$

De tels résultats ne seront plus forcément vrais en dimension infinie, même si la notion de supplémentaire orthogonal continue d'exister..

7. ne pas retenir la formule explicite, retenir la méthode

23.1 Distance d'un vecteur à un sous-espace, projection orthogonale, plus courte distance

$(E, +, .)$ est un espace vectoriel euclidien[8].
F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$.
On se donne un vecteur $\overrightarrow{a}$ et on cherche son projeté orthogonal sur F.

Si on dispose d'une base orthonormé de $(F, +, .)$: $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_r})$ il suffit de prendre $p(\overrightarrow{a}) = \sum_{i=1}^{r} (\overrightarrow{a} . \overrightarrow{e_i}) \times \overrightarrow{e_i}$.

Comme on a $p(\overrightarrow{a})$ dans F et $\overrightarrow{a} - p(\overrightarrow{a})$ dans $F^{\perp}$, on déduit les égalités et inégalités suivantes (en notant $\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v}$ à la place de $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$) :

$$p(\overrightarrow{a}).(\overrightarrow{a} - p(\overrightarrow{a})) = 0$$

$$\overrightarrow{a} . \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} . p(\overrightarrow{a})$$

$$||\overrightarrow{a}||^2 = ||p(\overrightarrow{a})||^2 + ||\overrightarrow{a} - p(\overrightarrow{a})||^2$$

$$||\overrightarrow{a}||^2 \geqslant ||p(\overrightarrow{a})||^2$$

$$\forall \overrightarrow{c} \in F, \ ||\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}|| \geqslant ||\overrightarrow{a} - p(\overrightarrow{a})||$$

On interprète : $p(\overrightarrow{a})$ est le vecteur de F le plus proche de $\overrightarrow{a}$, c'est celui qui minimise $||\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}||$ quand $\overrightarrow{c}$ parcourt F.

On a même pour tout $\overrightarrow{b}$ de E

$$p(\overrightarrow{b}).(\overrightarrow{a} - p(\overrightarrow{a})) = 0$$

$$\overrightarrow{a} . p(\overrightarrow{b}) = p(\overrightarrow{a}).p(\overrightarrow{b}) = p(\overrightarrow{a}). \overrightarrow{b}$$

De plus, sur une base orthonormée, la matrice de p est une matrice M vérifiant $M.M = M$ et aussi ${}^tM = M$.

Dans $(\mathbb{R}^n, +, .)$ l'interprétation est à la fois géométrique et visuelle.
Dans des espaces de fonctions, il s'agit d'approximation au sens des moindres carrés.

Si $(E, +, .)$ est juste pré-hilbertien[9] le résultat reste valable, car il suffit de se placer sur $F + Vect(\overrightarrow{a})$ qui est de dimension finie.

Question : quel est le polynôme qui approxime le mieux l'exponentielle sur $[0, 1]$.

Pourquoi s'y intéresser ? parce que on ne sait pas calculer facilement e^x pour x réel. Or, si on a une bonne approximation de e^x pour x entre 0 et 1, on pourra étendre (en ayant juste connaissance d'une constante e) à la connaissance de tous les $e^n.e^x$ c'est à dire e^{n+x}avec n dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0, 1]$. Bref, on connait alors $x \longmapsto e^x$ sur tout $\mathbb{R}$, segment par segment.

Question : *pourquoi « le polynôme qui approxime le mieux l'exponentielle sur $[0, 1]$ » et pas « un polynôme qui approxime le mieux l'exponentielle sur $[0, 1]$ » ?*
Pourquoi a-t-on unicité ?
Autre question : *Quel degré ? On va commencer petit, mais on va voir que tout est possible.*

8. euclidien : espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire
9. *espace pré hilbertien : espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire, de dimension pouvant être finie ou infinie*

Des réponses possibles :

• $1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}$ avec n « assez grand »

> *Il s'agit d'un développement de Taylor (idée assez naturelle).*
> *Mais pourquoi prendre l'approximation en* 0 *plutôt qu'en* 1.*Ou en* $\dfrac{1}{2}$ *?*
> *C'est une très bonne approximation « au voisinage du point », mais elle devient moins pertinente quand on s'éloigne.*

• on prend par exemple $\dfrac{(2.X-1).(X-1)}{(-1).(-1)}.1+\dfrac{X.(X-1)}{\frac{1}{2}.\frac{-1}{2}}.e^{1/2}+\dfrac{X.(2.X-1)}{1.1}.e$ en ayant mis en mémoire e et $e^{1/2}$.

> *C'est un polynôme interpolateur de Lagrange. Il donne la vraie valeur en trois points. Mais ailleurs, il a tendance à se déformer.*
> *Si on augmente le degré, le polynôme coïncide en de plus en plus de points, mais a envie de se tordre de plus en plus (car un polynôme de degré n change très souvent de signe).*
> *Avec la fonction exponentielle, ça se passer plutôt bien... Il y a d'ailleurs quelques sujets de concours qui tournent autour de cela, avec des restes de Taylor Lagrange multiplicatif...*

Déjà, la question est mal posée... Quels sens donner à « bonne approximation » ?
La différence $P(x)-e^x$ est petite « sur tout l'intervalle ».
Mais dans quel sens là aussi ? C'est normal de se poser la question. La question de la norme...

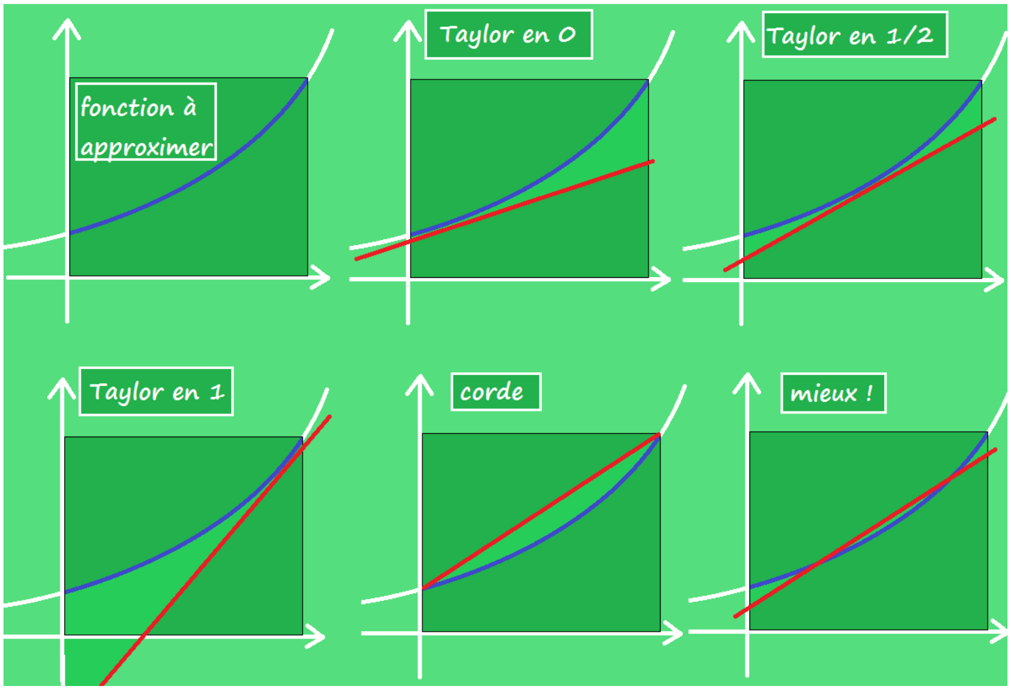
S'agit il d'une contrainte

« au pire »	minimiser $Sup(\lvert P(x)-e^x\rvert \mid x\in[0,1])$
« en moyenne »	minimiser $\displaystyle\int_0^1 \lvert P(x)-e^x\rvert.dx$
« au sens des moindres carrés »	minimiser $\displaystyle\int_0^1 (P(x)-e^x)^2.dx$

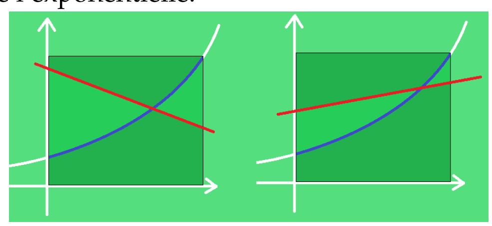
On va choisir la troisième.

> • *Parce que c'est ce qu'on sait faire au mieux, avec le cours d'algèbre bilinéaire.* [10]
> • *Parce que l'erreur élevée au carré est un truc judicieux. Quand l'erreur est petite, son carré l'est encore plus (erreur* $0,01$ *: carré* $0,0001$*)*
> *Quand l'erreur est grande, son carré l'est encore plus (erreur* 2*, carré* 4*).* [11]
> • *On va donc chercher à ce que l'erreur soit uniformément petite sur l'intervalle.*

10. *là, ça fait justification de mes cours de physique de lycée*
11. *là, ça m'évoque la variance en probabilités* $E((X-\mu)^2)$ *avec* $\mu=E(X)$



Ici, on tente des approximations affines (polynômes de degré 1) de l'exponentielle.

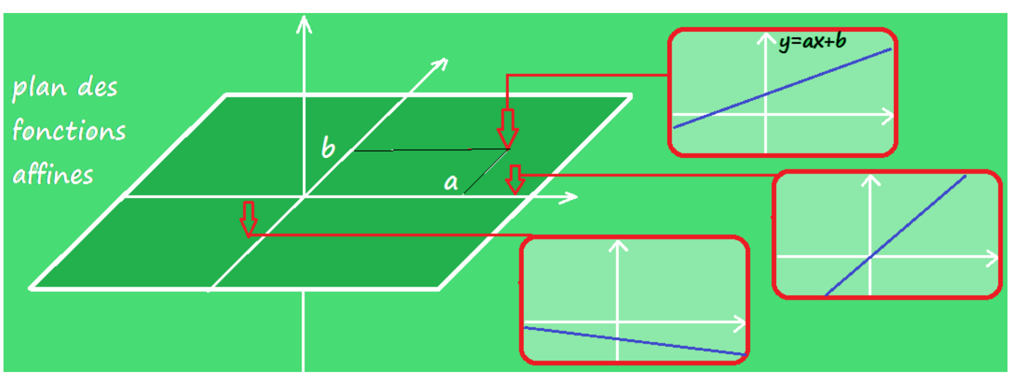


On voit qu'il y a des approximations plus ou moins bonnes... Et j'ai évité à tout prix les approximations ratées comme
.

Et pour trouver notre solution, il faut totalement changer de point de vue, prendre tout ceci de haut.

Voir les fonctions comme des éléments d'un espace vectoriel

> *Une fonction affine c'est $x \longmapsto a.x+b$. C'est donc deux paramètres.*
> *Les fonctions affines vivent dans un plan. Dans un espace de dimension 2.*
> *Chaque élément de ce plan est une fonction affine.*
> *Il faut imaginer que quand vous placez le pointeur de la souris sur un point $(a,\ b)$ de ce plan, une fenêtre dans le coin dessine le graphe $x \longmapsto a.x+b$.*
> *L'origine donne la fonction nulle. Si vous promenez le pointeur sur Ox vous avez le fonctions constantes, et sur Oy vous avez les fonctions « affines passant par l'origine ».*

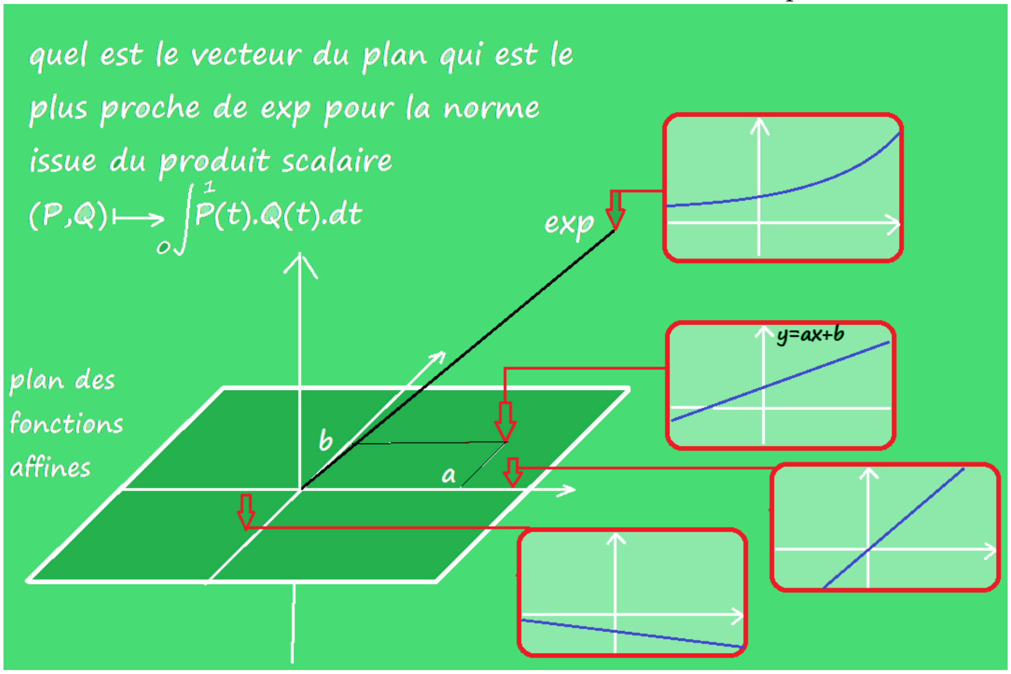


L'exponentielle n'est évidemment pas dans ce plan. Elle n'est pas affine.

Et on mesure sa distance à une fonction affine par $\int_0^1 (e^t - P(t))^2.dt$ (ici, c'est le carré de a distance pour des raisons d'homogénéité).

C'est le carré d'une norme. La norme issue du produit scalaire $(P, Q) \longmapsto \int_0^1 P(t).Q(t).dt$.

On cherche donc à minimiser la distance d'un vecteur à un sous-espace.

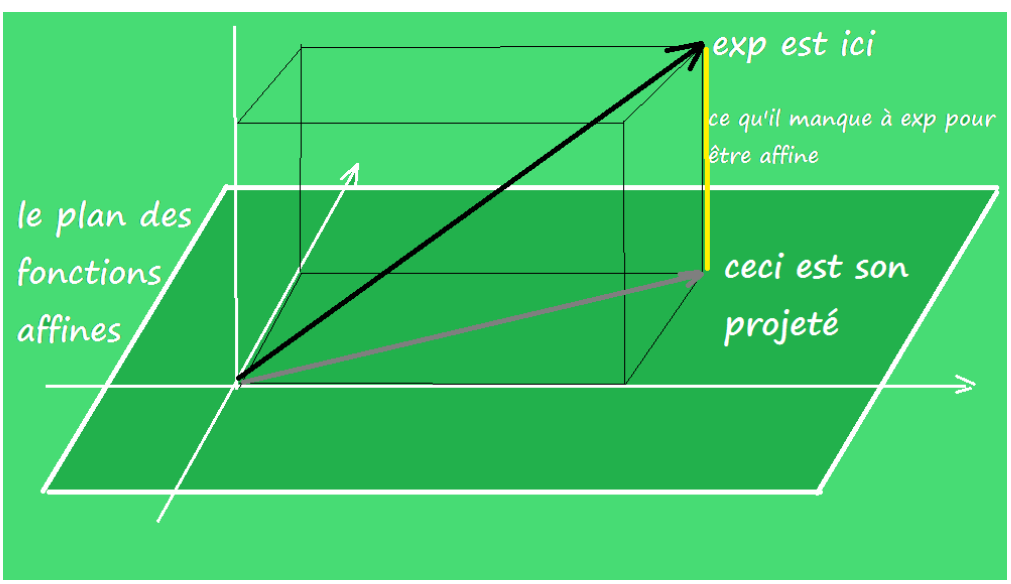


Reprenons donc avec une vision « purement géométrique dans un espace de dimension 3 » [12] :
Quel est le vecteur du plan « en bas » le plus proche du vecteur appelé exp ?

On a une formule pour récupérer cette partie : $(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{i}).\overrightarrow{i} + (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{j}).\overrightarrow{j}$ *si on est dans* $(\mathbb{R}^3, +, .)$ *usuel.*

Et sinon, on trouve le projeté avec la formule $\phi(\exp, \overrightarrow{e_0}).\overrightarrow{e_0} + \phi(\exp, \overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1}$ où $(\overrightarrow{e_0}, \overrightarrow{e_1})$ est une base orthonormée du plan sur lequel on projette (puisque les formules de Parseval donnent $\exp = \phi(\exp, \overrightarrow{e_0}).\overrightarrow{e_0} + \phi(\exp, \overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1} + autres$.

Ce sont des formules utilisées lors de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt, pour trouver « le morceau à effacer » et pas soustraction « le morceau orthogonal au plan ».



12. c'est $Vect(x \longmapsto 1,\ x \longmapsto x,\ x \longmapsto e^x)$ pour ceux qui veulent le voir

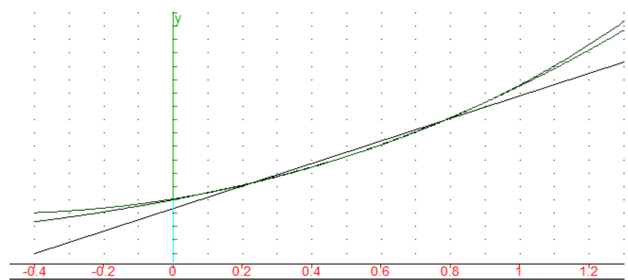
Il faut disposer d'une base orthonormée du plan des fonctions affines pour ce produit scalaire.
Facile : tout a été fait auparavant : $(1,\ \sqrt{3}.(2.X-1))$.
On a juste deux intégrales à calculer en tout ou parties : $\int e^t.1.dt$ et $\int_0^1 e^t.\sqrt{3}.(2.t-1).dt$.

Tous calculs faits [13], c'est $\boxed{t \longmapsto (18-6.e).t+(4.e-10)}$ Vous l'auriez deviné, vous ?

L'application $t \longmapsto e^t - \big((18-6.e).t+(4.e-10)\big)$ qui mesure la différence (en jaune sur notre schéma) est orthogonale à toutes les fonctions affines. Et sa norme est l'erreur commise.

Et si on s'arrête en cours de route ? 1. $\int e^t.1.dt$ (formule $\phi(\exp,\ \overrightarrow{e_0}).\overrightarrow{e_0}$) est l'application constante qui approxime le mieux la fonction exp au sens des moindres carrés, c'est sa projection sur la droite des fonctions constantes.

Et si on veut aller plus loin ? On veut une approximation du second degré. Un arc de parabole et non plus une droite.
Cette fois, la visualisation de « projection sur un espace de dimension 3 au sein d'un espace de dimension un peu plus grande » n'est plus très pratique.
Mais le résultat est simple : on passe de $\phi(\exp, \overrightarrow{e_0}).\overrightarrow{e_0} + \phi(\exp, \overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1}$ avec $(\overrightarrow{e_0},\ \overrightarrow{e_1})$ orthonormée
à $\phi(\exp, \overrightarrow{e_0}).\overrightarrow{e_0} + \phi(\exp, \overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1} + \phi(\exp, \overrightarrow{e_2}).\overrightarrow{e_2}$ avec $(\overrightarrow{e_0},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$ orthonormée
Et comme l'algorithme de Gram-Schmitt est de type glouton [14] et construit un par un les vecteurs, on a juste à ajouter un terme :



$\Big(\int_0^1 e^t.\sqrt{5}.(6.t^2-6.t+1)).dt\Big).\sqrt{5}.(6.X^2-6.X+1)$

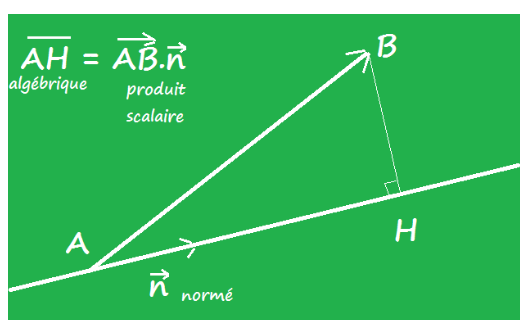
Si vous y voyez quelquechose sur le dessin à côté...
On pourra bien sûr appliquer à d'autres fonctions que l'exponentielle, et obtenir des approximations au sens des moindres carrés.
Si l'application est déjà affine, la formule de Parseval dit que c'est elle qu'on retrouve.

23.1.1 Point de vue géométrique

La formule $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e_0}).\overrightarrow{e_0} + \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1}$ pour projeter sur $Vect(\overrightarrow{e_0}, \overrightarrow{e_1})$ est classique (si effectivement $(\overrightarrow{e_0}, \overrightarrow{e_1})$ est orthonormée) est un classique. Vous la connaissez en dimension 1.

Pour projeter le vecteur sur la droite de vecteur directeur normé $\overrightarrow{n}$ vous utilisez $(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{n}).\overrightarrow{n}$.

Et si le vecteur directeur n'est pas normé : $\dfrac{(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{d}).\overrightarrow{d}}{||\overrightarrow{d}||^2}$.



13. aux oraux de concours, on vous arrêtera avant que vous ne poussiez trop loin de tels calculs, ou alors vous aurez un logiciel tout prêt

14. « En informatique, un algorithme glouton (greedy algorithm en anglais, parfois appelé aussi algorithme gourmand) est un algorithme qui suit le principe de faire, étape par étape, un choix optimum local. »

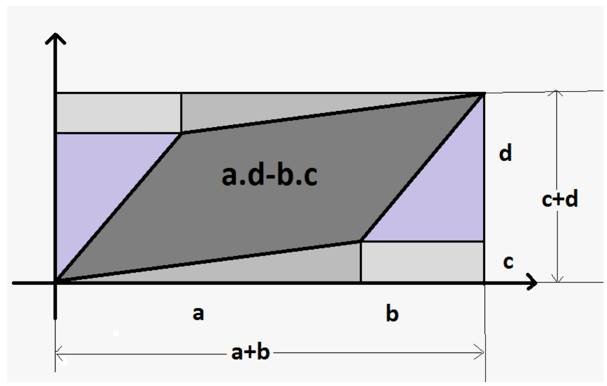
Et vous connaissez les $\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1}+\ldots+\phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{e_n}).\overrightarrow{e_n}$ comme associés à trois noms : Gram, Parseval et Schmidt.

Sixième partie

Le déterminant de n vecteurs mesure le « volume » défini par ces vecteurs

24 Cas du plan

On considère deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ dans le plan $(\mathbb{R}^2,+,.)$ muni de la base canonique $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$: $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ (comprendre $\overrightarrow{a} = a.\overrightarrow{i} + c.\overrightarrow{j}$) et $\overrightarrow{b}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.
Un découpage permet de comprendre que $a.d-b.c$ mesure l'aire algébrique du parallélogramme construit par ces deux vecteurs.

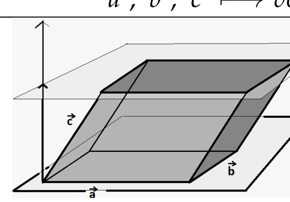


[15]

25 Cas de la dimension 3

Un découpage de volumes ne peut pas être convaincant. On va montrer que les deux notions « déterminant » et « volume » coïncident car elles vérifient toutes deux un certain nombre de propriétés qui font que seules deux applications proportionnelles peuvent vérifier ces propriétés.

25.1 Les deux applications en jeu de $(\mathbb{R}^3)^3$ dans $\mathbb{R}$

déterminant	volume
$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c} \longmapsto \det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$	$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c} \longmapsto volume(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$
$=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$	

15. une mesure, une aire, un volume sont algébriques si ils peuvent avoir un signe et si on peut non seulement les additionner mais aussi les soustraire

25.2 Les propriétés en commun

forme	$\forall(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \in (\mathbb{R}^3)^3$	$F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \in \mathbb{R}$
trilinéaire	$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in (\mathbb{R}^3)^2$ $\forall\lambda \in \mathbb{R}$	$F(\vec{u}+\vec{v}, \vec{b}, \vec{c}) = F(\vec{u}, \vec{b}, \vec{c}) + F(\vec{v}, \vec{b}, \vec{c})$ $F(\lambda.\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda.F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
antisymétrique		$F(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ $F(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ $F(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

En utilisant convenablement tri linéarité et antisymétrie, on montre la linéarité par rapport à chaque vecteur

$$F(\vec{a}, \lambda.\vec{u}+\mu.\vec{v}, \vec{c}) = \lambda.F(\vec{a}, \vec{u}, \vec{c}) + \mu.F(\vec{a}, \vec{v}, \vec{c})$$

et le caractère « alterné » : si deux vecteurs de la liste sont égaux, l'image est nulle.

$$F(\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}) = 0$$

et aussi cette approfondissement de antisymétrie

$$\forall\sigma \in S_3,\ F(\overrightarrow{u_{\sigma(1)}}, \overrightarrow{u_{\sigma(2)}}, \overrightarrow{u_{\sigma(3)}}) = Sgn(\sigma).F(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$$

Ces propriétés sont vérifiées à la fois par le volume (considérations d'homothéties, de découpages...), mais aussi par le déterminant (calculs).

25.3 Toutes les formes tri-linéaires antisymétriques sur $\mathbb{R}^3$ sont proportionnelles au déterminant.

Soit F une forme trilinéaire antisymétrique sur $\mathbb{R}^3$ et trois vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ qu'on décompose sur la base canonique (qui sera notée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ plutôt que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ pour pouvoir généraliser l'idée.

On décompose chacun des trois vecteurs sur la base avec des composantes à double indice

$$\begin{array}{ccccc} \overrightarrow{u_1} & = & a_1^1.\overrightarrow{e_1} & +a_2^1.\overrightarrow{e_2} & +a_3^1.\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{u_2} & = & a_1^2.\overrightarrow{e_1} & +a_2^2.\overrightarrow{e_2} & +a_3^2.\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{u_3} & = & a_1^3.\overrightarrow{e_1} & +a_2^3.\overrightarrow{e_2} & +a_3^3.\overrightarrow{e_3} \end{array}$$

On développe alors $F(a_1^1.\overrightarrow{e_1}+a_2^1.\overrightarrow{e_2}+a_3^1.\overrightarrow{e_3},\ a_1^2.\overrightarrow{e_1}+a_2^2.\overrightarrow{e_2}+a_3^2.\overrightarrow{e_3},\ a_1^3.\overrightarrow{e_1}+a_2^3.\overrightarrow{e_2}+a_3^3.\overrightarrow{e_3})$ par tri-linéarité. On a a priori 27 termes de la forme $a_i^1.a_j^2.a_k^3.F(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{e_k})$ qu'on va même écrire $a_{i_1}^1.a_{i_2}^2.a_{i_3}^3.F(\overrightarrow{e_{i_1}}, \overrightarrow{e_{i_2}}, \overrightarrow{e_{i_3}})$ avec (i_1, i_2, i_3) dans $\{1, 2, 3\}^3$.

Mais dès qu'il y a un vecteur en double, le terme est nul (caractère alterné issu de l'antisymétrie). Il ne reste que 3! termes, de la forme $a_{\sigma(1)}^1.a_{\sigma(2)}^2.a_{\sigma(3)}^3.F(\overrightarrow{e_{\sigma(1)}}, \overrightarrow{e_{\sigma(2)}}, \overrightarrow{e_{\sigma(3)}})$ avec σ injective (donc bijective) de $\{0, 1, 2\}$ dans lui même.

Mais on peut réordonner le triplet $\overrightarrow{e_{\sigma(1)}}, \overrightarrow{e_{\sigma(2)}}, \overrightarrow{e_{\sigma(3)}}$ en $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ par antisymétrie. On a toujours six termes mais cette fois de la forme $Sgn(\sigma).a_{\sigma(1)}^1.a_{\sigma(2)}^2.a_{\sigma(3)}^3.F(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. On factorise la constante et on trouve que F (forme trilinéaire antisymétrique) est juste un multiple de l'application

$$\begin{array}{ccc} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{array} \longmapsto \sum_{\sigma\in S_3} Sgn(\sigma).\prod a_{\sigma(k)}^k$$

26 Toutes les formes n-linéaires antisymétriques sur $\mathbb{R}^n$ sont proportionnelles au déterminant.

La démonstration est du même type, avec

n vecteur $\overrightarrow{u_k}$

n^2 composantes a_i^k

n^n termes $a^1_{i_1}.a^2_{i_2}\dots a^n_{i_n}.F(\overrightarrow{e_{i_1}},\ \overrightarrow{e_{i_2}},\dots \overrightarrow{e_{i_n}})$

$n!$ termes $a^1_{\sigma(1)}.a^2_{\sigma(1)}\dots a^n_{\sigma(1)}.F(\overrightarrow{e_{\sigma(1)}},\ \overrightarrow{e_{\sigma(2)}},\dots \overrightarrow{e_{\sigma(n)}})$

1 somme $\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n Sgn(\sigma).} a^1_{\sigma(1)}.a^2_{\sigma(1)}\dots a^n_{\sigma(1)}$

1 facteur de proportionnalité $F(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\dots \overrightarrow{e_n})$

Le déterminant usuel est alors la forme n linéaire antisymétrique qui vaut 1 pour la base canonique.

27 Le déterminant du produit est le produit des déterminants

Pour deux matrices carrées A et B de même format, on a $$\det(A.B) = \det(A).\det(B)$$

On va établir la formule $\det(M.A) = \det(M).\det(A)$ pour deux matrices A et B carrées de taille n sur n en leur attribuant deux rôles différents.

• M est la matrice d'un endomorphisme f de $(\mathbb{R}^n,+,.)$ exprimée sur la base canonique $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\dots \overrightarrow{e_n})$

• A est la matrice d'une famille de n vecteurs de $(\mathbb{R}^n,+,.)$: $(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\dots \overrightarrow{u_n})$ sur la base canonique

• et $M.A$ est donc la matrice de $(f(\overrightarrow{u_1}),\ f(\overrightarrow{u_2}),\dots f(\overrightarrow{u_n}))$ sur la base canonique

$$\begin{array}{cccc|c}
b_1^1 & b_1^1 & \dots & b_1^n & (\overrightarrow{e_1})^* \\
b_1^1 & b_2^2 & \dots & b_2^n & (\overrightarrow{e_2})^* \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
b_n^1 & b_n^2 & \vdots & b_n^n & (\overrightarrow{e_n})^* \\
f(\overrightarrow{u_1}) & f(\overrightarrow{u_2}) & \dots & f(\overrightarrow{u_n}) &
\end{array}
=
\begin{array}{cccc|c}
m_1^1 & m_1^1 & \dots & m_1^n & (\overrightarrow{e_1})^* \\
m_1^1 & m_2^2 & \dots & m_2^n & (\overrightarrow{e_2})^* \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
m_n^1 & m_n^2 & \vdots & m_n^n & (\overrightarrow{e_n})^* \\
f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & \dots & f(\overrightarrow{e_n}) & \\
 & M & & &
\end{array}
\times
\begin{array}{cccc|c}
a_1^1 & a_1^1 & \dots & a_1^n & (\overrightarrow{e_1})^* \\
a_1^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n & (\overrightarrow{e_2})^* \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
a_n^1 & a_n^2 & \vdots & a_n^n & (\overrightarrow{e_n})^* \\
\overrightarrow{u_1} & \overrightarrow{u_2} & \dots & \overrightarrow{u_n} & \\
 & & A & &
\end{array}$$

$$\times$$

L'application $(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\dots \overrightarrow{u_n}) \longmapsto \det_C(f(\overrightarrow{u_1}),\ f(\overrightarrow{u_2}),\dots f(\overrightarrow{u_n}))$ (notée F) est une forme $n-$linéaire antisymétrique.
Elle est donc proportionnelle au déterminant :

$$\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\dots \overrightarrow{u_n})\in(\mathbb{R}^n)^n,\ F(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\dots \overrightarrow{u_n}) = \lambda.\det{}_C(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\dots \overrightarrow{u_n})$$

On calcule λ avec le cas particulier$(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\dots \overrightarrow{u_n}) = (\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\dots \overrightarrow{e_n})$

$$\det(M) = \det_C\left(f(\overrightarrow{e_1}),\ f(\overrightarrow{e_2}),\dots f(\overrightarrow{e_n})\right) = F(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\dots \overrightarrow{e_n}) = \lambda.\det{}_C(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\dots \overrightarrow{e_n}) = \lambda.1$$

On reporte et on a $\det(M.A) = \det(M).\det(A)$.