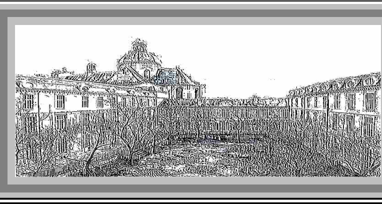
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 24 juin
M.P.S.I.2



2023 2024

# TD33

∘0∘ ♣ Montrez que $\prod_{k=0}^{100}(k!)$ n'est pas un carré parfait.
Effacez un des termes du produit pour en faire un carré parfait.

∘1∘ Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de `range(n)` dans `range(N)` ?

∘2∘ Combien y a-t-il de lois de composition internes sur un ensemble $E$ de cardinal $n$.
Combien y a-t-il de lois de composition internes qui sont commutatives sur un ensemble $E$ de cardinal $n$.
Combien y a-t-il de lois de composition internes sur un ensemble $E$ de cardinal $n$, dotées d'un élément neutre.

∘3∘ On note $I_n$ le nombre d'involutions d'un ensemble à $n$ éléments (application $f$ de $E$ dans $E$ vérifiant $f\circ f = Id_E$).
Calculez $I_n$ pour $n$ de 0 à 3. Prouvez $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1).I_n$. Calculez $I_n$ pour $n$ de 0 à 5.

∘4∘ Montrez qu'il y a $\binom{n+p-1}{p}$ façons de ranger $p$ objets indistinguables dans $n$ boites numérotés (les boites pouvant contenir un nombre quelconque d'éléments et pouvant même être vides).
*Indication : comment coder ces histoires d'ensembles avec un mot de n+p-1 lettres 0 ou 1 ?*

∘5∘ $f$ et $g$ sont deux applications linéaires de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$. Montrez : $Im(f+g)\subset Im(f)+Im(g)$. A-t-on égalité ? Déduisez $rg(f+g)\leqslant rg(f)+rg(g)$.
Montrez $rg(f)\leqslant rg(f+g)+rg(g)$. Déduisez $|rg(f)-rg(g)|\leqslant rg(f+g)\leqslant rg(f)+rg(g)$.

∘6∘ $f$ est un endomorphisme de $(\mathbb{R}^n,+,.)$ vérifiant $f\circ f\circ f = 0$ (application nulle). Montrez : $rg(f)+rg(f\circ f)\leqslant n$ *(pensez à la formule du rang)*.

∘7∘ ♡ Complétez $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & \end{pmatrix}$ *(notée A)* en matrice de projecteur (caractérisation : $A^2 = A$). Déterminez alors noyau et image.
Montrez que $\{M\in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$. Donnez en une base et la dimension.

∘8∘ ♡ Donnez le noyau de $f = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2.a+b-c \\ a-b+2.c \end{pmatrix}$ après avoir prouvé que cette application est linéaire.
Pouvez vous trouver $g$ linéaire vérifiant $g\circ f = Id_{\mathbb{R}^3}$ ?
Trouvez $h$ linéaire vérifiant $f\circ h = Id_{\mathbb{R}^2}$.

∘9∘ On note $P$ le plan de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ d'équation $x+y-2.z=0$, $D$ la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}$ et $D'$ la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$.
Montrez : $\mathbb{R}^3 = P\oplus D = P\oplus D'$ (et ne simplifiez pas en $D = D'$).
On note $p$ le projecteur sur $P$ en effaçant la composante suivant $D$. Déterminez $p(\overrightarrow{i})$, $p(\overrightarrow{j})$ et $p(\overrightarrow{k})$.
On note $p'$ le projecteur sur $P$ en effaçant la composante suivant $D'$. Déterminez $p'(\overrightarrow{i})$, $p'(\overrightarrow{j})$ et $p'(\overrightarrow{k})$.
Résolvez $p(\overrightarrow{u}) = p'(\overrightarrow{u})$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$.
Résolvez $p(\overrightarrow{u}) + p'(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$.
Résolvez $p\circ p'(\overrightarrow{u}) = p'\circ p(\overrightarrow{u})$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$.

∘10∘ ♡ Pouvez vous compléter $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & & \\ & -10 & \end{pmatrix}$ en matrice de projecteur *($p\circ p = p$ et donc $M^2 = M$)* ?

Si oui, calculez son déterminant et son polynôme caractéristique.
Donnez son noyau *(ensemble des vecteurs d'image nulle)* et son image *(ensemble des vecteurs atteints)*.
Et tant qu'on y est, diagonalisez la.
Si non, donnez le développement limité d'ordre 3 en 0 de $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{\ln(1-t)}$.

---

∘11∘ Montrez que $\{M \in M_4(\mathbb{R}) \mid Tr(m) = 0\}$ (noté $\tau$) est un espace vectoriel et donnez sa dimension.
On se donne une matrice $A$ dans $M_4(\mathbb{R})$ et on définit $\varphi = M \longmapsto A.M - M.A$. Montrez que c'est un endomorphisme de $(M_4(\mathbb{R}), +, .)$ d'image incluse dans $\tau$.
En étudiant son noyau, montrez qu'on ne peut pas avoir $Im(\varphi) = \tau$.

---

∘12∘ Un théorème affirme : pour tout couple d'entiers $(a,\ b)$ distincts, il existe une infinité d'entiers naturels $n$ vérifiant $a+n$ et $b+n$ sont premiers entre eux.
Écrivez un script Python qui pour $a$ et $b$ donnés cherche une liste de cent entiers $n$ vérifiant ceci.
Donnez le couple $(a,\ b)$ avec $a$ et $b$ entre 1 et 1000 pour lequel le dernier terme de cette liste est le plus grand.

---

∘13∘ $\heartsuit^2$ ou $\clubsuit^2$ suivant que vous êtes M ou PSI On travaille avec les entiers de 0 à 2 pour l'addition et la multiplication modulo 3.

**1-** Combien y a-t-il de vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et combien de matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Combien de matrices de rang 0 ? Pour les matrices de rang 1, je dis "une colonne $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ (9 choix) puis un de ses trois multiples $\begin{pmatrix} 0.a \\ 0.c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1.a \\ 1.c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2.a \\ 2.c \end{pmatrix}$, donc 27 matrices". Rectifiez l'erreur et donnez le bon nombre.

**2-** Complétez alors

| $rg(M) = 0$ | $rg(M) = 1$ | $\det(M) = 0$ | $\det(M) = 1$ | $\det(M) = 2$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | 24 | |

**3-** Calculez l'espérance la variance de la variable aléatoire déterminant puis de la variable trace pour un tirage aléatoire uniforme de matrices.

**4-** Pour trouver combien il y a de matrices semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, je fais le raisonnement suivant : "ce sont les matrices de la forme $P.M.P^{-1}$, or, il y a 48 matrices $P$ possibles, d'où 48 matrices semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$". C'est faux, trouvez l'erreur, et dénombrez les douze matrices semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**5-** Profitez en pour diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

**6-** Je dis qu'il y a douze matrices de projecteur de rang 1. Confirmez le en en donnant la liste. Ou alors complétez l'idée : les quatre droites sont $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ensuite...

**7-** Montrez que la probabilité de tirer une matrice de projecteur est de $14/81$.

**8-** Combien de matrices sont semblables à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ? Calculez la probabilité de tirer une matrice nilpotente.

**9-** Calculez la probabilité de tirer une matrice de permutation.

**10-** Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. Élevez la quand même à la puissance 2016.
Combien de matrices ont pour polynôme caractéristique

| $X^2$ | $X^2+X$ | $X^2+2.X$ | $X^2+1$ | $X^2+2$ | $X^2+X+1$ | $X^2+2.X+1$ | $X^2+2.X+2$ | $X^2+X+2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

**11-** Calculez la probabilité de trouver une matrice permutables avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**12-** Voulant estimer la probabilité que deux matrices tirées au hasard soient permutables, sans me prendre la tête, j'écris un script `Python`. Complétez le :

```
def alea() :
....a = randrange(3)
....b =
....return([[a,b],[c,d]])
def produit(A, B) :
....a = A[0][0]*B[0][0]+A[0][1]*B[1][0]
....b =
```

```
....return [[a,b],[c,d]]
compt = 0
for Na in range(810) :
....A = alea()
....for Nb in range(810) :
```

ou alors écrivez votre propre script. On trouve environ 14 pour cent.

---

∘14∘ Définissez une loi de probabilité sur $range(n)$ pour que la probabilité de $\{k\}$ soit proportionnelle à $k$.
Définissez une loi de probabilité sur $range(n)$ pour que la probabilité de $[0,\ k]$ soit proportionnelle à $k$.

---

∘15∘ ♡ Diagonalisez $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mais surtout pas en calculant $\det(A - X.I_n)$, y'a pas écrit PCici, mais cherchant déjà le sous-espace propre de valeur propre 0. Vérifiez que vous pouvez prendre des vecteurs propres deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire usuel.
Et en taille $n$ ?

---

∘16∘ Deux amis se sont donné rendez vous à $18h$. Mais chacun arrive en retard. Le retard de chacun suit une loi uniforme sur range(60). Retard $X$ pour le premier, et $Y$ pour le second. Les deux variables aléatoires retard sont indépendantes.
A quoi correspond la variable $|X - Y|$ (notée $T$) ?
Écrivez une procédure qui simule $n$ fois de suite cette variable aléatoire et donne une approximation de l'espérance de $T$.
Calculez la valeur exacte de cette espérance.

---

∘17∘ On note $E$ l'ensemble des suites réelles. Soit $\sigma$ un endomorphisme de $(E, +, .)$ ; $a$ et $b$ sont deux réels distincts, montrez : $Ker(\sigma^2 - (a+b).\sigma + (a.b).Id_E) = Ker(\sigma - a.Id_E) \oplus Ker(\sigma - b.Id_E)$.
On définit sur $E$ l'application $\sigma = (u_n) \longmapsto (u_{n+1})$. Montrez que $\sigma$ est un endomorphisme de $E$. Donnez pour tout $\lambda$ la dimension et une base de $Ker(\sigma - \lambda.Id_E)$.
Retrouvez la forme générale de la suite de Fibonacci.

---

On définit : $\Gamma = x \longmapsto \dfrac{a.x + b}{x^2 - x - 1}$. Ajustez $a$ et $b$ pour avoir $\Gamma(0) = \Gamma'(0) = 1$.
Montrez que $\Gamma$ admet pour tout $n$ un développement limité en 0 à l'ordre $n$ et montrez que les coefficients de $\Gamma$ vérifient la relation de récurrence $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
Décomposez $\Gamma$ en éléments simples. Donnez alors son développement limité d'ordre $n$.
Retrouvez la forme générale de $F_n$.

---

∘18∘ ♣ On considère que $(\mathbb{R}, +, .)$ est un espace vectoriel sur le corps $(\mathbb{Q}, +, .)$, dont une base sera formée de 1 (premier vecteur de base) suivi de vecteurs que l'on ne précisera pas, puisqu'on ne sait pas le faire, et qu'on se contentera de noter $\overrightarrow{r_i}$ pour $i$ dans un ensemble $I$.
On construit $f$ : l'image d'un réel $a$ se décomposant sous la forme $\alpha_0.1 + \sum_{i \in I} \alpha_i.\overrightarrow{r_i}$ sera $\alpha_0.1$.
Montrez $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(a) + f(b)}{2}$ pour tout couple $(a,\ b)$, mais n'est pas convexe (elle n'est continue nulle part et n'est bornée sur aucun intervalle contenant plus d'un point).

---

∘19∘ ♡ Vous lancez un dé équilibré à six faces, autant de fois qu'il faut, jusqu'à ce que vous ayez un 4.
Décrivez l'univers. Est il fini ?
Quelle est la probabilité que vous ayez fini avant six lancers ?
Quelle est la probabilité que vous ayez fini en exactement six lancers ?
Quelle est la probabilité que l'expérience ne s'arrête jamais ?

---

∘20∘ Montrez : $(P(A \mid B) \geqslant P(A)) \Rightarrow (P(B \mid A) \geqslant P(B))$. Interprétation ?

---

∘21∘ Montrez que $(A,\ B) \longmapsto Tr({}^tA.B)$ est un produit scalaire sur $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$.
Déduisez $Tr(M^2) \leqslant Tr({}^tM.M)$ pour toute matrice $M$. Cas d'égalité ?

Déduisez $Tr(M^2) \geqslant -Tr({}^tM.M)$ pour toute matrice $M$. Cas d'égalité ?

---

∘22∘ On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On définit $f = M \longmapsto (Tr(M),\ Tr(A.M),\ Tr(A^2.M),\ Tr(A^3.M))$. Montrez que $f$ est linéaire de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ dans $\mathbb{R}^4$. Calculez $f(I_2)$ et $f(A)$ et $f(A^{-1})$. Un élève dit que cette application est de rang 6. Prouvez qu'il a tort. Un élève prétend que $f$ est de rang 1. Prouvez qu'il a tort. Pour mettre tout le monde d'accord, calculez le rang de $f$. Donnez une base d'un supplémentaire de $Ker(f)$. Donnez une base de $Im(f)$.
Un professeur vous demande de calculer $Tr(f)$. Que lui répondez vous ?

---

∘23∘ L'élève Itencolère a pour mission de trouver une loi $*$ sur $\mathbb{N}$ telle que tout élément $n$ soit neutre à droite. Ça existe ça ?

---

∘24∘ ♡ On lance cent fois un dé équilibré à six faces. Donnez l'univers. Donnez la loi de probabilité.
On définit la variable aléatoire « nombre de 6 obtenus » (entre 0 et 100). Donnez sa loi.
Pour quel $n$ la probabilité $P(''nombre\ de\ 6'' = n)$ est elle maximale ?
Pour quel $n$ la probabilité $P(''nombre\ de\ 6'' = n)$ est elle minimale ?
Simulez avec Python.

---

∘25∘ ♡ Sur les quarante huit élèves, huit sont vraiment cons. Le colleur attend deux trinômes. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un con dans le lot ?

---

∘26∘ ♡ Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3, +, .)$. Mettez la sous la forme ${}^tA.A$.
Donnez un vecteur *(non nul)* orthogonal au plan engendré par les deux premiers vecteurs de base. Construisez une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
Le produit scalaire sous entendu dans la question, c'est

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

---

∘27∘ Montrez que $(x, y, z) \longmapsto \sqrt{-\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 1 & 1 & 1 \\ y & 1 & 2 & 2 \\ z & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}$ est une norme sur $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

---

∘28∘ ♡ Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 26 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3, +, .)$. Donnez une base orthonormée pour ce produit scalaire.
Écrivez cette matrice sous la forme ${}^tT.T$.

---

∘29∘ ♡ Montrez que $A$ et $B$ sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B).P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B).P(A \cap \overline{B})$.

---

∘30∘ ♡ Complétez $\frac{1}{\sharp}.\begin{pmatrix} 15 & & \\ -20 & 12 & \\ 0 & -15 & 20 \end{pmatrix}$ pour que ce soit la matrice d'une isométrie de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ pour le produit scalaire usuel. Montrez que 1 en est alors valeur propre et donnez le sous-espace propre associé.
*Une isométrie est une application linéaire qui transforme une base orthonormée (comme la base canonique) en base orthonormée (vecteurs de norme 1, deux à deux orthogonaux).*

---

∘31∘ Comme tout le monde sait, il y a les bons chasseurs et les mauvais chasseurs. Le mauvais chasseur, c'est l'gars qu'a un fusil, il voit un truc qui bouge, beh il tire. Il tire. Et le bon chasseur, c'est un gars il y a un fusil, un fusil... il voit un truc qui bouge... il tire... mais bouah c'est pas la même chose... c'est un bon chasseur.
Ils sont $n$ chasseurs, et voilà que déboulent $n$ lapins. Chaque chasseur choisit un lapin au hasard, et... il tire.
Quelle est la probabilité $p_n$ qu'au moins un lapin n'ait pas été visé ? Déterminez la limite de $p_n$ quand $n$ tend vers l'infini.
Ils sont $n$ chasseurs (dont Elmer Fudd), et voilà que déboulent $n$ lapins (dont Bugs Bunny). Chaque chasseur choisit un lapin au hasard, et... il tire, mais c'est pas pareil, c'est un bon chasseur.

Quelle est la probabilité $q$ que Bunny n'ait pas été visé ?

---

◦32◦ Dans ce café, il y a cinq WC : deux pour hommes, trois pour femmes. Vous savez par expérience qu'un WC “homme” a soixante pour cent de “chances” d'être souillé, et qu'un WC “dame” a seulement quarante pour cent de chances d'être souillé. Vous ouvrez une porte au hasard. Les lieux sont propres. Quelle est la probabilité que vous soyez dans les toilettes pour votre sexe ? *(C'est évidemment la formule de Bayes).*

---

◦33◦ Dans cette ville, il y a des mille couples. Soixante sont des couples “gay” et quarante sont des couples “saphiques” [1]. Vous frappez à une porte, un homme vient vous ouvrir. Quelle est la probabilité que l'autre membre du foyer soit une femme.

---

◦34◦ Les sept nains sont par ordre de grandeur Simplet, Atchoum, Dormeur, Grincheux, Prof, Joyeux, Timide, Simon (tiens, c'est comme les trois mousquetaires, ça en fait 8).
Chaque matin, Blanche Neige en tire trois du lit pour les envoyer travailler (sans remise, ils ne retournent pas se coucher, une fois qu'on les a tirés).
Et ils partent travailler ay ho ay ho, en file, du plus petit au plus grand.
Donnez la loi du plus petit, et la loi du plus grand. Et complétez le tableau de la loi conjointe

| | Simplet | Atchoum | Dormeur | Grincheux | Prof | Joyeux | Timide | Simon | plus petit |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Simplet | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Atchoum | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Dormeur | | 0 | 0 | | | | 0 | 0 | |
| Grincheux | | | 0 | 0 | | | 0 | 0 | |
| Prof | | | | 0 | 0 | | 0 | 0 | |
| Joyeux | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Timide | | | | | | 0 | 0 | 0 | |
| Simon | | | | | | | 0 | 0 | |
| plus grand | | | | | | | | | |

Expliquez les 0.

---

◦35◦ ♡ On réalise l'expérience suivante :

```
from random import randrange
X = randrange(6) #entier entre 0 et 5, hasard uniforme
Y = randrange(X) #entier entre 0 et x-1
```

Vérifiez : $E(X) = 2,5$. Montrez que sa variance vaut $35/12$. *($Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$)*
Quelle est l'espérance de la variable aléatoire $Y$.
Quelle est l'espérance du produit $X.Y$ ?

---

◦36◦ Combien y a-t-il de façons de répartir $a + b + c$ individus dans trois sous-ensembles $A$, $B$ et $C$ de cardinaux $a$, $b$ et $c$.
Exemple : $a = 2$, $b = 2$ et $c = 3$ et sept individus i, j, k, l, m, n, o : (ik), (jl), (mno) mais aussi (jl), (ik), (mno) qui n'est pas la même tandis que (ik), (jl), (nom) est la même.

---

◦37◦ On donne $0 \leqslant n \leqslant k \leqslant N$.
On choisit $n$ entiers dans `range(1, N+1)`. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous plus petits que $k$ ?
Quelle est la probabilité que le plus grand des entiers tirés ait pour valeur $k$ ?
Retrouvez la formule de ZHU SHI JIE.

---

◦38◦ J'ai dans ma poche les pièces suivantes :

| 1 euro | 2 euros | dix centimes | vingt centimes |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 5 | 3 |

Question niveau CE2 : combien ai-je en poche ?
Mon fils vient me réclamer son argent de poche. Je tire trois pièces au hasard *(je vais vite, je ne parviens pas à les distinguer au toucher, le hasard est uniforme)*.
Quelle est la probabilité qu'il ait trois pièces de même valeur ?
Quelle est la probabilité qu'il touche plus de trois euros ?
Sachant que les trois pièces sont différentes, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas de pièce de dix centimes ?

---

1. après l'Informatique Pour Tous, c'est le Mariage Pour Tous

∘39∘ Dans une chambre secrète du château de Bowser, il y a $n$ Yoshi numérotés et deux Gomba numérotés de 1 à 2. Ils sortent de la pièce un par un, au hasard.[2]
On note $X$ la variable aléatoire "*rang d'apparition du premier Gomba*". Déterminez sa loi.
On note $Y$ la variable aléatoire "*rang d'apparition du premier individu portant le numéro* 1". Déterminez sa loi.

∘40∘ $x$ et $y$ sont deux variables aléatoires sur un univers probabilisé $(\Omega, P)$, avec $Var(X)$ non nulle.
Minimisez $E\big((Y-a)^2\big)$ puis minimisez $E\big((Y-(a+b.X))^2\big)$.
C'est un exercice de probabilités ou d'algèbre linéaire ?

∘41∘ $A$ est une matrice de projection, complétez la : $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ & 0 & -1 \\ & 4 & \end{pmatrix}$. Donnez son noyau $K$ et une base de son image $I$. Donnez l'équation cartésienne de son ensemble image. Montrez que son image est $Ker(I_3 - A)$. Montrez que $\{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ est un espace vectoriel. Montrez que $M$ est dans $C$ si et seulement si on a $\forall U \in K,\ M.U \in K$ et $\forall V \in I,\ M.V \in I$.

∘42∘ En $M.P.S.I._\pi$ les vingt élèves choisissent leur T.I.P.E. au hasard en lançant un dé équilibré à huit faces *(ça existe ?)*.
Si ils tirent un nombre premier, ils prennent maths *(+info, jeux, échecs...)*. Sinon, ils prennent physique.
Quelle est la probabilité qu'ils fassent tous maths ? Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas plus de quinze élèves dans chaque groupe.

∘43∘ Soit $A$ une matrice de taille $n$ sur $n$ et $U_1$ à $U_k$ des vecteurs propres de $A$ associé à des valeurs propres distinctes $\lambda_1$ à $\lambda_k$ ($A.U_i = \lambda_i.U_i$et $U_i \neq O_n$). Montrez que la famille $(U_1, \dots U_k)$ est libre *(partir de $\alpha_1.U_1 + \dots + \alpha_k.U_k = 0_n$ et appliquer $A$ autant de fois qu'il faut)*.
Concluez que si $A$ admet $n$ valeurs propres distinctes, alors il existe une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale vérifiant $A.P = P.D$ *(on montrera qu'il existe au moins un vecteur propre pour chaque valeur propre, et on mettra ces vecteurs propres dans le matrice $P$)*.

∘44∘ ♡ Pour tout $n$, on pose $c_n = (\theta \longmapsto \cos(n.\theta))$ et $\sigma_n = (\theta \longmapsto \cos^n(\theta))$. Montrez que la famille $(c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4)$ est libre dans $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ +,\ .)$. Montrez que la famille $(\sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_4)$ est libre dans $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ +,\ .)$ et engendre le même sous-espace vectoriel que $(c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4)$. Donnez la matrice de changement de base.

∘45∘

| | | |
|---|---|---|
| $\overrightarrow{\varepsilon_0} = x \longmapsto \dfrac{1}{x^3 - 3.x + 2}$ | $\overrightarrow{\varepsilon_1} = x \longmapsto \dfrac{x}{x^3 - 3.x + 2}$ | $\overrightarrow{\varepsilon_2} = x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^3 - 3.x + 2}$ |
| $\overrightarrow{e_0} = x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ | $\overrightarrow{e_1} = x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$ | $\overrightarrow{e_2} = x \longmapsto \dfrac{1}{(x+2)}$ |

Donnez la matrice de changement de base entre $\beta = (\overrightarrow{\varepsilon_0},\ \overrightarrow{\varepsilon_1},\ \overrightarrow{\varepsilon_2})$ et $B = (\overrightarrow{e_0},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$ *(exprimez les $\overrightarrow{e_i}$ à l'aide des $\overrightarrow{\varepsilon_k}$)*.
Inversez la matrice.
Décomposez $\dfrac{9}{X^3 - 3.X + 2}$, $\dfrac{9.X}{X^3 - 3.X + 2}$ et $\dfrac{9.X^2}{X^3 - 3.X + 2}$ en éléments simples.

∘46∘ ♡ On se place dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$ *(base canonique $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{l})$)*. Donnez une base du sous-espace $H$ d'équation $x + y - z + 3.t = 0$. Donnez un jeu d'équations du plan $P$ engendré par $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{l}$. Donnez une base de $H \cap P$.

∘47∘ Une matrice carrée de taille $n$ est dite symétrique si $a_i^k = a_k^i$ pour tout couple $(i,\ k)$. Montrez que les matrices symétriques de taille $n$ forment un espace vectoriel *(dimension ?)*.
Une matrice carrée de taille $n$ est dite gentil-symétrique si elle est symétrique par rapport à la "seconde" diagonale, comme $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & c \\ h & i & f & b \\ j & h & e & a \end{pmatrix}$. Montrez que c'est un espace vectoriel de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ (dimension ?) noté $G_n$. Quantifiez l'appartenance à $G_n$ : $a_i^k = a_{\cdots}^{\cdots}$.
Déterminez la dimension de $G_n \cap S_n$. Déterminez la dimension de $G_n + S_n$.

2. dans le sujet CCP, ce sont encore une fois des boules et une urne... mais à force d'entendre mes enfants et mes presque enfants jouer à la Nintendo...

◦48◦ Montrez que $(P,\ Q) \longmapsto P(0).Q(0) + P'(1).Q'(1) + P''(2).Q''(2) + P^{(3)}(3).Q^{(3)}(3)$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$.
Transformez la base canonique $(1,\ X,\ X^2,\ X^3)$ en base orthonormée par méthode de Gram-Schmidt.

---

◦49◦ On note $E$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
♡ Montrez qu'il n'existe aucun produit scalaire sur $E$ tel que $P \longmapsto P'$ soit une isométrie.
♣ Existe-t-il un produit scalaire sur $E$ tel que $P(X) \longmapsto P(X+1)$ soit une isométrie ?

On prend le produit scalaire $(P, Q) \longmapsto P(0).Q(0) + P(1).Q(1) + P(2).Q(2)$. Complétez $(1/\sqrt{3})$ en base orthonormée.
Faites tourner $X$ d'un angle $\pi/2$ autour de 1.

---

◦50◦ ♡ On rappelle que $(A, B) \longmapsto Tr({}^tA.B)$ est un produit scalaire sur $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$. L'application $M \longmapsto (M + {}^tM)/2$ est elle un projecteur orthogonal ? L'application $M \longmapsto {}^tM$ est elle une isométrie de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ ? Pour quelles matrices $A$ l'application $M \longmapsto A.M$ est elle un endomorphisme de $E$, un automorphisme de $E$, une isométrie de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ ?
Qui est le projeté orthogonal d'une matrice $M$ sur l'ensemble des matrices diagonales ?
*Rappel : une isométrie est une application linéaire qui préserve les normes et produits scalaires :* $\phi(f(\overrightarrow{u}),\ f(\overrightarrow{v})) = \phi(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$.

---

◦51◦ ♣ Existe-t-il un produit scalaire de $(\mathbb{R}^2, +, .)$ pour lequel $\overrightarrow{i}$ est orthogonal à $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ est orthogonal à $4.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ ? Si oui, choisissez en un, et construisez une base orthonormée de premier vecteur colinéaire à $\overrightarrow{i}$.

---

◦52◦ Donnez une primitive de $\theta \longmapsto \cos^4(\theta)$.
Résolvez l'équation $y''_t + y_t = \cos^3(t)$ d'inconnue $y$ fonction de $t$ en utilisant la méthode de variation des constantes. **(source : oral C.C.P.)**

Et si vous le faisiez sans variation des constantes ? En linéarisant le second membre ?

---

◦53◦ Pour quelles valeurs de $a$ les solutions de $(1+t^2).y'_t + a.t.y_t = 0$ sont elles toutes bornées sur $\mathbb{R}^+$ ?
Pour quelles valeurs de $a$ les solutions de $(1+t^2).y'_t + a.t.y_t = 0$ sont elles toutes bornées sur $\mathbb{R}$ ?

---

◦54◦ Ajustez $a_t$ et $b_t$ pour que $t \longmapsto t^2$ et $t \longmapsto \sqrt{t}$ soient solutions de $t^2.y''_t + a_t.y'_t + b_t.y_t = 0_{\forall t>0}$.

---

◦55◦ Ajustez $a$ et $b$ pour que $t \longmapsto t.\cos(\ln(t))$ soit solution de $t^2.y''_t + a.y'_t + b.y_t = 0_{\forall t>0}$.

---

◦56◦ ♡ Montrez que $x \longmapsto (1-x).\int_0^x t.f(t).dt + x.\int_x^1 (1-t).f(t).dt$ est nulle en 0 et en 1 et est deux fois dérivable.
Et quelle est sa dérivée seconde ?

---

◦57◦ Peut on choisir $a$, $b$ et $c$ réels pour que $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$ admette pour spectre $\{0,\ 1,\ 2\}$ ?

---

◦58◦

| Lycee Charlemagne | MPSI2 | Annee 2023/24 |
|---|---|---|

. CCP 2009 MP 3 heures .

I∼0) $p$ et $q$ sont deux entiers naturels. Montrez que $((1,0),\ (X,0), \dots, (X^{p-1}, 0),\ (0,1),\ (0,X), \dots (0, X^{q-1}))$ est une base de $\mathbb{C}_{p-1}[X] \times \mathbb{C}_{q-1}[X]$ (base notée $\mathbb{B}$, espace vectoriel noté $E$).

I∼1) $A$ et $B$ sont deux polynômes, de degrés respectifs $q$ et $p$, qu'on écrira sous forme factorisée $A(X) = \lambda_A.\prod_{j=1}^{q}(X - \alpha_j)$ et $B(X) = \lambda_B.\prod_{j=1}^{p}(X - \beta_j)$ mais aussi développée sur la base canonique $A(X) = \sum_{k=0}^{q} a_k.X^k$ et $B(X) = \sum_{k=0}^{p} b_k.X^k$. On définit $f$ sur $E$ par $f((P, Q)) = A.P + B.Q$. Montrez que $f$ est linaire. Montrez que $Im(f)$ est inclus dans $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.

I∼2) On rappelle qu'on pose $Ker(f) = \{(P,Q) \in E \mid f((P,Q)) = 0\}$. Montrez que $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$.
I∼3) Montrez que $f$ est injective, si et seulement si $Ker(f)$ est égal à $\{(0,\ 0)\}$.
I∼4) Montrez que si $A$ et $B$ ont une racine commune $r$ si et seulement $Ker(f)$ n'est pas réduit à $(0,\ 0)$.

I∼5) Montrez que l'ensemble des $f(C)$ quand $C$ décrit $\mathbb{B}$ est une famille génératrice de $Im(f)$.
I∼6) Montrez que c'est une base de $Im(f)$ si et seulement si $Ker(f)$ est réduit à $\{(0,0)\}$.
I∼7) Montrez que $f$ est bijective de $E$ dans $(\mathbb{C}_{p+q-1}[X],+,.)$ si et seulement si $Ker(f)$ est réduit à $\{(0,0)\}$.

---

$II \sim 0$ On construit la matrice $M_{A,B}$ :

$$\begin{pmatrix}
a_0 & & & & b_0 & & \\
a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\
\vdots & & a_0 & & \vdots & & b_0 \\
a_q & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\
 & \ddots & \vdots & a_1 & b_p & & \vdots \\
 & & a_q & & & \ddots & \vdots \\
 & & & a_q & & & b_q
\end{pmatrix}$$

Elle est de format $p+q$ sur $p+q$ et les positions non remplies sont des 0.
Par exemple $A = 1 + 2.X + 3.X^2$
et $B = 4 + 5.X + 6.X^2 + 7.X^3$ :

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\
3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\
0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 7
\end{pmatrix}.$$

Calculez le déterminant de cette matrice $M_{A,B}$ donnée en exemple à droite.

II∼0) Calculez le déterminant de la matrice dans le cas $A = X^2 - 3.X + 2$ et $B = X^3 - 2.X^2 - 5.X + 6$.
II∼1) Écrivez une procédure `Python` qui prend en entrées deux listes de coefficients `A` et `B` (sur l'exemple ci dessus `[1, 2, 3]` et `[3, 4, 5]`) et retourne la matrice $M_{A,B}$ sous forme de liste de listes.
II∼2) On appelle résultant de $A$ et $B$ le déterminant de la matrice $M_{A,B}$. Qui est le résultat de $A$ et $A$ ? Le résultant est il un opérateur commutatif ?
II∼3) Calculez le résultant de $A$ et $A'$ quand $A$ est le polynôme $a.X^2 + b.X + c$ .
II∼4) Calculez le résultant de $A$ et $A'$ quand $A$ est le polynôme $X^3 + a.X + b$.

---

III∼0) Montrez que si le couple de polynômes $(P,\ Q)$ a pour composantes sur la base $E$ le vecteur $U$, alors le polynôme $f((P,\ Q))$ a pour composantes $M_{A,B,}.U$ sur la base canonique de $(\mathbb{C}_{p+q-1}[X],+,.)$.

---

IV∼0) Montrez que $X^2 - s.X + p$ et $X^2 - s'.X + p'$ ont une racine commune au moins si et seulement si $p^2 + p.s'^2 + p'.s^2 + p'^2$ est égal à $2.p.p' + (p+p').s.s'$.

---

V∼0) Dans cette partie : $A = X^4 + X^3 + 1$ et $B = X^3 - X + 1$. Écrivez la matrice $M_{A,B}$ (format ?), calculez son déterminant. Montrez que $A$ et $B$ n'ont pas de racine commune.
V∼1) Montrez qu'en utilisant la matrice $M_{A,B,}$ on peut trouver un couple de polynômes $(P_0,\ Q_0)$ vérifiant $A.P_0 + B.Q_0 = 1$. D'ailleurs, trouvez en un, par la méthode que vous voulez.
V∼2) Déterminez tous les couples solutions dans $(\mathbb{C}[X])^2$ de $A.P + B.Q = 1$ *(pensez que vous avez une solution particulière, et écrive $(P - P_0).A = (Q_0 - Q).B$).*

---

VI∼0) En utilisant les polynômes $A = X^2 - 3$ et $B = (y - X)^2 - 7$, trouvez un polynôme de degré 4 à coefficients entiers admettant pour racine $\sqrt{3} + \sqrt{7}$.

---

VII∼0) On a représenté graphiquement pour vous ci contre l'arc paramétré $\Gamma$ « mouvement d'une particule en fonction du temps » : $\left\{\begin{array}{rcll} x(t) & = & t^2 & +t \\ y(t) & = & t^2 & -t \quad +1 \end{array}\right|$ *(la construction d'arcs paramétrés était encore au programme en 2009)*. On se donne deux polynômes $P$ et $Q$ à coefficients réels et l'on pose pour tout triplet $(x,\ y,\ t)$ de $\mathbb{R}^3$ :$A(t) = P(t) - x$ et $B(t) = Q(t) - y$. Établissez que si un point $M$ de coordonnées $(x,\ y)$ appartient à la courbe de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & P(t) \\ y(t) & = & Q(t) \end{array}\right|$ alors les fonctions polynômes ont une racine commune.
VII∼1) Déduisez qu'un point $M$ de coordonnées $(x,\ y)$ appartenant à la courbe $\Gamma$ vérifie $x^2 + y^2 - 2.x.y - 4.y + 3 = 0$. Mettez l'équation $x^2 + y^2 - 2.x.y - 4.y + 3 = 0$ sous la forme $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}.S.\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ où S est une matrice symétrique. Donnez le polynôme caractéristique de $S$ et son nombre de valeurs propres réelles..

---

◦59◦ Diagonalisez $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mais surtout pas en calculant $\det(A - X.I_n)$, on n'est pas dépécés, mais en discutant la résolution de $A.U = \lambda.U$. Vérifiez que vous pouvez prendre des vecteurs propres deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire usuel.

---

◦60◦ ♡ On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Montrez que l'ensemble des matrices $M$ vérifiant $M.U = 0$ *(vecteur nul)* est un espace vectoriel. Montrez que $\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right)$ en est une base. Pouvez vous donner une base dans laquelle une des matrices a une trace nulle ? Pouvez vous donner une base dans laquelle toutes les matrices ont une trace nulle ?

---

◦61◦ On note $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Est elle inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ ?

Est elle inversible si le corps de base est $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ pour les opérations modulo 5. Si oui, inversez la, si non, décomposez en produit de facteurs premiers $\prod_{k=1}^{15} k^{3+2.(-1)^k}$.

Est elle inversible si le corps de base est $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ pour les opérations modulo 7. Si oui, inversez la, si non, décomposez en produit de facteurs premiers $\prod_{k=1}^{15} k^{3+2.(-1)^k}$.

---

◦62◦ On note $(E, +, .)$ l'espace vectoriel $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Pour $P$ dans $E$, on définit $\phi(P) =^t (P(0),\ P'(0),\ P(1),\ P'(1))$. Calculez l'image par $\phi$ de chacun des vecteurs de la base canonique $(1,\ X,\ X^2,\ X^3)$.

On pose

| | | | |
|---|---|---|---|
| $B_0 = (X-1)^2.(2.X+1)$ | $B_1 = (X-1)^2.X$ | $B_2 = X^2.(3-2.X)$ | $B_3 = X^2.(X-1)$ |

Calculez $\phi(B_k)$ pour chaque valeur de $k$[3].

Montrez que la famille $(B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3)$ est une base de $(E, +, .)$ et donnez la matrice de passage de la base canonique vers cette base *(exprimez les $B_k$ à l'aide des $X^i$)*. Est elle orientée dans le même sens que la base canonique ? Inversez cette matrice *(réfléchissez avant de calculer, on est en maths, exploitez ce que vous avez fait avant)*.

---

◦63◦ On définit, dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ le sous-espace vectoriel $E$ de vecteur directeur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. On note $K$ l'ensemble des applications linéaires $f$ vérifiant $E \subset Ker(f)$. Montrez que $K$ est un sous-espace vectoriel de $(L(\mathbb{R}^3), +, .)$. Montrez que sa dimension vaut 3 ou 6 *(écrivez matriciellement et faites un choix évidemment)*.

On note $M$ l'ensemble des applications linéaires $f$ vérifiant $Im(f) \subset E$. Montrez que $M$ est un sous-espace vectoriel de $(L(\mathbb{R}^3), +, .)$.Montrez que sa dimension vaut 3 ou 6.

Donnez la dimension de $M \cap K$. A-t-on $L(\mathbb{R}^3) = M + K$ ?

---

◦64◦ Construisez trois sous-espaces vectoriels $A$, $B$ et $C$ de $M_3(\mathbb{R})$ vérifiant

| espace | $A$ | $B$ | $C$ | $A \cap B$ | $(A+B) \cap C$ |
|---|---|---|---|---|---|
| dimension | 4 | 3 | 5 | 1 | 3 |

---

◦65◦ ♡ On travaille sur $M_3(\mathbb{R})$ .

Existe-t-il un opérateur linéaire $T$ qui vérifie $T(M) = M$ si $M$ est symétrique, $T(M) = 2.M$ si $M$ est antisymétrique et $T(M) = 3.M$ si la trace de $M$ est nulle.

Existe-t-il un opérateur linéaire $T$ qui vérifie $T(M) = M$ si $M$ est symétrique, $T(2.I_3) = 0_{3,3}$ et $T(M) = 3.M$ si la trace de $M$ est nulle ?

---

◦66◦ Parmi ces sous-ensembles de l'espace vectoriel des polynômes lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

| | |
|---|---|
| polynômes nul en 0 | polynômes à coefficients positifs ou nuls |
| polynômes de degré 3 | polynômes multiples de $X-1$ |
| polynômes ne contenant que des monômes de degré impair | polynômes multiples de $X-1$ ou $X+1$ |
| polynômes de terme constant nul | polynômes multiples de $X-1$ et $X+1$ |
| polynômes de terme constant 1 | polynômes nul en 1 ou en 3 |
| polynômes dont la dérivée est soit nulle, soit ne contenant que des monômes de degré impair | |

---

3. si vous êtes enfin plus intelligent, vous me faites des tableaux...

∘67∘ ♡ $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{u_n}$. Ensemble $I$ des valeurs interdites pour $u_0$ ? Montrez que tout $u_0$ dans $\mathbb{R} - I$, la suite est bornée. Pour quelles valeurs de $u_0$ la suite est elle convergente ? *(pensez à calculer les premiers termes, c'est trop gentil...)*

∘68∘ ♡ Construire une matrice $A$ carrée de taille 3 vérifiant $Tr(A) = 2$, $Tr(A^2) = 14$ et $Tr(A^3) = 20$. Calculez $Tr(A^4)$. (pensez à Viète).
Même question, avec la condition "aucun coefficient nul". (au, on avait le droit à des coefficients nuls avant !).

∘69∘ Donnez une formule pour le terme général de la matrice $\begin{pmatrix} 1.2 & 2.3 & 3.4 & \dots & n.(n+1) \\ 0 & 1.2 & 2.3 & \dots & (n-1).n \\ 0 & 0 & 1.2 & \dots & (n-2).(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1.2 \end{pmatrix}$.
Créez la sous Python. Calculez sa trace, son déterminant, son polynôme caractéristique, et inversez la.

∘70∘ Soit $A$ une matrice réelle de taille 3 sur 3 vérifiant $A^3 = -A$. Montrez que $A$ n'est pas inversible.
On suppose que $A$ n'est pas la matrice nulle. Montrez que $\{U \mid A.U = 0_3\}$ (noté $K$) est de dimension 1. Montrez que si $U$ est dans $K$, non nul, et que $V$ n'y est pas, alors $(U, V, A.V)$ est libre. Montrez que $A$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

∘71∘ ♡ $(E, +, .\phi)$ est un espace vectoriel euclidien. Montrez que le déterminant de Gram d'une famille $(\overrightarrow{u_1}, \dots \overrightarrow{u_k})$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel on donne les vecteurs. Montrez que si la famille est liée, le déterminant de Gram est nul. Montrez que si la famille est libre, le déterminant de Gram est strictement positif.
La matrice de Gram est la matrice de terme général $\phi(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u_k})$.

∘72∘ Montrez que $(P,\ Q) \longmapsto \int_{-1}^{1} P(t).Q(t).dt$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}[X], +, .)$. On suppose que la famille $(Q_n)$ est une famille de polynômes deux à deux orthogonaux vérifiant $deg(Q_n) = n$. Montrez que $Q_n$ a la même parité que $n$ ($Q_n(-x) = (-1)^n.Q_n(x)$). Montrez que $Q_n$ admet $n$ racines distinctes, toutes entre $-1$ et $1$ (on pourra raisonner par l'absurde, donner la liste de ses racines dans $]-1,\ 1[$ et étudier $\prod_a (X - a)$).

∘73∘ Tous les polynômes sont constants. On va prouver que $(P_n)' = 0$ pour tout $n$ et tout polynôme de degré $n$..
On initialise à 0 : les polynômes de degré 0 sont constants. Ils ont une dérivée nulle.

On se donne $n$ et on suppose que tous les polynômes de de degré inférieur ou égal à $n$ ont une dérivée nulle.
On prend $P$ de degré $n + 1$. On va montrer que sa dérivée est nulle.
On l'écrit sous la forme $P(X) = (P(X) - P(0)) + P(0)$.
Le polynôme $P(0)$ est constant, sa dérivée est nulle.
Le polynômes $P(X) - P(0)$ n'a plus de terme constant et se factorise sous la forme $X.Q(X)$ avec $X$ et $Q$ de degré inférieur ou égal à $n$.
On dérive avec la formule $(U.V)' = U'.V + U.V'$, chaque terme $U'$ et $V'$ est nul, la somme est nulle.
On somme : $P'$ est nulle.
Trouvez l'erreur.

∘74∘ ♡ Montrez que l'équation $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = (\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ n'a pas de solution.
Montrez que l'équation $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) = (\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$ a des solutions.
Parmi les solutions l'équation $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = (\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$ y en a-t-il qui sont solutions de $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{k}) = (4.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k})$.

∘75∘ Montrez : $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$ (juste avec la relation de Chasles et la multilinéarité).

∘76∘ ♡ Montrez que la famille des $X^k.(1-X)^{6-k}$ *(pour k de 0 à 6)* est une base de $(\mathbb{R}_6[X], +, .)$. Calculez le déterminant de cette famille par rapport à la base canonique.

∘77∘ Simplifiez $\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{b+a} & \frac{1}{2.b} \end{vmatrix}$. Montrez : $\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{b+a} & \frac{1}{2.b} & \frac{1}{b+c} \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{c+b} & \frac{1}{2.c} \end{vmatrix} = \dfrac{(a-b)^2.(a-c)^2.(a-d)^2}{8.a.b.c.(a+b)^2.(a+c)^2.(b+c)^2}$ en supposant que $a$, $b$, $c$et $d$ sont quatre nombres strictement positifs.

Inventez la formule pour le déterminant de la matrice de taille $n$ sur $n$ de terme général $\dfrac{1}{a_k + a_i}$. Est elle cohérente pour $n$ égal à 1.

Écrivez un script Python qui pour une liste $[a_1, \dots a_n]$ donnée calcule le déterminant en question.

Calculez aussi celui de $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b.a} & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c.a} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d.a} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d^2} \end{pmatrix}$ et enfin de $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b.a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c.a} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d.a} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$ Exprimez le dernier en supposant que $a$, $b$, $c$ et $d$ sont les racines de $X^4 - S.X^3 + D.X^2 - T.X + P$.

∘78∘ ♣ On sait : $A.B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & & -3 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ et $B.A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -6 & 4 & \\ 2 & & 1 \end{pmatrix}$. Complétez les termes qui manquent *(indication : pensez aussi aux carrés)*. Si vous trouvez deux solutions, choisissez celle avec des entiers.

Diagonalisez $A.B$ *(matrice de passage $P$, matrice diagonale $D$ pour laquelle l'idée des carrés sera aussi utile)* et aussi $B.A$ *(matrice de passage $Q$)*.

Si je propose $A = P.D.Q^{-1}$, vous la calculez puis vous complétez pour trouver $B$ ?

∘79∘ Montrez que $(3.\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i} + 4.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k},\ -2.\overrightarrow{i} - 4.\overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{k})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Décomposez $\overrightarrow{j}$ sur cette base. Donnez un vecteur non nul qui garde les mêmes composantes sur cette base que sur la base canonique.

∘80∘ ♡ Montrez que $(A,\ B) \longmapsto Tr({}^tA.S.B)$ est un produit scalaire sur $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ sachant $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculez l'angle entre $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

∘81∘ ♣ $(E, +, .)$ est l'ensemble des suites réelles bornées. $F$ est l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrez que $F$ est un sous-espace vectoriel strict de $(E, +, .)$.

Pour $u$ et $v$ dans $E$, on pose $\phi(u, v) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}.u_k.v_k$. Montrez que cette série converge effectivement. Montrez que $\phi$ est un produit scalaire sur $(E, +, .)$.

Qui sont les suites orthogonales à la suite $(1, 0, 0, \dots)$ ?

Montrez que seuls la suite nulle est orthogonale à toutes les suites de la forme $(0, 0 \dots 0, 1, 0, \dots)$.

Déduisez $(F^\perp)^\perp = E \neq F$. Est ce en contradiction avec le cours ?

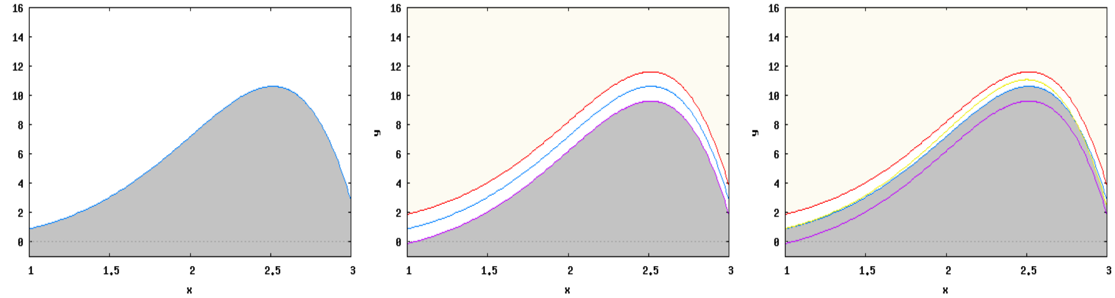
∘82∘ Construisez un produit scalaire dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ pour que $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ soit orthonormée.

∘83∘ $f$ est une application continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. L'objectif est d'approximer $f$ par une suite de polynômes.

-1- Expliquez la différence entre :

• $\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in [0,\ 1],\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow |f(x) - P_n(x)| \leqslant \varepsilon$

et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow (\forall x \in [0,\ 1],\ |f(x) - P_n(x)| \leqslant \varepsilon)$



-2- On peut être tenté de faire appel à $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \left( f\left(\frac{k}{n}\right) . \prod_{\substack{p \leq n \\ p \neq k}} \frac{n.x - p}{k - p} \right)$. Vérifiez que c'est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$. Calculez le en $q/n$ avec $q$ entier de 0 à $n$.

-3- Pour tout réel $x$ de $[0,\ 1]$, on note $(R_{x,k})$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $x$ ($P(R_{x,k} = 1) = x$ et $P(R_{x,k} = 0) = 1 - x$). Calculez espérance et variance de chaque $R_{x,k}$.

-4- Pour tout $n$, on définit $B_{x,n} = \frac{1}{n} . \sum_{k=1}^{n} R_{x,k}$. Comment s'appelle la loi de $B_{x,n}$ ? Donnez son espérance et sa variance.

-5- Rappelez l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire positive. Rappelez l'inégalité de Tchebychev pour une variable aléatoire $X$ de moyenne $\mu$ et de variance $\sigma$.

-6- Déduisez pour tout $a$ strictement positif : $0 \leqslant \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |x - \frac{k}{n}| \geq a}} \binom{n}{k} .x^k.(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4.n.a^2}$

-7- On pose $P_n(f)(x) = E\big(f(B_{x,n})\big)$. Expliquez pourquoi $P_n(f(x))$ n'a aucun sens.

-8- Calculez $P_n(f)(0)$ et $P_n(f)(1)$ pour tout $n$.

-9- Explicitez $P_1(f)(x)$, $P_2(f)(x)$ et $P_3(f)(x)$.

-10- Montrez $P_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .x^k.(1-x)^{n-k}.\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)$.

$\varepsilon$ est un réel strictement positif donné.

-11- Montrez qu'il existe $\mu$ tel que :
$\forall (x,\ y) \in [0,\ 1]^2,\ |x - y| \leqslant \mu \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon/2$.

-12- Justifiez l'existence de $M = Sup(|f(x)| \mid x \in [0,\ 1])$.

-13- Montrez pour tout $x$ de $[0,\ 1]$ : $\big|P_n(f)(x) - f(x)\big| \leqslant \frac{2.M}{4.n.\mu^2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

-14- Déduisez qu'il existe $n$ tel que pour $n$ plus grand que $N$ on a $\big|P_n(f)(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon$.

On vient de démontrer le théorème de Weierstrass sur $[0,\ 1]$ : toute application continue est limite uniforme de polynômes.
Cet « exercice » est un sujet de concours de PSI (Mines ou Centrale, donc PSI* quoi !) la première année où les probabilités sont arrivées au programme. Jusque là, le théorème de Weierstrass était démontré dans les cours de Prépas par des méthodes non probabilistes, en découpant les $\varepsilon$).

---

∘84∘ Vous misez dix euros. Vous lancez alors trois dés équilibrés à six faces *(numérotation de* 1 *à* 6*)*. Si l'écart entre la plus grande valeur affichée et la plus petite dépasse strictement 4, vous gagnez cent. Sinon, vous perdez vos dix euros. Vous jouez ? Quelle est l'espérance de votre gain ?

Écrivez un script Python qui simule ce jeu en affichant les trois valeurs et affiche ensuite "gagné" ou "perdu".

---

∘85∘ On dispose d'un dé équilibré à six faces. On le lance jusqu'à ce que dans la liste des lancers il y ait un élément en double *(exemple :* [1, 3, 5, 4, 3]*)*. Le nombre de lancers est noté $N$. Complétez le tableau *(en justifiant)* :

| $P(N=1)$ | $P(N=2)$ | $P(N=3)$ | $P(N=4)$ | $P(N=5)$ | $P(N=6)$ | $P(N=7)$ | $P(N=8)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

Écrivez un script `Python` qui réalise cent fois l'expérience *(sans se lasser)*.

---

∘86∘ Un jeune garçon spécialiste des râteaux décide d'appeler une première fois $n$ jeunes filles de sa classe.[4] Un appel par fille. Chaque appel aboutit avec probabilité $p$ *(la même pour toutes)*, et les expériences sont indépendantes *(les filles ne se passent pas le mot, même si elles le trouvent lourd)*. On note $X$ la variable aléatoire *(entière)* correspondant au nombre d'appels ayant abouti. Donnez sa loi.
Obstiné, il décide de rappeler les $n - X$ filles qui n'ont pas décroché la première fois. Les nouvelles expériences sont encore indépendantes entre elles et indépendantes des précédentes *(elles ne l'ont pas mis sur liste "opportun")*. On note $Y$ le nombre de nouveaux appels fructueux.
Déterminez pour tout couple $(i,\ k)$ $P(Y = k \mid X = i)$.
Prouvez que $X + Y$ *(noté $Z$)* suit une loi binomiale *(paramètres $n$, $p.(2-p)$, non donné à l'oral CCP)*.
Déterminez espérance et variance de $Z$.

---

4. le sujet de CCP parlait d'une secrétaire appelant des clients d'une entreprise, mais déjà pourquoi **une** secrétaire ? l'intitulé de la profession est il féminin ?

∘87∘ ♡ Vous lancez deux dés équilibrés à six faces. Si les deux résultats sont pairs, vous en prenez le produit, sinon, vous en prenez la somme.
Quelle est la probabilité que le résultat soit pair ?
Quelle est la probabilité que le résultat soit un multiple de 4 ?
Quelle est l'espérance de votre variable aléatoire ?
Quelle est la probabilité que cet exercice ne tombe jamais aux concours.

---

∘88∘ $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires sur un univers probabilisé $(\Omega, P)$, avec $Var(X)$ non nulle.
Minimisez $E\big((Y-a)^2\big)$ puis minimisez $E\big((Y-(a+b.X))^2\big)$.
C'est un exercice de probabilités ou d'algèbre linéaire ?

---

∘89∘ Soit $(Y_k)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} Y_k$. Prouvez pour tout $a$ strictement positif :
$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\Big| \geqslant a\Big) \leqslant \frac{V(Y_n)}{n.a^2}$. *(une question de cours juste avant demandait comme par hasard "rappeler l'inégalité de Bienaimé Tchebychev").*
Application : une burne contient 2 boules carmin et 3 boules ébène *(ça change de rouge et noir)*. On les tire, avec remise *(sinon elle sera vite vide)*. A partir de combien de tirages peut on garantir à plus de 95% que la proportion de boules carmin restera comprise entre $0,35$ et $0,45$ ? *(Indication : $Y_k = k^{ieme}$ tirage, Bernoulli).*

---

∘90∘ On réalise l'expérience suivante :
```
from random import randrange
X = randrange(6) #entier entre 0 et 5, hasard uniforme
Y = randrange(X+1) #entier entre 0 et x
```
Vérifiez : $E(X) = 2,5$. Montrez que sa variance vaut $35/12$. *($Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$)*
Quelle est l'espérance de la variable aléatoire $Y$.
Quelle est l'espérance du produit $X.Y$ ?
Calculez $E(X.Y) - E(X).E(Y)$ *(ce qu'on appelle la* covariance *du couple, sachant que $X$ et $Y$ ne sont pas des variables indépendantes).*

---

∘91∘ Une compagnie aérienne a vendu $n$ billets à cent euros pour un vol qui peut accueillir jusqu'à $N$ passages. La probabilité qu'un des acheteurs se présente à l'embarquement est $p$ (les passagers sont indépendants les uns des autres).
Un acheteur qui ne s'est pas présenté est remboursé à quatre vingt pour cent.
Un acheteur qui se présente et est refusé, faute de place est remboursé à deux cent pour cent.
Oui, la compagnie fait du surbooking.
$X$ est a variable "nombre de voyageurs se présentant à l'embarquement. Quelle st sa loi ?
$Y$ est la variable "nombre de voyageurs se présentant et à qui on refuse une place". Précisez $Y(\omega)$ en faisant intervenir l'événement $X(\omega) > N$.
Montrez que le gain (en centaines d'euros) est $0,2.n + 0,8.X - 2.Y$. Calculez son espérance dans le cas $n \leqslant N$.
On suppose $p = \frac{1}{2}$. Montrez que $\frac{2.X-n}{\sqrt{n}}$ est centrée réduite. Majorez $P(X \geqslant N)$.

---

∘92∘ ♡ Montrez que si $X$ et $Y$ sont deux variables de Bernoulli de paramètres $p$ et $q$, elles sont indépendantes si et seulement si on a $E(X.Y) = E(X).E(Y)$.
Construisez deux variables aléatoires $U$ et $V$ à valeurs dans $\{-1,\ 0,\ 1\}$ vérifient $E(U.V) = E(U).E(V)$ mais pas $P(U = V = 0) = P(U = 0).P(V = 0)$ (leur covariance est nulle, mais elles ne sont pas indépendantes).

---

∘93∘ Une information binaire (True/False, 1/0) est réémise par des transmetteurs successifs, indépendants les uns des autres. Mais un transmetteur se trompe avec probabilité $p$ et transmet alors le bit "opposé". On note $a_n$ la probabilité que le bit de la $n^{ieme}$ étape soit le bit initial. Exprimez $a_{n+1}$ à l'aide de $a_n$. Calculez $a_n$ pour tout $n$.

---

∘94∘ Pour tout $n$, on appelle "suite de Farey d'indice $n$" la liste triée des rationnels de $[0,\ 1]$ de la forme irréductible $\frac{p}{q}$ avec $q \leqslant n$ et on la note $F_n$.
Déterminez $F_5$.
Montrez : $Card(F_p) - Card(F_{p-1}) = p - 1$ ($p$ est un nombre premier).

Montrez : $Card(F_{p^2}) - Card(F_{p^2-1}) = p^2 - p$ ($p$ est un nombre premier).
Montrez : $Card(F_{p.q}) - Card(F_{p.q-1}) = p.q - p - q + 1$ ($p$ et $q$ sont deux nombres premiers distincts).
Montrez que si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux termes consécutifs de $F_n$ alors on a $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{d+d} < \frac{c}{d}$ et $a.d - b.c = 1$.

◦95◦ Calculez la somme des entiers naturels plus petits que 1000 qui sont multiples de 2 ou de 5.
On veut aussi calculer le produit des entiers plus petits que 1000 qui sont multiples de 2 ou de 5. C'est certes faisable en raisonnant, mais là, je vous demande un script Python qui va calculer ce produit et plus généralement le produit des entiers de 1 à $N$ qui sont multiples de $a$ ou de $b$.
*Je précise : je ne compte pas 0 parmi ces entiers...*

◦96◦

```
def Scooby(A) :
....L = [ ]
....for i in range(len(A)) :
........while len(L)>0 and L[-1] < A[i] :
............L.pop()
........L.append(A[i])
....return L
```

Voici un script Python. Que retournera-t-il pour la suite [1, 10, 5, 6, 5, 3, 4, 2, 0, 4] ?
Que fait elle pour une suite d'entiers quelconque ?

◦97◦ ♡ Montrez que $(x, y, z) \longmapsto \sqrt{x^2 + 5.y^2 + 11.z^2 + 4.x.y + 2.y.z + 5.y.z}$ est une norme issue d'un produit scalaire *(pour l'inégalité triangulaire qui fait bien partie de la question, passez par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le produit scalaire)*.
Complétez pour que $(\overrightarrow{i}, a.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, a.\overrightarrow{i} + b.\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ soit orthonormée.

◦98◦ ♡ $G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Vecteurs : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$
Ajustez $a$ et $b$ pour que la famille ait pour matrice de Gram $G$. Quel est l'angle que font deux à deux ces vecteurs ? Et en dimension $n$ ? On considère la matrice $U$ de taille $n+1$ dont tous les coefficients valent 1. Montrez que 0 en est valeur propre de multiplicité $n$ avec un sous-espace propre de dimension $n$. Montrez que le vecteur formé de $n+1$ réels égaux à 1 est valeur propre de $U$. Déduisez que $U$ est semblable à $Diag(n+1, 0, \dots 0)$. A quelle matrice diagonale est semblable $\beta.U + (\alpha - \beta).I$ ? Quel est son déterminant ? Déduisez que si on peut trouver $n+1$ vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ formant deux à deux le même angle $\theta$, alors cet angle $\theta$ vaut $Arccos(-1/n)$.

◦99◦ ♡ Montrez que $(x, y, z) \longmapsto \sqrt{x^2 + 5.y^2 + 11.z^2 + 4.x.y + 2.y.z + 5.y.z}$ est une norme issue d'un produit scalaire *(pour l'inégalité triangulaire qui fait bien partie de la question, passez par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le produit scalaire)*.
Complétez pour que $(\overrightarrow{i}, a.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, a.\overrightarrow{i} + b.\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ soit orthonormée.

◦100◦ Albert, Benoît, Charles et Didier veulent aller manger. Mais ils ne se supportent pas tous parfaitement.
Albert ne vient que si Benoît vient.
Benoît ne vient que si Albert vient.
Charles ne vient que si Benoît vient.
Didier ne vient que si Albert et Charles ne sont pas là en même temps.
Quelles sont les configurations possibles ?

◦101◦ ♡ Montrez que $(X, Y) \longmapsto^t X.S.Y$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3, +, .)$ sachant $S = \begin{pmatrix} 2 & & \\ -1 & & \\ & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $|\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}| = \sqrt{5}$ et $\cos(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}}) = \sqrt{6}/3$.

◦102◦ Soient $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel, tous deux de norme 1 (avec $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{b}$). Montrez que chacun des vecteurs $(1-\lambda).\overrightarrow{a} + \lambda.\overrightarrow{b}$ *($\lambda$ dans $]0, 1[$)* est de norme strictement plus petite que 1.

◦103◦ ♡ Montrez que $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \longmapsto 34.x.x' - 12.x.y' - 12.x'.y + 41.y.y'$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^2, +, .)$ *(noté $\phi$)*.
♣ Donnez deux vecteurs non nuls, orthogonaux à la fois pour ce produit scalaire et pour le produit scalaire usuel

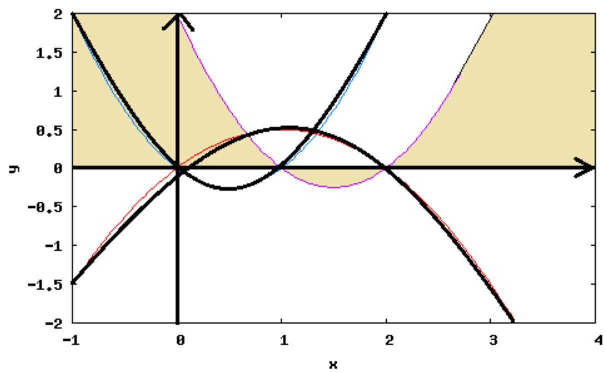
*(c'est à dire $\phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 0$).*

---

∘104∘ ♡ Montrez que $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 13 & 8 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice de Gram.

---

∘105∘ Montrez que $(P,\ Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{2} P(k).Q(k)$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_2[X],+,.)$. Montrez que la famille $(X.(X-1),\ X.(2-X),\ (X-1).(X-2))$ est orthogonale pour ce produit scalaire.
Qui sont les polynômes orthogonaux au sous-espace vectoriel des polynômes constants ? Donnez une base de ce plan. Donnez même une base orthonormée.
Montrez que $P(X) \longmapsto P(X+1)$ *(notée $T$)* est un automorphisme de $(\mathbb{R}_2[X],+,.)$.




Montrez que $P(X) \longmapsto P(X+1)$ *(notée $T$)* est un automorphisme de $(\mathbb{R}_2[X],+,.)$.

Montrez que ce n'est pas une isométrie *(c'est à dire certains vecteurs $P$ n'ont pas la même norme que leur image)*. Existe-t-il des polynômes non constants qui ont la même norme que leur image.
Résolvez l'équation $P$ est orthogonal à $T(P)$ pour le produit scalaire $\phi$.

---

∘106∘ -a- On note $(E,+,.)$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0,\ \pi/2]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que $(f,g) \longmapsto \int_0^{\pi/2} f(t).g(t).dt$ est un produit scalaire sur $(E,+,.)$ (notation : $< f,\ g >$).

-b- Pour $f$ dans $E$, on définit $V(f) = x \longmapsto \int_0^x f(t).dt$ et $V^*(f) = x \longmapsto \int_x^{\pi/2} f(t).dt$. Pourquoi la notation $V(f(x))$ est elle absurde ? Montrez que $V$ et $V^*$ sont deux endomorphismes de $(E,+,.)$. Sont ils injectifs ? Sont ils surjectifs ? Pourquoi ne pouviez vous pas appliquer la formule du rang ?
-c- Montrez pour $f$ et $g$ dans $E$ : $< V(f),\ g > = < f,\ V^*(g) >$.
-d- On pose $T = V^* \circ V$. Représentez graphiquement $T(1)$ et $T(Id)$.
-e- Calculez $T(f)(\pi/2)$ et $T(f)'(0)$ pour $f$ dans $E$.
-f- Montrez $< T(f),\ g > = < f,\ T(g) >$ pour tout couple $(f,\ g)$. Montrez $< T(f),\ f > > 0$ pour tout $f$ de $E - \{0\}$.
-g- Déduisez que les valeurs propres de $T$ sont strictement positives.
-h- Soit $\lambda$ une valeur propre de $T$ et $f_\lambda$ un vecteur propre associé. Montrez que $f_\lambda$ est $C^2$ et est solution de l'équation différentielle $\lambda.\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$. Montrez : $f_\lambda(\pi/2) = 0$ et $f'_\lambda(0) = 0$.
-i- Déduisez que $\lambda$ est de la forme $\frac{1}{(2.n+1)^2}$ pour un entier naturel $n$. Donnez la dimension des sous-espaces propres.

Extrait du sujet Mines-Ponts 2015

---

∘107∘ ♣ Trouvez une application $f$ continue vérifiant $\frac{1}{\pi}\int_0^{2.\pi} \cos(n.t).f(t).dt = \frac{1}{n^2}$. Déduisez $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

---

∘108∘ Retrouvez sans effort que (dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$ pour le produit scalaire usuel) l'orthogonal du plan d'équation $x+y-3.z=0$ est $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3.\overrightarrow{k})$.

Existe-t-il un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3,+,.)$ pour lequel l'orthogonal du plan d'équation $x+y-z = 0$ soit $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ ?

Existe-t-il un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3,+,.)$ pour lequel l'orthogonal du plan d'équation $x+y-z = 0$ soit $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$ ?

---

∘109∘ Soit $p$ un projecteur et $n$ un endomorphisme nilpotent de $(\mathbb{R}^d,+,.)$. On suppose de plus $p \circ n = n \circ p$. On pose $f = p + n$. Calculez $Tr(f^k)$ pour tout entier naturel $k$.

---

∘110∘ On note $P$ l'ensemble des projecteurs de $(\mathbb{R}^n, +, .)$ *(n vaut au moins 2)*. Déterminez l'ensemble image de $P \times P$ par l'application $(p,\ q) \longmapsto Tr(p+q)$.
Montrez que l'ensemble image de $P \times P$ par l'application $(p,\ q) \longmapsto \det(p+q)$ est $\mathbb{R}$.
Quel est l'ensemble image de $P \times P$ par l'application $(p,\ q) \longmapsto Tr(p \circ q)$ ?

∘111∘ * * Combien y a-t-il de matrices carrées de taille 2 à coefficients entiers entre $-2$ et 2 ? Un ordinateur tire au hasard uniforme une de ces matrices.
• Montrez que la probabilité qu'elle soit symétrique est $1/5$.
• Montrez que la probabilité qu'elle soit diagonale est $1/25$.

• Montrez que la probabilité que ce soit une matrice de Gram est $2/125$.

• Quelle est la probabilité que ce soit une matrice de Gram, sachant qu'elle est symétrique *(probabilité sur un sous-univers)* ?
Les événements "Gram" et "symétrique" sont ils indépendants ? Les événements "Gram" et "diagonale" sont ils indépendants ?

| | symétrique 125 | non symétrique 500 |
|---|---|---|
| Gram 10 | | 0 |
| pas Gram 615 | | |

| | diagonale 25 | non diagonale 600 |
|---|---|---|
| Gram 10 | | |
| pas Gram | | |

∘112∘ ♡ $a$, $b$ et $c$ sont trois réels. On définit : $R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Montrez que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $R$. Montrez que si $R$ est une matrice de rotation de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ espace vectoriel euclidien canonique alors $a$, $b$ et $c$ sont les racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + p$ *(vérifiez qu'il ne sert à rien de calculer* $\det(A)$*)*.

On pose alors $\gamma = \dfrac{3.a-1}{2}$ *(justifiez pourquoi on pose cela)*. Montrez que $4.\gamma^3 - 3.\gamma$ est entre $-1$ et 1. Déduisez que $p$ est entre 0 et $4/27$.

Que pouvez vous dire dans chacun des deux cas $p = 0$ et $p = 4/27$.
Réciproquement, montrez que si $a$, $b$ et $c$ sont racines d'une équation $X^3 - X^2 + p$ avec $p$ positif plus petit que $4/27$ alors $A$ est une matrice de rotation *(axe ? angle ?)*.
*Exercice classique de l'écrit des concours CCP et E3A, classique de l'oral des concours Centrale et Mines-Ponts.*

∘113∘ $p$ et $q$ sont deux projecteurs de $\mathbb{R}^3$, vérifiant $Tr(p+q) = 4$. Montrez alors $Im(p) \cap Im(q) \neq \{\overrightarrow{0}\}$. Déduisez que 2 est valeur propre de $p+q$.

∘114∘ ♡ Montrez que la dérivation est un endomorphisme sur l'espace des solutions de l'équation $y'' + a.y' + b.y = 0$. Donnez sa trace et son déterminant.

∘115∘ ♡ Montrez que $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ forme une base de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Est elle orthogonale pour le produit scalaire $(A, B) \longmapsto Tr({}^tA.B)$ ?
Donnez une matrice orthogonale aux trois premières pour ce produit scalaire.
Construisez un produit scalaire sur $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ pour lequel cette base est orthonormée *(en définissant par exemple le produit scalaire de* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$*)*. Calculez la norme de la matrice unité.
Existe-t-il $S$ telle que ce produit scalaire soit $(A, B) \longmapsto Tr({}^tA.S.B)$ ? Donnez une base orthonormée de l'espace vectoriel des matrices de trace nulle. De toutes les matrices $T$ de trace nulle, laquelle est la plus proche de $I_2$ *(c'est à dire, laquelle minimise* $|T - I_2|^2$ *?)*.

Un élève dit « j'ai voulu calculer la trace et le déterminant de $M \longmapsto M^2$ de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ dans lui même. J'ai donc calculé la matrice de cet endomorphisme sur la base canonique $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.
Ayant pour images $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, j'ai trouvé la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de déterminant nul et de trace 2.

Mais j'ai pris ensuite la base ($\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) et j'ai trouvé la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
La trace a changé. Or le cours dit que la trace d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie.. »

---

∘116∘ $A$ est une matrice de taille 3 vérifiant $A^2 = A$ *(projection)*. Montrez que $M \longmapsto A.M$ est un endomorphisme de $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$. Donnez son déterminant en fonction de celui de $A$. Déterminez sa trace dans le cas $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminez sa trace dans le cas général.

---

∘117∘ On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ($a$ est un réel fixé). Déterminez son rang. Pour quelles valeurs de $a$ est elle diagonalisable ?

---

∘118∘ Soit $f$ un endomorphisme de $(E,+,.)$. Montrez que $f$ est injective si et seulement si on a $Ker(f \circ g) = Ker(g)$ pour tout autre endomorphisme $g$.
Pour un des sens c'est direct. Pour l'autre, bien choisir $g$.

---

∘119∘ $*$ $\heartsuit^2$ ou $\clubsuit^2$ suivant que vous êtes M ou PSI On travaille avec les entiers de 0 à 2 pour l'addition et la multiplication modulo 3.

1- Combien y a-t-il de vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et combien de matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Combien de matrices de rang 0 ? Pour les matrices de rang 1, je dis "une colonne $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ (9 choix) puis un de ses trois multiples $\begin{pmatrix} 0.a \\ 0.c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1.a \\ 1.c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2.a \\ 2.c \end{pmatrix}$, donc 27 matrices". Rectifiez l'erreur et donnez le bon nombre.

2- Complétez alors

| $rg(M) = 0$ | $rg(M) = 1$ | $\det(M) = 0$ | $\det(M) = 1$ | $\det(M) = 2$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | 24 | |

3- Calculez l'espérance la variance de la variable aléatoire déterminant puis de la variable trace pour un tirage aléatoire uniforme de matrices.

4- Pour trouver combien il y a de matrices semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, je fais le raisonnement suivant : "ce sont les matrices de la forme $P.M.P^{-1}$, or, il y a 48 matrices $P$ possibles, d'où 48 matrices semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$". C'est faux, trouvez l'erreur, et dénombrez les douze matrices semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5- Profitez en pour diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6- Je dis qu'il y a douze matrices de projecteur de rang 1. Confirmez le en en donnant la liste. Ou alors complétez l'idée : les quatre droites sont $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ et $Vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, ensuite...

7- Montrez que la probabilité de tirer une matrice de projecteur est de 14/81.

8- Combien de matrices sont semblables à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ? Calculez la probabilité de tirer une matrice nilpotente.

9- Calculez la probabilité de tirer une matrice de permutation.

10- Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. Élevez la quand même à la puissance 2016.
Combien de matrices ont pour polynôme caractéristique

| $X^2$ | $X^2+X$ | $X^2+2.X$ | $X^2+1$ | $X^2+2$ | $X^2+X+1$ | $X^2+2.X+1$ | $X^2+2.X+2$ | $X^2+X+2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

11- Calculez la probabilité de trouver une matrice permutables avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

12- Voulant estimer la probabilité que deux matrices tirées au hasard soient permutables, sans me prendre la tête, j'écris un script **Python**. Complétez le :

```
def alea() :
....a = randrange(3)
```

```
....b =
....return([[a,b],[c,d]])
def produit(A, B) :
....a = A[0][0]*B[0][0]+A[0][1]*B[1][0]
....b =
....return([[a,b],[c,d]])
compt = 0
for Na in range(810) :
....A = alea()
....for Nb in range(810) :
```

ou alors écrivez votre propre script. On trouve environ 14 pour cent.

---

∘120∘ On définit $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & +y & +z \\ x & -2.y & +2.z \\ 2.x & -y & +3.z \end{pmatrix}$. Donnez son rang, son noyau *(base, équations cartésiennes)*, son image *(base, équation cartésienne)*.
Montrez que l'ensemble des endomorphismes $h$ vérifiant $f \circ h = 0_{\mathbb{R}^3}$ est un espace vectoriel dont les éléments sont de rang 0 ou 1 (et comme toujours, il y a là deux questions...). Donnez une base de cet espace vectoriel.

Montrez que l'ensemble des endomorphismes $g$ vérifiant $g \circ f = 0_{\mathbb{R}^3}$ est un espace vectoriel dont les éléments sont de rang 0 ou 1. Donnez une base de cet espace vectoriel.

---

∘121∘ ♡ Déterminez le rang de l'application $P \longmapsto 4.P(X) - 3.X.P'(X)$ après en avoir prouvé la linéarité de $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$ dans lui même et en avoir cherché le noyau.
Déduisez que pour tout polynôme $Q$ il existe $P$ vérifiant $Q = 4.P - 3.X.P'$.
Est il vrai que pour tout $Q$ il existe $P$ vérifiant $Q = 4.P - X.P'$ ?

---

∘122∘ Soit $f$ un endomorphisme de $(E, +, .)$, montrez : $Im(f^2) = Im(f^4) \Leftrightarrow Im(f^2) = Im(f^3)$.

---

∘123∘ ♡ Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ de dimension finie. On suppose : $g \circ f = 0$ et $f + g$ bijective.
Montrez : $Im(f) \subset Ker(g)$, $Ker(f) \cap Ker(g) = \{\overrightarrow{0}\}$.
Déduisez : $\dim(Ker(f)) + \dim(Ker(g)) \leqslant \dim(E)$ et enfin $\dim(Im(f)) + \dim(Im(g)) = \dim(E)$.
*(on utilisera la formule du rang : $dim(Ker(f) + dim(Im(f)) = dim(E)$)*

---

∘124∘ Soit $\phi$ un produit scalaire sur $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ tel que la famille suivante soit une base orthonormée : $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right.$
Calculez la norme de la matrice unité. Calculez l'angle entre $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Existe-t-il $S$ telle que ce produit scalaire soit $(A, B) \longmapsto Tr({}^tA.S.B)$ ?

---

∘125∘ $f$ et $g$ sont deux endomorphismes de $(\mathbb{R}^n, +, .)$. Montrez :
$\big(rg(f+g) = rg(f) + rg(g)\big) \Leftrightarrow \big(Im(f) \cap Im(f) = \{\overrightarrow{0}\}\ et\ Ker(f) + Ker(g) = \mathbb{R}^n\big)$

---

∘126∘ ♡ Montrez que $(A, B) \longmapsto Tr({}^tA.B)$ est un produit scalaire sur $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$. Calculez la norme de $\frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ *(notée R)*. Donnez une matrice non nulle orthogonale à $R$.

Montrez que $M \longmapsto R.M$ et $M \longmapsto M.R$ sont deux isomorphismes de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ qui préservent les normes.

---

∘127∘ ♡ Construisez un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^2, +, .)$ tel que la base $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j})$ soit orthonormée (calculez par exemple $|\overrightarrow{i}|$, $|\overrightarrow{j}|$ et le produit scalaire de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$).

---

∘128∘ On note $(E, +, .)$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 2. Montrez que $(A,\ B) \longmapsto Tr({}^tA.B)$ est un produit scalaire sur $E$.
Soit $S$ une matrice réelle symétrique à spectre strictement positif $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right.$ *avec a et c strictement positifs ainsi que*

*$a.c - b^2$).* Montrez que $(A,\ B) \longmapsto Tr({}^tA.S.B)$ *(noté $\phi_S$)* est aussi un produit scalaire sur $E$.

Pour quelle(s) matrice(s) $S$ la base canonique est elle orthonormée pour $\phi_S$ ?

Pour quelle(s) matrice(s) $S$ la base $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est elle orthogonale ? Même question avec orthonormée.

---

∘129∘ Montrez que $(P,\ Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0).Q^{(k)}(0)$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$. Donnez une base orthonormée.

$(P,\ Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{3} P^{(k)}(k).Q^{(k)}(k)$ est il un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$ ?

---

∘130∘ Complétez $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \clubsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}$ *(notée A)* pour que ce soit la matrice d'un projecteur de $(\mathbb{R}^2, +, .)$. Diagonalisez la. Déterminez une base de $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ *(après avoir vérifié que cet ensemble noté $Com(A)$ est bien un espace vectoriel Com comme commutant).*
Montrez que ce projecteur n'est pas orthogonal pour le produit scalaire usuel *(pour un projecteur, être orthogonal, c'est "noyau orthogonal à image").*

♣ Soit un produit scalaire $\phi$ pour lequel c'est un projecteur orthogonal. Déterminez alors $|\overrightarrow{i}|_\phi / |\overrightarrow{j}|_\phi$ et $(\widehat{\overrightarrow{i}\ \overrightarrow{j}})_\phi$.

---

∘131∘ Est il possible que la somme de deux isométries soit une isométrie ?

---

∘132∘ Vérifiez que ces formes bilinéaires symétriques sont des produits scalaires
et dites moi si la dérivation est un produit scalaire pour celles sur $Vect(\sin, \cos)$ :

| | |
|---|---|
| $(a.\cos + b.\sin,\ \alpha.\cos + \beta.\sin)$ | $a.\alpha + b.\beta$ |
| $(a.\cos + b.\sin,\ \alpha.\cos + \beta.\sin)$ | $a.\alpha + 2.b.\beta$ |
| $(a.\cos + b.\sin,\ \alpha.\cos + \beta.\sin)$ | $a.\alpha + +a.\beta + b.\alpha + 3.b.\beta$ |
| $(f,\ g)$ | $f(0).g(0) + f'(0).g'(0)$ |
| $(f,\ g)$ | $\int_0^{2.\pi} f(t).g(t).dt$ |