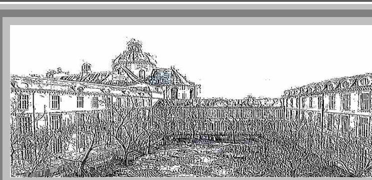
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 24 juin
M.P.S.I.2



2023 2024

TD33

◦0◦

♣ Montrez que $\prod_{k=0}^{100}(k!)$ n'est pas un carré parfait.

Pouvez vous effacez un des termes du produit pour en faire un carré parfait.

On peut tenter de regrouper les termes deux à deux.
On peut regarder les facteurs premiers.
Par exemple, 97 est premier.
Et il est présent dans 97!, dans 98!, dans 99! et dans 100!. Il aura donc un exposant pair.
De même, 89 est un nombre premier, présent dans chaque factorielle de 89! à 100!.
Son exposant sera pair.
Ce n'est donc pas lui qui va empêcher 100! d'être un carré parfait.

Il ne faudra d'ailleurs pas enlever par exemple 90! dans le produit, sinon on perd un des facteurs 89 du produit et on a

$$\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant 110\\ k\neq 90}}(k!) = 2^{\cdots}.3^{\cdots}\dots 89^{11}.97^4$$

et ce n'est pas un carré parfait.
Et même

$$\prod_{0\leqslant k\leqslant 110}(k!) = 2^{\cdots}.3^{\cdots}\dots 47^{\cdots}.53^{48}.59^{42}.61^{40}.67^{34}.71^{30}.73^{28}.79^{22}.83^{18}.89^{12}.97^4$$

et toute la fin est un carré parfait.

Un tableau nous permet de comprendre

2										
2	3									
2	3	4								
2	3	4	5							
2	3	4	5	6						
2	3	4	5	6	7					
2	3	4	5	6	7	8				
2	3	4	5	6	7	8	9			
2	3	4	5	6	7	8		47		
2	3	4	5	6	7	8		47	48	
2	3	4	5	6	7	8		47	48	49

Tous les facteurs premiers de 53 à la fin sont sur un nombre pair de lignes. Leur exposant est pair.

Plus subtil est l'exposant de 47.
On a 47 tout court dans 47!, 48!, 49! jusqu'à 100!. Pour l'instant 47^{54} (un peu comme pour les suivants).
Mais on a aussi un 47 en plus dans $94! = 1.2\dots 46.47.48\dots 93.94$ (eh oui : $94 = 2.47$).
Il en va de même de 95! jusquà 100!.
Bref, l'exposant de 47 est $(100-46)+(100-93)$.
Bref, on a 47^{73} et le nombre indiqué n'est pas un carré parfait.

Et si vous aimez

$$2^{4731}*3^{2328}*5^{1124}*7^{734}*11^{414}*13^{343}*17^{250}*19^{220}*23^{174}*29^{129}*31^{117}*37^{91}*41^{79}*43^{73}*47^{61}$$

$$*53^{48}*59^{42}*61^{40}*67^{34}*71^{30}*73^{28}*79^{22}*83^{18}*89^{12}*97^4$$

Solution Python, sans calculer comme une brute $\prod_{k=0}^{100}(k!)$ qu'on irait ensuite décomposer en produit de facteure premiers.

On nous donne n. On va avancer d pas à pas et créer avec son aide la liste des nombres premiers P, et leurs exposants dans un dictionnaire des diviseurs D.
La structure de la réponse sera donc un dictionnaire où les clefs seront les nombres premiers et les champs leurs exposants.
Par exemple, pour $n = 12$, la réponse est

$$\{2:56,\ 3:26,\ 5:11,\ 7:6,\ 11:2\}\ car\ \prod_{k=0}^{12}(k!) = 2^{56}.3^{26}.5^{11}.7^{6}.11^{2}$$

1 !						
2 !		2^1				
3 !		2^1	3^1			
4 !		2^3	3^1			
5 !		2^3	3^1	5^1		
6 !		2^4	3^2	5^1		
7 !		2^4	3^2	5^1	7^1	
8 !		2^7	3^2	5^1	7^1	
9 !		2^7	3^4	5^1	7^1	
10 !		2^8	3^4	5^2	7^1	
11 !		2^8	3^4	5^2	7^1	11^1
12 !		2^{10}	3^5	5^2	7^1	11^1
produit		2^{56}	3^{26}	5^{11}	7^6	11^2

```
def decomp(n) : #int -> dict (int->int)
....P = [ ] #liste des nombres premiers
....D = { } #création du dictionnaire
....for d in range(2,n+1) : #chaque entier de 2 à n inclus
........est_premier = True #on le suppose premier a priori, puis on eliminera
........for div in P : #on vérifie quand même
............if d% div == 0 : #est il divisible par un nombre premier déjà croisé
................est_premier = False #il n'est donc pas premier
................break #inutile de tesre d'autres diviseurs
........if est_premier : #si finalement d est un nombre premier
............P.append(d) #on le met dans la liste
............D[d] = 0 #on créer un nouveau champ de clef d
........for k in range(2, d+1) : #on va regarder d !
............i = 2 #on va chercher les diviseurs de k plus petit que d
............while k != 1 : #tant qu'il lui reste des diviseurs à trouver
................while k%i == 0 : #dans d combien de fois i
....................k //= i #on simplifie
....................D[i] += 1 #on augmente l'exposant de i (assurément premier)
................i += 1 #on cherche un nouveau diviseur
....return D #c'est bon on a le dictionnaire
```

Si on efface 50!, le tour est joué.

$$2^{4684} * 3^{2306} * 5^{1112} * 7^{726} * 11^{410} * 13^{340} * 17^{248} * 19^{218} * 23^{172} * 29^{128} * 31^{116} * 37^{90} * 41^{78} * 43^{72} * 47^{60}$$
$$*53^{48} * 59^{42} * 61^{40} * 67^{34} * 71^{30} * 73^{28} * 79^{22} * 83^{18} * 89^{12} * 97^{4}$$

Une idée qui se généralise ? $\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant 40\\ k\neq 20}}(k!)$ est aussi un carré parfait.

Petit retour en arriré : pourqoi 50! ?

Pouvait on effacer 36! par exemple ?
On va regarder l'exposant de 37.

Quel était l'exposant de 37 dans $\prod_{k=0}^{100}(k)!$?
Dans 74! et les suivants, 37 est à un exposant pair (car on a $1.2.3\dots 36.37.38\dots 73.74.75\dots k$).
On a donc $\prod_{k=74}^{100}(k!) = \dots 37^{54}\dots$.

De 37! à 73!, 37 est à un exposant 1 et dans le produit $\prod_{k=0}^{73}(k!)$, 37 est finalement à la puissance 37.

Dans $\prod_{k=0}^{100}(k!)$, 37 est à une puissance impaire. Il faut éliminer en 37.
Il faut donc effacer un nombre impair de facteurs 37. La factorielle à effacer est plus grande que 37!.

Et même 47.

∘1∘ Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de `range(n)` dans `range(N)` ?

Il suffit de choisir la liste des images, et l'application est totalement déterminée par stricte croissance : $\boxed{\binom{N}{n}}$

Avec la convention naturelle qui donne 0 si N est plus petit que n.

Exemple : $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ vers $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$.

L'application $\begin{array}{ccc} 0 & \to & 2 \\ 1 & \to & 4 \\ 2 & \to & 5 \\ 3 & \to & 7 \end{array}$ c'est la partie $\{2,\ 4,\ 5,\ 7\}\}$. Et la partie $\{0,\ 4,\ 2,\ 6\}$ c'est $\begin{array}{ccc} 0 & \to & 0 \\ 1 & \to & 2 \\ 2 & \to & 4 \\ 3 & \to & 6 \end{array}$.

∘2∘ Combien y a-t-il de lois de composition internes sur un ensemble E de cardinal n.
Combien y a-t-il de lois de composition internes qui sont commutatives sur un ensemble E de cardinal n.
Combien y a-t-il de lois de composition internes sur un ensemble E de cardinal n, dotées d'un élément neutre.

Une loi de composition prend deux éléments a et b de E et construit un élément $a * b$ dans E. C'est donc une application de $E \times E$ dans E. Il y en a $\boxed{n^{n\times n}}$

On ne confondra pas n^{n^2} avec $(n^n)^2$.

Pour définir une loi, il suffit de déterminer les n^2 cases de la table de la loi de composition.

Pour une loi commutative, la moitié du tableau suffit : les $a_i * a_k$ avec $i \leqslant k$. Il n'y a que $\frac{n.(n+1)}{2}$ cases à remplir, et il y a $\boxed{n^{\frac{n.(n+1)}{2}}}$ lois commutatives.

Pour une loi dotée d'un élément neutre, il faut choisir l'élément neutre : n choix. Une fois cet élément a_0 choisi, dans le tableau, sa colonne et sa ligne sont déterminées, on a juste à déterminer les $a_i * a_k$ avec i et k différents de j.

On trouve $n.n^{(n^2-1)}$ relations. On simplifie en $\boxed{n^{n^2+2.n+2}}$

Mais j'ai un doute. Risque-t-on de compter plusieurs fois la même si il y a deux neutres par exemple...

∘3∘ On note I_n le nombre d'involutions d'un ensemble à n éléments (application f de E dans E vérifiant $f \circ f = Id_E$).
Calculez I_n pour n de 0 à 3. Prouvez $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1).I_n$. Calculez I_n pour n de 0 à 5.

On dresse les premières listes, avec les notations des permutations, puisque les involutions sont forcément bijectives, égales à leur propre inverse :

$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$Id_\varnothing$	Id	Id et $\tau_{1,2}$	Id et trois transpositions $\tau_{1,2}$
1	1	2	4

On suppose connus les nombre d'involutions pour les ensembles à n et $n+1$ éléments, et on prend un ensemble à $n+2$ éléments : $\{a_1, \dots a_{n+2}\}$. Il y a alors deux types d'involutions incompatibles suivant que $f(a_{n+2})$ est ou non égal à $f(a_{n+2})$.

Si $f(a_{n+2})$ est égal à a_{n+2} *(et c'est autorisé)*, il ne reste plus à f qu'à induire une involution sur $\{a_1, \dots a_{n+1}\}$; il y en a donc I_{n+1}.

Si $f(a_{n+2})$ est un autre des $n+1$ éléments a_k, alors on a $f(a_k) = a_{n+2}$ involution, et f induit une involution sur les n éléments restant ; il y en a cette fois I_n.

On somme et on a $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1).I_n$.

On calcule alors les suivants :

$n=4$	$n=5$
10	26

On justifie d'ailleurs la réponse $I_4 = 10$ en donnant la liste :

Id	$\binom{4}{2}$ *transpositions en* $\tau_{a,b}$	3 *couples* $\tau_{a,b} \circ \tau_{c,d}$

pour la dernière case, il suffit de savoir "avec qui tourne 1".

∘4∘ Montrez qu'il y a $\binom{n+p-1}{p}$ façons de ranger p objets indistinguables dans n boites numérotés (les boites pouvant contenir un nombre quelconque d'éléments et pouvant même être vides).
Indication : comment coder ces histoires d'ensembles avec un mot de n+p-1 lettres 0 ou 1 ?

Tout est effectivement dans l'indication. On va mettre en bijection nos configurations avec les mots de $n+p-1$ lettres faits de symboles 0 ou 1.
On mettra p symboles 1 pour marquer les objets, et $n-1$ symboles 0 pour les séparer et indiquer qu'il faut passer à la boite suivante *($n-1$ car on marque des séparateurs entre n boites).*

Par exemple, le mot [1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1] indique la configuration à six objets dans 5 boites

1, 1	1, 1	1		1

.
La configuration

1, 1		1	1	1,1,1	1,1	

se code [1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0].

Quand des 1 se suivent sans 0 entre eux, ils sont dans la même boite.
Quand un 0 vient s'insérer, on passe à la boite suivante.
Quand plusieurs 0 se suivent, c'est qu'entre deux à il n'y a pas de 1, c'est à dire que la boite est vide.

Il ne reste plus qu'à compter le nombre de mots. Il suffit de choisir les p symboles 0 dans une liste de longueur $n+p-1$. C'est un nombre de combinaisons $\binom{n+p-1}{p}$.

On peut aussi choisir les $n-1$ symboles de séparation 0 et on a alors le même coefficient binomial.
Les élèves intéressés pourront écrire sous Python un transcripteur.

∘5∘ f et g sont deux applications linéaires de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$. Montrez : $Im(f+g) \subset Im(f) + Im(g)$. A-t-on égalité ? Déduisez $rg(f+g) \leqslant rg(f) + rg(g)$.
Montrez $rg(f) \leqslant rg(f+g) + rg(g)$. Déduisez $|rg(f) - rg(g)| \leqslant rg(f+g) \leqslant rg(f) + rg(g)$.

Comme f et g vont toutes deux de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$, on peut les additionner, et pour tout vecteur $\overrightarrow{a}$ de E, on a $(f+g)(\overrightarrow{a}) = f(\overrightarrow{a}) + g(\overrightarrow{a})$; c'est la somme d'un vecteur de $Im(f)$ et d'un vecteur de $Im(g)$, c'est donc un vecteur de $Im(f) + Im(g)$. Comme $(f+g)(\overrightarrow{a})$ décrit tous les vecteurs de $Im(f+g)$, on a $Im(f+f) \subset Im(f) + Im(g)$.

Attention, on n'a pas forcément égalité entre $\{f(\overrightarrow{a}) + g(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in E\}$ et $\{f(\overrightarrow{a}) + g(\overrightarrow{b}) \mid \overrightarrow{a} \in E, \overrightarrow{b} \in E\}$, mais si vous ne surveillez pas vos variables et écrivez des formules sans chercher à voir ce qu'il ya derrière, je ne peux rien pour vous...
D'ailleurs, avec $f = Id_E$ et $g = -Id_E$ on a un joli contre-exemple.

L'inclusion $Im(f+f) \subset Im(f) + Im(g)$ donne

$$rg(f+g) = dim(Im(f+g)) \leqslant dim(Im(f) + Im(g))$$

La formule de Grassmann donne $dim(Im(f) + Im(g)) \leqslant dim(Im(f)) + dim(Im(g))$ *(on sait même que la différence est de $dim(Im(f) \cap Im(g))$).* On met bout à bout, et on majore.

On notera que la majoration est médicore, puisque $rg(f) + rg(g)$ peut très vite dépasser les majorants naturels $dim(E)$ et $dim(F)$.

On veut passer de $rg(f)$ à $rg(f+g)$, dans ce sens ci. Il suffit d'écrire $f = (f+g) + (-g)$.
Le résultat précédent donne

$$rg(f) \leqslant rg(f+g) + rg(g)$$

or g et $-g$ ont le même ensemble image, donc le même rang. On a bine $rg(f) \leqslant rg(f+g) + rg(g)$.
On fait passer de l'autre côté : $rg(f) - rg(g) \leqslant rg(f+g)$.
Et cette minoration n'a aucun intérêt si $rg(f) - rg(g)$ est négatif...
Par symétrie des rôles, on a aussi

$$rg(g) = rg((f+g) + (-f)) \leqslant rg(f+g) + rg(-g) = rg(f+g) + rg(g)$$

On a donc aussi $rg(g) - rg(f) \leqslant rg(f+g)$.
Que $|rg(f) - rg(g)|$ soit égal à $rg(f) - rg(g)$ ou à $rg(g) - rg(f)$, on a toujours $|rg(f) - rg(g)| \leqslant rg(f+g)$.

◦6◦

f est un endomorphisme de $(\mathbb{R}^n, +, .)$ vérifiant $f \circ f \circ f = 0$ (application nulle). Montrez : $rg(f) + rg(f \circ f) \leqslant n$ *(pensez à la formule du rang)*.

Si l'on a $f \circ f \circ f = 0$ alors on a $Im(f^2) \subset Ker(f)$ (chaque $f^2(\overrightarrow{a})$ a une image nulle par f).
On passe aux dimensions : $dim(Im(f^2)) \leqslant dim(Ker(f))$.
On rappelle ce qu'est le rang : la dimension de l'image, et on sort la formule du rang : $rg(f^2) \leqslant n - rg(f)$. C'est fini.

◦7◦

♡ Complétez $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & \end{pmatrix}$ *(notée A)* en matrice de projecteur (caractérisation : $A^2 = A$). Déterminez alors noyau et image.
Montrez que $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Donnez en une base et la dimension.

On veut $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & \end{pmatrix}$. La seule réponse est $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Pour le noyau, on résout $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.On trouve $Ker(p) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + y = 0\} = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$, de dimension 1.

Les deux vecteurs colonne $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ engendrent l'image $Im(p) = Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + 2.y = 0\}$. On confirme : dimension 1.

Inutile de perdre du temps avec les stabilités de $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$, c'est le noyau de $M \longmapsto A.M - M.A$.
On pose quatre coefficients et résout $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
On s'attend à quatre équations et on les a :

$$\begin{array}{rrrrcrr} 2.x & & +2.z & & = & 2.x & -y \\ & 2.y & & +2.t & = & 2.x & -y \\ -x & & -z & & = & 2.z & -t \\ & -y & & -t & = & 2.z & -t \end{array}$$

Mais deux ne servent plus à rien : $y = -2.z$ et $t = x + 3.z$, c'est tout ce qu'il reste.
Les matrices cherchées sont de la forme $\begin{pmatrix} x & -2.z \\ z & x + 3.z \end{pmatrix}$. On trouve $Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix})$. Dimension 2.

Remarque : Il est normal d'y trouver I_2 (puisque $A.I_2 = I_2.A$) et A elle même $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (puisque $A.A = A.A$).

◦8◦

♡ Donnez le noyau de $f = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2.a + b - c \\ a - b + 2.c \end{pmatrix}$ après avoir prouvé que cette application est linéaire.
Pouvez vous trouver g linéaire vérifiant $g \circ f = Id_{\mathbb{R}^3}$?
Trouvez h linéaire vérifiant $f \circ h = Id_{\mathbb{R}^2}$.

Cette application est de la forme $U \longmapsto A.U$.
L'espace de départ est de dimension 3.
L'espace d'arrivée est de dimension 2.
On sait assurément que le noyau sera non trivial.
On résout et le noyau est $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix})$
Tiens, et pour rédiger, on ne résout même pas. On propose ce vecteur, on vérifie

$$\begin{pmatrix} 2 - 5 - (-3) \\ 1 - (-5) + 2.(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on dit que le noyau ne peut pas être de dimension plus grand car l'image contient $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui sont indépendants.
L'ensemble image sera de dimension 2 et sera $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Si l'on avait $g \circ f = Id_3$, f hériterait de l'injectivité. C'est donc impossible.

Variante : $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$et $Ker(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul.
$Ker(g \circ f)$ sera donc non trivial.

En revanche, rien ne nous empêche de trouver h vérifiant $f \circ h = Id_2$.
Ce qu'il faut éviter : que h nous expédie sur des vecteurs de $Ker(f)$.

On peut proposer : $\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$ car déjà le petit bloc $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

∘9∘ On note P le plan de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ d'équation $x + y - 2.z = 0$, D la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ et D' la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.
Montrez : $\mathbb{R}^3 = P \oplus D = P \oplus D'$ (et ne simplifiez pas en $D = D'$).
On note p le projecteur sur P en effaçant la composante suivant D. Déterminez $p(\overrightarrow{i})$, $p(\overrightarrow{j})$ et $p(\overrightarrow{k})$.
On note p' le projecteur sur P en effaçant la composante suivant D'. Déterminez $p'(\overrightarrow{i})$, $p'(\overrightarrow{j})$ et $p'(\overrightarrow{k})$.
Résolvez $p(\overrightarrow{u}) = p'(\overrightarrow{u})$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$.
Résolvez $p(\overrightarrow{u}) + p'(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$.
Résolvez $p \circ p'(\overrightarrow{u}) = p' \circ p(\overrightarrow{u})$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$.

P est de dimension 2, D et D' sont de dimension 1.
Si on n'a pas $D \subset P$, on a automatiquement $D \cap P = \{\overrightarrow{0}\}$, puis $D + P = D \oplus P$ et même par formule de Grassman : $D \oplus P = \mathbb{R}^3$.
De même pour D'.

Or, justement, $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ n'est pas dans P (équation non vérifiée). le seul multiple de $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ dans P est le vecteur nul.
On a tout ce qui a été dit.

Sinon, on peut aussi prendre une base de P : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ par exemple et vérifier qu'on complète bien en base de $\mathbb{R}^3$:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\neq 0$	et	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\neq 0$

La famille $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ définit une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ que je vais appeler $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$,
avec $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ base de P et $(\overrightarrow{c})$ base de D.

Disposant de ces deux matrices inversibles, je les inverse :
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a pour inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
On interprète : $\overrightarrow{i} = 1.\overrightarrow{a} + 1.\overrightarrow{b} - 1.\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{j} = 0.\overrightarrow{a} + 1.\overrightarrow{b} - 1.\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{k} = -1.\overrightarrow{a} - 1.\overrightarrow{b} + 2.\overrightarrow{c}$.
On pouvait aussi combiner à la main, ou résoudre un système.

On met un niveau de parenthèses :

$\overrightarrow{i} =$	$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \quad - \overrightarrow{c}$
$\overrightarrow{j} =$	$\overrightarrow{b} \quad - \overrightarrow{c}$
$\overrightarrow{k} =$	$-\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \quad +2.\overrightarrow{c}$

et on projette sur P en effaçant D :

$p(\overrightarrow{i}) =$	$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \quad + \overrightarrow{0}$
$p(\overrightarrow{j}) =$	$\overrightarrow{b} \quad + \overrightarrow{0}$
$p(\overrightarrow{k}) =$	$-\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \quad + \overrightarrow{0}$

On revient sur la base canonique :

$p(\overrightarrow{i}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$p(\overrightarrow{j}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$p(\overrightarrow{k}) = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On peut vérifier que ces vecteurs sont bien dans P.

Et on vérifie aussi que $\overrightarrow{i} - p(\overrightarrow{i})$ est bien colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, de même pour les autres.

Je vous le fais de la même façon pour p' ?
Par forcément.
Cette fois, pour $\overrightarrow{i}$ on dit que $\overrightarrow{i}$ va s'écrire $p'(\overrightarrow{i}) + \lambda.(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ avec $p(\overrightarrow{i})$ dans P et $\lambda.(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ dans D'.
On écrit sur la base canonique $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ avec $x + y - 2.z = 0$ et λ réel.
On a un petit système rapide à résoudre.
On peut aussi directement trouver λ : $\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & -\lambda \\ z & = & -\lambda \end{array}$ et la condition $x + y - 2.z = 0$ donne $\lambda = -1$.
On remplace : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et on projette $p(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On fait de même : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a cette fois

$p'(\overrightarrow{i}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$p'(\overrightarrow{j}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$p'(\overrightarrow{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Devez vous être surpris d'avoir $p'(\overrightarrow{j}) = -p'(\overrightarrow{k})$?
Non. On a donc $p'(\overrightarrow{j}) + p'(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{0}$, soit encore $p'(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = \overrightarrow{0}$.
Mais quoi de plus naturel ? Ce vecteur est dans D' et par p' on efface ce qui est dans D.

Sinon, regardez, on va multiplier des matrices.
Notons P' la matrice inversible $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Elle nous dit comment décomposer sur la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un vecteur donné sur la base $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.
Prenons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Elle transforme $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ (elle efface ce qui est selon $\overrightarrow{c}$ et garde $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$).
Enfin, notons P'^{-1} l'inverse de P' : $P'^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Elle prend un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sur la base canonique et le transforme en $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ sur la base adaptée $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.
La matrice de la projection est le produit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (tiens, $P.D.P^{-1}$).
On effectue $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et vous reconnaissez les trois colonnes.

L'équation $p(\overrightarrow{u}) = p'(\overrightarrow{u})$ admet des solutions évidentes.
Il y a bien sûr $\overrightarrow{0}$. Ses deux images sont nulles.

Mais il y a aussi tous les vecteurs de P.
En effet, si on prend $\overrightarrow{u}$ dans P, il se projette en lui même : $p(\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ et $p'(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$.

On a bien pour eux $p(\overrightarrow{u}) = p'(\overrightarrow{u})$.

Mais sinon ? Sinon, ça ne me semble guère possible.

On part de $\overrightarrow{u}$ qu'on décompose en $\overrightarrow{u} = p(\overrightarrow{u}) + \lambda.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$ avec $p(\overrightarrow{u})$ dans P et $\lambda.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$ dans D
$\overrightarrow{u} = p'(\overrightarrow{u}) + \mu.(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ avec $p'(\overrightarrow{u})$ dans P et $\mu.(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ dans D'
Si on suppose $p(\overrightarrow{u}) = p'(\overrightarrow{u})$, on a en comparant $\lambda.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) = \mu.(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$.
Et ceci n'est possible qu'avec $\lambda = \mu = 0$ (vecteurs non colinéaires, famille libre).
Il ne reste que $\overrightarrow{u} = p(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{0} = p'(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{0}$ et c'est un vecteur de P.

Peut on avoir $p(\overrightarrow{u}) + p'(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$?
Oui, pour le vecteur nul.
Mais sinon ?

L'équation $p'(p(\overrightarrow{u})) = p(p'(\overrightarrow{u}))$ a beaucoup de solutions.
Prenons un vecteur $\overrightarrow{u}$ et déterminons mentalement $p(\overrightarrow{u})$. C'est un vecteur de P, c'est déjà ce qu'on peut dire.
Mais alors, comment le projeter sur P par p' ? C'est fait, il est déjà dans P.
On a donc $p'(p(\overrightarrow{u})) = p(\overrightarrow{u})$.

Reprenons le même raisonnement avec $p'(\overrightarrow{u})$ qui est dans P.
On le décompose en $p'(\overrightarrow{u}) = p'(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{0}$ avec $p'(\overrightarrow{u})$ dans P et $\overrightarrow{0}$ dans D.
On projette par p en $p(p'(\overrightarrow{u})) = p'(\overrightarrow{u})$.
Ayant à la fois $p'(p(\overrightarrow{u})) = p(\overrightarrow{u})$ et $p(p'(\overrightarrow{u})) = p'(\overrightarrow{u})$, notre équation $p(p'(\overrightarrow{u})) = p'(p(\overrightarrow{u}))$ se ramène à $p'(\overrightarrow{u}) = p(\overrightarrow{u})$.
On l'a vu, les solutions sont les vecteurs de P. Encore eux.

∘10∘

♡ Pouvez vous compléter $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & & \\ & -10 & \end{pmatrix}$ en matrice de projecteur *($p \circ p = p$ et donc $M^2 = M$)* ?
Si oui, calculez son déterminant et son polynôme caractéristique.
Donnez son noyau *(ensemble des vecteurs d'image nulle)* et son image *(ensemble des vecteurs atteints)*.
Et tant qu'on y est, diagonalisez la.
Si non, donnez le développement limité d'ordre 3 en 0 de $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{\ln(1-t)}$.

A faire.

∘11∘

Montrez que $\{M \in M_4(\mathbb{R}) \mid Tr(m) = 0\}$ (noté τ) est un espace vectoriel et donnez sa dimension.
On se donne une matrice A dans $M_4(\mathbb{R})$ et on définit $\varphi = M \longmapsto A.M - M.A$. Montrez que c'est un endomorphisme de $(M_4(\mathbb{R}), +, .)$ d'image incluse dans τ.
En étudiant son noyau, montrez qu'on ne peut pas avoir $Im(\varphi) = \tau$.

C'est un sous-espace vectoriel de $(M_4(\mathbb{R}), +, .)$, comme noyau d'une forme linéaire.
Naïvement, pour construire une matrice de trace nulle, on choisit 15 coefficients comme on veut.
Mais simplement, on part d'un espace de dimension 16 et l'espace image est de dimension 1 (c'est juste $\mathbb{R}$).
La dimension du noyau vaut 15.

Pour toute matrice M, la matrice $\varphi(M)$ a une trace nulle à cause de la propriété usuelle de la trace ($Tr(A.B) = Tr(B.A)$).
L'espace vectoriel image est bien un sous-espace vectoriel de l'espace des matrices de trace nulle.

Mais on n'obtient pas toutes les matrices de trace nulle. En effet, $Im(\varphi)$ est au plus de dimension 14.r
Le noyau de φ est au moins de dimension 2. On y trouve I_4 et A (vérifiez : $\varphi(A) = A.A - A.A = 0_{4,4}$ et $\varphi(A) = A.I_4 - I_4.A = 0_{4,4}$).
L'ensemble image est au plus de dimension 14. Ce n'est pas τ.

Certes, il faudrait traiter à part le cas où A est un multiple de I_4.
Dans ce cas en effet, mon argument « A et I_4 sont dans le noyau , donc le noyau est au moins un plan » tombe en défaut.
Mais dans ce cas, le noyau est égal à tout $(M_4(\mathbb{R}), +, .)$ et φ est l'application nulle...

∘12∘ Un théorème affirme : pour tout couple d'entiers $(a,\ b)$ distincts, il existe une infinité d'entiers naturels n vérifiant $a+n$ et $b+n$ sont premiers entre eux.
Écrivez un script Python qui pour a et b donnés cherche une liste de cent entiers n vérifiant ceci.
Donnez le couple $(a,\ b)$ avec a et b entre 1 et 1000 pour lequel le dernier terme de cette liste est le plus grand.

Pour tester si deux entiers sont premiers entre eux, on calcule leur pgcd par algorithme d'Euclide (divisions euclidiennes jusqu'à avoir un reste nul, et on retourne l'entier précédent, c'est a). Mais en fait, on regarde si le pgcd trouvé vaut 1 :

```
def pgcd(a, b) :
....while b > 0 :
........a, b = b, a%b
....return a
```

```
def PremiersEntreEux(a, b) :
....while b != 0 :
........a, b = b, a%b
....return (a==1)
```

Ensuite, on exploite ce test, et tant que la longueur de la liste n'a pas atteint 100, on continue à chercher.
Faut il penser à vérifier au début si a et b sont distincts ?

```
def Liste(a, b) :
....L = [ ]
....n = 0
....while len(L)<100 :
........if PremiersEntreEux(a+n, b+n) :
............L.append(n)
............n += 1
....return L
```

Et maintenant, pour que le centième entier de la liste soit le plus grand possible ?

On va prendre tous les couples $(a,\ b)$

```
for a in range(1, 1001) :
....for b in range(1, 1001) :
```

(avec a différent de b et en fait b plus petit que a)

```
for a in range(1, 1001) :
....for b in range(1, a) :
```

On va créer un record à battre.

```
aRec, bRec = 2, 1
Record = Liste(aRec, bRec)[-1]
for a in range(1, 1001) :
....for b in range(1, a) :
```

On va le comparer au denier test de Liste(a, b).

```
aRec, bRec = 2, 1
Record = Liste(aRec, bRec)[-1]
for a in range(1, 1001) :
....for b in range(1, a) :
........Candidat = Liste(a, b)[-1]
```

Si le record n'est pas battu, on passe aucun couple suivant.

```
aRec, bRec = 2, 1
Record = Liste(aRec, bRec)[-1]
for a in range(1, 1001) :
....for b in range(1, a) :
........Candidat = Liste(a, b)[-1]
........if Candidat > Record :
```

Si le record est battu, c'est lui qu'on mémorise.

```
aRec, bRec = 2, 1
Record = Liste(aRec, bRec)[-1]
for a in range(1, 1001) :
....for b in range(1, a) :
........Candidat = Liste(a, b)[-1]
........if Candidat > Record :
............Record = Candidat
............aRec, bRec = a, b
```

Record : 443 atteint pour les couples [a, b] suivants :

[[2, 1], [3, 1], [4, 2], [7, 1], [8, 2], [31, 1], [32, 2], [50, 20], [211, 1], [212, 2], [258, 48], [284, 74]]

∘13∘

$\heartsuit^2$ ou $\clubsuit^2$ suivant que vous êtes M ou PSI On travaille avec les entiers de 0 à 2 pour l'addition et la multiplication modulo 3.

1- Combien y a-t-il de vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et combien de matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Combien de matrices de rang 0 ?

Pour les matrices de rang 1, je dis "*une colonne* $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ *(9 choix) puis un de ses trois multiples* $\begin{pmatrix} 0.a \\ 0.c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1.a \\ 1.c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2.a \\ 2.c \end{pmatrix}$, *donc* 27 *matrices*". Rectifiez l'erreur et donnez le bon nombre.

2- Complétez alors

$rg(M) = 0$	$rg(M) = 1$	$\det(M) = 0$	$\det(M) = 1$	$\det(M) = 2$
			24	

3- Calculez l'espérance la variance de la variable aléatoire déterminant puis de la variable trace pour un tirage aléatoire uniforme de matrices.

4- Pour trouver combien il y a de matrices semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, je fais le raisonnement suivant : "*ce sont les matrices de la forme* $P.M.P^{-1}$, *or, il y a* 48 *matrices* P *possibles, d'où* 48 *matrices semblables à* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$". C'est faux, trouvez l'erreur, et dénombrez les douze matrices semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5- Profitez en pour diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6- Je dis qu'il y a douze matrices de projecteur de rang 1. Confirmez le en en donnant la liste. Ou alors complétez l'idée : les quatre droites sont $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ensuite...

7- Montrez que la probabilité de tirer une matrice de projecteur est de $14/81$.

8- Combien de matrices sont semblables à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? Calculez la probabilité de tirer une matrice nilpotente.

9- Calculez la probabilité de tirer une matrice de permutation.

10- Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. Élevez la quand même à la puissance 2016.

Combien de matrices ont pour polynôme caractéristique

X^2	$X^2 + X$	$X^2 + 2.X$	$X^2 + 1$	$X^2 + 2$	$X^2 + X + 1$	$X^2 + 2.X + 1$	$X^2 + 2.X + 2$	$X^2 + X + 2$

11- Calculez la probabilité de trouver une matrice permutables avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

12- Voulant estimer la probabilité que deux matrices tirées au hasard soient permutables, sans me prendre la tête, j'écris un script `Python`. Complétez le :

```
def alea() :
....a = randrange(3)
....b =
....return([[a,b],[c,d]])
def produit(A, B) :
....a = A[0][0]*B[0][0]+A[0][1]*B[1][0]
....b =
....return [[a,b],[c,d]]
compt = 0
for Na in range(810) :
....A = alea()
....for Nb in range(810) :
```

ou alors écrivez votre propre script. On trouve environ 14 pour cent.

Pour remplir une case : trois choix. Il y a donc neuf vecteurs : $\begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$.

Pour remplir une matrice : quatre coefficients avec deux valeurs possibles : $3^4 = 81$.
Ou alors choisir deux vecteurs (éventuellement égaux) parmi les neuf vecteurs ci dessus (9×9 choix) et les coller côte à côte.
On peut donner la liste des matrices et mettre de côté la matrice nulle, de rang 0.

Il nous reste 80 matrices de rang 1 ou 2.
Lesquelles sont de rang 2 ? La première colonne est l'un des huit vecteurs non nuls : 8 choix.
Et pour la seconde, tout sauf les trois multiples du premier (y compris le multiple nul) : 6 choix.
Il y a donc 48 matrices de rang 2 (de déterminant donc nul). On obtient pour le rang 1 : 36 pour un total de 81.

rang 0	rang 1	rang 2
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
1	36	48

Pourquoi le raisonnement je dis "*une colonne* $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ *(9 choix) puis un de ses trois multiples* $\begin{pmatrix} 0.a \\ 0.c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1.a \\ 1.c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2.a \\ 2.c \end{pmatrix}$, *donc* 27 *matrices*". Rectifiez l'erreur et donnez le bon nombre., il y a une faille. Si le premier vecteur choisi est nul, on aura beau compléter avec ses multiples, on trouvera toujours un vecteur nul, et une matrice de rang 0.

On passe au déterminant :

rang 0	rang 1	rang 2
1	36	48
déterminant nul	déterminant nul	déterminant 1 ou 2

Mais combien ont pour déterminant 1 et combien ont pour déterminant 2 ? Moitié moitié ? Pourquoi pas.
Chaque fois qu'on a une matrice de déterminant a, on a une matrice de déterminant $-a$ en permutant les deux colonnes.
Chaque fois qu'on a une matrice de déterminant 1, on a une matrice de déterminant 2 et vice versa.

C'est donc bien moitié moitié :

rang 0	rang 1	rang 2	
1	36	48	
déterminant nul	déterminant nul	déterminant 1	déterminant 2
37		24	24

∘14∘

Définissez une loi de probabilité sur $range(n)$ pour que la probabilité de $\{k\}$ soit proportionnelle à k.
Définissez une loi de probabilité sur $range(n)$ pour que la probabilité de $[0,\ k]$ soit proportionnelle à k.

En notant a le facteur de proportionnalité : $P(X = k) = a.k$.

Mais la somme des probabilités doit valoir 1 : $\sum_{k=0}^{n-1} a.k = 1$ donc $a = \dfrac{2}{n.(n-1)}$.

événement	0	1	2	...	$n-1$
probabilité	0	$\dfrac{2}{n.(n-1)}$	$\dfrac{2}{n.(n-1)}$		$\dfrac{2}{n}$

Exemple avec $n = 6$:

événement	0	1	2	3	4	5
probabilité	0	$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{3}{15}$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{5}{15}$

Cette fois, le rapport est b : $P(X \leqslant k) = b.k$ et comme $P(X \leqslant n-1) = 1$, on a $b = \dfrac{1}{n-1}$

On sait $P(X \leqslant k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)$ et donc $P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1) = \frac{k}{n-1} - \frac{k-1}{n-1} = \frac{1}{n-1}$.

événement	0	1	2	3	4	5
probabilité	0	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{5}$

Hyper-décevant !

∘15∘

♡ Diagonalisez $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mais surtout pas en calculant $\det(A - X.I_n)$, y'a pas écrit PCici, mais cherchant déjà le sous-espace propre de valeur propre 0. Vérifiez que vous pouvez prendre des vecteurs propres deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire usuel.
Et en taille n ?

On note A cette matrice et on résout $A.U = \lambda.U$ de vecteur inconnu U (et d'inconnue λ aussi).

On a plein de lignes égales $\begin{array}{cccccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & \dots & +x_n & = & \lambda.x_1 \\ x_1 & & & & +x_n & = & \lambda.x_2 \\ x_1 & & & & +x_n & = & \lambda.x_3 \\ x_1 & & & & +x_n & = & \lambda.x_{n-1} \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & \dots & +x_n & = & \lambda.x_n \end{array}$.

On sent qu'il faut traiter à part la valeur propre 0. Pour elle, on cherche $Ker(A)$ en quelque sorte, et $rg(A)$.

$\lambda = 0$	$\lambda \neq 0$
$x_1 + x_n = 0$ $x_2 + \ldots + x_{n-1} = 0$	$x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1}$ $x_1 = x_n$ $2.x_1 + (n-2).x_2 = \lambda.x_1$ $2.x_1 = \lambda.x_2$
Sous espace propre : $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$ dimension $n-2$	

A terminer.

∘16∘

Deux amis se sont donné rendez vous à $18h$. Mais chacun arrive en retard. Le retard de chacun suit une loi uniforme sur range(60). Retard X pour le premier, et Y pour le second. Les deux variables aléatoires retard sont indépendantes.
A quoi correspond la variable $|X - Y|$ (notée T) ?
Écrivez une procédure qui simule n fois de suite cette variable aléatoire et donne une approximation de l'espérance de T.
Calculez la valeur exacte de cette espérance.

$|X - Y|$ est le temps que devra attendre le premier arrivé.

```
from random import randrange
```

```
def attente( ) : #None -> int
....X, Y = randrange(60), randrange(60)
....return abs(X-Y)
```

On pourra même proposer

```
def attente(m = 60) : #int -> int
....X, Y = randrange(m), randrange(m)
....return abs(X-Y)
```

Dans cette version, `m` vaut par défaut `60`. C'est à dire que si on tape `attente(90)`, on pourra envisager un retard d'une heure et demi.
Et si on tape `attente( )` sans rien préciser, c'est une heure.

Pour l'espérance, on répète un grand nombre de fois, on somme et à la fin on divise :

```
def esperance(n= 600) : #int -> float
....s = 0
....for k in range(n) :
........s += attente()
....return (s/n)
```

Les expériences me donnent des nombres pas loin de 20. On va prouver que c'est le cas.

Les deux variables X et Y sont indépendantes.
On va traityer le cas général avec range(m), et l'illustration sera pour $m = 8$.

$X = 1$	0	1	2	3	4	5	6	7
proba	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Pour le couple X, Y, on a un tebleau avec des cases équiprobables en $1/m^2$.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	1	2	3	4	5	6
2	2	1	0	1	2	3	4	5
3	3	2	1	0	1	2	3	4
4	4	3	2	1	0	1	2	3
5	5	4	3	2	1	0	1	2
6	6	5	4	3	2	1	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

On note m cas sur m^2 où les deux individus arrivent en même temps et n'attendent pas.
Et sinon, on reporte sur le tableau la variable aléatoire différence comme ci dessus.
On note $2.(m-1)$ cas (de part et d'autre de la diagonale) pour lesquels la variable aléatoire vaut 1.
Puis $2.(m-2)$ cas où elle vaut 2.
Et ainsi de suite.

La loi de la variable aléatoire « valeur absolue de la différence » est

$\lvert X-Y\rvert =$	0	1	2	3	4	5	6	7
proba	8/64	2.7/64	2.6/64	2.5/64	2.4/64	2.3/64	2.2/64	2.1/64

Plus généralement $P(|X-Y| = k) = 2.\dfrac{(m-k)}{m^2}$ sauf pour $k = 0$.

Il ne reste qu'à sommer :

$$E(|X-Y|) = \frac{1}{m^2}.\Big(0 + \sum_{k=1}^{m} 2.(n-k).k\Big) = \frac{n^2-1}{3.n}$$

L'application numérique donne $\dfrac{3599}{180}$ ce qui ne m'éclaire pas du tout.
L'application numérique de physicien donne $19,994$ et c'est cohérent avec mon exprience.

∘17∘

On note E l'ensemble des suites réelles. Soit σ un endomorphisme de $(E, +, .)$; a et b sont deux réels distincts, montrez : $Ker(\sigma^2 - (a+b).\sigma + (a.b).Id_E) = Ker(\sigma - a.Id_E) \oplus Ker(\sigma - b.Id_E)$.
On définit sur E l'application $\sigma = (u_n) \longmapsto (u_{n+1})$. Montrez que σ est un endomorphisme de E. Donnez pour tout λ la dimension et une base de $Ker(\sigma - \lambda.Id_E)$.
Retrouvez la forme générale de la suite de Fibonacci.

On définit : $\Gamma = x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{x^2-x-1}$. Ajustez a et b pour avoir $\Gamma(0) = \Gamma'(0) = 1$.
Montrez que Γ admet pour tout n un développement limité en 0 à l'ordre n et montrez que les coefficients de Γ vérifient la relation de récurrence $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
Décomposez Γ en éléments simples. Donnez alors son développement limité d'ordre n.
Retrouvez la forme générale de F_n.

Déjà, le fait que la somme de droite $Ker(\sigma - a.Id_E) \oplus Ker(\sigma - b.Id_E)$ soit directe.
Comme on n'a que deux sous-espaces, la caractérisation est « intersection réduite à $\overrightarrow{0}$ ».
Or, les vecteurs du premier sous-espace sont les solutions de $\sigma(\overrightarrow{u}) - a.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $\sigma(\overrightarrow{u}) - b.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
Et ceci entraîne $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Passons ensuite à la première inclusion. On prend un vecteur $\overrightarrow{u}$ dans $Ker(\sigma - a.Id_E) \oplus Ker(\sigma - b.Id_E)$.
Il s'écrit $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec $\sigma(\overrightarrow{v}) = a.\overrightarrow{v}$ et $\sigma(\overrightarrow{w}) = b.\overrightarrow{w}$. On calcule alors

$$(\sigma^2 - (a+b).\sigma + (a.b).Id_E)(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\sigma^2 - (a+b).\sigma + (a.b).Id_E)(\overrightarrow{v}) + (\sigma^2 - (a+b).\sigma + (a.b).Id_E)(\overrightarrow{w})$$

$(\sigma^2 - (a+b).\sigma + (a.b).Id_E)(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (a^2.\overrightarrow{v} - (a+b).a.\overrightarrow{v} + (a.b).\overrightarrow{v}) + (b^2.\overrightarrow{w} - (a+b).b.\overrightarrow{w} + (a.b).\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}$
On reconnaît qu'il est dans $Ker(\sigma^2 - (a+b).\sigma + (a.b).Id_E)$.

Mais il y a plus simple : $\sigma^2 - (a+b).\sigma + (a.b).Id_E = (\sigma - b.Id_E) \circ (\sigma - a.Id_E)$.
On a donc $Ker(\sigma - a.Id_E) \subset Ker(\sigma^2 - (a+b).\sigma + (a.b).Id_E)$.
Avec la composition dans l'autre sens : $Ker(\sigma - b.Id_E) \subset Ker(\sigma^2 - (a+b).\sigma + (a.b).Id_E)$.
Ayant un résultat de la forme $A \subset C$ et $B \subset C$ on a par définition même du « plus petit sous-espace contenant... » : $(A + B) \subset C$.

Passons à l'autre inclusion. On prend un vecteur $\overrightarrow{u}$ qui vérifie juste $\sigma^2(\overrightarrow{u}) - (a+b).\sigma(\overrightarrow{u}) + (a.b).\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
On veut trouver $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ vérifiant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, chacun dans le bon sous-espace.
Mais comment deviner ?

Facile finalement : il suffit de raisonner par analyse et synthèse, comme toujours pour les sommes.

On part de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ et on applique σ : $\sigma(\overrightarrow{u}) = \sigma(\overrightarrow{v}) + \sigma(\overrightarrow{w}) = a.\overrightarrow{v} + b.\overrightarrow{w}$ car chacun est dans un noya de la forme $Ker(\sigma - \lambda.Id)$.

On compare nos deux formules : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ et $\sigma(\overrightarrow{u}) = a.\overrightarrow{v} + b.\overrightarrow{w}$.
On combine : $\overrightarrow{v} = \dfrac{b.\overrightarrow{u} - \sigma(\overrightarrow{u})}{b-a}$ et $\overrightarrow{w} = \dfrac{a.\overrightarrow{u} - \sigma(\overrightarrow{u})}{a-b}$.

> Qu'a-t-on prouvé à ce stade ? Rien.
> Enfin si : si ces deux vecteurs existent, ce ne peuvent être que ceux ci. C'est juste le petit rond autour du plus.

Mais passons maintenant à la synthèse.
On propose $\overrightarrow{v} = \dfrac{b.\overrightarrow{u} - \sigma(\overrightarrow{u})}{b-a}$ et $\overrightarrow{w} = \dfrac{a.\overrightarrow{u} - \sigma(\overrightarrow{u})}{a-b}$.
On vérifie : $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}$ c'est bien parti.

Et $\overrightarrow{v}$ est il dans $Ker(\sigma - a.Id)$? (on traitera l'autre par symétrie des rôles).
On calcule $\sigma(\overrightarrow{v}) - a.\overrightarrow{v}$ et on trouve $\dfrac{b.\sigma(\overrightarrow{u}) - \sigma^2(\overrightarrow{u})}{b-a} - a.\dfrac{b.\overrightarrow{u} - \sigma(\overrightarrow{u})}{b-a}$.
Et l'hypothèse $\sigma^2(\overrightarrow{u}) - (a+b).\sigma(\overrightarrow{u}) + (a.b).\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ donne $\sigma(\overrightarrow{v}) - a.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

> En fait, il y a plus simple : $\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{b-a}.(b.\sigma - Id)(\overrightarrow{u}) \in Im(b.\sigma - Id)$.
> Or, $\overrightarrow{u} \in Ker((\sigma - a.Id) \circ (\sigma - b.Id))$ donc $(\sigma - a.Id) \circ (b.\sigma - Id)(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ et c'est fini.

♣ On considère que $(\mathbb{R}, +, .)$ est un espace vectoriel sur le corps $(\mathbb{Q}, +, .)$, dont une base sera formée de 1 (premier vecteur de base) suivi de vecteurs que l'on ne précisera pas, puisqu'on ne sait pas le faire, et qu'on se contentera de noter $\overrightarrow{r_i}$ pour i dans un ensemble I.
On construit f : l'image d'un réel a se décomposant sous la forme $\alpha_0.1 + \sum_{i \in I} \alpha_i.\overrightarrow{r_i}$ sera $\alpha_0.1$.
Montrez $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ pour tout couple (a, b), mais n'est pas convexe (elle n'est continue nulle part et n'est bornée sur aucun intervalle contenant plus d'un point).

∘18∘

♡ Vous lancez un dé équilibré à six faces, autant de fois qu'il faut, jusqu'à ce que vous ayez un 4.
Décrivez l'univers. Est il fini ?
Quelle est la probabilité que vous ayez fini avant six lancers ?
Quelle est la probabilité que vous ayez fini en exactement six lancers ?
Quelle est la probabilité que l'expérience ne s'arrête jamais ?

L'univers est fait de suites finies ou non à valeurs dans $\{1,2,3,4,5,6\}$, avec une condition.
Il faut que si la suite est finie, elle se termine par un 4 (et aucun des précédents ne vaut 4),
si la suite est infinie, elle ne contient aucun 4.
Il y a des suites infinies, comme $(1,2,3,1,2,3,1,2,3\ldots)$ et des suites finies comme $(1,3,5,3,6,6,4)$.
On refuse $(1,4,3,2,4)$ (elle aurait dû s'arrêter au premier 4) ou $(1,6,5,3,2)$ (elle ne se termine pas par un 4).

Cet univers est infini (non dénombrable, car il contient déjà $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ (on ne tire que des 1 et des 2, on ne s'arrête jamais, .

La loi de probabilité sera peut être assez facile à définir : $\frac{1}{6}$ à chaque lancer.
$(1,3,5,3,6,6,4)$ est survenu avec probabilité $\left(\frac{1}{6}\right)^7$.

On s'arrête en moins de six coups si parmi les six lancers il y a au moins un 4(d'ailleurs, si il y a un 4, il n'y a pas six lancers).
Passons par le complémentaire :
il n'y a eu aucun 4 parmi les six premiers lancers.
Pas de 4 pour un lancer : probabilité $\frac{5}{6}$.
Pas de 4 parmi six lancers indépendants : $\left(\frac{5}{6}\right)^6$.
La réponse est donc $\boxed{1-\left(\frac{5}{6}\right)^6 \text{ (environ 66 pour cent)}}$

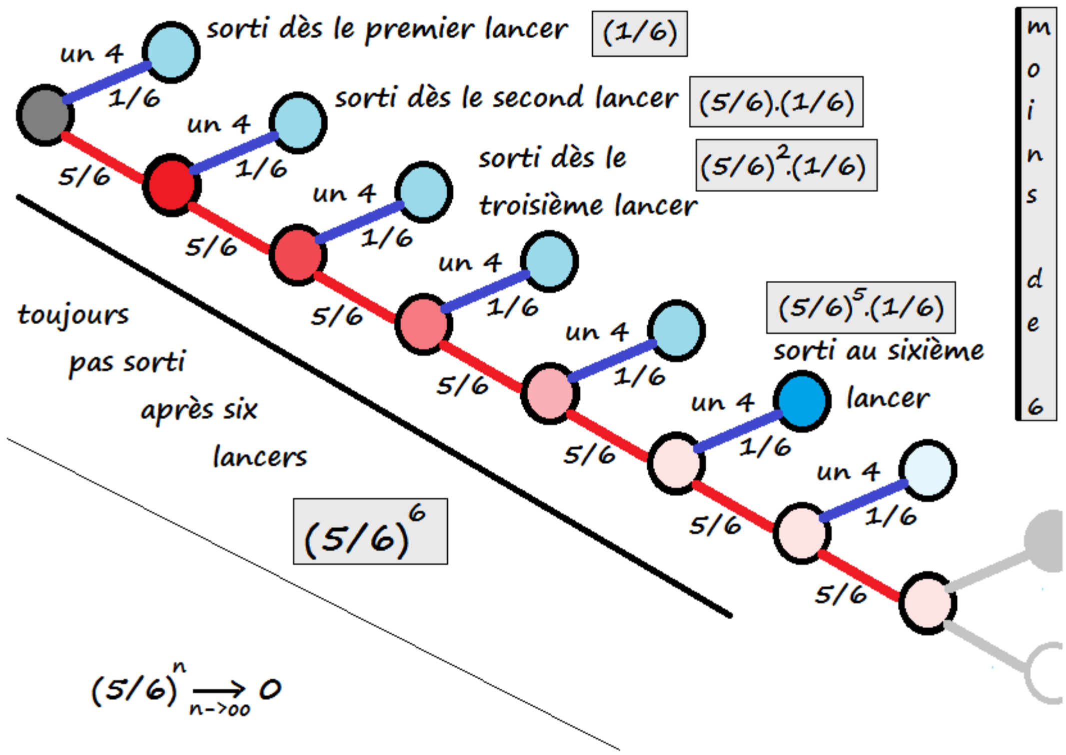
Et pour s'arrêter exactement au sixième lancer ?
Une formulation : moins de six lancers, mais pas moins de cinq.

C'est la relation de Chasles sur les séries : $a_6 = \sum_{k=1}^{6} a_k - \sum_{k=1}^{5} a_k$.
Comme quoi les maths c'est les mêmes idées à exploiter en changeant de points de vue.

pas plus de six lancers	$1-\left(\frac{5}{6}\right)^6$
pas plus de cinq lancers	$1-\left(\frac{5}{6}\right)^5$
exactement six lancers	$\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^6\right)-\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^5\right)$

On simplifie en $\left(\frac{5}{6}\right)^5-\left(\frac{5}{6}\right)^6$ puis $\left(\frac{5}{6}\right)^5.\left(1-\frac{5}{6}\right)$ et même $\boxed{\left(\frac{5}{6}\right)^5.\frac{1}{6}}$

On peut aussi le justifier par un arbre (et moi je le vois mieux ainsi...).



◦19◦ Montrez : $(P(A \mid B) \geqslant P(A)) \Rightarrow (P(B \mid A) \geqslant P(B))$. Interprétation ?

En travaillant avec des événements de probabilités non nulles :

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \leqslant P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \leqslant P(B)$$

C'est équivalent à $P(A\cap B) \leqslant P(A) \times P(B)$ (le cas d'égalité correspond à des événements indépendants).

Si le pourcentage de filles est plus élevé en PCSI que globalement dans les trois Sup,
alors il y a « beaucoup » de filles en PCSI,
et donc si vous prenez une fille au hasard, il y a plus de chances qu'elle soit en PCSI que si vous avez tiré un élève au hasard.

◦20◦ Montrez que $(A,\ B) \longmapsto Tr({}^tA.B)$ est un produit scalaire sur $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$.
Déduisez $Tr(M^2) \leqslant Tr({}^tM.M)$ pour toute matrice M. Cas d'égalité ?
Déduisez $Tr(M^2) \geqslant -Tr({}^tM.M)$ pour toute matrice M. Cas d'égalité ?

◦21◦ On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On définit $f = M \longmapsto (Tr(M),\ Tr(A.M),\ Tr(A^2.M),\ Tr(A^3.M))$. Montrez que f est linéaire de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ dans $\mathbb{R}^4$. Calculez $f(I_2)$ et $f(A)$ et $f(A^{-1})$. Un élève dit que cette application est de rang 6. Prouvez qu'il a tort. Un élève prétend que f est de rang 1. Prouvez qu'il a tort. Pour mettre tout le monde d'accord, calculez le rang de f. Donnez une base d'un supplémentaire de $Ker(f)$. Donnez une base de $Im(f)$.
Un professeur vous demande de calculer $Tr(f)$. Que lui répondez vous ?

◦22◦ L'élève Itencolère a pour mission de trouver une loi $*$ sur $\mathbb{N}$ telle que tout élément n soit neutre à droite. Ça existe ça ?

◦23◦ ♡ On lance cent fois un dé équilibré à six faces. Donnez l'univers. Donnez la loi de probabilité.
On définit la variable aléatoire « nombre de 6 obtenus » (entre 0 et 100). Donnez sa loi.
Pour quel n la probabilité $P(''nombre\ de\ 6'' = n)$ est elle maximale ?
Pour quel n la probabilité $P(''nombre\ de\ 6'' = n)$ est elle minimale ?
Simulez avec Python.

∘24∘

♡ Sur les quarante huit élèves, huit sont vraiment cons. Le colleur attend deux trinômes. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un con dans le lot ?

L'univers n'est pas $range(48)$ (les quarante huit élèves).
C'est $(range(48))^6$ puisqu'on va prendre des sextuplets (deux trinômes ça fait six élèves).
Certes, certains événements sont impossibles, car dans un trinôme, il n'y a pas trois fois le même élève.
On pourrait restreindre l'univers aux éléments de la forme $\{a,b,c,d,e,f\}$ avec a, b, c, d et e entre 0 et 48, tous différents.
Justement, une fois cet univers défini, on calcule son cardinal.
Les parties à six éléments parmi 48 : $\binom{48}{6}$.

Passons par l'événement complémentaire : aucun n'est con.
C'est donc qu'on a choisi nos six élèves parmi les quarante pas cons.
On a donc $\frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ total\ de\ cas} = \frac{\binom{40}{6}}{\binom{48}{6}}$.

On peut simplifier en $\frac{40}{48}.\frac{39}{47}.\frac{38}{46}.\frac{37}{45}.\frac{36}{44}.\frac{35}{43}$ et l'expliquer ainsi :
choisis un premier élève, pas con (il y en a 40) parmi les 48 présents : $\frac{40}{48}$.
Maintenant, choisis le second élève, pas con (il en reste 39) parmi les 47 présents : $\frac{39}{47}$.
Puis, choisis le troisième élève, pas con (il en reste 38) parmi les 46 présents : $\frac{38}{46}$.
Et ainsi de suite.
C'est la formule $P(\overline{C_1}).P_{\overline{C_1}}(\overline{C_2}).P_{\overline{C_1}et\overline{C_2}}(\overline{C_3}).P_{\overline{C_1}et\overline{C_2}et\overline{C_3}}(\overline{C_3})$ et ainsi de suite du cours.

Et on passe au complémentaire : $1-\frac{40}{48}.\frac{39}{47}.\frac{38}{46}.\frac{37}{45}.\frac{36}{44}.\frac{35}{43}$.
Application numérique : $0,69$ à 10^{-2} près ou si vous préférez : à peu près soixante neuf pour cent.

∘25∘

♡ Montrez que $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3,+,.)$. Mettez la sous la forme ${}^tA.A$.
Donnez un vecteur *(non nul)* orthogonal au plan engendré par les deux premiers vecteurs de base. Construisez une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3,+,.)$.
Le produit scalaire sous entendu dans la question, c'est
$\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right)\longmapsto\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$.

L'application $\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right)\longmapsto\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ est une forme. Bilinéaire, symétrique.
Pour les deux derniers points, on doit calculer

$$x^2+2.x.y+2.x.z+2.y^2+4.y.z+3.z^2$$

et en prouver la positivité.
On factorise en $(x+y+z)^2+(y+z)^2+z^2$ et on devine une généralisation pour l'année prochaine.
cette somme de carrés de réels est positive.
Et elle n'est nulle que dans le cas $z=y+z=x+y+z=0$.

Avec un peu d'initiative :

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

On veut ensuite un vecteur vérifiant $\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

On résout donc $x+y+z=0$ et $x+2.y+2.z=0$.[1]
On trouve $x=0$ et $y=-z$.
Le vecteur $\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$ convient.

Le vecteur $\overrightarrow{i}$ est normé, tant mieux pour lui.
On constate que $\overrightarrow{j}-\overrightarrow{i}$ est orthogonal à $\overrightarrow{i}$ (oui, pardon *orthϕgonal* ; pour ce produit scalaire).
Et $\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$ est orthogonal aux deux premiers.

On les norme ?

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}-\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{k}-\overrightarrow{j})$ est orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice : généralisez avec $T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*. calculez* ${}^tT.T$*, inversez* T *en* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*, comprenez le rapport...*

◦26◦ Montrez que $(x,y,z)\longmapsto\sqrt{-\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 1 & 1 & 1 \\ y & 1 & 2 & 2 \\ z & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}$ est une norme sur $(\mathbb{R}^3,+,.)$.

Ne cherchons pas le rapport et calculons : $(x,y,z)\longmapsto\sqrt{2.x^2+2.y^2+z^2-2.x.y-2.y.z}$.
On se dit que se cache là derrière une forme bilinéaire symétrique

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right)\longmapsto\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

dont on a juste à vérifier le caractère positif et défini positif...
On prend $2.x^2+2.y^2+z^2-2.x.y-2.y.z$ et on veut en faire une somme de carrés.
Cette fois, je prends par la fin : $(z-y)^2+(y-x)^2+x^2$.
Comme ça, vous avez la positivité.
Et cette somme de carrés n'est nulle que si x, y et z sont nuls.

Et si vous percevez un lien avec les matrices de tout à l'heure, ne cherchez pas à l'approfondir, soyez déjà heureuse d'avoir eu cette intuition...

◦27◦ ♡ Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 26 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3,+,.)$. Donnez une base orthonormée pour ce produit scalaire.
Écrivez cette matrice sous la forme ${}^tT.T$.

On définit $(U,\ V)\longmapsto{}^t\ U.S.V$. On a une forme par compatibilité des formats.
Elle est symétrique car ${}^tU.S.V={}^t\ ({}^tU.S.V)={}^t\ V.{}^tS.U={}^t\ V.S.U$ par symétrie de la matrice.
On montre en quantifiant : ${}^tU.S.(\alpha.V+\beta.W)=\ldots=\alpha.{}^tU.S.V+\beta.{}^tU.S.W$.
Le plus intéressant est la positivité. On développe :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 26 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=x^2+5.y^2+26.z^2+4.x.y-6.x.z-4.y.z$$

1. vous le voyez comme un système : PSI ; vous le voyez comme l'intersection de deux plans : MP/PSI* ; vous le voyez comme à la fois un système et l'intersection de deux plans et passez de l'un à l'autre : MP*

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 26 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+2.y-3.z)^2 + y^2 + 17.z^2 + 6.y.z$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 26 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+2.y-3.z)^2 + (y+3.z)^2 + 8.z^2$$

C'est une somme de carrés de réels. Elle est positive.

Et elle n'est nulle que dans le cas suivant : $\begin{array}{cccc} x & +2.y & -3.z & =0 \\ & y & +3.z & =0 \\ & & z & =0 \end{array}$. On aboutit au vecteur nul.

Une base orthonormée ? On prend $\overrightarrow{i}$. Il est normé. Facile.

Second vecteur : $\overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{i}$. Il est bien orthogonal à $\overrightarrow{i}$.
On calcule sa norme : 1 ($x = -2$, $y = 1$ et $z = 0$ donne $(x+2.y-3.z)^2 + (y+3.z)^2 + 8.z^2 = 0$.

Troisième vecteur : $\overrightarrow{k} - \phi(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}) \times \overrightarrow{i} - \phi(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) \times (\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$.
On trouve $11.\overrightarrow{i} - 4.\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.
On calcule sa norme : incroyable, c'est 1.
La base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On note P la matrice de passage $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (calcul à la main).
Quand on se donne deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ on calcule leur produit scalaire.
Sur la base canonique : $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t U.S.V$.
Sur la base orthonormée : $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t(U').V'$ avec $U = P.U'$ et $V = P.V'$ (changement de base).
On a donc ${}^t U.S.V = ^t (P^{-1}.U).(P^{-1}.V)$.
On obtient ${}^t U.S.V = ^t U.^t(P^{-1}).(P^{-1}).V$.
on identifie (peut être un peu vite ?) : $S = ^t (P^{-1}).P^{-1}$.
Et de toutes façons, on vérifie :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 26 \end{pmatrix}$$

Joli, non ?

∘28∘ ♡ Montrez que A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B).P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B).P(A \cap \overline{B})$.

On peut visualiser le découpage de l'espace

	A	$\overline{A}$
B	$A \cap B$	$\overline{A} \cap B$
$\overline{B}$	$A \cap \overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$

Passer aux probabilités $\begin{matrix} P(A \cap B) & P(\overline{A} \cap B) \\ P(A \cap \overline{B}) & P(\overline{A} \cap \overline{B}) \end{matrix}$ et même aux matrices $\begin{pmatrix} P(A \cap B) & P(\overline{A} \cap B) \\ P(A \cap \overline{B}) & P(\overline{A} \cap \overline{B}) \end{pmatrix}$.
Et l'indépendance se traduirait par « cette matrice est non inversible ». Et le matheux trouverait ça vraiment agréable !

Sachant que A est la réunion disjointe de $A \cap B$ et de $A \cap \overline{B}$, on a tout de suite $P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A)$.
Sachant que B est la réunion disjointe de $\overline{A} \cap B$ et de $A \cap B$, on a tout de suite $P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(B)$.
La matrice devient $\begin{pmatrix} P(A \cap B) & P(A) - P(A \cap B) \\ P(B) - P(A \cap B) & P(\overline{A} \cap \overline{B}) \end{pmatrix}$

Mais on a aussi $P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})$, donc $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap B)$
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - (P(A) - P(A \cap B))$
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$ formule assez cohérente par symétrie.

La matrice est devenue $\begin{pmatrix} P(A\cap B) & P(A)-P(A\cap B) \\ P(B)-P(A\cap B) & 1+P(A\cap B)-P(A)-P(B) \end{pmatrix}$.
Elle ne contient plus que les trois réels utiles : $P(A)$, $P(B)$ et $P(A\cap B)$.
Son déterminant vaut

$$P(A\cap B).\Big(1+P(A\cap B)-P(A)-P(B)\Big)-\Big(P(B)-P(A\cap B)\Big).\Big(P(B)-P(A\cap B)\Big)$$

On simplifie en $P(A\cap B)-P(A).P(B)$.
Il est nul si et seulement si les deux événements sont indépendants. J'aime assez cette approche purement algébriste.
Même si je reste persuadé qu'une approche géométrique reste possible.

∘29∘ ♡ Complétez $\frac{1}{\sharp}.\begin{pmatrix} 15 & & \\ -20 & 12 & \\ 0 & -15 & 20 \end{pmatrix}$ pour que ce soit la matrice d'une isométrie de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ pour le produit scalaire usuel. Montrez que 1 en est alors valeur propre et donnez le sous-espace propre associé.
Une isométrie est une application linéaire qui transforme une base orthonormée (comme la base canonique) en base orthonormée (vecteurs de norme 1, deux à deux orthogonaux).

Les trois colonnes de la matrice sont les images des trois vecteurs de la base canonique $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k})$, qui forme une base orthonormée.
On va donc demander que $\frac{1}{\sharp}.\begin{pmatrix} 15 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sharp}.\begin{pmatrix} \\ 12 \\ -15 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sharp}.\begin{pmatrix} \\ \\ 20 \end{pmatrix}$ soient normés et deux à deux orthogonaux.
Le fait que le premier soit normé donne $\sqrt{15^2+20^2}=\sharp^2$: $\sharp$ vaut 25 ou -25.
On va choisir 25.
La deuxième colonne est de norme 1 : $\sqrt{?^2+12^2+(-15)^2}$,le nombre manquant vaut 16 ou -16. Mais pour que les colonnes soient orthogonales, c'est 16.
A ce stade $\frac{1}{25}.\begin{pmatrix} 15 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{25}.\begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ -15 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux et normés. Qui est le troisième ? Leur produit vectoriel ! Ou son opposé. Le coefficient en bas égal à 20 dit : produit vectoriel.
$\boxed{\frac{1}{25}.\begin{pmatrix} 15 & 16 & 12 \\ -20 & 12 & 9 \\ 0 & -15 & 20 \end{pmatrix}}$ ou son opposé.
Pour que 1 soit valeur propre, je dois garder le premier, sinon il y a échec...
Pour prouver que 1 est valeur propre, soit que je calcule le polynôme caractéristique en n'oubliant pas le 25^2 [2] :

$$-X^3+\frac{47}{25}.X^2-\frac{47}{25}.X+1$$

On vérifie que 1 est racine.

Sinon, on peut résoudre $M.U=U$ et détecter un vecteur propre, non nul : $\boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}$ (après calculs).

∘30∘ Comme tout le monde sait, il y a les bons chasseurs et les mauvais chasseurs. Le mauvais chasseur, c'est l'gars qu'a un fusil, il voit un truc qui bouge, beh il tire. Il tire. Et le bon chasseur, c'est un gars il y a un fusil, un fusil... il voit un truc qui bouge... il tire... mais bouah c'est pas la même chose... c'est un bon chasseur.
Ils sont n chasseurs, et voilà que déboulent n lapins. Chaque chasseur choisit un lapin au hasard, et... il tire.
Quelle est la probabilité p_n qu'au moins un lapin n'ait pas été visé ? Déterminez la limite de p_n quand n tend vers l'infini.
Ils sont n chasseurs (dont Elmer Fudd), et voilà que déboulent n lapins (dont Bugs Bunny). Chaque chasseur choisit un lapin au hasard, et... il tire, mais c'est pas pareil, c'est un bon chasseur.
Quelle est la probabilité q que Bunny n'ait pas été visé ?

Les chasseurs tirent au hasard. Le nombre de lapins visés peut aller de 1 (tous ont visé le même) à n (permutation parfaite).
L'univers est fait des applications de $\{C_1,\dots C_n\}$ dans $\{L_1,\dots L_n\}$. Il y a n^n éléments (chacun des n chasseurs a n

2. dans le détermina,t c'est 25^3 qu'on retrouve, mais le déterminant vaut 1, car la famille est orthonormée directe !

choix, et on multiplie, ou alors on utilise la froide formule $Card(F)^{Card(E)}$).
L'événement complémentaire de « au moins un lapin est épargné »[3] est « tous les lapins ont été canardés ». Et on a donc cette fois non plus une application de $\{C_1, C_n\}$ dans $\{L_1, \dots L_n\}$ mais une surjection, et même une bijection par théorème pour flemmards. Il y en a $n!$ (le premier choisit comme il veut, le suivant n'a plus que $n-1$ lapins et ainsi de suite). Il a a pour probabilité $\dfrac{n!}{n^n}$.

La probabilité « au moins un lapin non visé » est $\boxed{1 - \dfrac{n!}{n^n}}$

Par croissances comparées, p_n converge vers 1 quand n tend vers l'infini. Foncez petits lapins, soyez nombreux, au moins un en réchappera...

Cette fois, on particularise le lapin.
Chaque chasseur C_k vise Bugs avec probabilité $\dfrac{1}{n}$ et l'épargne avec probabilité $1 - \dfrac{1}{n}$.
Comme ils ne se concertent pas, ils l'épargnent tous avec probabilité $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Par résultat classique (passez par $\exp\left(\dfrac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n}\right)$), cette probabilité tend vers $\dfrac{1}{e}$.
Comme quoi des intelligents chasseurs[a] peuvent finalement faire venir la base des logarithmes.

[a]. en français, « chasseur intelligent » est un oxymore ou oxymoron, comme le vers de Corneille « cette obscure clarté qui descend des étoiles ».

∘31∘ Dans ce café, il y a cinq WC : deux pour hommes, trois pour femmes. Vous savez par expérience qu'un WC "homme" a soixante pour cent de "chances" d'être souillé, et qu'un WC "dame" a seulement quarante pour cent de chances d'être souillé. Vous ouvrez une porte au hasard. Les lieux sont propres. Quelle est la probabilité que vous soyez dans les toilettes pour votre sexe ? *(C'est évidemment la formule de Bayes)*.

Les événements à croiser sont H ou F pour l'intitulé des toilettes, et P ou S pour l'état des toilettes.

	Homme	*Femme*
Propre		
Sale		

Le nombre de portes vous donne

	Homme	*Femme*
Propre		
Sale		
	$\downarrow \frac{2}{5}$	$\downarrow \frac{3}{5}$

Les probabilités conditionnelles donnent

Homme		*Femme*	
Propre	$40/100$	*Propre*	$60/100$
Sale	$60/100$	*Sale*	$40/100$
$\downarrow \frac{2}{5}$		$\downarrow \frac{3}{5}$	

Propre	$80/500$	$180/500$	$\rightarrow$	$260/500$
Sale	$120/500$	$120/500$	$\rightarrow$	$240/500$
vérification	$200/500$	$200/500$		

On extrait ce dont on se doutait : la probabilité que les toilettes soient propres ou sales.$\dfrac{12}{25}$ et $\dfrac{13}{25}$ (environ une chance sur deux d'avoir un siège propre).

Mais tout à coup, l'univers se retreint : vous avez ouvert la porte, les lieux d'aisance sont clean :

3. sur ce type d'exercices, l'événement complémentaire sert souvent, et il faut faire un peu de logique booléenne

inter *Propre*	$\frac{80}{500}$	$\frac{180}{500}$	$\rightarrow$	$\frac{13}{25}$

On renormalise

	Homme	*Femme*
sachant *Propre*	$\frac{4}{13}$	$\frac{9}{13}$

∘32∘

Dans cette ville, il y a des mille couples. Soixante sont des couples "gay" et quarante sont des couples "saphiques" [a]. Vous frappez à une porte, un homme vient vous ouvrir. Quelle est la probabilité que l'autre membre du foyer soit une femme.

a. après l'Informatique Pour Tous, c'est le Mariage Pour Tous

		$H+H$	$H+F$	$F+F$	
situation général	probabilité	$\frac{60}{1000}$	$\frac{900}{1000}$	$\frac{40}{1000}$	
un homme ouvre	probabilité	$\frac{60}{1000}$	$\frac{900}{1000}$	impossible	$\rightarrow \frac{960}{1000}$
sachant qu'un homme ouvre	probabilité	$\frac{60}{960}$	$\frac{900}{960}$		$\rightarrow 1$
l'autre est une femme	$\frac{900}{960}$				

Je me souviens qu'une élève (devenue par la suite colleuse en MPSI2, puis prof) était passée corriger cet exercice, juste pour noter le côté littéraire de l'adjectif « saphique » à la place de « lesbien ». Il est vrai que j'aurais même pu utiliser « uranique » plutôt que « gay » . Mais que sont alors les « transuraniens » de la chimie ?

∘33∘

Les sept nains sont par ordre de grandeur Simplet, Atchoum, Dormeur, Grincheux, Prof, Joyeux, Timide, Simon (tiens, c'est comme les trois mousquetaires, ça en fait 8).
Chaque matin, Blanche Neige en tire trois du lit pour les envoyer travailler (sans remise, ils ne retournent pas se coucher, une fois qu'on les a tirés).
Et ils partent travailler ay ho ay ho, en file, du plus petit au plus grand.
Donnez la loi du plus petit, et la loi du plus grand. Et complétez le tableau de la loi conjointe

	Simplet	Atchoum	Dormeur	Grincheux	Prof	Joyeux	Timide	Simon	plus petit
Simplet	0	0	0	0	0	0	0	0	
Atchoum	0	0	0	0	0	0	0	0	
Dormeur		0	0				0	0	
Grincheux			0	0			0	0	
Prof				0	0		0	0	
Joyeux					0	0	0	0	
Timide						0	0	0	
Simon							0	0	
plus grand									

Expliquez les 0.

∘34∘

♡ On réalise l'expérience suivante :

```
from random import randrange
X = randrange(6) #entier entre 0 et 5, hasard uniforme
Y = randrange(X) #entier entre 0 et x-1
```

Vérifiez : $E(X) = 2,5$. Montrez que sa variance vaut $35/12$. $(Var(X) = E(X^2) - E(X)^2)$
Quelle est l'espérance de la variable aléatoire Y.
Quelle est l'espérance du produit $X.Y$?

X suit une loi a priori uniforme sur $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Chaque valeur a pour probabilité de réalisation $\frac{1}{6}$.

Son espérance se calcule : $\sum_{k=0}^{5} \frac{k}{6} = \frac{1}{6}.\frac{5.6}{2} = \frac{5}{2}$.

L'espérance de son carré sa calcule aussi : $\sum_{k=0}^{5} \frac{k^2}{6} = \frac{1}{6}.\frac{5.6.11}{6} = \frac{55}{6}$.

Sa variance est donnée par la formule des cours [4] : $E(X^2) - E(X)^2 = \frac{55}{6} - \frac{25}{4} = \frac{110-75}{12} = \frac{35}{12}$.

4. du cours de Seconde, Première, Terminale, Sup...

Pour Y, on peut dresser un tableau, un arbre, ou une formule des probabilités totales/

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$	
$Y=0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2.6}$	$\frac{1}{3.6}$	$\frac{1}{4.6}$	$\frac{1}{5.6}$	$\frac{1}{6.6}$	$\frac{49}{120}$
$Y=1$		$\frac{1}{2.6}$	$\frac{1}{3.6}$	$\frac{1}{4.6}$	$\frac{1}{5.6}$	$\frac{1}{6.6}$	$\frac{29}{120}$
$Y=2$			$\frac{1}{3.6}$	$\frac{1}{4.6}$	$\frac{1}{5.6}$	$\frac{1}{6.6}$	$\frac{19}{120}$
$Y=3$				$\frac{1}{4.6}$	$\frac{1}{5.6}$	$\frac{1}{6.6}$	$\frac{37}{360}$
$Y=4$					$\frac{1}{5.6}$	$\frac{1}{6.6}$	$\frac{11}{180}$
$Y=5$						$\frac{1}{6.6}$	$\frac{1}{36}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

$$P(Y=0) = \sum_{k=0}^{5} P_{X=k}(Y=0).P(X=k) = 1.P(X=0) + \tfrac{1}{2}.P(X=1) + \tfrac{1}{3}.P(X=2) + \tfrac{1}{4}.P(X=3) + \tfrac{1}{5}.P(X=4) + \tfrac{1}{6}.P(X=5)$$

$$P(Y=1) = \sum_{k=0}^{5} P_{X=k}(Y=1).P(X=k) = \tfrac{1}{2}.P(X=1) + \tfrac{1}{3}.P(X=2) + \tfrac{1}{4}.P(X=3) + \tfrac{1}{5}.P(X=4) + \tfrac{1}{6}.P(X=5)$$

$$P(Y=2) = \sum_{k=0}^{5} P_{X=k}(Y=2).P(X=k) = \tfrac{1}{3}.P(X=2) + \tfrac{1}{4}.P(X=3) + \tfrac{1}{5}.P(X=4) + \tfrac{1}{6}.P(X=5)$$

$$P(Y=3) = \sum_{k=0}^{5} P_{X=k}(Y=3).P(X=k) = \tfrac{1}{4}.P(X=3) + \tfrac{1}{5}.P(X=4) + \tfrac{1}{6}.P(X=5)$$

$$P(Y=4) = \sum_{k=0}^{5} P_{X=k}(Y=4).P(X=k) = \tfrac{1}{5}.P(X=4) + \tfrac{1}{6}.P(X=5)$$

$$P(Y=5) = \sum_{k=0}^{5} P_{X=k}(Y=5).P(X=k) = \tfrac{1}{6}.P(X=5)$$

Le tableau ci dessus donne les lois conjointes, et on extrait les lois marginales en ligne pour X et en colonnes pour Y.
On vérifie que la somme des probabilités vaut 1.

Après tout n'est que calcul : $E(Y) = 0.\frac{49}{120} + 1.\frac{29}{120} + 2.\frac{19}{120} + 3.\frac{37}{360} + 4.\frac{11}{180} + 5.\frac{1}{36} = \frac{5}{4}$ grâce à la dernière colonne.

Et $E(X.Y)$ est une somme de trente six termes dont près de la moitié sont nuls.
Moi j'ai trouvé $\frac{55}{12}$.

Enfin, $E(X.Y) - E(X).E(Y)$ vaut $\frac{35}{24}$.

∘35∘

> Combien y a-t-il de façons de répartir $a+b+c$ individus dans trois sous-ensembles A, B et C de cardinaux a, b et c.
> Exemple : $a=2$, $b=2$ et $c=3$ et sept individus i, j, k, l, m, n, o : (ik), (jl), (mno) mais aussi (jl), (ik), (mno) qui n'est pas la même tandis que (ik), (jl), (nom) est la même.

On choisit parmi $a+b+c$ individus les a individus à placer dans A : $\binom{a+b+c}{a}$.

On choisit ensuite parmi les $b+c$ individus qui restent lesquels on place dans B : $\binom{b+c}{b}$.

Les c derniers sont placés d'office dans l'ensemble de cardinal c : 1 choix.
On multiplie :

$$\binom{a+b+c}{a}.\binom{b+c}{b}.\binom{c}{c}$$

qui s'écrit aussi naturellement $\boxed{\dfrac{(a+b+c)!}{a!.b!.c!}}$

◦36◦

> On donne $0 \leqslant n \leqslant k \leqslant N$.
> On choisit n entiers dans `range(1, N+1)`. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous plus petits que k ?
> Quelle est la probabilité que le plus grand des entiers tirés ait pour valeur k ?
> Retrouvez la formule de ZHU SHI JIE.

On compte le nombre total de tirages de n éléments parmi N : $\binom{N}{n}$.

On compte les cas favorables : les n entiers sont dans `range(1, k+1)` : $\binom{k}{n}$.

On effectue le quotient

$$\frac{cas\ favorables}{cas\ possibles} = \frac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{k!.n!.(N-n)!.}{N!.k!.(k-n)!}$$

(et l'hypothèse $0 \leqslant n \leqslant k \leqslant N$ nous exonère de la convention sur les binomiaux aberrants).

Le cas où le maximum vaut exactement k est la différence de deux ensembles : "*le maximum est plus petit que k*" privé de "*le maximum est plus petit que* $k-1$". Ou alors on écrit la réunion disjointe $maximum \leqslant k-1 \cup maximim = k = maximum \leqslant k$.

Bref, on trouve

$$P(Max = k) = \$\frac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}} - \frac{\binom{k-1}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

On applique la formule des probabilités totales, pour dire que la somme $\sum_{k=0}^{N} P(Max = k)$ vaut 1 et on trouve

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{k-1}{n-1} = \binom{N}{n}$$

C'est la formule qui somme en colonne dans le triangle de Pascal.

◦37◦

> J'ai dans ma poche les pièces suivantes :
>
> | 1 euro | 2 euros | dix centimes | vingt centimes |
> |---|---|---|---|
> | 4 | 3 | 5 | 3 |
>
> Question niveau CE2 : combien ai-je en poche ?
> Mon fils vient me réclamer son argent de poche. Je tire trois pièces au hasard *(je vais vite, je ne parviens pas à les distinguer au toucher, le hasard est uniforme).*
> Quelle est la probabilité qu'il ait trois pièces de même valeur ?
> Quelle est la probabilité qu'il touche plus de trois euros ?
> Sachant que les trois pièces sont différentes, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas de pièce de dix centimes ?

Niveau CE2 : onze euros et dix centimes.

Quand on tire trois pièces parmi quinze, il y a $\binom{15}{3}$ configurations possibles, si les pièces sont distinguables.

L'événement « tirez trois pièces de même valeur » se découpe en événements incompatibles

trois pièces de un euro	
trois pièces de deux euros	
trois pièces de dix centimes	
trois pièces de vingt centimes	

Incompatibles car il est impossible d'avoir à la fois trois pièces de un euro et trois pièces de deux. par exemple.
On va donc sommer les probabilités de ces quatre événements.

trois pièces de un euro	$\frac{4}{15}.\frac{3}{14}.\frac{2}{13}$
trois pièces de deux euros	$\frac{3}{15}.\frac{2}{14}.\frac{1}{13}$
trois pièces de dix centimes	$\frac{5}{15}.\frac{4}{14}.\frac{3}{13}$
trois pièces de vingt centimes	$\frac{3}{15}.\frac{2}{14}.\frac{1}{13}$
	Total : $\frac{16}{455}$

La valeur $\frac{4}{15}.\frac{3}{14}.\frac{2}{13}$ s'explique.

la première pièce est une des quatre pièces de un euro	$\frac{4}{15}$
puis la deuxième est une des trois pièces de un euro qui restent	$\frac{3}{14}$
la dernière est une des deux parmi 13	$\frac{2}{13}$

On la voit aussi avec un arbre. Ou plutôt une branche.

On note que si on n'avait pas eu assez de pièces d'une certaine valeur, on aurait eu $\frac{2}{15}.\frac{1}{14}.\frac{0}{13} = 0$. Normal.

Le fait que les numérateurs et dénominateurs diminuent atteste que l'on a un tirage sans remise.

Non demandé : Python

```
def Tirage( ) :
....L= [1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.2]
....Tir = []
....for k in range(3) :
........Piece = L.pop(randrange(len(L)))
........Tir.append(Piece)
....return Tir
```

Et on fait plein de tirages.

```
Pareil, N = 0, 100000
for essai un range(N) :
....T = Tirage()
....Pareil += int(T[0]==T[1] and T[1]==T[2])
print(Pareil/N)
```

On rappelle que int(booleen) va transformer le booléen en 0 ou 1.

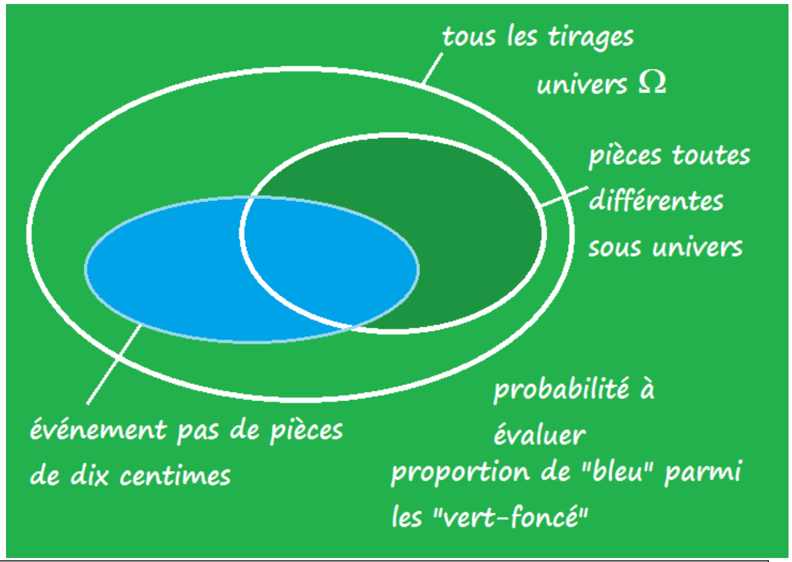
Quelle est la probabilité qu'il touche plus de trois euros ?

```
PluDe3, N = 0, 100000
for essai un range(N) :
....T = Tirage()
....PluDe3 += int(T[0]+T[1]+T[2]>=3)
print(PlusDe3/N)
```

Sinon, comme avoir plus de trois euros ?

tous incompatibles							
1-1-1	1-1-2	1-2-1	2-1-1	2-2-1	2-1-2	1-2-2	2-2-2
$\frac{4.3.2}{15.14.13}$	$\frac{4.3.3}{15.14.13}$	$\frac{4.3.3}{15.14.13}$	$\frac{3.4.3}{15.14.13}$	$\frac{3.2.4}{15.14.13}$	$\frac{3.4.2}{15.14.13}$	$\frac{4.3.2}{15.14.13}$	$\frac{3.2.1}{15.14.13}$
2-2-0.1 (et désordre)		2-2-0.2		2-1-0.1		2-1-0.2	
$3 \times \frac{3.2.5}{15.14.13}$		$3 \times \frac{3.2.5}{15.14.13}$		$6 \times \frac{3.3.2}{15.14.13}$		$6 \times \frac{3.4.3}{15.14.13}$	
Total							$\frac{31}{91}$

Sachant que les trois pièces sont différentes, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas de pièce de dix centimes ?



Le « sachant que » réduit à un sous-univers (de probabilité non nulle) : « les pièces sont distinctes ».
On va calculer le quotient sur ce nouvel univers $\dfrac{\textit{pas de } 10}{\textit{pieces distinctes}}$

```
Distincts, PasDe10, N = 0, 100000
for essai un range(N) :
....T = Tirage()
....if T[0] !=T[1] and T[1] !=T[2] and T[0] !=T[2] : #univers restreint
........Distincts += 1
........if not(0.1 in T) : #on est sur l'intersection
............PasDe10 += 1
print(PasDe10/Distincts)
```

∘38∘

Dans une chambre secrète du château de Bowser, il y a n Yoshi numérotés et deux Gomba numérotés de 1 à 2. Ils sortent de la pièce un par un, au hasard.[a]
On note X la variable aléatoire "*rang d'apparition du premier Gomba*". Déterminez sa loi.
On note Y la variable aléatoire "*rang d'apparition du premier individu portant le numéro* 1". Déterminez sa loi.

a. dans le sujet CCP, ce sont encore une fois des boules et une urne... mais à force d'entendre mes enfants et mes presque enfants jouer à la Nintendo...

A faire.

∘39∘

x et y sont deux variables aléatoires sur un univers probabilisé (Ω, P), avec $Var(X)$ non nulle.
Minimisez $E\big((Y-a)^2\big)$ puis minimisez $E\big((Y-(a+b.X))^2\big)$.
C'est un exercice de probabilités ou d'algèbre linéaire ?

On doit choisir a pour minimiser $E\big((Y-a)^2\big)$.
Cette quantité vaut $E(Y^2 - 2.a.Y + a^2)$, donc par linéarité $E(Y^2 - 2.a.E(Y) + a^2$ (car $E(a^2) = a^2$ quand a^2 est une constante).
Ce trinôme du second degré est minimal en $a = E(Y)$ (dérivez).

Interprétation : $E(Y)$ est la variable aléatoire constante la plus proche de Y.
C'est la projection orthogonale de Y sur les constantes.

On développe aussi $E\big((Y-(a+b.X))^2\big)$ en $a^2 + b^2.E(X^2) + E(Y^2) - 2.a.E(Y) - 2.b.E(X.Y) + 2.a.b.E(X)$.

Pour minimiser ces trinômes en a et en b, on cherche le sommet de la « parabole en a » et le sommet de la « parabole en b ».

On résout un petit système $\begin{array}{lll} 2.a & +2.b.E(X) & = 2.E(Y) \\ 2.a.E(X) & +2.b.E(X^2) & = 2.E(X.Y) \end{array}$

Son déterminant est non nul, c'est $Var(X)$ (sauf si X est constante, mais alors $a + b.X$ ne contient pas grand chose de plus que a).

On trouve $a = \dfrac{E(X^2).E(Y) - E(X.Y).E(X)}{Var(X)}$ et $b = \dfrac{E(X.Y) - E(X).E(Y)}{Var(X)}$.

Le minimum vaut alors...

◦40◦ A est une matrice de projection, complétez la : $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ & 0 & -1 \\ & 4 & \end{pmatrix}$. Donnez son noyau K et une base de son image I. Donnez l'équation cartésienne de son ensemble image. Montrez que son image est $Ker(I_3 - A)$. Montrez que $\{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ est un espace vectoriel. Montrez que M est dans C si et seulement si on a $\forall U \in K,\ M.U \in K$ et $\forall V \in I,\ M.V \in I$.

On nomme les coefficients absents, puis on effectue le produit A^2, et on l'égalise à A :
$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ b & 4 & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ b & 4 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ b & 4 & c \end{pmatrix}$
On a quelques équations $9 + a + b = -3$, $-3.a - b = a$.
On résout directement ce système : $a = 4$ et $b = -16$. On reporte dans une des autres : $c = 5$.
Les conditions nécessaires sont ensuite suffisante.

Pour le noyau, on résout $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -16 & 4 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a trois équations, mais l'une est combinaison des autres : $z = 4.x$, $y = -x$. Les vecteurs sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ 4.x \end{pmatrix}$.

Une base du noyau est $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)}$ (et le noyau est de dimension 1).

On veut des vecteurs de l'image :

$$\begin{pmatrix} -3.x & +y & +z \\ 4.x & & -z \\ -16.x & +4.y & +5.z \end{pmatrix} = x. \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix} + y. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + z. \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On a une famille génératrice de l'image $\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$. Mais ce n'est pas une base de l'image :

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 4. \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(les trois coefficients de la combinaison sont ceux des vecteurs du noyau).

On enlève un vecteur, et la famille libre $\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ est une base de l'image.

Pour l'équation cartésienne, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est dans l'image si et seulement si $\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$ est liée.

On annule un déterminant et on a l'équation $\begin{vmatrix} -3 & 1 & x \\ 4 & 0 & y \\ -16 & 4 & z \end{vmatrix} = 0$. On trouve $\boxed{4.x - y - z = 0}$ *(que vérifient les vecteurs* $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$*).*

On note C l'ensemble des matrices carrées M vérifiant $A.M = M.A$. La matrice nulle en fait partie.
Si M et M' en font partie, si α et β sont deux réels, alors on a $A.(\alpha.M + \beta.M') = \alpha.A.M + \beta.A.M' = \alpha M.A + \beta.M'.A = (\alpha.M + \beta.M').A$. On reconnaît que $\alpha.M + \beta.M'$ est dans C.

Prenons M dans C : $M.A = A.M$.
On montre alors que K est stable par A et I aussi.
On prend U dans K : $A.U = 0$. On étudie si $M.U$ est dans K, c'est à dire si on a $A.(M.U) = 0_3$.
Mais justement,
$$A.(M.U) = (A.M).U = (M.A).U = M.(A.U) = M.0_3 = 0_3$$

On montre que I est stable aussi par K.
On a la définition plus simple pour les éléments de l'image d'un projecteur, c'est le noyau du projecteur associé :

on prend V dans I : $(A-I_3).V=0_3$. On pose $W=M.V$ et on vérifie :

$$(A-I_3).W=(A-I_3).M.V=A.M.V-M.V=M.A.V-M.V=M.(A.V-V)=M.0_3=0_3$$

Passons à la réciproque. On suppose que K et I sont stables. Il faut montrer $A.M=M.A$.
Pour le prouver, on va montrer que pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, on a $A.M.X=M.A.X$.
Par caractérisation des projecteurs, X s'écrit $U+V$ avec U dans K et V dans I.
On effectue : $M.A.U=M.A.U+M.A.V=M.0_3+M.V=M.V$ (caractérisation de K et de I).
On effectue aussi : $A.M.X=A.M.U+A.M.V$. Comme $M.U$ est dans K (stabilité de K), on a $A.(M.U)=0$. Comme $M.V$ est dans I, on a $A.(M.V)=M.V$.
Par transitivité : $A.M.X=M.V=M.A.X$. Il y a égalité.

∘41∘

En $M.P.S.I._\pi$ les vingt élèves choisissent leur T.I.P.E. au hasard en lançant un dé équilibré à huit faces *(ça existe ?)*.
Si ils tirent un nombre premier, ils prennent maths *(+info, jeux, échecs...)*. Sinon, ils prennent physique.
Quelle est la probabilité qu'ils fassent tous maths ? Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas plus de quinze élèves dans chaque groupe.

∘42∘

Soient f et g deux endomrophismes de $(\mathbb{R}^n,+,.)$ vérifiant $rg(f)+rg(g)<n$.
Montrez qu'il existe au moins un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ vérifiant $f(\overrightarrow{u})=g(\overrightarrow{u})=0$.

∘43∘

Soit A une matrice de taille n sur n et U_1 à U_k des vecteurs propres de A associé à des valeurs propres distinctes λ_1 à λ_k ($A.U_i=\lambda_i.U_i$et $U_i\neq O_n$). Montrez que la famille $(U_1,\dots U_k)$ est libre *(partir de $\alpha_1.U_1+\dots+\alpha_k.U_k=0_n$ et appliquer A autant de fois qu'il faut)*.
Concluez que si A admet n valeurs propres distinctes, alors il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale vérifiant $A.P=P.D$ *(on montrera qu'il existe au moins un vecteur propre pour chaque valeur propre, et on mettra ces vecteurs propres dans le matrice P)*.

On se donne k réels α_1 à α_k (les λ_i sont déjà pris pour désigner les valeurs propres).
On suppose $\alpha_1.U_1+\dots+\alpha_k.U_k=0_n$. Objectif : les α_i sont nuls.

On applique A (formats compatibles) : $A.(\alpha_1.U_1+\dots+\alpha_k.U_k)=A.0_n$.

On distribue : $\alpha_1.A.U_1+\dots+\alpha_k.A.U_k=0_n$ (les réels traversent les produits matriciels : $a.N.P=N.a.P=N.P.a$).

Mais chaque vecteur est vecteur propre $\alpha_1.\lambda_1.U_1+\dots+\alpha_k.\lambda_k.U_k=0_n$.

On écrit même $\lambda_1.(\alpha_1.U_1)+\dots+\lambda_k.(\alpha_k.U_k)=0_n$.

On multiplie à nouveau par A à gauche : $A.\Big(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i.\alpha_i.U_i\Big)=0_n$.

Même distribution : $\sum_{i=1}^{k}A.\lambda_i.\alpha_i.U_i=0_n$.

Même traversée : $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i.\alpha_i.A.U_i=0_n$.

Même propreté : $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i.\alpha_i.\lambda_i.U_i=0_n$.

Même regroupement : $\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i)^2.\alpha_i.U_i=0_n$.

On recommence avec le même schéma : $\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i)^3.\alpha_i.U_i=0_n$.
Par récurrence naturelle sur l'exposant p (ou sur le nombre de fois où on a multiplié par A) :

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i)^p.\alpha_i.U_i=0_n$$

Ecrivons k formules de cette liste les unes sous les autres :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1.\alpha_1.U_1 & + & 1.\alpha_2.U_2 & + & \dots & +1.\alpha_k.U_k & = & 0_n \\
\lambda_1.\alpha_1.U_1 & + & \lambda_2.\alpha_2.U_2 & + & \dots & +\lambda_k.\alpha_k.U_k & = & 0_n \\
(\lambda_1)^2.\alpha_1.U_1 & + & (\lambda_2)^2.\alpha_2.U_2 & + & \dots & +(\lambda_k)^2.\alpha_k.U_k & = & 0_n \\
\vdots & & & & & & & \\
(\lambda_1)^{k-1}.\alpha_1.U_1 & + & (\lambda_2)^{k-1}.\alpha_2.U_2 & + & \dots & +(\lambda_k)^{k-1}.\alpha_k.U_k & = & 0_n
\end{array}$$

Matriciellement, ce système s'écrirait $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ (\lambda_1)^2 & (\lambda_2)^2 & \dots & (\lambda_k)^2 \\ \vdots & & & \\ (\lambda_1)^{k-1} & (\lambda_2)^{k-1} & \dots & (\lambda_k)^{k-1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha_1.U_1 \\ \alpha_2.U_2 \\ \alpha_3.U_3 \\ \vdots \\ \alpha_k.U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n \\ 0_n \\ 0_n \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}$
même si la notion de « vecteur de vecteurs » est un peu louche.
De toutes façons, c'est un système linéaire, dont la matrice est « de VanDerMonde ».
Comme les λ_i (les valeurs propres) sont distincts, la matrice de VanDerMonde est inversible.
L'unique solution est donc que chaque $\alpha_i.U_i$ soit égal à 0_n *(vecteur nul)*.
Par définition, un vecteur propre est non nul [5], c'est donc que c'est α_i qui est nul.

On a donc bien prouvé k vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de la matrice A sont linéairement indépendants.

On a de même k vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de l'endomorphisme f sont linéairement indépendants.

Comme la taille des familles libres est plafonnée, le nombre de valeurs propres est limité.

Suppsons que le poynôme caractéristique de A admet n valeurs propres distinctes (n est le format de la matrice, et aussi le degré du polynôme caractéristique).
Pour chaque valeur propre λ, on a $\det(A - \lambda.I_n) = 0$.
La matrice $A - \lambda.I_n$est non inversible.
Il existe une relation de dépendance linéaire sur ses colonnes.
Il existe donc un vecteur non nul U (formé des coefficients d'une telle relation) vérifiant $(M - \lambda.I_n).U = 0_n$.
Quitte à faire passer de l'autre côyté le $\lambda.I_n.U$, on a un vecteur propre : $M.U = \lambda.U$.

Chaque racine du polynôme caractéristique apporte un vecteur propre. Au moins un (pensez au cas des racines doubles qui vont peut être en amener plusieurs).

Comme on a supposé que le polynôme caractéristique avait n racines distinctes, on donc n vecteurs prorpes associés à ces n valeurs propres distinctes.
Mais par le résultat précédent *(appelé parfois « corollaire de VanDerMonde »)*, ces vecteurs propres forment une famille libre.

En tant que famille libre de bon cardinal n, la famille $(U_1, \dots, U_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

En prenant pour P la matrice de cette falille de vecteur (changement de base), les relations $A.U_i = \lambda_i.U_i$ donnent, colonne par colonne : $A.P = P.D$ avec $D = Diag(\lambda_1, \dots \lambda_n)$.

On a prouvé que toute matrice ayant autant de valeurs propres distinctes que son format est diagonalisable.

Ce qui va donc empêcher une matrice diagonalisable :
• pas assez de valeurs propres *(sur $\mathbb{R}$ par exemple, avec un spectre non réel)*
• des racines doubles dans le polynôme caractéristique, qui ne vont pas apporter assez de vecteurs propres.

> *Attention, même avec des valeurs orpres multiples, certaines se diagonalisent, comme I_n qui n'a qu'une valeur propre (c'est 1) mais est déjà diagonale.*

Le critère fin sera : chaque valeur propre apporte-t-elle autant de vecteurs propres indépendants que sa multiplicité dans le polynôme caractéristique ?

---

5. sinon, avec $U = 0_n$, la relation $A.U = \lambda.U$ ne permet pas de déterminer λ)

∘44∘

♡ Pour tout n, on pose $c_n = (\theta \longmapsto \cos(n.\theta))$ et $\sigma_n = (\theta \longmapsto \cos^n(\theta))$. Montrez que la famille $(c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4)$ est libre dans $(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ +,\ .)$. Montrez que la famille $(\sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_4)$ est libre dans $(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ +,\ .)$ et engendre le même sous-espace vectoriel que $(c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4)$. Donnez la matrice de changement de base.

On se donne cinq réels a_0 à a_4 quelconques (quantification de $\forall(a_0, \dots a_4) \in \mathbb{R}^5$)
et on suppose $a_0.c_0 + a_1.c_1 + a_2.c_2 + a_3.c_3 + a_4.c_4 = 0$ (fonction nulle).
On doit montrer que a_0 jusqu'à a_4 sont nuls.

Une méthode :

on calcule en 0	$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$
on dérive $a_0.c_0 + a_1.c_1 + a_2.c_2 + a_3.c_3 + a_4.c_4 = 0$	$-a_1.c_1 - a_2.2.c_2 - a_3.3.c_3 - a_4.4.s_4 = 0$
et on re-dérive	$-a_1.c_1 - a_2.4.c_2 - a_3.9.c_3 - a_4.16.c_4 = 0$
on calcule en 0	$-a_1 - a_2.4 - a_3.9 - a_4.16 = 0$
on re-dérive deux fois	$-a_1.c_1 - a_2.16.c_2 - a_3.81.c_3 - a_4.64.c_4 = 0$
on calcule en 0	$-a_1 - a_2.16 - a_3.81 - a_4.64 = 0$
on recommence	

On finit par obtenir un système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 16 & 81 & \\ 0 & 1 & 64 & 729 & \\ 0 & 1 & 256 & 6561 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est de type VanDerMonde. Inversible.
La seule solution est « tous les $a_k$sont nuls ».

Autres méthodes : regarder aussi en π pour avoir autant de relations sans trop dériver
regarder en quelques points (au lieu de dériver et toujours regarder en 0), et obtenir encore un système de Cramer.

Cette fois, on se donne des b_k et on suppose

$$\forall x,\ b_0.(\cos(x))^0 + b_1.(\cos(x))^1 + b_2.(\cos(x))^2 + b_3.(\cos(x))^3 + b_4.(\cos(x))^4 = 0$$

Le polynôme $b_0 + b_1.X + b_2.X^2 + b_3.X^3 + b_4.X^4$ est nul sur tout $[-1,\ 1]$.
Il a plus de racines que son degré ? Il est nul !
Les b_k sont nuls.

On notera que grâce aux formules de Tchebychev, on pet ramener les c_k en combinaisons des σ_i et profiter de la liberté des uns pour obtenir celle des autres.

Toute combinaison des c_k est effectivement combinaison des σ_i.
On en déduit $Vect(c_0, \dots c_4) \subset Vect(\sigma_0, \dots \sigma_4)$.
Mais les deux espaces ont la même dimension.
Ils sont égaux ;
On exprime même les uns à l'aide des autres :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & | & \sigma_0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & | & \sigma_1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 & | & \sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & | & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & | & \sigma_4 \\ = & = & = & = & = & & \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & & \end{array}$$

La quatrième colonne nous renseigne : $c_3 = 4.\sigma_3 - 3.\sigma_0$ (à l'étage des fonctions)

$$\forall x,\ \cos(3.x) = 4.\cos^3(x) - 3.\cos(x)$$

à l'étage des réels
colonne de coefficients $0, -3, 4, 0, 0$ pour dire ce qu'on sait de c_3.

On peut inverser la matrice « à la main » : $\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{matrix}$ c'est à dire

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3/8 & | & \sigma_0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 & | & \sigma_1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & | & \sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & | & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & | & \sigma_4 \\ = & = & = & = & = & & \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & & \end{matrix}$$

On retrouve par exemple $\forall x,\ \cos^3(x) = \dfrac{3.\cos(3.x) + \cos(x)}{4}$.

∘45∘

Calculez en fonction de n le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ après avoir donné la forme de son terme général (a_i^k en fonction de i et k).

En fait, dès que n est trop grand, ce déterminant est nul, car il y a deux colonnes égales.

Remarque :	Suivant votre recul :	famille liée déterminant nul (réaction normale MP !) on soustrait la première colonne sur la dernière et on développe par rapport à cette colonne de 0 (démarche de qui a fini par ne voir que des méthodes de calcul et n'a plus le recul sur ce qu'est un déterminant.. PSI !

Pour la définir, disons en indexation classique : $\begin{matrix} 1 & si & i=1 & ou & i=n \\ & ou & k=1 & ou & k=n \\ 2 & sinon & & & \end{matrix}$.

Avec **Python** :

```
A = [[2 for k in range(n)] for i in range(n)]
for i in range(n) :
....A[0][i] = 1
....A[n-1][0] = 1
....A[i][0] = 1
....A[i][n-1]=1
```

Et tant pis si les coins sont changés deux fois.
On peut aussi utiliser un seul constructeur direct

```
A = [[1+int(0<i<n-1 and 0<k<n-1) for k in range(n)] for i in range(n)]
```

∘46∘

$\overrightarrow{\varepsilon_0} = x \longmapsto \dfrac{1}{x^3 - 3.x + 2}$	$\overrightarrow{\varepsilon_1} = x \longmapsto \dfrac{x}{x^3 - 3.x + 2}$	$\overrightarrow{\varepsilon_2} = x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^3 - 3.x + 2}$
$\overrightarrow{e_0} = x \longmapsto \dfrac{1}{x - 1}$	$\overrightarrow{e_1} = x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$	$\overrightarrow{e_2} = x \longmapsto \dfrac{1}{(x+2)}$

Donnez la matrice de changement de base entre $\beta = (\overrightarrow{\varepsilon_0},\ \overrightarrow{\varepsilon_1},\ \overrightarrow{\varepsilon_2})$ et $B = (\overrightarrow{e_0},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$ *(exprimez les $\overrightarrow{e_i}$ à l'aide des $\overrightarrow{\varepsilon_k}$)*. Inversez la matrice.

Décomposez $\dfrac{9}{X^3 - 3.X + 2}$, $\dfrac{9.X}{X^3 - 3.X + 2}$ et $\dfrac{9.X^2}{X^3 - 3.X + 2}$ en éléments simples.

A faire.

∘47∘

♡ On se place dans $(\mathbb{R}^4,+,.)$ *(base canonique* $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k},\ \overrightarrow{l})$*)*. Donnez une base du sous-espace H d'équation $x+y-z+3.t=0$. Donnez un jeu d'équations du plan P engendré par $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2.\overrightarrow{l}$. Donnez une base de $H\cap P$.

H est de dimension 3. On peut se contenter de trois vecteurs pris au hasard dans H du moment qu'ils sont indépendants

(mais il n'est pas évident de voir de tête si $\begin{pmatrix}1\\5\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\4\\4\\-1\end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix}3\\-7\\8\\4\end{pmatrix}$ sont indépendants).

Le mieux est d'écrire les vecteurs de H : $\begin{pmatrix}x\\y\\x+y+3.t\\t\end{pmatrix}$ et d'avoir une base $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\\1\end{pmatrix}\right)$.

Pour P de dimension 2 dans $(\mathbb{R}^4,+,.)$, il faut deux équations. Mais lesquelles ? Peut être déjà $x=y$. Mais il en faut une autre.

Écrire les éléments de P sous la forme $a.\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$.

On a alors $\begin{array}{ccccc} x & = & a & + & b\\ y & = & a & + & b\\ z & = & -a & & \\ t & = & & & 2.b\end{array}$. Sous cette forme, il est clair qu'on aura toujours $a=b$.

Mais en fait, la méthode est systématique : éliminer a et b pour arriver à des relations où il n'y a plus que x et y.
ici, c'est facile. On récupère a et b avec les deux dernières et on reporte dans les deux premières.
$x=y$ et $2.x=-2.z+t$.
deux équations. C'est bon. On les a.

On peut aussi proposer $\boxed{x=y \text{ et } 2.x=-2.z+t}$
Ce sont deux équations dans $(\mathbb{R}^4,+,.)$, indépendantes.
Elles définissent un sous-espace de dimension 2.
Nos deux générateurs de P sont dans ce plan. Tous les vecteurs de P sont dans ce plan.
Par inclusion et égalité des dimension,s ce plan est P.

On peut aussi annuler des déterminants. La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\right)$ doit être liée.

On annule a priori quatre déterminants

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & y\\ -1 & 0 & z\\ 0 & 2 & t\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & 1 & x\\ -1 & 0 & z\\ 0 & 2 & t\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & 1 & x\\ 1 & 1 & y\\ 0 & 2 & t\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & 1 & x\\ 1 & 1 & y\\ -1 & 0 & z\end{vmatrix}=0$$

Mais en fait, deux équations suffisent et les deux autres sont combinaisons des deux premières.

$$\begin{array}{ccccccc} & 2.y & +2.z & -t & = & 0\\ 2.x & & +2.z & -t & = & 0\\ 2.x & -2.y & & & = & 0\\ x & -y & & & = & 0\end{array}$$

Vous le voyez ?

Pour ce qui est de $H\cap P$, on peut donner déjà sa dimension, par la formule de Grassmann.
$\dim(H+P)=3+2-\dim(H\cap P)$.
Comme $\dim(H+P)$ ne peut dépasser 4, c'est que $\dim(H\cap P)$ vaut au moins 1.
Et si $\dim(H\cap P)$ valait 2, ceci entrainerait $\dim(H+P)=\dim(H)$, puis $H=H+P$ et donc $P\subset H$. Il suffit de trouver un vecteur de P qui n'est pas dans h pour refuser cette possibilité.

On a donc $H\cap P$ qui est de dimension 1.

Il suffit donc de trouver un vecteur vérifiant

$$\begin{array}{rrrrcl} 2.x & & +2.z & -t & = & 0 \\ x & -y & & & = & 0 \\ x & +y & -z & +3.t & = & 0 \end{array}$$

On trouve tout de suite d'ailleurs $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix}$ et ses multiples. On confirme : dimension 1.

∘48∘

Une matrice carrée de taille n est dite symétrique si $a_i^k = a_k^i$ pour tout couple $(i,\ k)$. Montrez que les matrices symétriques de taille n forment un espace vectoriel *(dimension ?)*.
Une matrice carrée de taille n est dite gentil-symétrique si elle est symétrique par rapport à la "seconde" diagonale, comme $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & c \\ h & i & f & b \\ j & h & e & a \end{pmatrix}$. Montrez que c'est un espace vectoriel de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ (dimension ?) noté G_n. Quantifiez l'appartenance à G_n : $a_i^k = a_{\cdots}^{\cdots}$.
Déterminez la dimension de $G_n \cap S_n$. Déterminez la dimension de $G_n + S_n$.

Bon, pour « espace vectoriel », il suffit de dire que la matrice nulle est symétrique et qu'une combinaison de matrices symétriques l'est aussi.
Ou alors on l'écrit $Vect(E_i^j + E_j^i \mid i \leqslant j \leqslant n)$ avec $E_i^j + E_j^i$ qui a ses 1 en colonne i et ligne j et vice versa.
On notera qu'on peut prendre $i \leqslant j$, car pour $i = j$, on récupère les matrices « de la diagonale ».

Pour saisir en taille 3 :

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$i=2$		$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$i=3$			$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

La dimension est $n + (n-1) + \ldots + 1$ ce qui fait $\dfrac{n.(n+1)}{2}$.

Pour les gentil-symétriques, la dimension est la même.
On peut se contenter de l'affirmer.
On peut aussi écrire le critère : $a_i^k = a_{n+1-k}^{n+1-i}$

(obtenu par tâtonnements

$a_1^1 = a_n^n$	$a_1^2 = a_{n-1}^n$	$a_1^3 = a_{n-2}^n$	$\ldots$	$a_n^n = a_n^n$
$a_2^1 = a_n^{n-1}$	$a_2^2 = a_{n-1}^{n-1}$	*et ainsi de suite*		

).

On peut donner une base : *(voir ci dessous)*.

On peut donner une caractérisation : $J_n.M$ est symétrique avec J la matrice « antidiagonale » : $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On retrouve sous cette forme que les deux espaces auront bien la même dimension.

Pour l'intersection, on a plusieurs symétries, qui réduisent le nombre de coefficients à choisir.

En format 3 :

symétrique	et gentil-symétrique	les deux à la fois
$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$	$b = e$ et $a = f$	$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$
dimension 6	on en perd deux	dimension 4
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En format 4 :

symétrique	et gentil-symétrique	les deux à la fois
$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}$	$a=j, b=i, c=g, e=h$	$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & c \\ c & f & e & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$
dimension 10	on en perd quatre	dimension 6
$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$

Formule générale : il faut remplir une partie de la matrice et le reste tombe par les deux symétries :

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ o & * & * & * & o \\ o & o & * & o & o \\ o & o & o & o & o \\ o & o & o & o & o \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ o & * & * & * & * & o \\ o & o & * & * & o & o \\ o & o & o & o & o & o \\ o & o & o & o & o & o \\ o & o & o & o & o & o \end{pmatrix}$$

La dimension va dépendre de la parité de n, à cause du coefficient central.

n impair	n pair
$n=2.p+1$	$n=2.p$
$(2.p+1)+(2.p-1)+(2.p-3)+\ldots+1$	$2.p+(2.p-2)+(2.p-4)+\ldots+2$
$(p+1)^2$	$p.(p+1)$

La dimension de la somme est donnée par la formule de Grassmann.

n impair	n pair
$n=2.p+1$	$n=2.p$
$2.\dfrac{(2.p+1).(2.p+2)}{2}-(p+1)^2$	$2.\dfrac{(2.p).(2.p+1)}{2}-p.(p+1)$
$p.(p+1)$	p^2

∘49∘

Montrez que $(P,\ Q) \longmapsto P(0).Q(0)+P'(1).Q'(1)+P''(2).Q''(2)+P^{(3)}(3).Q^{(3)}(3)$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$.
Transformez la base canonique $(1,\ X,\ X^2,\ X^3)$ en base orthonormée par méthode de Gram-Schmidt.

∘50∘

On note E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
♡ Montrez qu'il n'existe aucun produit scalaire sur E tel que $P \longmapsto P'$ soit une isométrie.
♣ Existe-t-il un produit scalaire sur E tel que $P(X) \longmapsto P(X+1)$ soit une isométrie ?

$(E,+,.)$ est un espace vectoriel de dimension finie. la dérivation est un endomorphisme, mais pas un automorphisme (noyau de dimension 1).
Comment pourrait elle être une isométrie (une isométrie est injective, car le seul élément d'image nulle est le vecteur de norme nulle).

$P(X) \longmapsto P(X+1)$ est linéaire.

Sa matrice sur la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Un produit scalaire est défini par sa matrice de Gram sur la base canonique $\begin{pmatrix} \phi(1,1) & \phi(1,X) & \phi(1,X^2) \\ \phi(X,1) & \phi(X,X) & \phi(X,X^2) \\ \phi(X^2,1) & \phi(X^2,X) & \phi(X^2,X^2) \end{pmatrix}$.

La condition « isométrie » est ${}^tM.G.M=G$.
On veut donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \phi(1,1) & \phi(1,X) & \phi(1,X^2) \\ \phi(X,1) & \phi(X,X) & \phi(X,X^2) \\ \phi(X^2,1) & \phi(X^2,X) & \phi(X^2,X^2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(1,1) & \phi(1,X) & \phi(1,X^2) \\ \phi(X,1) & \phi(X,X) & \phi(X,X^2) \\ \phi(X^2,1) & \phi(X^2,X) & \phi(X^2,X^2) \end{pmatrix}$$

Pas facile...

On va raisonner par analyse[6] et synthèse. On veut que $\phi(P,Q)=\phi(P(X+1),Q(X+1))$ pour tous les polynômes.

En particulier pour ceux de la base canonique :

1	X	X^2
1	$X+1$	$X^2+2.X+1$

6. les premières vont passer, les suivantes vont poser problème

On exige donc $\phi(1,1) = \phi(1,1)$ facile

$\phi(1,X) = \phi(1,X+1)$ donc $\phi(1,X) = 0$: $\begin{pmatrix} \phi(1,1) & 0 & \phi(1,X^2) \\ 0 & \phi(X,X) & \phi(X,X^2) \\ \phi(X^2,1) & \phi(X^2,X) & \phi(X^2,X^2) \end{pmatrix}$

$\phi(1,X^2) = \phi(1,1+2.X+X^2)$ donc $\phi(1,1) = 0$. Et ça, ce n'est pas autorisé.

Bilan : il n'y a pas de produit scalaire qui fasse de $P(X) \longmapsto P(X+1)$ une isométrie.

On prend le produit scalaire $(P,Q) \longmapsto P(0).Q(0) + P(1).Q(1) + P(2).Q(2)$. Complétez $(1/\sqrt{3})$ en base orthonormée.
Faites tourner X d'un angle $\pi/2$ autour de 1.

C'est bon, c'est un produit scalaire positivité : somme de carrés
défini positif : le polynôme devrait être nul en 0, 1 et 2. Il sera nul.

Le polynôme constant $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ a pour norme 1 : $(P(0))^2 + (P(1))^2 + (P(2))^2 = 1$.

Le polynôme X ne lui est pas orthogonal : '$\phi\Big(\frac{1}{\sqrt{3}},\ X\Big) = \frac{0+1+2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Mais par « orthonormalisation », $X - \sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}}$ va l'être.

Le second vecteur, à normalisation près est $X-1$ (normal si l'observation est en 0, 1 et *é*.

Son carré de norme vaut $(0-1)^2 + (1-1)^2 + (2-1)^2$.

On garde donc $\dfrac{X-1}{\sqrt{2}}$.

On construit donc ensuite $X^2 - \phi\Big(X^2, \dfrac{X-1}{\sqrt{2}}\Big).\dfrac{X-1}{\sqrt{2}} - \phi\Big(X^2, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big).\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

tous calculs faits : $X^2 - 2.X + \dfrac{1}{3}$.On calcule sa norme : $\sqrt{\Big(\frac{1}{3}\Big)^2 + \Big(-\frac{2}{3}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{3}\Big)^2}$.

La base orthonormée est donc $\boxed{\Big(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{X-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{3.X^2-6.X+1}{\sqrt{6}}\Big)}$

---

la question de faire tourner un polynôme autour d'un autre est étrange.
Mais elle a du sens.
Déjà, les deux polynômes X et 1 ne sont pas orthogonaux entre eux.
Ce serait bien de décomposer X en une partie colinéaire à 1 et une partie orthogonale à 1.
La partie colinéaire à 1, c'est $\phi(X,1).1$ par les formules de Parseval.
Ah non, pardon. 1 n'est pas normé.

La partie de X colinéaire à 1, c'est $\phi\Big(X, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big).\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

On décompose donc :

X	$=$	1	$+(X-1)$
		sur l'axe	dans le plan

On fait tourner

X	$=$	1	$+(X-1)$
$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$
		1	?
		sur l'axe	dans le plan

Il faut, dans le plan orthogonal à 1 faire tourner $X-1$ d'un angle $\dfrac{\pi}{2}$.
On va donc arriver sur un vecteur à la fois orthogonal à 1 et à $X-1$.
je n'en connais qu'un : $X^2 - 2.X + \frac{1}{3}$! (et ses multiples).
Mais il doit avoir la même norme que $X-1$, puisque une rotation ne modifie pas les normes.

Or, $X-1$ a pour norme $\sqrt{2}$ et $3.X^2 - 6.X + 1$ a pour norme $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

On complète :

1	$+(X-1)$	$=$	X
$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
1	$\frac{3.X^2-6.X+1}{\sqrt{3}}$		$1 + \dfrac{3.X^2-6.X+1}{\sqrt{3}}$
sur l'axe	dans le plan		

Résultat pas évident, très abstrait.
Si ceci vous semble vraiment étrange, vous avez bien fait de choisir PSI.

Si ceci vous semble étrange mais génial, vous avez bien fait de choisir une étoile.

∘51∘

♡ On rappelle que $(A,B) \longmapsto Tr({}^tA.B)$ est un produit scalaire sur $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$. L'application $M \longmapsto (M+{}^tM)/2$ est elle un projecteur orthogonal ? L'application $M \longmapsto {}^tM$ est elle une isométrie de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$? Pour quelles matrices A l'application $M \longmapsto A.M$ est elle un endomorphisme de E, un automorphisme de E, une isométrie de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$?
Qui est le projeté orthogonal d'une matrice M sur l'ensemble des matrices diagonales ?
Rappel : une isométrie est une application linéaire qui préserve les normes et produits scalaires : $\phi(f(\overrightarrow{u}),\ f(\overrightarrow{v})) = \phi(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$.

On doit déjà vérifier que $M \longmapsto \dfrac{{}^tM+M}{2}$ va de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$ dans lui même
est linéaire
est un projecteur $\dfrac{{}^t\left(\dfrac{{}^tM+M}{2}\right)+\dfrac{{}^tM+M}{2}}{2} = \dfrac{{}^tM+M}{2}$
son noyau est $A_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices antisymétriques
son image est $S_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices symétriques.
Reste à prouver $Tr({}^tS.A) = 0$ pour tout couple avec a antisymétrique et S symétrique.
C'est du cours : $Tr({}^tS.A) = Tr(S.A)$ car S symétrique
$Tr({}^tS.A) = Tr({}^t({}^tS.A)) = Tr({}^tA.S) = Tr(-A.S)$
ce réel est son propre opposé, il est nul.

On veut projeter $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ sur l'ensemble des matrices diagonales, perpendiculairement.

On propose $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$. C'est bien une matrice diagonale.

Et la partie effacée, qui est donc dans le noyau est $\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a' & 0 & c' \\ a'' & b'' & 0 \end{pmatrix}$.

Il reste juste à prouver que tout vecteur $\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a' & 0 & c' \\ a'' & b'' & 0 \end{pmatrix}$ est orthogonal à tout vecteur $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$ de l'image.

On calcule le produit scalaire : $Tr(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a' & 0 & c' \\ a'' & b'' & 0 \end{pmatrix}) = Tr\begin{pmatrix} 0 & ? & ? \\ ? & 0 & ? \\ ? & ? & 0 \end{pmatrix} = 0$.

∘52∘

♣ Existe-t-il un produit scalaire de $(\mathbb{R}^2,+,.)$ pour lequel $\overrightarrow{i}$ est orthogonal à $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$ est orthogonal à $4.\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$? Si oui, choisissez en un, et construisez une base orthonormée de premier vecteur colinéaire à $\overrightarrow{i}$.

On raisonne par analyse et synthèse. On écrit tout ce qu'on peut, et ensuite, on regarde si ce à quoi on est arrivé est cohérent.

On veut $\phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}) = 0$ et $\phi(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}, 4.\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}) = 0$.
Ceci conduit à $\phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}) = -\phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i})$ puis $\phi(\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{j}) = 4.\phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}) - 3.\phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$ (symétrie...).
On sent que tout ceci est défini « à $\phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i})$ près ».

On va s'imposer $\phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}) = 1$, ce qui ne restreint pas la généralité (ce qui serait idiot, ce serait de poser $\phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}) = -3$ pour un produit scalaire).
On complète la matrice de Gram : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.
Mais est ce bien une matrice de Gram ? Je vérifie la positivité des termes diagonaux et du déterminant, en taille 2 cela suffit.

Pas convaincus ? : $(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est évidemment bilinéaire symétrique.
Pour défini-positive, on calcule $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x-y)^2 + 6.y^2$, c'est positif, et ce n'est nul que pour $x = y = 0$.

On a un produit scalaire.

On vérifie quand même (même si on a tout fait pour) :
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

J'ai choisi $\overrightarrow{i}$ normé, j'en profite.
Il me faut un second vecteur : $\overrightarrow{j}$. Pardon. Un second vecteur orthogonal à $\overrightarrow{i}$: $\overrightarrow{i}\ \overrightarrow{j}$.
On le norme : $\dfrac{\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}}{\sqrt{6}}$ puisque $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 6$.

Vérification :

On a une matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

On l'inverse : $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$.

On vérifie : ${}^tT.T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{6} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = G$.

∘53∘

Donnez une primitive de $\theta \longmapsto \cos^4(\theta)$.
Résolvez l'équation $y''_t + y_t = \cos^3(t)$ d'inconnue y fonction de t en utilisant la méthode de variation des constantes. **(source : oral C.C.P.)**

Et si vous le faisiez sans variation des constantes ? En linéarisant le second membre ?

On linéarise :
$\cos^4(\theta) = \dfrac{(e^{i.\theta}+e^{-i.\theta})^4}{16} = \dfrac{e^{4.i.\theta}+4.e^{3.i.\theta}.e^{-i.\theta}+6.e^{2.i.\theta}.e^{-2.i.\theta}+4.e^{i.\theta}.e^{-3.i.\theta}+e^{-4.i.\theta}}{16} = \dfrac{\cos(4.\theta)+4.\cos(2.\theta)+3}{8}$.

On intègre en $\boxed{\theta \longmapsto \dfrac{\sin(4.\theta)}{32}+\dfrac{\sin(2.\theta)}{4}+\dfrac{3.\theta}{8}}$

La méthode de variation est constantes est au programme de seconde année. Racontons la ici.
L'équation homogène est $h''+h=0$.
Ses solutions sont de la forme $a.\cos + b.\sin$.

On pose donc $y_t = a_t.\cos(t) + b_t.\sin(t)$.
On dérive : $y_t = -a_t.\sin(t) + b_t.\cos(t) + a'_t.\cos(t) + b'_t.\sin(t)$ et on exige $a'_t.\cos(t) + b'_t.\sin(t) = 0$ (condition suffisante).
Il reste $y_t = -a_t.\sin(t) + b_t.\cos(t)$
On redérive : $y_t = -a_t.\cos(t) - b_t.\sin(t) - a'_t.\sin(t) + b'_t.\cos(t)$.

On reporte dans l'équation et on donne la condition suffisante $\begin{array}{ccccc} a'_t.\cos(t) & + & b'_t.\sin(t) & = & 0 \\ & et & & & \\ -a'_t.\sin(t) & + & b'_t.\cos(t) & = & \cos^3(t) \end{array}$

On résout : $a'_t = -\sin(t).\cos^3(t)$ et $b'_t = \cos^4(t)$ (vérifiez si vous ne me faites pas confiance).

Il est facile de remonter à $a_t = \alpha + \dfrac{\cos^4(t)}{4}$, et pour b, c'est la question précédente qui donne une réponse.

On n'a plus qu'à combiner

$$\frac{\cos^5(t)}{4} + \Big(\frac{\sin(4.\theta)}{32}+\frac{\sin(2.\theta)}{4}+\frac{3.\theta}{8}\Big).\sin(t) + \alpha.\cos(t) + \beta.\sin(t)$$

Mais on pouvait aussi se dire qu'on allait résoudre $y''_t + y_t = \dfrac{\cos(3.t) - 3.\cos(t)}{4}$.
Il ne restait qu'à chercher des solutions particulières sous les formes suivantes :

second membre	forme de la solution cherchée		
$\dfrac{\cos(3.t)}{4}$	$a.\cos(3.t) + b.\sin(3.t)$	analogie	$-\dfrac{\cos(3.t)}{32}$
$\dfrac{-3.\cos(t)}{4}$	$a.t.\cos(t) + b.t.\sin(t)$	augmentation car homogène	$-\dfrac{3.t.\sin(t)}{8}$

∘54∘

Pour quelles valeurs de a les solutions de $(1+t^2).y'_t + a.t.y_t = 0$ sont elles toutes bornées sur $\mathbb{R}^+$?
Pour quelles valeurs de a les solutions de $(1+t^2).y'_t + a.t.y_t = 0$ sont elles toutes bornées sur $\mathbb{R}$?

L'équation $(1+t^2).y'_t+a.t.y_t=0$ n'est pas sous forme de Cauchy-Lipschitz, mais on la met sous forme de Cauchy-Lipschitz sur tout $\mathbb{R}$ en divisant par un terme dominant qui ne s'annule jamais : $y'_t+\frac{a.t}{1+t^2}.y_t=0$

On intègre $t\longmapsto\frac{a.t}{1+t^2}$ en $t\longmapsto\frac{a}{2}.\ln(1+t^2)$.

Les solutions sont de la forme $t\longmapsto y_0.e^{-a.\ln(1+t^2)/2}$ (on a choisi la primitive nulle en 0).
On les écrit $t\longmapsto y_0.(1+t^2)^{-a/2}$.

Vient à présent la question « bornées sur $\mathbb{R}^+$ (ou sur $\mathbb{R}$) ».

$a<0$	$a=0$	$a>0$
non bornées sur $\mathbb{R}^+$	bornées sur $\mathbb{R}^+$	bornées sur $\mathbb{R}^+$
non bornées sur $\mathbb{R}$	bornées sur $\mathbb{R}$	bornées sur $\mathbb{R}$

∘55∘ Ajustez a_t et b_t pour que $t\longmapsto t^2$ et $t\longmapsto\sqrt{t}$ soient solutions de $t^2.y''_t+a_t.y'_t+b_t.y_t=0_{\forall t>0}$.

On demande $\begin{array}{l}2.t^2+2.a.t+b.t^2=0\\ -\frac{t^2}{4.t^{3/2}}+\frac{a}{2.\sqrt{t}}+b.\sqrt{t}=0\end{array}$

En simplifiant la première par t^2 et la seconde par $\sqrt{t}$ on trouve $\begin{array}{l}2+2.\frac{a}{t}+b=0\\ -\frac{1}{4}+\frac{a}{2.t}+b=0\end{array}$

On trouve $b=1$ et $a=\frac{-3.t}{2}$.

L'équation est $2.t^2.y''_t-3.t.y'_t+2.y_t=0_{\forall t}$ et ses solutions sont $t\longmapsto A.t^2+B.\sqrt{t}$ avec A et B dépendant des conditions initiales puisqu'on connaît deux solutions.

Sinon, il y a aussi $\begin{vmatrix} y_t & t^2 & t^{1/2}\\ y'_t & 2.t & t^{-1/2}/2\\ y''_t & 2 & -t^{-3/2}/4\end{vmatrix}=0$. *Si vous comprenez, vous êtes purement matheux !*

∘56∘ Ajustez a et b pour que $t\longmapsto t.\cos(\ln(t))$ soit solution de $t^2.y''_t+a.y'_t+b.y_t=0_{\forall t>0}$.

$t\longmapsto t.\cos(\ln(t))$ et $t\longmapsto t.\sin(\ln(t))$ sont solutions de $t^2.y''_t-t.y'_t+2.y_t=0_{\forall t}$.

∘57∘ ♡ Montrez que $x\longmapsto(1-x).\int_0^x t.f(t).dt+x.\int_x^1(1-t).f(t).dt$ est nulle en 0 et en 1 et est deux fois dérivable. Et quelle est sa dérivée seconde ?

On note F cette application dont l'existence n'embêtera personne.
On la dérive car on a tous les théorèmes pour ça :

$$\forall x,\ F'(x)=\Big(-\int_0^x t.f(t).dt+(1-x).x.f(x)\Big)+\Big(1.\int_x^1(1-t).f(t).dt-x.(1-x).f(x)\Big)$$

Attention, pour dériver $x\longmapsto\int_x^1\varphi(t).dt$, on l'écrit déjà $x\longmapsto-\int_1^x\varphi(t).dt$ ce qui explique le signe moins.

Les $x.(1-x).f(x)$ se simplifient : $\forall x,\ F'(x)=-\int_0^x t.f(t).dt+\int_x^1(1-t).f(t).dt$.
Et on peut recommencer, sauf qu'il n'y a même plus de produit : $\forall x,\ F''(x)=-x.f(x)-(1-x).f(x)$.

Attention, ne vous faites pas avoir comme des bleus : $x\longmapsto\int_0^x\varphi(t).dt$ se dérive bien en $x\longmapsto\varphi(x)$ et pas $x\longmapsto\varphi(t)$. Il y a des variables, elles ont un rôle...

On simplifie : $F''(x)=-f(x)$ pour tout x : $\boxed{F''=-f}$

On est remonté de deux crans dans les primitives avec des intégrales simples...

Ensuite, on peut calculer : $F(0)=F(1)=0$ car tant en 0 qu'en 1 et y a dans chaque produit un terme qui s'annule.
Bref, on a la primitive d'ordre 2 de f qui s'annule aux bornes de l'intervalle.
Comme une solution d'équation différentielle avec deux conditions (pas initiales mais aux bornes).

∘58∘

Peut on choisir a, b et c réels pour que $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$ admette pour spectre $\{0,\ 1,\ 2\}$?

On calcule de deux façons les trois coefficients du polynôme caractéristique :

Trace	$a+b+c$	$=0+1+2$
Mineurs	$a.b-1+a.c-1+b.c-1$	$=0.1+0.2+1.2$
Déterminant	$a.b.c+1+1-a-b-c$	$=0.1.2$

On résout donc $\begin{array}{cccccc} a & +b & +c & = & 3 \\ a.b & +a.c & +b.c & = & 5 \\ a & \times b & \times c & = & 1 \end{array}$.

L'ami Viète dit alors : $X^3-3.X^2+5.X-1$.
Et ce polynôme n'a qu'une racine réelle.
Sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et reste de signe constant.
C'est donc impossible.

En revanche, avec a, b et c complexes c'est possible.
Et il y a six matrices (permutation des six nombres).
Mais ne me demandez pas les valeurs.

∘59∘

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24
.	CCP 2009 MP 3 heures	.

I∼0) p et q sont deux entiers naturels. Montrez que $((1,0),\ (X,0),\dots,(X^{p-1},0),\ (0,1),\ (0,X),\dots(0,X^{q-1}))$ est une base de $\mathbb{C}_{p-1}[X]\times\mathbb{C}_{q-1}[X]$ (base notée $\mathbb{B}$, espace vectoriel noté E).

I∼1) A et B sont deux polynômes, de degrés respectifs q et p, qu'on écrira sous forme factorisée $A(X)=\lambda_A.\prod_{j=1}^{q}(X-\alpha_j)$ et $B(X)=\lambda_B.\prod_{j=1}^{p}(X-\beta_j)$ mais aussi développée sur la base canonique $A(X)=\sum_{k=0}^{q}a_k.X^k$ et $B(X)=\sum_{k=0}^{p}b_k.X^k$. On définit f sur E par $f((P,Q))=A.P+B.Q$. Montrez que f est linaire. Montrez que $Im(f)$ est inclus dans $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.

I∼2) On rappelle qu'on pose $Ker(f)=\{(P,Q)\in E\mid f((P,Q))=0\}$. Montrez que $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$.
I∼3) Montrez que f est injective, si et seulement si $Ker(f)$ est égal à $\{(0,\ 0)\}$.
I∼4) Montrez que si A et B ont une racine commune r si et seulement $Ker(f)$ n'est pas réduit à $(0,\ 0)$.

I∼5) Montrez que l'ensemble des $f(C)$ quand C décrit $\mathbb{B}$ est une famille génératrice de $Im(f)$.
I∼6) Montrez que c'est une base de $Im(f)$ si et seulement si $Ker(f)$ est réduit à $\{(0,0)\}$.
I∼7) Montrez que f est bijective de E dans $(\mathbb{C}_{p+q-1}[X],+,.)$ si et seulement si $Ker(f)$ est réduit à $\{(0,0)\}$.

$II\sim 0$ On construit la matrice $M_{A,B}$:

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & & \vdots & & b_0 \\ a_q & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_p & & \vdots \\ & & a_q & & & \ddots & \vdots \\ & & & a_q & & & b_q \end{pmatrix}$$

Elle est de format $p+q$ sur $p+q$ et les positions non remplies sont des 0.
Par exemple $A=1+2.X+3.X^2$
et $B=4+5.X+6.X^2+7.X^3$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$
Calculez le déterminant de cette matrice $M_{A,B}$ donnée en exemple à droite.

II∼0) Calculez le déterminant de la matrice dans le cas $A=X^2-3.X+2$ et $B=X^3-2.X^2-5.X+6$.
II∼1) Écrivez une procédure `Python` qui prend en entrées deux listes de coefficients `A` et `B` (sur l'exemple ci dessus `[1, 2, 3]` et `[3, 4, 5]`) et retourne la matrice $M_{A,B}$ sous forme de liste de listes.
II∼2) On appelle résultant de A et B le déterminant de la matrice $M_{A,B}$. Qui est le résultat de A et A ? Le résultant

est il un opérateur commutatif ?
II∼3) Calculez le résultant de A et A' quand A est le polynôme $a.X^2+b.X+c$.
II∼4) Calculez le résultant de A et A' quand A est le polynôme $X^3+a.X+b$.

III∼0) Montrez que si le couple de polynômes $(P,\ Q)$ a pour composantes sur la base E le vecteur U, alors le polynôme $f((P,\ Q))$ a pour composantes $M_{A,B}.U$ sur la base canonique de $(\mathbb{C}_{p+q-1}[X],+,.)$.

IV∼0) Montrez que $X^2-s.X+p$ et $X^2-s'.X+p'$ ont une racine commune au moins si et seulement si $p^2+p.s'^2+p'.s^2+p'^2$ est égal à $2.p.p'+(p+p').s.s'$.

V∼0) Dans cette partie : $A=X^4+X^3+1$ et $B=X^3-X+1$. Écrivez la matrice $M_{A,B}$ (format ?), calculez son déterminant. Montrez que A et B n'ont pas de racine commune.
V∼1) Montrez qu'en utilisant la matrice $M_{A,B,}$ on peut trouver un couple de polynômes $(P_0,\ Q_0)$ vérifiant $A.P_0+B.Q_0=1$. D'ailleurs, trouvez en un, par la méthode que vous voulez.
V∼2) Déterminez tous les couples solutions dans $(\mathbb{C}[X])^2$ de $A.P+B.Q=1$ *(pensez que vous avez une solution particulière, et écrive $(P-P_0).A=(Q_0-Q).B$).*

VI∼0) En utilisant les polynômes $A=X^2-3$ et $B=(y-X)^2-7$, trouvez un polynôme de degré 4 à coefficients entiers admettant pour racine $\sqrt{3}+\sqrt{7}$.

VII∼0) On a représenté graphiquement pour vous ci contre l'arc paramétré Γ « mouvement d'une particule en fonction du temps » : $\left\{\begin{array}{lcll} x(t) & = & t^2 & +t \\ y(t) & = & t^2 & -t \quad +1 \end{array}\right.$ *(la construction d'arcs paramétrés était encore au programme en 2009)*. On se donne deux polynômes P et Q à coefficients réels et l'on pose pour tout triplet $(x,\ y,\ t)$ de $\mathbb{R}^3$:$A(t)=P(t)-x$ et $B(t)=Q(t)-y$. Établissez que si un point M de coordonnées $(x,\ y)$ appartient à la courbe de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & P(t) \\ y(t) & = & Q(t) \end{array}\right.$ alors les fonctions polynômes ont une racine commune.
VII∼1) Déduisez qu'un point M de coordonnées $(x,\ y)$ appartenant à la courbe Γ vérifie $x^2+y^2-2.x.y-4.y+3=0$. Mettez l'équation $x^2+y^2-2.x.y-4.y+3=0$ sous la forme $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}.S.\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0$ où S est une matrice symétrique. Donnez le polynôme caractéristique de S et son nombre de valeurs propres réelles..

∘60∘ Diagonalisez $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mais surtout pas en calculant $\det(A-X.I_n)$, on n'est pas dépécés, mais en discutant la résolution de $A.U=\lambda.U$. Vérifiez que vous pouvez prendre des vecteurs propres deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire usuel.

Traitons la plus grand, ça donnera les idées pour les autres.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}=\lambda.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{array}{llllll} a & +b & +c & +d & +a & =\lambda.a \\ a & +b & & & & =\lambda.b \\ a & & +c & & & =\lambda.c \\ a & & & +d & & =\lambda.d \\ a & & & & +e & =\lambda.e \end{array}$$

Les dernières lignes donnent toutes $b=c=d=e=\dfrac{a}{\lambda-1}$.

On reporte dans la première : $a.\Big(1+\dfrac{4}{\lambda-1}\Big)=a.\lambda$.

On discute : $\Big(1+\dfrac{4}{\lambda-1}\Big)\neq\lambda$. la seule solution est $a=0$, mais elle conduit au vecteur nul. On ne veut pas.

$\Big(1+\dfrac{4}{\lambda-1}\Big)=\lambda$ on a un vecteur propre. Équation de degré 2 $(\lambda-1)^2=4$

Cette équation du second degré donne donc deux valeurs propres et les deux vecteurs propres associés

$1-\sqrt{n-1}$	$1+\sqrt{n-1}$	
$\begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$	

On vérifie :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+3 \\ 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} = (1+\sqrt{3}). \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pourquoi une colonne vide ? Parce que ça ne suffit pas... On voulait une base de vecteurs propres.
Mais il y a un valeur qu'on a mise de côté : $\lambda = 1$. Pour pouvoir diviser.

Traitons la à part : $\begin{array}{llllll} a & +b & +c & +d & +a & = a \\ a & +b & & & & = b \\ a & & +c & & & = c \\ a & & & +d & & = d \\ a & & & & +e & = e \end{array}$ on trouve $a = 0$ et $b + c + d + e = 0$. Intersection de deux plans.

$1-\sqrt{n-1}$	$1+\sqrt{n-1}$	1
$\begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$	$(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix})$
dimension 1	dimension 1	dimension $n-2$

On peut diagonaliser par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Les deux premiers vecteurs colonne sont orthogonaux entre eux.
Ils sont orthogonaux aux suivants.
Resterait à rende les $n-2$ derniers orthogonaux entre eux.
On peut diagonaliser par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ [7]

Et si vous les voulez deux à deux orthogonaux et normés, normez les...

∘61∘

♡ On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Montrez que l'ensemble des matrices M vérifiant $M.U = 0$ *(vecteur nul)* est un espace vectoriel. Montrez que $(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix})$ en est une base. Pouvez vous donner une base dans laquelle une des matrices a une trace nulle ? Pouvez vous donner une base dans laquelle toutes les matrices ont une trace nulle ?

On peut montrer que ces matrices forment un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$:
en effet • la matrice nulle vérifie $0_{2,2}.U = 0_2$
• si M et N vérifient $M.U = 0_2$ et $N.U = 0_2$ alors on a aussi $(M+N).U = 0_2$
et même $(\alpha.M).U = 0_2$

Mais on écrit qu'il s'agit des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifiant $b = -3.a$ et $d = -3.c$.

On les écrit $\begin{pmatrix} -3.b & b \\ -3.d & d \end{pmatrix}$ et même $b. \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Ceci donne directement $F = Vect(\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix})$.

En tant que tel, c'est un espace vectoriel (sinon, on n'écrirait pas $Vect(\dots)$)

et on en connaît une base : $(\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix})$.

Charger les signes ne change rien.

7. obtenue par méthode de Gram-Schmidt

On peut changer de base en prenant une combinaison des deux à la place de l'un des deux :

$$\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

S'il existait une base faite de matrices de trace nulle, par combinaison, toutes les matrices de l'espace auraient une trace nulle. Pas cohérent.

◦62◦ On note $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Est elle inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$?
Est elle inversible si le corps de base est $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ pour les opérations modulo 5. Si oui, inversez la, si non, décomposez en produit de facteurs premiers $\prod_{k=1}^{15} k^{3+2.(-1)^k}$.
Est elle inversible si le corps de base est $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ pour les opérations modulo 7. Si oui, inversez la, si non, décomposez en produit de facteurs premiers $\prod_{k=1}^{15} k^{3+2.(-1)^k}$.

Son déterminant vaut 30. Elle est inversible sur $\mathbb{R}$.

Si on raisonne modulo 5, elle ne l'est plus ; son déterminant est nul.
D'ailleurs, on a cette relation sur les colonnes :

$$1.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 4.\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On écrit aussi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mais aussi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et encore une...

De même, les vecteurs colonne sont coplanaires dans le plan d'équation $z = 2.x$.

Vérifiez pour $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ou même : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puisque l'équation $z - 2.x = 0$ c'est aussi $x + 2.z = 0$.

Modulo 7, le déterminant est non nul et a pour inverse 4.

La matrice inverse vaut $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Comme il y a une question où la réponse fut « non », on décompose $\prod_{k=1}^{15} k^{3+2.(-1)^k}$ en produit d facteurs premiers.

Les exposants valent 5 ou 1.

	1^1	2^5	3^1	4^5	5^1	6^5	7^1	8^5	9^1	10^5	11^1	12^5	13^1	14^5	15^1
$p = 2$		5		10		5		15		5		10		5	
$p = 3$			1			5			2			5			1
$p = 5$					1					5					1
$p = 7$							1							5	
$p = 11$											1				
$p = 13$													1		

On a donc $\boxed{2^{55}.3^{14}.5^7.7.11.13}$

Remarque : *Le non matheux aura calculé* 226 496 573 093 250 911 491 829 268 480 000 000 *puis décomposé en produit de facteurs premiers.*
Sincèrement, je ne peux rien pour lui. A part lui dire « bon courage dans tes études ».
Et il me répondra « je m'en fous, je ne veux pas faire de maths comme vous, je veux juste faire des trucs qui me rassurent ».

∘63∘

On note $(E,+,.)$ l'espace vectoriel $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Pour P dans E, on définit $\phi(P) ={}^t\ (P(0),\ P'(0),\ P(1),\ P'(1))$. Calculez l'image par ϕ de chacun des vecteurs de la base canonique $(1,\ X,\ X^2,\ X^3)$.

On pose

$B_0 = (X-1)^2.(2.X+1)$	$B_1 = (X-1)^2.X$	$B_2 = X^2.(3-2.X)$	$B_3 = X^2.(X-1)$

Calculez $\phi(B_k)$ pour chaque valeur de k [a].

Montrez que la famille $(B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3)$ est une base de $(E,+,.)$ et donnez la matrice de passage de la base canonique vers cette base *(exprimez les B_k à l'aide des X^i)*. Est elle orientée dans le même sens que la base canonique ?

Inversez cette matrice *(réfléchissez avant de calculer, on est en maths, exploitez ce que vous avez fait avant).*

a. si vous êtes enfin plus intelligent, vous me faites des tableaux...

∘64∘

On définit, dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$ le sous-espace vectoriel E de vecteur directeur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. On note K l'ensemble des applications linéaires f vérifiant $E \subset Ker(f)$. Montrez que K est un sous-espace vectoriel de $(L(\mathbb{R}^3),+,.)$.

Montrez que sa dimension vaut 3 ou 6 *(écrivez matriciellement et faites un choix évidemment).*

On note M l'ensemble des applications linéaires f vérifiant $Im(f) \subset E$. Montrez que M est un sous-espace vectoriel de $(L(\mathbb{R}^3),+,.)$.Montrez que sa dimension vaut 3 ou 6.

Donnez la dimension de $M \cap K$. A-t-on $L(\mathbb{R}^3) = M + K$?

∘65∘

Construisez trois sous-espaces vectoriels A, B et C de $M_3(\mathbb{R})$ vérifiant

espace	A	B	C	$A \cap B$	$(A+B)\cap C$
dimension	4	3	5	1	3

Globalement, on est dans un espace de dimension 9.

Si $A \cap B$ est de dimension 1, alors $(A+B)$ est de dimension 6.

C'est acceptable que $(A+B)\cap C$ soit de dimension 3.

Le plus simple est de jouer avec les directions de la base canonique.

espace	A	B	$A \cap B$	$A+B$	C	$(A+B)\cap C$
forme des éléments	$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
dimension	4	3	1	6	5	3

Il y a bien sûr d'autres solutions. La démarche serait de chercher du côté de symétriques et antisymétriques, par habitude du cours... Peut être inutile ici.

∘66∘

♡ On travaille sur $M_3(\mathbb{R})$.

Existe-t-il un opérateur linéaire T qui vérifie $T(M) = M$ si M est symétrique, $T(M) = 2.M$ si M est antisymétrique et $T(M) = 3.M$ si la trace de M est nulle.

Existe-t-il un opérateur linéaire T qui vérifie $T(M) = M$ si M est symétrique, $T(2.I_3) = 0_{3,3}$ et $T(M) = 3.M$ si la trace de M est nulle ?

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est à la fois antisymétrique et de trace nulle. Que serait son image ?

$2.I_3$ est symétrique. Son image, c'est donc $2.I_3$ ou $0_{3,3}$? Il faut savoir...

∘67∘

Parmi ces sous-ensembles de l'espace vectoriel des polynômes lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

polynômes nul en 0	polynômes à coefficients positifs ou nuls
polynômes de degré 3	polynômes multiples de $X-1$
polynômes ne contenant que des monômes de degré impair	polynômes multiples de $X-1$ ou $X+1$
polynômes de terme constant nul	polynômes multiples de $X-1$ et $X+1$
polynômes de terme constant 1	polynômes nul en 1 ou en 3
polynômes dont la dérivée est soit nulle, soit ne contenant que des monômes de degré impair	

polynômes nul en 0	polynômes à coefficients positifs ou nuls
oui, mais avec un s à « nuls »	non (opposé !)
polynômes de degré 3	polynômes multiples de $X-1$
non (somme !)	oui
polynômes ne contenant que des monômes de degré impair	polynômes multiples de $X-1$ ou $X+1$
oui	non (somme à cause du « ou »)
polynômes de terme constant nul	polynômes multiples de $X-1$ et $X+1$
oui	oui
polynômes de terme constant 1	polynômes nul en 1 ou en 3
non (le neutre !)	non $((X-3)+(X-1))$
polynômes dont la dérivée est soit nulle, soit ne contenant que des monômes de degré impair	
oui	

∘68∘

♡ $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{u_n}$. Ensemble I des valeurs interdites pour u_0 ? Montrez que tout u_0 dans $\mathbb{R}-I$, la suite est bornée. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est elle convergente ? *(pensez à calculer les premiers termes, c'est trop gentil...)*

Éviter $u_0 = 0$ pour que u_1 existe.
Éviter $u_0 = 1$ pour que u_1 ne soit pas égal à 0 et que u_2 existe.
Mais ensuite ? Est il possible que u_1 vaille 1 ? Non, quel que soit u_0, $u_1$ne veut pas 1.

Supposons $u_0 \notin \{0,\ 1\}$ alors par récurrence sur n :
u_n existe et u_n ne veut ni 0 ni 1
(c'est ça l'invariant à propager).

La suite est ensuite périodique de période 3 :

u_n	$u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$	$u_{n+2} = 1 - \dfrac{u_n}{u_n - 1} = -\dfrac{1}{u_n - 1}$	$u_{n+2} = 1 - \dfrac{1-u_n}{1} = u_n$

Elle ne converge pas. Sauf si elle est déjà constante.

∘69∘

♡ Construire une matrice A carrée de taille 3 vérifiant $Tr(A) = 2$, $Tr(A^2) = 14$ et $Tr(A^3) = 20$. Calculez $Tr(A^4)$.
(pensez à Viète).
Même question, avec la condition "aucun coefficient nul". (au, on avait le droit à des coefficients nuls avant !).

On la cherche et on la trouve diagonale.

On veut $\begin{array}{llll} a & +b & +c & =2 \\ a^2 & +b^2 & +c^2 & =14 \\ a^3 & +b^3 & +c^3 & =20 \end{array}$ et on trouve (Viète plus un peu de travail) : $X^3 - 2.X^2 - 5.X + 6$ et donc les racines -2, 1 et 3.

La matrice $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ convient.

De même que toute matrice mélangée comme $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou même $\begin{pmatrix} -2 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Et si on veut des coefficients non nuls, on fait un pas de côté avec $P.\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.P^{-1}$.

Les traces resteront les mêmes.

Par exemple $\begin{pmatrix} 16 & -9 & -39 \\ -6 & -5 & 18 \\ 4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ (mais quelle matrice P ai-je pu utiliser ?).

Toute autre solution se diagonalisera en $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et vérifiera $Tr(M^4) = (-2)^4 + 1^4 + 3^4$.

∘70∘ Donnez une formule pour le terme général de la matrice $\begin{pmatrix} 1.2 & 2.3 & 3.4 & \dots & n.(n+1) \\ 0 & 1.2 & 2.3 & \dots & (n-1).n \\ 0 & 0 & 1.2 & \dots & (n-2).(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1.2 \end{pmatrix}$.
Créez la sous Python. Calculez sa trace, son déterminant, son polynôme caractéristique, et inversez la.

On a une condition $i \leqslant k$ (indice de ligne et indice de colonne).
Les termes sont ensuite en $p*(p+1)$ ou $(p+2)*(p+1)$ si p est la différence $k-i$.
Le plus simple est de remplir déjà avec des 0, puis de passer par-dessus :
def

Sa trace vaut $n.1.2$ car il y a n termes égaux à 2.

La matrice est triangulaire : déterminant $(1.2)^n$.

Le déterminant $\det(M - \lambda.I_n)$ est aussi un simple produit : $(2-\lambda)^n$.

La vraie question est « son inverse ».
A faire.

∘71∘

Soit A une matrice réelle de taille 3 sur 3 vérifiant $A^3 = -A$. Montrez que A n'est pas inversible.
On suppose que A n'est pas la matrice nulle. Montrez que $\{U \mid A.U = 0_3\}$ (noté K) est de dimension 1. Montrez que si U est dans K, non nul, et que V n'y est pas, alors $(U, V, A.V)$ est libre. Montrez que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partons de $A^3 = -A$, passons au déterminant : $\det(A^3) = \det(-A)$.
$$(\det(A))^3 = (-1)^3.\det(A)$$
L'équation $d^3 = -d$ a pour solutions 0, i et $-i$. mais ça c'est dans $\mathbb{C}$.
Et dans $\mathbb{R}$ la seule solution est 0.
La matrice a un déterminant nul, elle est non inversible.

La condition $A.U = 0_3$ n'est réalisable qu'avec des vecteurs de taille 3 (une seule colonne).
La présence du vecteur nul est une évidence, et la stabilité est acquise :
$A.(\lambda.U + \mu.V) = \lambda.A.U + \mu.A.V = \lambda.0_3 + \mu.0_3 = 0_3$.
On a un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

Comme $\det(A)$ est nul, on a une relation de dépendance linéaire sur les trois colonnes de A :
$a.C_0 + b.C_1 + c.C_2 = 0_3$.
Le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est non nul et est dans I.
Le sous-espace K est au moins de dimension 1.

Avec le langage du cours à venir : le noyau est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ
il contient d'autres vecteurs que le vecteur nul si et seulement si la matrice est non inversible.
Peut il être de dimension 3 cet ensemble ?
Non. Ce serait $\mathbb{R}^3$ tout entier. Et on déduirait alors $A = 0_{3,3}$.

Il reste à éliminer la dimension 2.

∘72∘

♡ $(E,+,.\phi)$ est un espace vectoriel euclidien. Montrez que le déterminant de Gram d'une famille $(\overrightarrow{u_1},\dots \overrightarrow{u_k})$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel on donne les vecteurs. Montrez que si la famille est liée, le déterminant de Gram est nul. Montrez que si la famille est libre, le déterminant de Gram est strictement positif.

Si on mélange les colonnes, le déterminant peut changer de signe.
Oui, mais de par la forme d'une matrice de Gram, il faut aussi permuter les lignes. Et on retombe sur ses pattes.
Je vous le fais :

$$G(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k},\overrightarrow{i}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} & \overrightarrow{i}.\overrightarrow{k} & \overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k}.\overrightarrow{i} & \overrightarrow{k}.\overrightarrow{k} & \overrightarrow{k}.\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{j}.\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j}.\overrightarrow{k} & \overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} & \overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} & \overrightarrow{i}.\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{k}.\overrightarrow{i} & \overrightarrow{k}.\overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}.\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{j}.\overrightarrow{i} & \overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j}.\overrightarrow{k} \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} \overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} & \overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} & \overrightarrow{i}.\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{j}.\overrightarrow{i} & \overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j}.\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{k}.\overrightarrow{i} & \overrightarrow{k}.\overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}.\overrightarrow{k} \end{vmatrix}.$$

On généralise à d'avantage de vecteurs.

Si l'un vecteur est combinaison des autres, on peut le remplacer dans sa colonne.
Et l'une des colonnes est combinaison des autres.

Si la famille est libre, on l'orthonormélise par méthode de Schmidt.
On note P la matrice de passage. On a alors $G =^t (P^{-1}).P^{-1}$.
Et son déterminant est $\det(P^{-1}))^2$. C'est un réel strictement positif.

∘73∘

Montrez que $(P,\ Q) \longmapsto \int_{-1}^{1} P(t).Q(t).dt$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}[X],+,.)$. On suppose que la famille (Q_n) est une famille de polynômes deux à deux orthogonaux vérifiant $deg(Q_n) = n$. Montrez que Q_n a la même parité que n $(Q_n(-x) = (-1)^n.Q_n(x))$. Montrez que Q_n admet n racines distinctes, toutes entre -1 et 1 (on pourra raisonner par l'absurde, donner la liste de ses racines dans $]-1,\ 1[$ et étudier $\prod_a (X-a)$).

Il faut montrer que Q_n est pair si n est pair et impsair sinon.
Rappelons qu'il y a des polynômes ni pairs ni impairs (c'est la règle générale).

Comme Q_n est de degré n, il a au plus n racines réelles.
Parmi ces racines, certaines sont entre -1 et 1, d'autres non.
Supposons qu'il a d racines entre -1 et 1 avec $d < n$ (d a même le droit d'être nul), et une racine peut être comptée plusieurs fois si elle est multiple).

On a alors $Q_n(X) = \prod_{k=1}^{d}(X-a_k)$.

∘74∘

Tous les polynômes sont constants. On va prouver que $(P_n)' = 0$ pour tout n et tout polynôme de degré n..
On initialise à 0 : les polynômes de degré 0 sont constants. Ils ont une dérivée nulle.

On se donne n et on suppose que tous les polynômes de de degré inférieur ou égal à n ont une dérivée nulle.
On prend P de degré $n+1$. On va montrer que sa dérivée est nulle.
On l'écrit sous la forme $P(X) = (P(X) - P(0)) + P(0)$.
Le polynôme $P(0)$ est constant, sa dérivée est nulle.
Le polynômes $P(X) - P(0)$ n'a plus de terme constant et se factorise sous la forme $X.Q(X)$ avec X et Q de degré inférieur ou égal à n.
On dérive avec la formule $(U.V)' = U'.V + U.V'$, chaque terme U' et V' est nul, la somme est nulle.
On somme : P' est nulle.
Trouvez l'erreur.

C'est quand on veut passer de 0 à 1 qu'il y a un problème.
Reprenons justement ce raisomment, mais avec $n = 0$.
On prend P de degré $0+1$. On prétend montrer que sa dérivée est nulle.
On l'écrit sous la forme $P(X) = (P(X) - P(0)) + P(0)$.
Le polynôme $P(0)$ est constant, sa dérivée est nulle.
Le polynômes $P(X) - P(0)$ n'a plus de terme constant et se factorise sous la forme $X.Q(X)$ avec X et Q de degré inférieur ou égal à 0 ?
Non, X est de degré 1...

On dérive avec la formule $(U.V)' = U'.V + U.V'$, chaque terme U' et V' est nul, la somme est nulle.
Et X' n'est pas nul...
Il reste donc un terme.

J'ai failli me faire avoir.

∘75∘ ♡ Montrez que l'équation $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = (\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ n'a pas de solution.
Montrez que l'équation $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) = (\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$ a des solutions.
Parmi les solutions l'équation $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = (\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$ y en a-t-il qui sont solutions de $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{k}) = (4.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k})$.

Pour que $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = (\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ ait une solution, il faut déjà que $(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ soit orthogonal à $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ (et aussi à $\overrightarrow{a}$, et que la norme soit correcte, mais qu'importe).
Or, $(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ et $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ ont pour produit scalaire 1 et pas 0.

$\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) = (\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$ a au moins une solution : $\overrightarrow{j} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) = (\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$.
Je la qualifie de solution particulière.
On a aussi des solutions « homogènes » : $(\alpha.\overrightarrow{i} + \alpha.\overrightarrow{k}) \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) = \overrightarrow{0}$.
On trouve que les $\overrightarrow{j} + \alpha.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$ sont une famille entière de solutions.
Ce sont même toutes les solutions.

Peut on choisir α pour avoir aussi

$$\left(\overrightarrow{j} + \alpha.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})\right) \wedge (\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{k}) = (4.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k})$$

On veut $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: on résout $-2.\alpha = 1$, $\alpha + 2 = 1$ et $-\alpha = 1$. C'est incohérent.

∘76∘ Montrez : $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$ (juste avec la relation de Chasles et la multilinéarité).

Partons de $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$ avec l'aide de Chasles et de ses relations :

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \wedge (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB})$$

en jouant sur les signes moins

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB})$$

puisque $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB})$ est nul.

∘77∘ ♡ Montrez que la famille des $X^k.(1-X)^{6-k}$ *(pour k de 0 à 6)* est une base de $(\mathbb{R}_6[X], +, .)$. Calculez le déterminant de cette famille par rapport à la base canonique.

On change l'ordre des questions. Si le déterminant est bien non nul, on aura gagné...

L'espace vectoriel est de dimension 7, la matrice exprimant les vacteurs est de format 7 sur 7. Courage.
Les vecteurs sont dans l'ordre $(1-X)^6 = 1 - 6.X + 15.X^2 - 20.X^3 + 15.X^4 - 6.X^5 + X^6$ d'où la première colonne
$X.(1-X)^5 = X - 5.X^2 + 10.X^3 - 10.X^4 + 5.X^5 - X^6$ d'où la seconde
$X^2.(1-X)^4 = X^2 - 4.X^3 + 6.X^4 - 4.X^5 + X^6$ d'où la troisième
jusqu'à X^6 qui donne un seul coefficient non nul sur la dernière

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 10 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & -10 & 6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & -4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Il est bien égal à 1 ce déterminant !

∘78∘ Simplifiez $\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{b+a} & \frac{1}{2.b} \end{vmatrix}$. Montrez : $\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{b+a} & \frac{1}{2.b} & \frac{1}{b+c} \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{c+b} & \frac{1}{2.c} \end{vmatrix} = \dfrac{(a-b)^2.(a-c)^2.(a-d)^2}{8.a.b.c.(a+b)^2.(a+c)^2.(b+c)^2}$ en supposant que a, b, $c$et d sont quatre nombres strictement positifs.

Inventez la formule pour le déterminant de la matrice de taille n sur n de terme général $\dfrac{1}{a_k+a_i}$. Est elle cohérente pour n égal à 1.

Écrivez un script Python qui pour une liste $[a_1, \dots a_n]$ donnée calcule le déterminant en question.

Calculez aussi celui de $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b.a} & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c.a} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d.a} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d^2} \end{pmatrix}$ et enfin de $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b.a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c.a} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d.a} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$ Exprimez le dernier en supposant que a, b, c et d sont les racines de $X^4 - S.X^3 + D.X^2 - T.X + P$.

Le plus simple est le second : $\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b.a} & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c.a} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d.a} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d^2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{a.b}.\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d^2} \end{vmatrix} = 0$ car il y a deux colonnes égales.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b.a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c.a} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d.a} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} = \frac{1}{a}.\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} = \frac{1}{a.b.c.d}.\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2.b.c.d}.\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

On est ramené à $\dfrac{1}{(a.b.c.d)^2}.\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix}$.

On calcule le déterminant par combinaisons en lignes $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1-b & c-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c & d-1 \end{vmatrix}$ $(L_3 < L_3 - L_2$ et $L_4 < L_4 - L_3)$ puis en colonnes $(C_3 < C_3 - C_2$ et $C_4 < C_4 - C_3)$:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & 1-b & 0 \\ 0 & 1-b & b+c-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c & c+d-2 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne

$a.\begin{vmatrix} b & 1-b & 0 \\ 1-b & b+c-2 & 0 \\ 0 & 1-c & c+d-2 \end{vmatrix}$ et $-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-b & b+c-2 & 0 \\ 0 & 1-c & c+d-2 \end{vmatrix}$

On trouve au final

$$a.b.c.d - (a.b + a.c + a.d + b.c + b.d + c.d) + 2.(a+b+c+d) - 3$$

Vous pouvez avoir une erreur de calcul, je ne vous en voudrai pas. Mais si vous obtenez une formule non symétrique dans les racines sans indiquer qu'il doit y avoir une erreur, c'est là que je vous en veux...

Si a, b, c et d sont les racines de $X^4 - S.X^3 + D.X^2 - T.X + P$, on a $P - D + 2.S - 3$, qu'on pouvait retrouver en développant $\sum_{\sigma \in S_4} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}.a_3^{\sigma(3)}.a_4^{\sigma(4)}$.

Pour $\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{b+a} & \frac{1}{2.b} & \frac{1}{b+c} \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{c+b} & \frac{1}{2.c} \end{vmatrix}$ on fait des combinaisons en lignes :

$L_2 < -L_2 - L_1$: $\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{(b+a)} - \frac{1}{2.a} & \frac{1}{2.b} - \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{c+b} & \frac{1}{2.c} \end{vmatrix}$

On réduit au dénominateur commun : $\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{a-b}{(b+a).(2.a)} & \frac{a-b}{(2.b).(a+b)} & \frac{a-b}{(a+c).(b+c)} \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{c+b} & \frac{1}{2.c} \end{vmatrix}$

et on sort $a-b$: $(a-b).\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{(b+a).(2.a)} & \frac{1}{(2.b).(a+b)} & \frac{1}{(a+c).(b+c)} \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{c+b} & \frac{1}{2.c} \end{vmatrix}$.

On fait de même avec $L_3 - L_1$:

$$(a-b).(a-c).\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{(b+a).(2.a)} & \frac{1}{(2.b).(a+b)} & \frac{1}{(a+c).(b+c)} \\ \frac{1}{(2.a).(c+a)} & \frac{1}{(a+b).(c+b)} & \frac{1}{(2.c).(a+c)} \end{vmatrix}$$

On factorise en colonne : $\dfrac{(a-b).(a-c)}{(2.a).(a+b).(a+c)}.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{(b+a)} & \frac{1}{(2.b)} & \frac{1}{(b+c)} \\ \frac{1}{(c+a)} & \frac{1}{(c+b)} & \frac{1}{(a+c)} \end{vmatrix}$.

On travaille cette fois en colonne

$$\frac{(a-b).(a-c)}{2.a.(a+b).(a+c)}.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{(b+a)} & \frac{1}{(2.b)} - \frac{1}{(b+a)} & \frac{1}{(b+c)} - \frac{1}{(b+a)} \\ \frac{1}{(c+a)} & \frac{1}{(c+b)} - \frac{1}{(c+a)} & \frac{1}{(2.c)} - \frac{1}{(c+a)} \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne :

$$\frac{(a-b).(a-c)}{2.a.(a+b).(a+c)}.\begin{vmatrix} \frac{a-b}{(2.b).(b+a)} & \frac{a-c}{(b+c).(b+a)} \\ \frac{a-b}{(c+b).(c+a)} & \frac{a-c}{(2.c).(c+a)} \end{vmatrix}$$

On sort tout ce qu'on peut : $\dfrac{(a-b)^2.(a-c)^2}{(2.a.(a+b)^2.(a+c)^2}.\begin{vmatrix} \frac{1}{(2.b)} & \frac{1}{(b+c)} \\ \frac{1}{(c+b)} & \frac{1}{(2.c)} \end{vmatrix}$.

On termine, par développement simple ou par $\dfrac{1}{4.b.c} - \dfrac{1}{(b+c)^2}$.

On trouve bien $\dfrac{(a-b)^2.(a-c)^2.(a-d)^2}{8.a.b.c.(a+b)^2.(a+c)^2.(b+c)^2}$.

On conjecture une formule générale :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+a_1} & \frac{1}{a_1+a_1} & \dots & \frac{1}{a_1+a_n} \\ \frac{1}{a_1+a_2} & \frac{1}{a_2+a_2} & & \frac{1}{a_2+a_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{a_1+a_n} & \frac{1}{a_2+a_n} & & \frac{1}{a_n+a_n} \end{vmatrix} = \frac{(produit\ des\ differences)^2}{produit\ des\ sommes}$$

On peut y mettre des points de suspension : $\boxed{\dfrac{(a_1-a_2)^2.(a_1-a_3)^2\dots(a_{n-1}-a_n)^2}{2^n.a_1\dots a_n.(a_1+a_2)^2\dots(a_{n-1}+a_n)^2}}$

Proprement, le numérateur est $\prod_{i<j}(a_j-a_i)^2$ ou $\prod_{i\neq j}|a_j-a_i|$ pour que chaque terme y soit deux fois.

Le dénominateur n'a pas à mettre à part les termes $i=j$:

$$\prod_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}}(a_i+a_j)$$

Chaque terme pour i différent de j est présent deux fois. Chaque terme pour i égal à j n'y est qu'une fois, avec son coefficient 2.

On résume $\boxed{\dfrac{\prod_{i<j}(a_j-a_i)^2}{\prod_{i,j}(a_i+a_j)}}$; il y a $\dfrac{n.(n-1)}{2}$ carrés au numérateur, soit un degré $n.(n-1)$; il y a n^2 termes au dénominateur.

Pour n égal à 1, on a un produit vide au numérateur, et le seul terme (a_1+a_1) au dénominateur. La formule coïncide avec $\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+a_1} \end{vmatrix}$. Comme toujours tout est logique en maths.

On écrit un script qui calcule numérateur et dénominateur par des boucles :

```
def Hilbert(L) : #ce sont des déterminants de Hilbert
....n = len(L) #pour ne pas resolliciter len(L) à chaque fois
....Num, Den = 1 , 1 #et pas 0, évidemment
....for ai in L :
.......for aj in L :
..........Den *= (ai+aj)
....for j in range(n) :
.......for i in range(i) : #on impose i<j
...........Num *= L[j]-L[i]
....Num = Num*Num #on veut des carrés
....return (Num, Den) #ou return(Num/Den)
```

◦79◦ ♣ On sait : $A.B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & & -3 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ et $B.A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -6 & 4 & \\ 2 & & 1 \end{pmatrix}$. Complétez les termes qui manquent *(indication : pensez aussi aux carrés)*. Si vous trouvez deux solutions, choisissez celle avec des entiers.
Diagonalisez $A.B$ *(matrice de passage P, matrice diagonale D pour laquelle l'idée des carrés sera aussi utile)* et aussi $B.A$ *(matrice de passage Q)*.
Si je propose $A = P.D.Q^{-1}$, vous la calculez puis vous complétez pour trouver B ?

On peut avoir à la fois $A.B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & a & -3 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ et $B.A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -6 & 4 & b \\ 2 & c & 1 \end{pmatrix}$, puisque le produit matriciel n'est pas commutatif. Mais il y a quand même des conditions nécessaires.
On doit déjà avoir $Tr(A.B) = Tr(B.A)$ suivant une formule célèbre du cours.
On trouve immédiatement : $\boxed{a = 3}$
On a aussi $\det(A.B) = \det(B.A)$ en transitant par $\det(A).\det(B)$.
On calcule $\det(A.B) = -4$ en développant par rapport à la colonne qu'on veut.
On a donc après calcul : $\boxed{4.b.c + 4.b - 18.c - 28 = -4}$
Il nous faut d'autres relations.
L'énoncé parle des carrés. On a d'une part $A.B.A.B$ et d'autre part $B.A.B.A$ *(et pas A.B.B.A, c'est pas l'Eurovision 1974)*.
On passe de l'une à l'autre en faisant sauter A au dessus : $Tr(A.(B.A.B)) = Tr((B.A.B).A)$.
On déduit que $(A.B)^2$ et $(B.A)^2$ ont la même trace *(vous avez omis de citer cet argument ? vous avez perdu car par exemple, $(A.B)^2$ n'a pas forcément la même trace que A.B.B.A)*.
On calcule les deux, ou juste leurs termes diagonaux car on est efficace [8].

$$(A.B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & & \\ & 7 & \\ & & 7 \end{pmatrix}$$

et

$$(B.A)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -6 & 4 & b \\ 2 & c & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -6 & 4 & b \\ 2 & c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & & \\ & b.c+4 & \\ & & b.c+7 \end{pmatrix}$$

On a une nouvelle relation : $10 + 2.b.c + 11 = 9$
On trouve la valeur de $b.c$: $b.c = -6$
On reporte dans l'autre équation : $2.b - 9.c = 24$
On résout le système : $\left\{ \begin{array}{ccccc} b & \times & c & = & -6 \\ 2.b & - & 9.c & = & 24 \end{array} \right|$. On peut faire appel aux formules de Viète sur $2.b$ et $-9.c$ de somme 24 et de produit 108. On peut aussi résoudre pour une fois en remplaçant le résultat d'une équation dans l'autre : b vérifie $b^2 - 12.b + 27 = 0$.
On extrait deux couples solutions : $\boxed{b = 6 \text{ et } c = -2}\ \boxed{b = 9 \text{ et } c = -\frac{2}{3}}$
Notre paresse naturelle nous incite à prendre comme proposé $b = 6$ et $c = -2$.

8. je ne me moquerai pas de Laurine qui traite des questions non demandées, ce serait méchant, je cacherai donc son prénom

$A.B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$	$B.A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
Trace 1	Trace 1
Déterminant -4	Déterminant -4

Il faut trouver une matrice diagonale D semblable à $A.B$.
Cette fois encore, la trace et le déterminant ne suffiront pas. La matrice D est formée de trois coefficients : $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

On doit avoir $Tr(A.B) = Tr(D)$, $\det(A.B) = \det(D)$. Bon début dit le père François *(oui, Viète)* : $\boxed{\alpha+\beta+\gamma = 1 \text{ et } \alpha.\beta.\gamma = -4}$
Mais il nous manque une équation. Et on repense aux carrés : $(A.B)^2 = P.D^2.P^{-1}$, donc $Tr((A.B)^2) = Tr(D^2)$. On ajoute la relation $\boxed{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 9}$

On identifie classiquement : $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2.(\alpha.\beta+\alpha.\gamma+\beta.\gamma)$: $\boxed{\alpha.\beta+\alpha.\gamma+\beta.\gamma = -4}$

A présent on a tout : α, β et γ sont les trois racines de $X^3 - X^2 - 4.X + 4$.
On a une racine évidente : -1. On factorise $(X-1).(X^2-4)$. On a trois racines tout aussi évidentes : 1, -2 et 2 :

$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$ il y a cinq autres matrices diagonales possibles par permutations.

On a trouvé la matrice diagonale (utilisable pour $A.B$ et $B.A$), il faut trouver les matrices de passage P et Q. On les cherche sous la forme simplifiée $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(P) = 1$
$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(Q) = 1$

Les matrices de passage trouvées sont inversibles.
Suivant l'ordre dans lequel vous aurez mis les coefficients diagonaux de D, vous obtiendrez des matrices dont les colonnes seront mélangées. Dans le même ordre que les valeurs propres.

Comme la suite le demande, on les inverse par les cofacteurs : $\boxed{Q^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$ *(on vérifie si nécessaire)* : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ On calcule alors :

$$\boxed{A = P.D.Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \\ -8 & 4 & 5 \end{pmatrix}}$$

On cherche B de produit $A.B$ imposé. On peut extraire B par $A^{-1}.(A.B)$.
Mais on peut aussi se dire qu'on veut :
$(P.D.Q^{-1}).B = A.B = P.D.P^{-1}$ et $B.(P.D.Q^{-1}) = B.A = Q.D.Q^{-1}$.
L'illumination vient : $B = Q.P^{-1}$.
Ah tiens, il faut aussi inverser P, par la méthode des cofacteurs $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On effectue le calcul : $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

On vérifie en calculant alors $A.B$ et $B.A$.
Remarque : il y a bien d'autres solutions. Une infinité même.

∘80∘ Montrez que $(3.\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i} + 4.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k},\ -2.\overrightarrow{i} - 4.\overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{k})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Décomposez $\overrightarrow{j}$ sur cette base. Donnez un vecteur non nul qui garde les mêmes composantes sur cette base que sur la base canonique.

On calcule juste : $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4.$

Ensuite, on inverse : $\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 & 2 \\ -1 & -1 & 5/2 \end{pmatrix}$. Et on interprête :
$\overrightarrow{j} = -\frac{1}{2}.(3.\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}) - \frac{1}{2}.(\overrightarrow{i} + 4.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}) - 1.(-2.\overrightarrow{i} - 4.\overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{k})$.
On peut aussi l'obtenir « à la main », en effecutant des combinaisons telles que

$$(\overrightarrow{i} + 4.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}) + (-2.\overrightarrow{i} - 4.\overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{k}) = -\overrightarrow{i}$$

(d'ailleurs la première colonne de la matrice inverse)

$$(3.\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}) - (\overrightarrow{i} + 4.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}) = 2.\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j}$$

il ne reste qu'à enlever $\overrightarrow{i}$ et diviser par 2.

Le vecteur nul a les mêmes composantes sur les deux bases : trois 0. Mais est ce le seul ?
En général, tous les vecteurs changent de composantes quand ils changent de base.
Ici, on veut $x.(3.\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}) + y.(\overrightarrow{i} + 4.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}) + z.(-2.\overrightarrow{i} - 4.\overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{k}) = x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k}$
(le vecteur a pour composantes x, y et z sur les deux bases).
On résout $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on des solutions : tous les multiples de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Le vecteur $\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}$ est bien aussi $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.
C'était prévisible qu'il y ait des solutions, car $\begin{pmatrix} 3-1 & 1 & -2 \\ 2 & 4-1 & -4 \\ 2 & 2 & -2-1 \end{pmatrix}$ *avait un déterminant nul.*

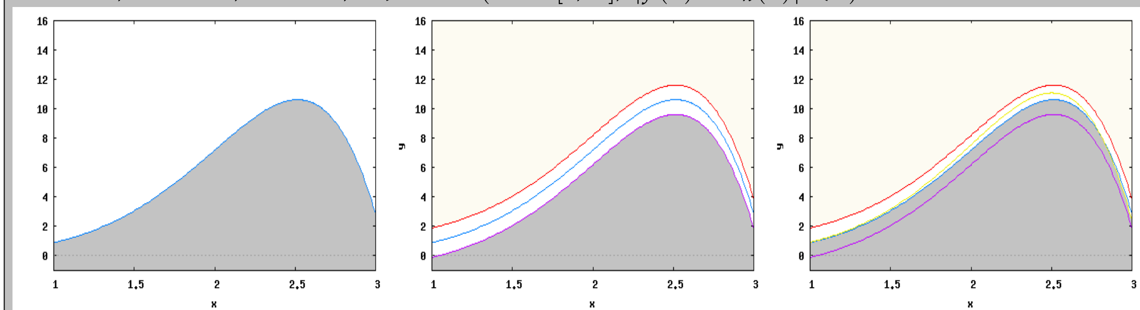
∘81∘ ♡ Montrez que $(A,\ B) \longmapsto Tr({}^tA.S.B)$ est un produit scalaire sur $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ sachant $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculez l'angle entre $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

∘82∘ ♣ $(E, +, .)$ est l'ensemble des suites réelles bornées. F est l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrez que F est un sous-espace vectoriel strict de $(E, +, .)$.
Pour u et v dans E, on pose $\phi(u,v) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}.u_k.v_k$. Montrez que cette série converge effectivement. Montrez que ϕ est un produit scalaire sur $(E, +, .)$.
Qui sont les suites orthogonales à la suite $(1, 0, 0, \ldots)$?
Montrez que seuls la suite nulle est orthogonale à toutes les suites de la forme $(0, 0 \ldots 0, 1, 0, \ldots)$.
Déduisez $(F^\perp)^\perp = E \neq F$. Est ce en contradiction avec le cours ?

∘83∘ Construisez un produit scalaire dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ pour que $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ soit orthonormée.

∘84∘

f est une application continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$. L'objectif est d'approximer f par une suite de polynômes.
-1- Expliquez la différence entre :
• $\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in [0,\ 1],\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow |f(x) - P_n(x)| \leqslant \varepsilon$
et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow (\forall x \in [0,\ 1],\ |f(x) - P_n(x)| \leqslant \varepsilon)$



-2- On peut être tenté de faire appel à $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) . \prod_{\substack{p \leq n \\ p \neq k}} \frac{n.x - p}{k - p} \right)$. Vérifiez que c'est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Calculez le en q/n avec q entier de 0 à n.

-3- Pour tout réel x de $[0,\ 1]$, on note $(R_{x,k})$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre x ($P(R_{x,k} = 1) = x$ et $P(R_{x,k} = 0) = 1 - x$). Calculez espérance et variance de chaque $R_{x,k}$.

-4- Pour tout n, on définit $B_{x,n} = \frac{1}{n} . \sum_{k=1}^{n} R_{x,k}$. Comment s'appelle la loi de $B_{x,n}$? Donnez son espérance et sa variance.

-5- Rappelez l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire positive. Rappelez l'inégalité de Tchebychev pour une variable aléatoire X de moyenne μ et de variance σ.

-6- Déduisez pour tout a strictement positif : $0 \leqslant \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |x - \frac{k}{n}| \geq a}} \binom{n}{k} . x^k . (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4.n.a^2}$

-7- On pose $P_n(f)(x) = E\big(f(B_{x,n})\big)$. Expliquez pourquoi $P_n(f(x))$ n'a aucun sens.
-8- Calculez $P_n(f)(0)$ et $P_n(f)(1)$ pour tout n.
-9- Explicitez $P_1(f)(x)$, $P_2(f)(x)$ et $P_3(f)(x)$.
-10- Montrez $P_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . x^k . (1-x)^{n-k} . \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right)$.

ε est un réel strictement positif donné.
-11- Montrez qu'il existe μ tel que :
$\forall (x,\ y) \in [0,\ 1]^2,\ |x - y| \leqslant \mu \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon/2$.
-12- Justifiez l'existence de $M = Sup(|f(x)|\ |\ x \in [0,\ 1])$.
-13- Montrez pour tout x de $[0,\ 1]$: $\left|P_n(f)(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{2.M}{4.n.\mu^2} + \frac{\varepsilon}{2}$.
-14- Déduisez qu'il existe n tel que pour n plus grand que N on a $\left|P_n(f)(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$.

On vient de démontrer le théorème de Weierstrass *sur* $[0,\ 1]$ *: toute application continue est limite uniforme de polynômes.*
Cet « exercice » est un sujet de concours de PSI (Mines ou Centrale, donc PSI quoi !) la première année où les probabilités sont arrivées au programme. Jusque là, le théorème de Weierstrass était démontré dans les cours de Prépas par des méthodes non probabilistes, en découpant les ε).*

∘85∘

Vous misez dix euros. Vous lancez alors trois dés équilibrés à six faces (*numérotation de* 1 *à* 6). Si l'écart entre la plus grande valeur affichée et la plus petite dépasse strictement 4, vous gagnez cent. Sinon, vous perdez vos dix euros. Vous jouez ? Quelle est l'espérance de votre gain ?

Écrivez un script Python qui simule ce jeu en affichant les trois valeurs et affiche ensuite "gagné" ou "perdu".

Bon, c'est parti pour Python.

```
from random import randrange
def De( ) :
....return(radrange(1, 7))

def Jeu( ) :
....a, b, c = De(), De(), De()
```

```
....print(a, b, c)
....if max(a,b,c)-min(a,b,c) > 4 :
........print(« Gagne »)
....else :
........print(« Perdu »)
```

Sinon, quand gagne-t-on ?
Quand l'écart vaut 5, puisque le maximum ne peut dépasser 6 et le minimum ne peut descendre plus bas que 1.
On ne gagne que dans le cas où le maximum vaut 6 et le minimum 1.

Il faut donc qu'au moins un dé affiche 6 et au moins un affiche 1 (et qu'impirte le troisième).

Est ce facile de dénombrer ces configurations.

Passons par le complémentaire.
On perd si et seulement si les trois dés sont restés entre 2 et 5, ou tous entre 2 et 6 ou tous entre 1 et 5 (attention, non incompatibles).

∘86∘

On dispose d'un dé équilibré à six faces. On le lance jusqu'à ce que dans la liste des lancers il y ait un élément en double *(exemple :* $[1, 3, 5, 4, 3]$*)*. Le nombre de lancers est noté N. Complétez le tableau *(en justifiant)* :

$P(N=1)$	$P(N=2)$	$P(N=3)$	$P(N=4)$	$P(N=5)$	$P(N=6)$	$P(N=7)$	$P(N=8)$

Écrivez un script **Python** qui réalise cent fois l'expérience *(sans se lasser)*.

∘87∘

Un jeune garçon spécialiste des râteaux décide d'appeler une première fois n jeunes filles de sa classe.[a] Un appel par fille. Chaque appel aboutit avec probabilité p *(la même pour toutes)*, et les expériences sont indépendantes *(les filles ne se passent pas le mot, même si elles le trouvent lourd)*. On note X la variable aléatoire *(entière)* correspondant au nombre d'appels ayant abouti. Donnez sa loi.
Obstiné, il décide de rappeler les $n - X$ filles qui n'ont pas décroché la première fois. Les nouvelles expériences sont encore indépendantes entre elles et indépendantes des précédentes *(elles ne l'ont pas mis sur liste "opportun")*.
On note Y le nombre de nouveaux appels fructueux.
Déterminez pour tout couple $(i,\ k)$ $P(Y = k \mid X = i)$.
Prouvez que $X + Y$ *(noté Z)* suit une loi binomiale *(paramètres* n, $p.(2-p)$*, non donné à l'oral CCP)*.
Déterminez espérance et variance de Z.

a. le sujet de CCP parlait d'une secrétaire appelant des clients d'une entreprise, mais déjà pourquoi **une** secrétaire ? l'intitulé de la profession est il féminin ?

∘88∘

♡ Vous lancez deux dés équilibrés à six faces. Si les deux résultats sont pairs, vous en prenez le produit, sinon, vous en prenez la somme.
Quelle est la probabilité que le résultat soit pair ?
Quelle est la probabilité que le résultat soit un multiple de 4 ?
Quelle est l'espérance de votre variable aléatoire ?
Quelle est la probabilité que cet exercice ne tombe jamais aux concours.

	1	2	3	4	5	6
1						
2		pp		pp		pp
3						
4		pp		pp		pp
5						
6		pp		pp		pp

donc

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	8	7	12
3	4	5	6	7	8	9
4	5	8	7	16	9	24
5	6	7	8	9	10	11
6	7	12	9	24	11	36

On a la loi, chaque case ayant la probabilité $\dfrac{1}{36}$.
Reste à estimer les cas favorables (qu'on pouvait trouver par simple raisonnement).

pair

	1	2	3	4	5	6
1	2		4		6	
2		4		8		12
3	4		6		8	
4		8		16		24
5	6		8		10	
6		12		24		36

$\boxed{\frac{1}{2}}$

multiple de 4

	1	2	3	4	5	6
1			4			
2		4		8		12
3	4				8	
4		8		16		24
5			8			
6		12		24		36

$\boxed{\frac{13}{36}}$

Espérance : $\frac{360}{36} = 10$.

Espérace du carré : $4486/36$.

Variance : $\frac{443}{18}$ après calcula sans intérêt.

∘89∘

X et Y sont deux variables aléatoires sur un univers probabilisé (Ω, P), avec $Var(X)$ non nulle.
Minimisez $E\big((Y-a)^2\big)$ puis minimisez $E\big((Y-(a+b.X))^2\big)$.
C'est un exercice de probabilités ou d'algèbre linéaire ?

On doit choisir a pour minimiser $E\big((Y-a)^2\big)$.
Cette quantité vaut $E(Y^2 - 2.a.Y + a^2)$, donc par linéarité $E(Y^2 - 2.a.E(Y) + a^2$ (car $E(a^2) = a^2$ quand a^2 est une constante).
Ce trinôme du second degré est minimal en $a = E(Y)$ (dérivez).

Interprétation : $E(Y)$ est la variable aléatoire constante la plus proche de Y.
C'est la projection orthogonale de Y sur les constantes.

On développe aussi $E\big((Y-(a+b.X))^2\big)$ en $a^2 + b^2.E(X^2) + E(Y^2) - 2.a.E(Y) - 2.b.E(X.Y) + 2.a.b.E(X)$.

Pour minimiser ces trinômes en a et en b, on cherche le sommet de la « parabole en a » et le sommet de la « parabole en b ».

On résout un petit système $\begin{array}{lll} 2.a & +2.b.E(X) & = 2.E(Y) \\ 2.a.E(X) & +2.b.E(X^2) & = 2.E(X.Y) \end{array}$

Son déterminant est non nul, c'est $Var(X)$ (sauf si X est constante, mais alors $a + b.X$ ne contient pas grand chose de plus que a).

On trouve $a = \frac{E(X^2).E(Y) - E(X.Y).E(X)}{Var(X)}$ et $b = \frac{E(X.Y) - E(X).E(Y)}{Var(X)}$.

Le minimum vaut alors...

∘90∘

Soit (Y_k) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} Y_k$. Prouvez pour tout a strictement positif :
$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\Big| \geqslant a\Big) \leqslant \frac{V(Y_n)}{n.a^2}$. *(une question de cours juste avant demandait comme par hasard "rappeler l'inégalité de Bienaimé Tchebychev").*
Application : une burne contient 2 boules carmin et 3 boules ébène *(ça change de rouge et noir)*. On les tire, avec remise *(sinon elle sera vite vide)*. A partir de combien de tirages peut on garantir à plus de 95% que la proportion de boules carmin restera comprise entre 0,35 et 0,45 ? *(Indication : $Y_k = k^{ieme}$ tirage, Bernoulli).*

Tiens, on rappelle l'inégalité de *Bienaimé Tchebychev* : $P\Big(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$.

. On mesure la probabilité d'être loin de la moyenne. On sait qu'elle va dépendre de la variance (dispersion quadratique par rapport à la moyenne) et pour des raisons d'homogénéité, c'est ε^2 qui est face à la variance.

Les variables aléatoires ont toutes la même loi, l'espérance de $S_n$est égale à $n.E(Y_1)$.

Elles sont indépendantes, donc les variances s'additionnent : $Var(S_n) = n.Var(Y_1)$.

On a donc $P\Big(|S_n - n.E(Y)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{n.Var(Y)}{\varepsilon^2}$.

On choisit $\varepsilon = n.a$: $P\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - E(Y)\Big| \geqslant a) = P\Big(|S_n - n.E(Y)| \geqslant n.a) \leqslant \frac{n.Var(Y)}{(n.a)^2} = \frac{Var(Y)}{n.a^2}$.

. | Plus « question de cours » que ça, tu meurs.

Qui est ici la variable aléatoire Y ? C'est « je tire une boule et je compte le nombre de boule(s) carmin ». Y peut valoir 0 (probabilité $\dfrac{3}{5}$) ou 1 (probabilité $\dfrac{2}{5}$).

La valeur moyenne de Y est $\dfrac{2}{5}$ (deux chances sur 5 d'avoir une boule carmin).

La valeur moyenne de Y^2 est aussi $\dfrac{2}{5}$.

On a donc $E(Y) = \dfrac{2}{5} = 0.4$ et $Var(Y) = \dfrac{6}{25}$ (c'est $p.(1-p)$, comme le dit Bernoulli).

On compte le nombre de boules carmins sorties : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ et leur proportion : $\dfrac{S_n}{n}$.

La dispersion de $\dfrac{S_n}{n}$ par rapport à $0,4$ va se mesurer par la formule précédente : $P\Big(\Big|\dfrac{S_n}{n} - 0,4\Big| \geqslant 0,05) \leqslant \dfrac{\frac{6}{25}}{n.(0,05)^2} = \dfrac{96}{n}$.

On veut que cette probabilité soit inférieure à 5 pour cent ! $\dfrac{96}{n} \leqslant \dfrac{5}{100}$. Quand même 1920 tirages.

. | Je reste quand même surpris qu'une exercice pour recruter des ingénieurs à bac+2 soit de ce niveau de simplicité. Un théorème, une variante, l'application numérique.
Pour moi c'est niveau Terminale. Et loin des exercices sur les séries, intégrales à paramètres, diagonalisations des autres branches des mathématiques...

∘91∘

On réalise l'expérience suivante :

```
from random import randrange
X = randrange(6) #entier entre 0 et 5, hasard uniforme
Y = randrange(X+1) #entier entre 0 et x
```

Vérifiez : $E(X) = 2,5$. Montrez que sa variance vaut $35/12$. *($Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$)*
Quelle est l'espérance de la variable aléatoire Y.
Quelle est l'espérance du produit $X.Y$?
Calculez $E(X.Y) - E(X).E(Y)$ *(ce qu'on appelle la* covariance *du couple, sachant que X et Y ne sont pas des variables indépendantes).*

X suit une loi a priori uniforme sur $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Chaque valeur a pour probabilité de réalisation $\dfrac{1}{6}$.

Son espérance se calcule : $\sum\limits_{k=0}^{5} \dfrac{k}{6} = \dfrac{1}{6}.\dfrac{5.6}{2} = \dfrac{5}{2}$.

L'espérance de son carré sa calcule aussi : $\sum\limits_{k=0}^{5} \dfrac{k^2}{6} = \dfrac{1}{6}.\dfrac{5.6.11}{6} = \dfrac{55}{6}$.

Sa variance est donnée par la formule des cours [9] : $E(X^2) - E(X)^2 = \frac{55}{6} - \frac{25}{4} = \frac{110-75}{12} = \frac{35}{12}$.

Pour Y, on peut dresser un tableau, un arbre, ou une formule des probabilités totales/

9. du cours de Seconde, Première, Terminale, Sup...

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$	
$Y=0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2.6}$	$\frac{1}{3.6}$	$\frac{1}{4.6}$	$\frac{1}{5.6}$	$\frac{1}{6.6}$	$\frac{49}{120}$
$Y=1$		$\frac{1}{2.6}$	$\frac{1}{3.6}$	$\frac{1}{4.6}$	$\frac{1}{5.6}$	$\frac{1}{6.6}$	$\frac{29}{120}$
$Y=2$			$\frac{1}{3.6}$	$\frac{1}{4.6}$	$\frac{1}{5.6}$	$\frac{1}{6.6}$	$\frac{19}{120}$
$Y=3$				$\frac{1}{4.6}$	$\frac{1}{5.6}$	$\frac{1}{6.6}$	$\frac{37}{360}$
$Y=4$					$\frac{1}{5.6}$	$\frac{1}{6.6}$	$\frac{11}{180}$
$Y=5$						$\frac{1}{6.6}$	$\frac{1}{36}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

$$P(Y=0) = \sum_{k=0}^{5} P_{X=k}(Y=0).P(X=k) = 1.P(X=0) + \tfrac{1}{2}.P(X=1) + \tfrac{1}{3}.P(X=2) + \tfrac{1}{4}.P(X=3) + \tfrac{1}{5}.P(X=4) + \tfrac{1}{6}.$$
$$P(Y=1) = \sum_{k=0}^{5} P_{X=k}(Y=1).P(X=k) = \tfrac{1}{2}.P(X=1) + \tfrac{1}{3}.P(X=2) + \tfrac{1}{4}.P(X=3) + \tfrac{1}{5}.P(X=4) + \tfrac{1}{6}.$$
$$P(Y=2) = \sum_{k=0}^{5} P_{X=k}(Y=2).P(X=k) = \tfrac{1}{3}.P(X=2) + \tfrac{1}{4}.P(X=3) + \tfrac{1}{5}.P(X=4) + \tfrac{1}{6}.$$
$$P(Y=3) = \sum_{k=0}^{5} P_{X=k}(Y=3).P(X=k) = \tfrac{1}{4}.P(X=3) + \tfrac{1}{5}.P(X=4) + \tfrac{1}{6}.$$
$$P(Y=4) = \sum_{k=0}^{5} P_{X=k}(Y=4).P(X=k) = \tfrac{1}{5}.P(X=4) + \tfrac{1}{6}.$$
$$P(Y=5) = \sum_{k=0}^{5} P_{X=k}(Y=5).P(X=k) = \tfrac{1}{6}.P$$

Le tableau ci dessus donne les lois conjoints, et on extrait les lois marginales en ligne pour X et en colonnes pour Y.
On vérifie que la somme des probabilités vaut 1.

Après tout n'est que calcul : $E(Y) = 0.\frac{49}{120} + 1.\frac{29}{120} + 2.\frac{19}{120} + 3.\frac{37}{360} + 4.\frac{11}{180} + 5.\frac{1}{36} = \frac{5}{4}$ grâce à la dernière colonne.

Et $E(X.Y)$ est une somme de trente six termes dont près de la moitié sont nuls.
Moi j'ai trouvé $\frac{55}{12}$.

Enfin, $E(X.Y) - E(X).E(Y)$ vaut $\frac{35}{24}$.

◦92◦

Une compagnie aérienne a vendu n billets à cent euros pour un vol qui peut accueillir jusqu'à N passages. La probabilité qu'un des acheteurs se présente à l'embarquement est p (les passagers sont indépendants les uns des autres).
Un acheteur qui ne s'est pas présenté est remboursé à quatre vingt pour cent.
Un acheteur qui se présente et est refusé, faute de place est remboursé à deux cent pour cent.
Oui, la compagnie fait du surbooking.
X est a variable "nombre de voyageurs se présentant à l'embarquement. Quelle st sa loi ?
Y est la variable "nombre de voyageurs se présentant et à qui on refuse une place". Précisez $Y(\omega)$ en faisant intervenir l'événement $X(\omega) > N$.
Montrez que le gain (en centaines d'euros) est $0,2.n + 0,8.X - 2.Y$. Calculez son espérance dans le cas $n \leqslant N$.
On suppose $p = \frac{1}{2}$. Montrez que $\frac{2.X - n}{\sqrt{n}}$ est centrée réduite. Majorez $P(X \geqslant N)$.

A faire.

◦93◦

♡ Montrez que si X et Y sont deux variables de Bernoulli de paramètres p et q, elles sont indépendantes si et seulement si on a $E(X.Y) = E(X).E(Y)$.
Construisez deux variables aléatoires U et V à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ vérifient $E(U.V) = E(U).E(V)$ mais pas $P(U = V = 0) = P(U = 0).P(V = 0)$ (leur covariance est nulle, mais elles ne sont pas indépendantes).

∘94∘

Une information binaire (True/False, 1/0) est réémise par des transmetteurs successifs, indépendants les uns des autres. Mais un transmetteur se trompe avec probabilité p et transmet alors le bit "opposé". On note a_n la probabilité que le bit de la n^{ieme} étape soit le bit initial. Exprimez a_{n+1} à l'aide de a_n. Calculez a_n pour tout n.

Évidemment, a_0 est égal à 1. Quant à a_1 il vaut p.
Ensuite, l'information au rang $n+1$ est vraie dans deux cas :
• elle était vraie au rang n et on le n^{ieme} transmetteur a bien transmise,
• elle était fausse au rang n et le n^{ieme} transmetteur a justement rétabli la vérité en se trompant
$P(Vrai_{n+1}) = P(Vrai_n \mid Vrai_{n-1}).P(T_n\ sincere) + P(Vrai_n \mid Faux_{n-1}).P(T_n\ se\ trompe)$ avec les formules attendues aux concours.
On a donc $a_{n+1} = p.a_n + (1-p).(1-a_n) = (2.p-1).a_n + (1-p)$.
On reconnaît une suite arithmético-géométrique : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2.p-1 & 1-p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_n \\ 1 \end{pmatrix}$ si on aime.

Sinon, on trouve le point fixe : $\frac{1}{2}$, et on montre que la suite $a_n - \frac{1}{2}$ est géométrique de raison $(2.p-1)$.

On trouve finalement : $\boxed{a_n = (2.p-1)^{n-1}.p + \frac{1}{2}}$

Quand n tend vers l'infini, cette probabilité tend vers $1/2$.

∘95∘

Pour tout n, on appelle "suite de Farey d'indice n" la liste triée des rationnels de $[0,\ 1]$ de la forme irréductible $\frac{p}{q}$ avec $q \leqslant n$ et on la note F_n.
Déterminez F_5.
Montrez : $Card(F_p) - Card(F_{p-1}) = p-1$ (p est un nombre premier).
Montrez : $Card(F_{p^2}) - Card(F_{p^2-1}) = p^2 - p$ (p est un nombre premier).
Montrez : $Card(F_{p.q}) - Card(F_{p.q-1}) = p.q - p - q + 1$ (p et q sont deux nombres premiers distincts).
Montrez que si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux termes consécutifs de F_n alors on a $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{d+d} < \frac{c}{d}$ et $a.d - b.c = 1$.

Dans F_5 il y a 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ jusqu'à $\frac{4}{5}$, mais à trier dans l'ordre.
$F_5 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}; \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right]$
Pour passer à F_6, il faudra juste glisser $\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{6}$. Les rationnels comme $\frac{2}{6}$ et $\frac{3}{6}$ sont déjà là.

Pour passer à F_7, il faut insérer six termes car 7 est premier : tous les $\frac{k}{7}$.

$F_5 = \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}; \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}\right]$
et des méthodes simples permettent de savoir qui introduite et où.

Quoi qu'il en soit, qu'est ce qui change quand on passe de F_{p-1} à F_p ?
Il faut ajouter des rationnels de la forme $\frac{a}{p}$.
Compris entre 0 et 1.
Et pas déjà pris (par exemple avec $\frac{a}{12}$, pas la peine de prendre $a=2$, $a=3$, $a=4$...).
Mais comme p est premier, a peut aller de 1 à $p-1$. D'où $p-1$ nouveaux éléments...

On veut passer de F_{p^2-1} à F_{p^2}.
Il ne manque que les $\frac{a}{p^2}$ avec a entre 1 et p^2, et premier avec p^2.
Comme p est premier, les seules fractions réductibles sont celles où le numérateur est un multiple de p. Il y a a p. D'où $p^2 - p$.

Maintenant, qui sont les termes pour passer de $F_{p.q-1}$ à $F_{p.q}$?
Ce sont des $\frac{a}{p.q}$.
Avec a entre 1 et $p.q$.
Mais encore faut il ne pas prendre les fractions réductibles.
Mais les seules éléments à éviter sont les a qui sont multiples de p ou multiples de q.

Or, entre 1 et $p.q$ il y a q multiples de p
p multiples de q
et 1 nombre à la fois multiple de p et q qu'on a eu la mauvaise idée de décompter deux fois.
D'où $p.q - p - q + 1$ qu'on écrira aussi $(p-1).(q-1)$.
Exemple : les fractions en $\frac{a}{21}$.
Prenez tous les a de 1 à 21. Mais effacez 3, 6, 9, 12, 15, 18 et 21
7,14 et 21 ah non, déjà fait...
Qu'est ce qu'il reste, combien ça fait ?

Le passage de $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ à $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{d+d} < \frac{c}{d}$ est un classique des exercices du collège.
Il suffit de supposer $a.d - b.c < 0$ et de calculer $\frac{c}{d} - \frac{a+c}{d+d}$ puis $\frac{a+c}{d+d} - \frac{a}{b}$. Le dénominateur est positif, et le numérateur est... $c.b - a.d$!

Exemples : entre $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{2}$ on va glisser $\frac{3}{7}$! Génial.
entre $\frac{4}{5}$ et $\frac{1}{1}$ on va glisser $\frac{5}{6}$ quand on arrivera à F_6
entre $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{5}$ on va glisser $\frac{7}{9}$ quand on arrivera à F_9.
Le fait que $c.b - a.d$ soit égal à 1 repose sur « consécutifs ».
déjà, c'est un entier. Et il est non nul.
Mais s'il est trop grand alors il y a un autre élément de la suite de Farey par exemple entre $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{4}$ il y avait $\frac{2}{4}$ c'est à dire $\frac{1}{2}$.
A approfondir.

∘96∘ Calculez la somme des entiers naturels plus petits que 1000 qui sont multiples de 2 ou de 5.
On veut aussi calculer le produit des entiers plus petits que 1000 qui sont multiples de 2 ou de 5. C'est certes faisable en raisonnant, mais là, je vous demande un script Python qui va calculer ce produit et plus généralement le produit des entiers de 1 à N qui sont multiples de a ou de b.
Je précise : je ne compte pas 0 parmi ces entiers...

A faire.

∘97∘

```
def Scooby(A) :
....L = [ ]
....for i in range(len(A)) :
........while len(L)>0 and L[-1] < A[i] :
............L.pop()
........L.append(A[i])
....return L
```

Voici un script Python. Que retournera-t-il pour la suite [1, 10, 5, 6, 5, 3, 4, 2, 0, 4] ?
Que fait elle pour une suite d'entiers quelconque ?

Au lieu de

```
def Scooby(A) :
....L = [ ]
....for i in range(len(A)) :
........while len(L)>0 and L[-1] < A[i] :
............L.pop()
........L.append(A[i])
....return L
```

exécutons pas à pas

```
def Scooby(A) :
....L = [ ]
....for i in range(len(A)) :
........print('*',i,A[i],L)
........while len(L)>0 and L[-1] < A[i] :
............L.pop()
............print('#',i, A[i], L)
........L.append(A[i])
....return L
```

Et voici ce que donne l'exécution :

*	0	1	[ ]
*	1	10	[1]
#	1	10	[ ]
*	2	5	[10]
*	3	6	[10, 5]
#	3	6	[10]
*	4	5	[10, 6]
*	5	3	[10, 6, 5]
*	6	4	[10, 6, 5, 3]
#	6	4	[10, 6, 5]
*	7	2	[10, 6, 5, 4]
*	8	0	[10, 6, 5, 4, 2]
*	9	4	[10, 6, 5, 4, 2, 0]
#	9	4	[10, 6, 5, 4, 2]
#	9	4	[10, 6, 5, 4]

Et pour une autre liste ?
Ce script va extraire de la liste L une sous-suite décroissante.
[1, 6, 8, 4, 8, 2, 9, 12, 3] donne [12,3].
[1, 6, 8, 12, 4, 8, 2, 9, 3] donne [12, 9, 3]
[1, 12, 6, 8 4, 8, 2, 9, 3] donne [12, 9, 3]
[1, 12, 6, 8 4, 8, 2, 5, 3] donne [12, 8, 8, 5, 3]

∘98∘

♡ Montrez que $(x, y, z) \longmapsto \sqrt{x^2 + 5.y^2 + 11.z^2 + 4.x.y + 2.y.z + 5.y.z}$ est une norme issue d'un produit scalaire *(pour l'inégalité triangulaire qui fait bien partie de la question, passez par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le produit scalaire)*.
Complétez pour que $(\overrightarrow{i}, a.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, a.\overrightarrow{i} + b.\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ soit orthonormée.

∘99∘

♡ $G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Vecteurs : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$
Ajustez a et b pour que la famille ait pour matrice de Gram G. Quel est l'angle que font deux à deux ces vecteurs ? Et en dimension n ? On considère la matrice U de taille $n+1$ dont tous les coefficients valent 1. Montrez que 0 en est valeur propre de multiplicité n avec un sous-espace propre de dimension n. Montrez que le vecteur formé de $n+1$ réels égaux à 1 est valeur propre de U. Déduisez que U est semblable à $Diag(n+1, 0, \dots 0)$. A quelle matrice diagonale est semblable $\beta.U + (\alpha - \beta).I$? Quel est son déterminant ? Déduisez que si on peut trouver $n+1$ vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ formant deux à deux le même angle θ, alors cet angle θ vaut $Arccos(-1/n)$.

A faire.

∘100∘

♡ Montrez que $(x, y, z) \longmapsto \sqrt{x^2 + 5.y^2 + 11.z^2 + 4.x.y + 2.y.z + 5.y.z}$ est une norme issue d'un produit scalaire *(pour l'inégalité triangulaire qui fait bien partie de la question, passez par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le produit scalaire)*.
Complétez pour que $(\overrightarrow{i}, a.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, a.\overrightarrow{i} + b.\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ soit orthonormée.

A faire.

∘101∘

Albert, Benoît, Charles et Didier veulent aller manger. Mais ils ne se supportent pas tous parfaitement.
Albert ne vient que si Benoît vient.
Benoît ne vient que si Albert vient.
Charles ne vient que si Benoît vient.
Didier ne vient que si Albert et Charles ne sont pas là en même temps.
Quelles sont les configurations possibles ?

∘102∘

♡ Montrez que $(X, Y) \longmapsto^t X.S.Y$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3, +, .)$ sachant $S = \begin{pmatrix} 2 & & \\ -1 & & \\ & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $|\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}| = \sqrt{5}$ et $\cos(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}}) = \sqrt{6}/3$.

L'application $(X, Y) \longmapsto^t X.S.Y$ est par construction une forme (formats compatibles), bilinéaire (distributivité du produit matriciel).

Pour qu'elle soit symétrique, il faut et il suffit que S soit symétrique. Ici, on complète donc déjà : $S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & & 1 \\ & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

L'information $|\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}|^2 = 5$ donne $|\overrightarrow{i}|_\phi^2 + |\overrightarrow{j}|_\phi^2 + 2.\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = 5$. En notant a le terme qui manque sur la diagonale : $2 + a - 2 = 5$, donc $a = 5$.

Il ne nous manque plus qu'un terme qu'on note b et qui vaut $\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$. On a alors $\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) = |\overrightarrow{i}|_\phi.|\overrightarrow{k}|_\phi.\cos(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}})$.

On simplifie $\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) = \sqrt{2}.|\sqrt{3}.\frac{\sqrt{6}}{3}$. On simplifie, il reste 2. La matrice cherchée est $\boxed{S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$

Mais il faut quand même vérifier que la forme est positive, défini positive.

On teste un vecteur contre lui même : $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On trouve $2.x^2 + 5.y^2 + 3.z^2 - 2.x.y + 4.x.z + 2.y.z$.

On se débrouille pour factoriser un début de carré imposé par $2.x^2$:

$2.\left(x - \frac{y}{2} + z\right)^2 + 5.y^2 + 3.z^2 + 2.y.z - \frac{y^2}{2} - 2.z^2 + 2.y.z$

On simplifie $2.\left(x - \frac{y}{2} + z\right)^2 + \frac{9}{2}.y^2 + z^2 + 4.y.z$

On factorise ce qui reste en se laissant imposer par le $\frac{9}{2}.y^2$:

$2.\left(x - \frac{y}{2} + z\right)^2 + \frac{9}{2}.\left(y + 2.\frac{z}{9}\right)^2 + z^2 - \frac{9}{2}.\frac{4}{81}.z^2 = 2.\left(x - \frac{y}{2} + z\right)^2 + \frac{9}{2}.\left(y + 2.\frac{z}{9}\right)^2 + \frac{7}{9}.z^2$

C'est une somme de carrés de réels, c'est positif : $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) \geqslant 0$.

Pour que cette somme soit nulle, il faut que chaque terme soit nul : $\begin{array}{ccccc} x & -\frac{y}{2} & +z & = & 0 \\ & y & +\frac{2.z}{9} & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}$. Le seul vecteur de norme nulle est le vecteur nul.

◦103◦ Soient $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel, tous deux de norme 1 (avec $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{b}$). Montrez que chacun des vecteurs $(1-\lambda).\overrightarrow{a} + \lambda.\overrightarrow{b}$ (λ dans $]0, 1[$) est de norme strictement plus petite que 1.

On veut calculer la norme de $(1-\lambda).\overrightarrow{a} + \lambda.\overrightarrow{b}$. On calcule même son carré de norme :

$\phi((1-\lambda).\overrightarrow{a} + \lambda.\overrightarrow{b}, (1-\lambda).\overrightarrow{a} + \lambda.\overrightarrow{b}) = (1-\lambda)^2.\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) + 2.\lambda.(1-\lambda).\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + \lambda^2.\phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b})$

On exploite l'hypothèse "normés" : $|(1-\lambda).\overrightarrow{a} + \lambda.\overrightarrow{b}|^2 = (1-\lambda)^2 + 2.\lambda.(1-\lambda).\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + \lambda^2$

On regroupe $(1-\lambda)^2 + \lambda^2 = 1 + 2.\lambda.(\lambda - 1)$.

On termine $|(1-\lambda).\overrightarrow{a} + \lambda.\overrightarrow{b}|^2 = 1 - 2.\lambda.(1-\lambda).(1 - \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}))$

Le réel $1 - \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ est positif (strictement, c'est $1 - 1.1.\cos(\ldots)$).

Le réel $\lambda.(1-\lambda)$ est positif.

Le réel $1 - 2.\lambda.(1-\lambda).(1 - \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}))$ est strictement plus petit que 1.

◦104◦ ♡ Montrez que $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \longmapsto 34.x.x' - 12.x.y' - 12.x'.y + 41.y.y'$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^2, +, .)$ (noté ϕ).

♣ Donnez deux vecteurs non nuls, orthogonaux à la fois pour ce produit scalaire et pour le produit scalaire usuel (c'est à dire $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 0$).

On prend deux vecteurs, on calcule un réel.

Par commutativitité de la multiplication dans $\mathbb{R}$, on a bien $34.x.x' - 12.x.y' - 12.x'.y + 41.y.y' = 34.x'.x - 12.x'.y - 12.x.y' + 41.y'.y$.

En écrivant $34.x.x' - 12.x.y' - 12.x'.y + 41.y.y' = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 34 & -12 \\ -12 & 41 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et en utilisant ${}^tU.G.(\lambda.V + \mu.W) = \lambda.({}^tU.G.V) + \mu.({}^tU.G.W)$, on a la bilinéarité.

Pour la positivité, on prend x et y et on calcule :

$34.x^2 - 24.x.y + 41.y^2 = 34.\left(x - \frac{12}{34}\right)^2 + \left(41 - \frac{12^2}{34}\right).y^2 = 34.\left(x - \frac{12}{34}\right)^2 + \frac{625}{17}.y^2$

on reconnaît une somme de carrés de réels, c'est gagné.

Si de plus on suppose $34.\left(x-\dfrac{12}{34}\right)^2+\dfrac{625}{17}.y^2=0$, on aboutit à $x=y=0$.

$\boxed{\text{On a bien une forme bilinéaire symétrique positive, défini-positive.}}$

On cherche un couple $\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right)$ vérifiant à la fois $\begin{array}{llll} x.x' & & +y.y' & =0 \\ 34.x.x' & -12.(x'.y+y'.x) & +41.y.y' & =0 \end{array}$.

On raisonne par équivalences $\begin{array}{llll} x.x' & & +y.y' & =0 \\ & -12.(x'.y+y'.x) & +7.y.y' & =0 \end{array}$ car on est en sciences et pas en bidouillages d'équations sans cervelle.

Comme l'orthogonalité des vecteurs se définit à proportionnalité près, on peut imposer par exemple $x=x'=1$ (diviser chaque vecteur par sa première composante).

Le système devient $\begin{array}{llll} 1 & & +y.y' & =0 \\ & -12.(y+y') & +7.y.y' & =0 \end{array}$

On connaît le produit : $y.y'=-1$ et la somme : $y+y'=\dfrac{-7}{12}$.

On récupère y et y' (rôles symétriques) : $y=-\dfrac{4}{3}$ et $y'=\frac{3}{4}$.

On a un couple de vecteurs possible : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \end{pmatrix}\right)$.

On pourra préférer $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right)}$ et vérifier :

$\begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}=0$ et $\begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 34 & -12 \\ -12 & 41 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix}=0.$

Pour le professeur de mathématiques : il suffisait d'aller chercher deux vecteurs propres de la matrice réelle symétrique...

∘105∘ ♡ Montrez que $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 13 & 8 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice de Gram.

La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 13 & 8 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ est réelle symétrique. Elle pourraît s'écrire en fait $\begin{pmatrix} \phi(\vec{i},\vec{i}) & \phi(\vec{j},\vec{i}) & \phi(\vec{k},\vec{i}) \\ \phi(\vec{i},\vec{j}) & \phi(\vec{j},\vec{j}) & \phi(\vec{k},\vec{j}) \\ \phi(\vec{i},\vec{k}) & \phi(\vec{j},\vec{k}) & \phi(\vec{k},\vec{k}) \end{pmatrix}$.

D'ailleurs ses termes diagonaux sont positifs. Mais qu'en est il de ses petits déterminants de taille 2 :

$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \end{vmatrix}=14$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=14$ et $\begin{vmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}=14$ (décidément !).

On s'attaque au grand déterminant : $3.\begin{vmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}-5.\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 13 & 8 \end{vmatrix}=3.14-5.14+2.14=0.$

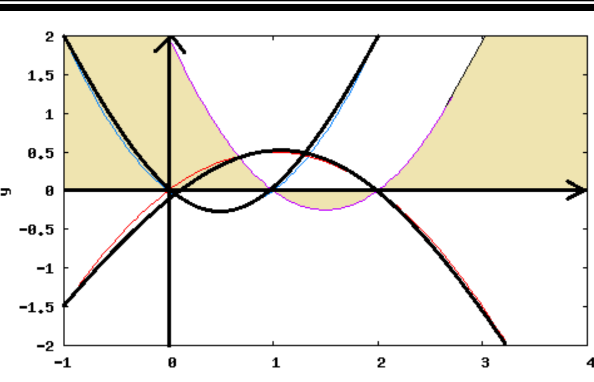
Désolé, le déterminant est nul, ce n'est pas une matrice de Gram.

D'ailleurs, on peut constater : $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 13 & 8 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ est non nul, et se voudrait pourtant orthogonal à tout le monde !

Montrez que $(P,\ Q)\longmapsto\displaystyle\sum_{k=0}^{2}P(k).Q(k)$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_2[X],+,.)$. Montrez que la famille $(X.(X-1),\ X.(2-X),\ (X-1).(X-2))$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

Qui sont les polynômes orthogonaux au sous-espace vectoriel des polynômes constants ? Donnez une base de ce plan. Donnez même une base orthonormée.

∘106∘ Montrez que $P(X)\longmapsto P(X+1)$ (notée T) est un automorphisme de $(\mathbb{R}_2[X],+,.)$.



Forme, bilinéaire, symétrique. Tout ça c'est cadeau.

Positive car $\displaystyle\sum_{k=0}^{2}(P(k))^2$ est positif... ou nul.

Mais comment voulez vous que ceci soit nul ? En imposant $P(0) = P(1) = P(2) = 0$.
Alors que P est de degré inférieur ou égal à 2. Pauvre P, le voilà nul.
C'est bon, on a une forme bilinéaire symétrique positive défini-positive.

En nommant A, B et C les tris polynômes, quand on calcule quelquechose comme $A.B$, on a un polynôme factorisable par $X.(X-1).(X-2)$.
Il est nul en 0, 1 et 2. la somme $A(0).B(0) + A(1).B(1) + A(2).B(2)$ est nulle.
C'est bien pareil avec $A.C$ et $B.C$.

Pour être orthogonal à tous les polynômes constants, il suffit d'être orthogonal à 1.
La condition devient $P(0) + P(1) + P(2) = 0$.
pas grand chose à dire de plus.
On a le noyau d'une forme linéaire non nulle. C'est un sous-espace vectoriel e l'espace de départ, de dimension $3 - 1$. Ce qui fait 2.

Une base ? Il suffit de deux polynômes non colinéaires.
$X - 1$ est parfait comme premier polynôme ($P(1)$ est nul, $P(0)$ et $P(2)$ sont opposés).
$X^2 + a$ avec a bien ajusté : $X^2 - \dfrac{5}{3}$ par exemple.

On la veut orthonormée ?
On renorme le premier : $\dfrac{X-1}{\sqrt{2}}$ car $\phi(X-1,\ X-1) = 2$.
On construit le second par méthode de Schmidt : $X^2 - \dfrac{5}{3} - \phi\Big(X^2 - \dfrac{5}{3},\ \dfrac{X-1}{\sqrt{2}}\Big).\dfrac{X-1}{\sqrt{2}}$ (oui, $\overrightarrow{\varepsilon_2} - \phi(\overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{e_1}).\overrightarrow{e_1}$.
On trouve $\dfrac{3.X^2 - 6.X + 1}{6}$. Autant prendre $3.X^2 - 6.X + 1$ qui est bien dans le sous-espace, et orthogonal au premier.
On le norme et on colle les deux $\boxed{\Big(\dfrac{X-1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{3.X^2 - 6.X + 1}{\sqrt{6}}\Big)}$

Montrez que $P(X) \longmapsto P(X+1)$ (notée T) est un automorphisme de $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$.

Existence : pas de problème.
Image : $P(X+1)$ est un polynôme de même degré.
Linéarité : $P(X+1) + Q(X+1) = (P+Q)(X+1)$ et pour $\lambda.P$.
Bijectivité : on donne l'application réciproque : $Q(X) \longmapsto Q(X-1)$.

Montrez que ce n'est pas une isométrie (c'est à dire certains vecteurs P n'ont pas la même norme que leur image). Existe-t-il des polynômes non constants qui ont la même norme que leur image. Résolvez l'équation P est orthogonal à $T(P)$ pour le produit scalaire ϕ.

Le polynôme X a pour norme $\sqrt{0+1+4}$.
Son image $X+1$ pour norme $\sqrt{1+4+9}$.
La norme n'est pas conservée.

Le polynôme constant a a pour norme $\sqrt{3.a^2}$ et son image aussi.

On cherche ensuite P vérifiant $\sqrt{P^2(0) + P^2(1) + P^2(2)} = \sqrt{P^2(1) + P^2(2) + P^2(3)}$.
Prenons P non constant vérifiant $P(0) = P(3)$ ou $P(0) = -P(3)$.
On vérifie avec $P(X) = 2.X - 3$. Lui et son image ont pour norme $\sqrt{11}$.

La seule difficulté de la dernière question est d'accepter la question.
On veut juste $P(0).P(1) + P(1).P(2) + P(2).P(3) = 0$.

∘107∘

-a- On note $(E,+,.)$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0,\ \pi/2]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que $(f,g) \longmapsto \int_0^{\pi/2} f(t).g(t).dt$ est un produit scalaire sur $(E,+,.)$ (notation : $< f,\ g >$).
-b- Pour f dans E, on définit $V(f) = x \longmapsto \int_0^x f(t).dt$ et $V^*(f) = x \longmapsto \int_x^{\pi/2} f(t).dt$. Pourquoi la notation $V(f(x))$ est elle absurde ? Montrez que V et V^* sont deux endomorphismes de $(E,+,.)$. Sont ils injectifs ? Sont ils surjectifs ? Pourquoi ne pouviez vous pas appliquer la formule du rang ?
-c- Montrez pour f et g dans E : $< V(f),\ g >=< f,\ V^*(g) >$.
-d- On pose $T = V^* \circ V$. Représentez graphiquement $T(1)$ et $T(Id)$.
-e- Calculez $T(f)(\pi/2)$ et $T(f)'(0)$ pour f dans E.
-f- Montrez $< T(f),\ g >=< f,\ T(g) >$ pour tout couple $(f,\ g)$. Montrez $< T(f),\ f >> 0$ pour tout f de $E - \{0\}$.
-g- Déduisez que les valeurs propres de T sont strictement positives.
-h- Soit λ une valeur propre de T et f_λ un vecteur propre associé. Montrez que f_λ est C^2 et est solution de l'équation différentielle $\lambda.\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = 0$. Montrez : $f_\lambda(\pi/2) = 0$ et $f'_\lambda(0) = 0$.
-i- Déduisez que λ est de la forme $\dfrac{1}{(2.n+1)^2}$ pour un entier naturel n. Donnez la dimension des sous-espaces propres.

Extrait du sujet Mines-Ponts 2015

∘108∘

♣ Trouvez une application f continue vérifiant $\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2.\pi} \cos(n.t).f(t).dt = \dfrac{1}{n^2}$. Déduisez $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^4} = \dfrac{\pi^4}{90}$.

Quel rapport ? Fourier et Parseval.
Les $\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2.\pi} \cos(n.t).f(t).dt$ sont les coefficients de f sur l'espèce de base orthonormée des c_n.
Et $\sum_k \dfrac{1}{k^2}$ est la somme des carrés des composantes. C'est le carré de la norme de f.

On se dit que ça doit venir d'une intégration par parties ces $\dfrac{1}{n^2}$.
On calcule $\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2.\pi} \cos(n.t).t.dt = 0$
$\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2.\pi} \cos(n.t).t^2.dt = \dfrac{4}{n^2}$ (primitive en $t \longmapsto \dfrac{t^2}{n}.\sin(n.t) + \dfrac{2.t}{n^2}.\cos(n.t) - \dfrac{2}{n^3}.\sin(n.t)$).
On propose donc $f = t \longmapsto \frac{t^2}{4}$ et on vérifie qu'elle convient.

Pour le produit scalaire $(P,Q) \longmapsto \dfrac{1}{\pi}.\int_0^{2.\pi} P(t).Q(t).dt$, la famille des $t \longmapsto \cos(n.t)$ est orthonormée.
Si on ose dire qu'elle fait « comme une base », on récupère les coefficients de f sur cette « base » : $a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2.\pi} \cos(n.t).f(t).dt = \dfrac{1}{n^2}$.

Et la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_n)^2$ serait le carré de la norme de f.

Or, ce carré de nomer vaut $\dfrac{1}{\pi}.\int_0^{2.\pi} (f(t))^2.dt$ ce qui fait ici $\dfrac{2.\pi^4}{5}$.
Ce n'est pas le résultat demandé ? Normal...
On a oublié les composantes suivant les $\theta \longmapsto \sin(n.\theta)$.

∘109∘

Retrouvez sans effort que (dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$ pour le produit scalaire usuel) l'orthogonal du plan d'équation $x + y - 3.z = 0$ est $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3.\overrightarrow{k})$.

$x + y - 3.z = 0$ est l'équation d'un plan.
Mais elle s'écrit aussi $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$. Et c'est alors l'équation de l'orthogonal de $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3.\overrightarrow{k})$.
C'est tout. Ces ensembles ont la même équation, ils sont égaux.

Existe-t-il un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3, +, .)$ pour lequel l'orthogonal du plan d'équation $x + y - z = 0$ soit $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$?

On prend une base du plan : $(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$. On veut que ces deux vecteurs soient orthogonaux à $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.
Il suffit de demander que $(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ soit *orthϕnomee*.
On écrit la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On l'inverse : $T = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (calcul, ou expression de $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ à l'aide des tris vecteurs.
On calcule ${}^tT.T = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
La construction assure que c'est la matrice de Gram d'un produit scalaire. Et on vérifie que « être orthogonal à $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, c'est vérifier
$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ soit $x + y - z = 0$!

Existe-t-il un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3, +, .)$ pour lequel l'orthogonal du plan d'équation $x + y - z = 0$ soit $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$?

Le vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ est dans le plan ; il vérifie l'équation.
Ceci reviendrait alors à imposer que ce vecteur soit orthogonal à lui même...
C'est impossible.

∘110∘

Soit p un projecteur et n un endomorphisme nilpotent de $(\mathbb{R}^d, +, .)$. On suppose de plus $p \circ n = n \circ p$. On pose $f = p + n$. Calculez $Tr(f^k)$ pour tout entier naturel k.

La trace d'un projecteur est égale à son rang (sur une base adaptée, on l'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ si il projette sur un plan en effaçant une droite).
La trace d'une matrice nilpotente (sur une base adaptée, on a une matrice triangulaire supérieure $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ par exemple).
La trace est linéaire : $Tr(p + n) = Tr(p) + Tr(n) = rg(p)$.

On élève à la puissance k : $(p + n)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}.p^{k-i}.n^i$ car ils commutent.
Mais toutes les puissances de p donnent p (sauf une qui donne Id).
On isole un p tout seul (venant de p^k) et le reste est factorisable par n.
Exemple : $(p + n)^3 = p + 3.p.n + 3.p.n^2 + n^3$.
Le morceau factorisable par n est encore nilpotent, au pire de même indice que n :
$(n \circ truc)^r = n^r \circ truc^r$ car tout commute : $(3.p.n + 3.p.n^2 + n^3)^r = n^r \circ (3.p + 3.p.n + n^2)^r = 0 \circ (3.p + 3.p.n + n^2)^r = 0$.

On a donc la même forme $(p + n)^k = p + n'$ avec le même projecteur p et n' nilpotente.
On a donc $Tr((p + n)^k) = Tr(p)$ pour tout k... différent de 0.
Et 0 est à part : $Tr((p + n)^0) = Tr(Id) = \dim(E)$.

∘111∘

On note P l'ensemble des projecteurs de $(\mathbb{R}^n, +, .)$ *(n vaut au moins 2)*. Déterminez l'ensemble image de $P \times P$ par l'application $(p, q) \longmapsto Tr(p + q)$.
Montrez que l'ensemble image de $P \times P$ par l'application $(p, q) \longmapsto \det(p + q)$ est $\mathbb{R}$.
Quel est l'ensemble image de $P \times P$ par l'application $(p, q) \longmapsto Tr(p \circ q)$?

La trace est linéaire : $Tr(p + q) = Tr(p) + Tr(q)$. Et la trace d'un projecteur est égale à son rang. Elle peut aller de 0 à n.
La quantité $Tr(p + q)$ peut aller de 0 à $2.n$ (en restant entière) et elle peut prendre toutes les valeurs.

$Tr(P \times Q) = [0,\ 2.n] \cap \mathbb{N}$

Que dire du déterminant de la somme ?
Le déterminant d'un seul projecteur vaut 0 (non injectif) ou 1 (projecteur particulier Id).
Mais la somme ?
Regardons en taille 2. Un projecteur de rang 1 a pour trace 1 et déterminant 0.

Toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & \\ & 1-a \end{pmatrix}$ remplit la première condition.

Pour la seconde en plus : $\begin{pmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix}$. La condition est nécessaire, est elle suffisante ?

$\begin{pmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix}$

On additionne deux matrices de projecteur : une de ce type et une de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

la somme a pour déterminant $\begin{vmatrix} 1+a & a \\ 1-a & 1-a \end{vmatrix}$ ce qui fait $1 - a^2 - a.(1-a)$. Et ce $1-a$ peut parcourir $\mathbb{R}$ tout entier.

L'ensemble image est au moins égal à $]-\infty,\ +\infty[$ avec ces sommes $\begin{pmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Inutile d'en chercher plus : l'ensemble image est $\mathbb{R}$.

∘112∘

* * Combien y a-t-il de matrices carrées de taille 2 à coefficients entiers entre -2 et 2 ? Un ordinateur tire au hasard uniforme une de ces matrices.
• Montrez que la probabilité qu'elle soit symétrique est $1/5$.
• Montrez que la probabilité qu'elle soit diagonale est $1/25$.

L'univers des fait des $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec 5 choix pour chacun des quatre coefficients. Il y a 5^4 matrices. La liste ne sera pas donnée ici.

Les matrices symétriques sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ avec 5 choix pour chacun des trois coefficients.

Le rapport $\dfrac{cas\ favorables}{cas\ possibles}$ vaut 5^{3-4}.

Les matrices symétriques sont de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ avec 5 choix pour chacun des deux coefficients.

Le rapport $\dfrac{cas\ favorables}{cas\ possibles}$ vaut $\dfrac{5^2}{5^4}$.

• Montrez que la probabilité que ce soit une matrice de Gram est $2/125$.

Une matrice de Gram est symétrique : $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

Ses coefficients diagonaux sont strictement positifs : $\begin{pmatrix} 1\ ou\ 2 & b \\ b & 1\ ou\ 2 \end{pmatrix}$.

Et il faut ensuite que son déterminant soit strictement positif. En effet, $\det(G) = \det({}^t.T) = \det(T)^2$.
C'est aussi une inégalité de Cauchy-Schwarz. La condition $a.d > b^2$ est nécessaire, et suffisante.
On a assez de contraintes pour finalement dresser la liste :

$\begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & b \\ b & 2 \end{pmatrix}$
$1 - b^2 > 0$	$2 - b^2 > 0$	$2 - b^2 > 0$	$4 - b^2 > 0$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Le total des possibles vaut 10 et la probabilité vaut $\dfrac{10}{5^4} = \dfrac{2}{125}$. Pas nombreuses les filles...

• Quelle est la probabilité que ce soit une matrice de Gram, sachant qu'elle est symétrique *(probabilité sur un sous-univers)* ?
Les événements "Gram" et "symétrique" sont ils indépendants ? Les événements "Gram" et "diagonale" sont ils indépendants ?

	symétrique 125	non symétrique 500
Gram 10		0
pas Gram 615		

	diagonale 25	non diagonale 600
Gram 10		
pas Gram		

On se place donc sur l'univers réduit des matrices symétriques.
On compte encore $\frac{favorables}{possibles} = \frac{10}{125} = \frac{2}{25}$.
la proportion de matrices de Gram parmi les matrices symétriques est plus élevée que la proportion de matrices de Gram parmi toutes les matrices.
C'est normal, les matrices de Gram sont forcément symétriques par nature.

On complète d'ailleurs le tableau :

	symétrique 125	non symétrique 500
Gram 10	10	0
pas Gram 615	115	500

Le nombre de Gram étant de 10, le nombre de « pas Gram » est bien de $625 - 1\grave{a}$.
On vérifie les totaux en lignes et en colonnes.

On mesure $P(Gram) = \frac{10}{625}$

	Univers : 625
Gram	10
pas Gram	615

On a mesuré $P(G \mid S) = \frac{10}{125}$

	Univers réduit : 125
Gram	10
pas Gram	115

Et $P(G \mid \overline{S}) = 0$:

	symétrique 125
Gram	0
pas Gram	500

.

les proportions ne sont pas les mêmes dans les grand univers que dans chacun des univers coupés

	symétrique	
Gram	10	
pas Gram	115	

ce ne sont pas des événements indépendants.

Et avec des matrices diagonales ? Cette fois, il y a des matrices diagonales de Gram, et des matrices non diagonales de Gram.

Mais garde-t-on les mêmes proportions ?

	diagonale 25	non diagonale 600
Gram 10	3	7
pas Gram 615	22	593

On a trouvé trois matrices à la fois de Gram et diagonales.
Par soustraction, 7 sont de Gram mais non diagonales.
On avait 25 matrices diagonales, il ne reste 22 qui sont diagonales sans être de Gram, à cause de nombres négatifs ou nuls sur la diagonale.
La dernière case se calcule par soustraction.

On calcule des probabilités

	diagonale 25	non diagonale 600
Gram 10	3	7
pas Gram 615	22	593
$P(G) = \frac{10}{626}$	$P(G \mid D) = \frac{3}{25}$	$P(G \mid \overline{D}) = \frac{7}{600}$

ce ne sont pas les mêmes, le fait d'être diagonale (ou non) influence la probabilité d'être de Gram.
Les événements ne sont pas indépendants.
D'ailleurs, $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 22 & 593 \end{vmatrix}$ est non nul.
Les colonnes de la matrice ne sont pas proportionnelles.

∘113∘ ♡ a, b et c sont trois réels. On définit : $R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Montrez que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de R. Montrez que si R est une matrice de rotation de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ espace vectoriel euclidien canonique alors a, b et c sont les racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + p$ *(vérifiez qu'il ne sert à rien de calculer* $\det(A)$*)*.

On a bien $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = a + b + c$. C'est un vecteur propre, et $a + b + c$ est sa valeur propre.
La condition nécessaire et suffisante est ${}^t R.R = I_3$ qui donne
$\begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & a.b+a.c+b.c & a.b+a.c+b.c \\ a.b+a.c+b.c & a^2+b^2+c^2 & a.b+a.c+b.c \\ a.b+a.c+b.c & a.b+a.c+b.c & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix} = I_3$.
Tout se réduit à $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $a.b + a.c + b.c = 0$.

Mais je préfère l'obtenir par « les vecteurs colonne sont normés : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$
deux à deux orthogonaux : $a.b + a.c + b.c = 0$
On reporte dans ce que va nous dire Viète : $(a + b + c)^2 = 1 + 2.0$.
On déduit que $a + b + c$ vaut 1 ou -1.
On s'oriente vers deux formes possibles en fonction du choix de signe de $a + b + c$:
$X^3 - 1.X^2 + 0.X - p$ ou $X^3 + 1.X^2 + 0.X - p$

Mais j'ai un indice : $a + b + c$ est valeur propre de notre isométrie.
Et on veut une isométrie directe. C'est donc que cette valeur propre vaut 1 (spectre $[1,\ e^{i.\theta},\ e^{-i.\theta}]$).
C'est donc que $a + b + c$ vaut 1.

Sinon, si on a du courage, on calcule le déterminant : $a^3 + b^3 + c^3 - 3.a.b.c$.
On y retrouve $(a + b + c)^3 - 3.(a^2.b + a.b^2 + a^2.c + a.c^2 + b^2.c + b.c^2) - 6.a.b.c - 3.a.b.c$.
On arrange : $\det(R) = (a + b + c)^3 - 3.(a.b + a.c + b.c).(a + b + c) = (a + b + c)^3$.
Comme l'isométrie est directe, son déterminant vaut 1 : $a + b + c = 1$.

Viète ne garde donc que $X^3 - X^2 + 0.X - p$ et on ne sait rien de p (si ce n'est que c'est le produit des racines).

L'énoncé est mal fichu, il le note $-p$ et le polynôme devient $X^3 - X^2 + p$.

On pose alors $\gamma = \dfrac{3.a - 1}{2}$ *(justifiez pourquoi on pose cela)*. Montrez que $4.\gamma^3 - 3.\gamma$ est entre -1 et 1. Déduisez que p est entre 0 et $4/27$.

Qui est ce γ ? Réfléchissez. Une matrice de rotation, c'est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$.En tout cas, sur une base bien choisie.

Une matrice de rotation est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$.. Elle a donc la même trace que cette matrice : $1 + 2.\cos(\theta)$.

On égalise donc $3.a = 1 + 2.\cos(\theta)$.
On extrait $\gamma = \dfrac{3.a - 1}{2} = \cos(\theta)$.

Et on comprend le truc : $4.\gamma^3 - 3.\gamma = \cos(3.\theta)$.
Il est entre -1 et 1.

On remplace : $4.\left(\frac{3.a-1}{2}\right)^3 - 3.\frac{3.a-1}{2}$ est entre -1 et 1.

On calcule : $-1 \leqslant \dfrac{27.a^3 - 27.a^2 + 2}{2} \leqslant 1$.

Or, comme par hasard, a est racine du polynôme de racines a, $b$et c.
a vérifie donc $a^3 - a^2 + p = 0$ et si on veut : $27.a^3 - 27.a^2 = -27.p$.

On reporte : $-1 \leqslant \dfrac{-27.p+2}{2} \leqslant 1$.
p est entre $\dfrac{4}{27}$ et 0.

Que pouvez vous dire dans chacun des deux cas $p=0$ et $p=4/27$.
Réciproquement, montrez que si a, b et c sont racines d'une équation X^3-X^2+p avec p positif plus petit que $4/27$ alors A est une matrice de rotation *(axe ? angle ?)*.
Exercice classique de l'écrit des concours CCP et E3A, classique de l'oral des concours Centrale et Mines-Ponts.

Si p vaut 0, ceci signifie $\cos(3.\theta)=1$. L'angle θ est soit nul, soit égal à $\dfrac{2.\pi}{3}$, soit égal à $\dfrac{-2.\pi}{3}$.
Et l'équation de racines a, b et c est simple et donne comme liste de racines 0, 0 et 1.
Les trois matrices sont classiques : $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.
Si p vaut $\dfrac{4}{27}$, c'est que $\cos(3.\theta)$ vaut -1. Et θvaut $\dfrac{\pi}{3}$, $\frac{-\pi}{3}$ ou π. On écrit les matrices obtenues.

Réciproquement, tout remonte très bien.
L'axe est $Vect(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})$ et l'angle est θ défini par $3.a=1+2.\cos(\theta)$.

∘114∘ p et q sont deux projecteurs de $\mathbb{R}^3$, vérifiant $Tr(p+q)=4$. Montrez alors $Im(p)\cap Im(q)\neq\{\overrightarrow{0}\}$. Déduisez que 2 est valeur propre de $p+q$.

La trace est linéaire. On a donc $Tr(p)+Tr(q)=4$.
La trace d'un projecteur est égale à son rang, car on peut le diagonaliser sous la forme $P.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.P^{-1}$ ou $P.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.P^{-1}$ (pour les formes non triviales).
On donc $rg(p)+rg(q)=4$.
Ou encore $\dim(Im(p))+\dim(Im(q))=4$.
Par la formule de Grassmann appliquée à $Im(p)+Im(q)$ (dont la dimension ne saurait excéder 3), on trouve $\dim(Im(p)\cap Im(q))\geqslant 1$.
L'intersection ne se réduit pas au seul vecteur nul. [10].

Prenons un vecteur $\overrightarrow{a}$ non nul dans $Im(p)\cap Im(q)$.
Et calculons $p(\overrightarrow{a})$ et $q(\overrightarrow{a})$.
Pour un projecteur p, $p(\overrightarrow{a})=\overrightarrow{a}$ dès que $\overrightarrow{a}$est dans le noyau. En effet, on retient la formule capitale : $Im(p)=Ker(Id-p)$.
On a de même $q(\overrightarrow{a})=\overrightarrow{a}$.

Le vecteur $\overrightarrow{a}$ non nul vérifie $p+q)(\overrightarrow{a})=\overrightarrow{a}$.
Si ça, ce n'est pas « vecteur propre de valeur propre 2 » !

∘115∘ ♡ Montrez que la dérivation est un endomorphisme sur l'espace des solutions de l'équation $y''+a.y'+b.y=0$. Donnez sa trace et son déterminant.

On est sur un espace $Vect(t\longmapsto e^{\alpha.t},\ t\longmapsto e^{\beta.t})$ avec α et β racines de l'équation caractéristique.

On écrit la matrice de la dérivation sur la base écrit ci dessus : $\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}$. La trace vaut $\alpha+\beta$ et c'est $-a$.
Le déterminant vaut $\alpha.\beta$ et c'est b.

Mais si on a une racine double ? La base « naturelle » est $(t\longmapsto e^{\alpha.t},\ t\longmapsto t.e^{\alpha.t})$. La matrice est $\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}$.
La trace est $2.\alpha$ qui vaut encore $-a$ et le déterminant est encore b.

Et si on le joue « physicien » dans le cas où on a des valeurs propres complexes $\dfrac{-a+i.\omega}{2}$ et $\dfrac{-a+i.\omega}{2}$.

10. sous-espace réduit au vecteur nul = dimension 0, et sinon, la dimension vaut au moins 1

On prend pour base $(t \longmapsto e^{-a.t/2}.\cos(\omega.t),\ (t \longmapsto e^{-a.t/2}.\sin(\omega.t))$.

La matrice est alors $\begin{pmatrix} -\frac{a}{2} & \omega \\ -\omega & -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$, la trace est encore $a-$ et le déterminant b.

∘116∘

♡ Montrez que $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ forme une base de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Est elle orthogonale pour le produit scalaire $(A, B) \longmapsto Tr({}^tA.B)$?
Donnez une matrice orthogonale aux trois premières pour ce produit scalaire.
Construisez un produit scalaire sur $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ pour lequel cette base est orthonormée *(en définissant par exemple le produit scalaire de* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$*)*. Calculez la norme de la matrice unité.
Existe-t-il S telle que ce produit scalaire soit $(A, B) \longmapsto Tr({}^tA.S.B)$? Donnez une base orthonormée de l'espace vectoriel des matrices de trace nulle. De toutes les matrices T de trace nulle, laquelle est la plus proche de I_2 *(c'est à dire, laquelle minimise $|T - I_2|^2$?)*.

A faire.

Un élève dit « j'ai voulu calculer la trace et le déterminant de $M \longmapsto M^2$ de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ dans lui même. J'ai donc calculé la matrice de cet endomorphisme sur la base canonique $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Ayant pour images $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, j'ai trouvé la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de déterminant nul et de trace 2.
Mais j'ai pris ensuite la base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et j'ai trouvé la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. La trace a changé. Or le cours dit que la trace d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie.. »

Tous ses calculs d'images sont exacts.
Mais cet élève est un crétin.
L'application $M \longmapsto M^2$ n'est pas linéaire. Aucun des calculs de matrices n'a donc de sens !

∘117∘

A est une matrice de taille 3 vérifiant $A^2 = A$ *(projection)*. Montrez que $M \longmapsto A.M$ est un endomorphisme de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$. Donnez son déterminant en fonction de celui de A. Déterminez sa trace dans le cas $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminez sa trace dans le cas général.

On va poser $\varphi = M \longmapsto A.M$. Elle prend un élément de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ et retourne un élément du même espace.
Et elle est linéaire, par distributivité de la multiplication matricielle sur l'addition : $A.(\alpha.M + \beta.N) = \alpha.A.M + \beta.A.N$ en quantifiant.

On constate que A et I_3 ont la même image : $A \longmapsto A.A + A$ et $I_3 \longmapsto A.I_3 = A$.
Notre endomorphisme de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ n'est pas injectif. Son déterminant est nul.

Sauf si A est déjà égale à I_3. mais dans ce cas, φ est l'identité. Et son déterminant vaut 1.

On se place sur la base canonique et on calcule les images de neuf vecteurs de la base canonique, qu'on décompose :

	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
image de	$\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$

La trace vaut 6. Et c'est vrai aussi pour A matrice de projecteur de rang 2. En changeant de base.

∘118∘

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (a est un réel fixé). Déterminez son rang. Pour quelles valeurs de a est elle diagonalisable ?

Il y a au moins un vecteur colonne non nul, le rang vaut au moins 1.
De par la dernière ligne, les deux derniers vecteurs sont indépendants. le rang vaut au moins 2.
Et de par le format, il ne peut dépasser 3.
On calcule un déterminant pour savoir si il vaut 2 ou 3 : $a^2 + a$.

$a = 0$	$a = -1$	autres
rang 2, une colonne nulle	rang 2 : noyau $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	rang 3

On cherche son polynôme caractéristique : $X^3 - X^2 - (a^2 + a + 1)$
Trois valeurs propres : -1, $-a$ et $a + 1$.

∘119∘

Soit f un endomorphisme de $(E, +, .)$. Montrez que f est injective si et seulement si on a $Ker(f \circ g) = Ker(g)$ pour tout autre endomorphisme g.
Pour un des sens c'est direct. Pour l'autre, bien choisir g.

Sens direct. On suppose f injective.
On a toujours $Ker(g) \subset Ker(f \circ g)$ (dès que $g(\overrightarrow{a})$ est nul, on peut composer par ce qu'on veut, on trouve $\overrightarrow{0}$).
Ensuite, soit $\overrightarrow{a}$ dans $Ker(f \circ g)$. On traduit $f(g(\overrightarrow{a})) = \overrightarrow{0}$. Par injectivité de f : $g(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$. On reconnaît que $\overrightarrow{a}$ est dans $Ker(g)$.

Sens indirect. Si on a $Ker(f \circ g) = Ker(g)$ pour tout g, alors en particulier pour $g = Id_E$, on a $Ker(f) = Ker(Id) = \{\overrightarrow{0}\}$. Que demander de plus !

∘120∘

$*$ $\heartsuit^2$ ou $\clubsuit^2$ suivant que vous êtes M ou PSI On travaille avec les entiers de 0 à 2 pour l'addition et la multiplication modulo 3.

1- Combien y a-t-il de vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et combien de matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Combien de matrices de rang 0 ?

Pour les matrices de rang 1, je dis "*une colonne* $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ *(9 choix) puis un de ses trois multiples* $\begin{pmatrix} 0.a \\ 0.c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1.a \\ 1.c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2.a \\ 2.c \end{pmatrix}$, *donc* 27 *matrices*". Rectifiez l'erreur et donnez le bon nombre.

2- Complétez alors

$rg(M)=0$	$rg(M)=1$	$\det(M)=0$	$\det(M)=1$	$\det(M)=2$
			24	

3- Calculez l'espérance la variance de la variable aléatoire déterminant puis de la variable trace pour un tirage aléatoire uniforme de matrices.

4- Pour trouver combien il y a de matrices semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, je fais le raisonnement suivant : "*ce sont les matrices de la forme* $P.M.P^{-1}$, *or, il y a* 48 *matrices* P *possibles, d'où* 48 *matrices semblables à* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$". C'est faux, trouvez l'erreur, et dénombrez les douze matrices semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5- Profitez en pour diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6- Je dis qu'il y a douze matrices de projecteur de rang 1. Confirmez le en en donnant la liste. Ou alors complétez l'idée : les quatre droites sont $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ensuite...

7- Montrez que la probabilité de tirer une matrice de projecteur est de $14/81$.

8- Combien de matrices sont semblables à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? Calculez la probabilité de tirer une matrice nilpotente.

9- Calculez la probabilité de tirer une matrice de permutation.

10- Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. Élevez la quand même à la puissance 2016.

Combien de matrices ont pour polynôme caractéristique

X^2	X^2+X	$X^2+2.X$	X^2+1	X^2+2	X^2+X+1	$X^2+2.X+1$	$X^2+2.X+2$	X^2+X+2

11- Calculez la probabilité de trouver une matrice permutables avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

12- Voulant estimer la probabilité que deux matrices tirées au hasard soient permutables, sans me prendre la tête, j'écris un script `Python`. Complétez le :

```
def alea() :
....a = randrange(3)
....b =
....return([[a,b],[c,d]])
def produit(A, B) :
....a = A[0][0]*B[0][0]+A[0][1]*B[1][0]
....b =
....return([[a,b],[c,d]])
compt = 0
for Na in range(810) :
....A = alea()
....for Nb in range(810) :
```

ou alors écrivez votre propre script. On trouve environ 14 pour cent.

∘121∘

On définit $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & +y & +z \\ x & -2.y & +2.z \\ 2.x & -y & +3.z \end{pmatrix}$. Donnez son rang, son noyau *(base, équations cartésiennes)*, son image *(base, équation cartésienne)*.

Montrez que l'ensemble des endomorphismes h vérifiant $f \circ h = 0_{\mathbb{R}^3}$ est un espace vectoriel dont les éléments sont de rang 0 ou 1 (et comme toujours, il y a là deux questions...). Donnez une base de cet espace vectoriel.

Pour « espace vectoriel », on va montrer « sous-espace vectoriel de $(L(E), +, .)$.
L'application nulle vérifie la propriété.
Si g et h vérifient $f \circ g = f \circ h = O$,alors par linéarité de f, on a aussi $f \circ (g+h) = 0$ et $f \circ (\alpha.h) = 0$ endomor-

phisme nul).

Ce sont des endomorphismes h vérifiant $Im(h) \subset Ker(f)$.
Comme $Ker(f)$ est de dimension 1, $Im(h)$ est de dimension 0 ou 1.
Et le rang est la dimension de l'image...

La condition $Im(h) \subset Ker(f)$ est nécessaire et suffisante.
On cherche donc des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 4.a & 4.b & 4.c \\ -a & -b & -c \\ -3.a & -3.b & -3.c \end{pmatrix}$.
On a un espace vectoriel de dimension 3 (dans $L(\mathbb{R}^3), +, .)$ qui est de dimension 9).
On peut en donner une base.

> Montrez que l'ensemble des endomorphismes g vérifiant $g \circ f = 0_{\mathbb{R}^3}$ est un espace vectoriel dont les éléments sont de rang 0 ou 1. Donnez une base de cet espace vectoriel.

Cette fois, on a encore un sous-espace vectoriel de $(L(\mathbb{R}^3), +, .)$. Le morphisme nul vérifie la propriété.
Si on part de $g \circ f = 0$ et $h \circ f = 0$, on a sans même avoir besoin de linéarité : $(g + h) \circ f = 0$ et $\alpha.h \circ f = 0$.
La condition nécessaire et suffisante est $Im(f \subset Ker(g)$.
$Ker(g)$ est donc au moins de dimension 2.
Par soustraction dans la formule du rang, $rg(g)$ est au plus de dimension 1.

La condition sur notre matrice est $M.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
En nommant C_1, C_2et C_3 les trois colonnes de M, on a à la fois $C_1 + C_2 + 2.C_3 = 0$ et $C_1 = 2.C_2 + C_3$.
On exprime C_2 et C_3 à l'aide de C_1.
Toute matrice est déterminée par le choix des trois coefficients de C_1. On a un espace de dimension 3.
Les matrices sont de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & -\alpha \\ \beta & \beta & -\beta \\ \gamma & \gamma & -\gamma \end{pmatrix}$ si vous y tenez et si vous voulez construire une base.

∘122∘

> ♡ Déterminez le rang de l'application $P \longmapsto 4.P(X) - 3.X.P'(X)$ après en avoir prouvé la linéarité de $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$ dans lui même et en avoir cherché le noyau.
> Déduisez que pour tout polynôme Q il existe P vérifiant $Q = 4.P - 3.X.P'$.
> Est il vrai que pour tout Q il existe P vérifiant $Q = 4.P - X.P'$?

On l'appelle φet on dit que
- $\varphi(P)$ existe
- $\varphi(P)$ est un polynôme
- $\varphi(P + Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$ pour tout couple (P, Q) [a]
- $\varphi(\lambda.P) = \lambda.\varphi(P)$ pour tout couple (P, λ)

a. évitez de les appeler P et P' !

On détermine son noyau en résolvant $4.P(X) = 3.X.P'(X)$ d'inconnue P.
On peut poser $P = \sum_{k=0}^{d} a_k.X^k$ et identifier rien que sur le terme de plus haut degré : $4.a_k = 3.k.a_k$.C'est impossible.
On peut aussi résoudre l'équation différentielle : $P \in Vect(x \longmapsto x^{\frac{4}{3}}) \cap \mathbb{R}[X]$.
Le noyau est réduit à 0.

Par formule du rang, l'image est de dimension $n + 1$.
Qui a oublié que $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$ est de dimension $n + 1$? Qui n'a envie de n'intégrer que des écoles à 10.000 euros de frais de scolarité par an ?

L'endomorphisme est donc bijectif. Tout élément Q admet un unique antécédent.
On ne le calcule pas ici... Ce n'est pas demandé.

En revanche, avec $P \longmapsto 4.P(X) - X.P'(X)$, le noyau est $Vect(X^4)$.
Et l'image n'est que de dimension n.
Il y aura donc une condition [11] sur Q pour qu'il existe P vérifiant $Q = 4.P - X.P'$.
Et les solutions ne seront définies qu'à un multiple de X^4 près.
On le sait d'avance, avant même d'écrire le système. Avantage des maths sur l'approche brutale et calculatoire.

---

11. et une seule

∘123∘ * Soit f un endomorphisme de $(E,+,.)$, montrez : $Im(f^2)=Im(f^4)\Leftrightarrow Im(f^2)=Im(f^3)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $Im(f^2)=Im(f^4)$.
On doit prouver $Im(f^2)\subset Im(f^3)$ et aussi $Im(f^2)\supset Im(f^3)$.
• L'inclusion $Im(f^3)\subset Im(f^2)$ n'a pas besoin de l'hypothèse. C'est le résultat général $Im(g\circ f)\subset Im(g)$, avec les $g(f(\overrightarrow{a}))$ qui sont des $g(\overrightarrow{b})$ particuliers.
• Prenons $\overrightarrow{b}$ dans $Im(f^2)$. On l'écrit $\overrightarrow{b}=f^2(\overrightarrow{a})$ pour un $\overrightarrow{a}$ bien choisi.
Mais alors $f(\overrightarrow{a})$ est dans $Im(f)$. par l'hypothèse initiale, il est dans $Im(f^2)$. On peut l'écrire $f^2(\overrightarrow{c})$ pour un $\overrightarrow{c}$ bien choisi.
On a alors $\overrightarrow{b}=f(f(\overrightarrow{a}))=f(f^2(\overrightarrow{c}))$ et le voilà dans $Im(f^3)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $Im(f^2)=Im(f^3)$.
On doit prouver $Im(f^2)\subset Im(f^4)$ et aussi $Im(f^2)\supset Im(f^4)$.
• On a déjà $Im(f^4)\subset Im(f^2)$. Sans utiliser l'hypothèse.
• Prenons $\overrightarrow{b}$ dans $Im(f^2)$. Il est donc dans $Im(f^3)$ par hypothèse.
On l'écrit donc $\overrightarrow{b}=f^3(\overrightarrow{c})$ pour un $\overrightarrow{c}$ bien choisi. Mais $f^2(\overrightarrow{c})$ est dans $Im(f^2)$ donc dans $Im(f^3)$ par hypothèse.
Il s'écrit donc $f(\overrightarrow{d})$ pour un $\overrightarrow{d}$ bien choisi.
On a finalement $\overrightarrow{b}=f^3(\overrightarrow{c})=f(f^2(\overrightarrow{c}))=f(f^3(\overrightarrow{d}))$. Il est das $Im(f^4)$.

Un raisonnement sans effort. mais un raisonnement.
Ce qui gêne certains : en DS de physique et SII on a besoin surtout de la partie analyse des maths (intégrales, équations différentielles..)
C'est à dire du calcul.
pour faire des sciences on a besoin de la partie algébrique des maths
C'est à dire le raisonnement.

∘124∘ ♡ Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel $(E,+,.)$ de dimension finie. On suppose : $g\circ f=0$ et $f+g$ bijective.
Montrez : $Im(f)\subset Ker(g)$, $Ker(f)\cap Ker(g)=\{\overrightarrow{0}\}$.
Déduisez : $\dim(Ker(f))+\dim(Ker(g))\leqslant\dim(E)$ et enfin $\dim(Im(f))+\dim(Im(g))=\dim(E)$.
(on utilisera la formule du rang : $dim(Ker(f)+dim(Im(f))=dim(E)$)

∘125∘ Soit ϕ un produit scalaire sur $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ tel que la famille suivante soit une base orthonormée : $(\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix})$. Calculez la norme de la matrice unité. Calculez l'angle entre $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. Existe-t-il S telle que ce produit scalaire soit $(A,B)\longmapsto Tr({}^tA.S.B)$?

Que cette famille soit une base de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ me semble normal ; elle a le bon cardinal, et elle permet de reconstruire la base canonique[12].
On ne va pas expliciter ϕ plus que ça. On va dire que ϕexiste.
Et on écrit alors $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}.\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}.\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}.\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}.\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ (système ou tâtonnements).
Le « vecteur » I_2 a pour composantes $\left(\frac{-1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{-1}{3}\right)$ sur une base orthonormée, sa norme vaut $\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}$. Ce qui fait $\frac{\sqrt{10}}{3}$.
Pourquoi pas...

On décompose aussi $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=-\frac{2}{3}.\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}.\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}.\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}.\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}.\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}.\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}.\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}.\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$
Si on calcule le *prϕduit* scalaire des deux vecteurs, les termes en $\phi(\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix})$ s'en vont, d'autres (une matrice contre elle même) valent 1.
On a donc $\phi(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix})=\frac{-2}{3}.\frac{1}{3}+\frac{-2}{3}.\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{-2}{9}$.

---

12. additionnez les toutes, divisez par 3, vous avez $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, et ensuite, soustrayez une à une les matrices de la famille

On a aussi $\phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$ pareil pour l'autre.

On effectue $\dfrac{\frac{-2}{8}}{\frac{\sqrt{7}}{3}.\frac{\sqrt{7}}{3}}$. Et si vous aimez $Arccos\left(\dfrac{-2}{7}\right)$ dite le moi.

∘126∘

f et g sont deux endomorphismes de $(\mathbb{R}^n, +, .)$. Montrez :
$\big(rg(f+g) = rg(f) + rg(g)\big) \Leftrightarrow \big(Im(f) \cap Im(f) = \{\overrightarrow{0}\}$ *et* $Ker(f) + Ker(g) = \mathbb{R}^n\big)$

A faire.

∘127∘

♡ Montrez que $(A, B) \longmapsto Tr({}^tA.B)$ est un produit scalaire sur $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$. Calculez la norme de $\dfrac{1}{3}.\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ *(notée R)*. Donnez une matrice non nulle orthogonale à R.

La première question est une question de cours.
Forme : formats compatibles.
Symétrique : $Tr({}^tA.B) = Tr({}^t({}^tA.B)) = Tr({}^tB.A)$.
Bilinéaire : $Tr({}^tA.(\beta.B + \gamma.C)) = \beta.Tr({}^tA.B) + \gamma.Tr({}^tA.C)$.
Positive : $Tr({}^tA.A) = \sum_{i,j}(a_i^j)^2$.
Défini positive : $(\sum_{i,j}(a_i^j)^2 = 0) \Rightarrow (\forall i, \forall j,\ a_i^j = 0$.

Pour la norme, on calcule le produit $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ (seuls les termes diagonaux nous intéressent).
Il y a un $\dfrac{1}{3}$ dans R et un dans ${}^tR$: ${}^tR.R = I_3$.
On a donc $||R|| = \sqrt{3}$

On veut une matrice vérifiant $Tr({}^tA.R) = 0$.
Inutile de poser des coefficients partout. On met plein de 0. Quand même pas 9, mais pas loin :
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .La trace est nulle. la transposée de la matrice écrite est « orthogonale à R ».

Montrez que $M \longmapsto R.M$ et $M \longmapsto M.R$ sont deux isomorphismes de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ qui préservent les normes.

Existence de l'application (et endo) : formats compatibles.
Linéarité : distributivité de la multiplication matricielle.
Bijectivité : on connait l'application réciproque : $N \longmapsto R^{-1}.N$ pour la première et $N \longmapsto N.R^{-1}$ pour la seconde.

On doit ensuite comparer la norme de M ($\sqrt{Tr({}^tM.M)}$) et celle de son image.
On calcule donc $\sqrt{Tr({}^t(R.M).(R.M)} = \sqrt{Tr({}^tM..{}^tR.R.M} = \sqrt{Tr({}^tM.M)}$ car ${}^tR.R = I_3$.

De même $\sqrt{Tr({}^t(M.R).(M.R)} = \sqrt{Tr({}^tR..{}^tM.M.R} = \sqrt{Tr(R.{}^tR..{}^tM.M} = \sqrt{Tr({}^tM.M)}$ en utilisant aussi cette fois $Tr(P.Q) = Tr(Q.P)$.

∘128∘

♡ Construisez un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^2, +, .)$ tel que la base $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j})$ soit orthonormée (calculez par exemple $|\overrightarrow{i}|$, $|\overrightarrow{j}|$ et le produit scalaire de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$).

La chose semble cohérente, $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j})$ est une base.
On a d'ailleurs les formules de changement de base : $x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} = \dfrac{2.x+1}{3}.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) + \dfrac{x-y}{3}.(\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j})$ (petit système ou inversion sans se prendre la tête de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$).
On va nommer $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ nos deux nouveaux vecteurs de base.

On calcule alors pour deux vecteurs

$\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = \phi\Big(\frac{2.x+1}{3}.\overrightarrow{e_1} + \frac{x-y}{3}.\overrightarrow{e_2},\ \frac{2.x+1}{3}.\overrightarrow{e_1} + \frac{x-y}{3}.\overrightarrow{e_2}\Big)$.On développe par multilinéarité.
Les deux termes $\phi(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1})$ et $\phi(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2})$ valent 1.
Les deux termes $\phi(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et $\phi(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1})$ sont nuls.
Il reste $\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = \frac{(2.x+y).(2.x'+y')}{9} + \frac{(x-y).(x'-y')}{9}$
On simplifie au maximum : $\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = \frac{5.x^2+2.y^2+(x'.y+x.y')}{9} = \frac{1}{9}.\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

On a construit une matrice symétrique, c'est bien parti. Et ses valeurs propres sont positives.

On vérifie	$\frac{1}{9}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$	$\frac{1}{9}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$	$\frac{1}{9}.\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1$

On pouvait aussi partir de $\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

et imposer	$\frac{1}{9}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$	$\frac{1}{9}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$	$\frac{1}{9}.\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1$

Trois équations, trois inconnues, c'est bon, surtout que le déterminant 3 sur 3 est non nul...

∘129∘

On note $(E, +, .)$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 2. Montrez que $(A,\ B) \longmapsto Tr({}^tA.B)$ est un produit scalaire sur E.
Soit S une matrice réelle symétrique à spectre strictement positif *(* $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ *avec a et c strictement positifs ainsi que* $a.c - b^2$*)*. Montrez que $(A,\ B) \longmapsto Tr({}^tA.S.B)$ *(noté* ϕ_S*)* est aussi un produit scalaire sur E.

La première question est du cours, je ne vais pas la faire six fois...
Quoique.

Non, je profite de la place ici pour montrer que la matrice réelle $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ se diagonalise toujours.
On cherche son polynôme caractéristique $X^2 - (a+c).X + (a.c - b^2)$.
Le discriminant de celui ci vaut $(a-c)^2 + 4.b^2$ [a]
Il est positif ou nul. On a donc deux valeurs propres.
Plus précisément : si on part de $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, elle est déjà diagonale, donc diagonalisable en elle même, via $P = I_2$.
sinon, • on a deux valeurs propres réelles $\frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4.b^2}}{2}$ et $\frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4.b^2}}{2}$
• chaque valeur propre apporte un vecteur propre
• deux vecteurs propres (indépendants car de valeurs propres distinctes), on a une base de vecteurs propres (ce qui permet de créer une matrice de passage P).

a. si si, faites le calcul, c'est pas à moi de tout faire

Aparté
Si les deux valeurs propres sont positives,
• la trace $a+c$ est positive (somme des valeurs propres)
• le déterminant est positif (somme des valeurs propres)

Réciproquement, si le déterminant est positif, les deux valeurs propres sont de même signe (produit de deux termes).
Maintenant qu'on les sait de même signe, c'est leur somme qui donne le signe.
On a donc bien équivalence « deux valeurs propres positives »
« déterminant et trace positif.ve.s »

Passons en à $(A,\ B) \longmapsto Tr({}^tA.S.B)$.

Forme	Les formats sont compatibles, on peut calculer cette trace de matrice 2 sur 2 qu'est ${}^tA.S.B$.
Symétrique	Partant de $Tr({}^tM) = Tr(M)$, on a $Tr({}^tA.S.B) = Tr({}^tB.{}^tS.A)$ (oui, on utilise aussi ${}^p.Q = {}^t Q.{}^tP$ et ${}^t({}^tP) = P$). Sachant ensuite que S est symétrique $Tr({}^tA.S.B) = Tr({}^tB.S.A)$.
(Bi)linéaire	Par symétrie, on ne teste que par rapport au second vecteur : $Tr({}^tA.S.(\beta.B + \gamma.C)) = \beta.Tr({}^tA.S.B) + \gamma.Tr({}^tA.S.C)$ (merci de quantifier $\forall \ldots$) On peut aussi dire qu'on a le produit scalaire usuel de A et $S.B$, et c'est linéaire par rapport à A.
Positive	On calcule $Tr({}^tA.S.A)$ et tous calculs faits avec $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $a.x^2 + 2.b.x.z + c.z^2 + a.y^2 + 2.b.t.y + c.t^2$ On voit nettement la somme de deux termes tels que $a.x^2 + 2.b.x.z + c.z^2$ dont on se dit que chacun doit être positif. a est positif, le trinôme en x a un coefficient dominant positif, et un discriminant négatif $((4.b^2 - 4.a.c).z^2$, relisez l'hypothèse sur la matrice S). Il est de signe constant positif. Ou nul, mais... L'autre terme $a.y^2 + 2.b.t.y + c.t^2$ est de la même forme, positif...
Défini p.	Si $Tr({}^tA.S.A)$ est nulle (féminin, c'est une trace), alors chaque terme positif ou nul $a.x^2 + 2.b.x.z + c.z^2$ et $a.y^2 + 2.b.t.y + c.t^2$ doit être nul, et d'après l'étude « trinôme du second degré », la seule possibilité est $\Delta = 0$, donc $z = t = 0$ puis $x = y = 0$.

Pour quelle(s) matrice(s) S la base canonique est elle orthonormée pour ϕ_S ?

Une réponse possible est $S = I_2$ puisqu'alors on retrouve le produit scalaire usuel sur $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ pour lequel les matrices de la base canonique sont orthogonales entre elles, et de norme 1.
Mais après tout, il y a peut être d'autres solutions.
Calculons quand même quelques normes et produits scalaires :

$Tr(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = a$	$Tr(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = a$	$Tr(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = c$	$Tr(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
	$Tr(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = b$	et autres	

On aboutit à $a = c = 1$ et $b = 0$.
Seule la matrice I_2 convient.

Pour quelle(s) matrice(s) S la base $(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ est elle orthogonale ? Même question avec orthonormée.

Cette fois, on recommence les calculs :

$Tr(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = a + 2.b + 2.c$	$Tr(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = a + 2.b + 2.c$	$Tr(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
	$Tr(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = 2.b + 2.c$	et autres

On exige à la fois $a + 2.b + 2.c = 1$, $2.a + 2.b + c = 1$ donc $a = c$ et $b = (1 - 3.a)/2$
et $2.b + 2.c = 0$ puis $a + 3.b + c = 0$ et $2.b + 2.a = 0$.
Et là, ça ne colle plus...
Il n'y a pas de matrice S possible.

◦130◦ **Montrez que $(P,\ Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0).Q^{(k)}(0)$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$. Donnez une base orthonormée.**

Forme	La somme est un réel.
Symétrique	La multiplication est commutative dans $\mathbb{R}$.
(Bi)linéaire	La dérivation est linéaire $\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0).(\alpha.Q+\beta.R)^{(k)}(0) = \alpha.\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0).Q^{(k)}(0) + \beta.\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0).R^{(k)}(0)$
Positive	Quand on calcule $\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0).P^{(k)}(0)$ on a une somme de carrés de réels.
Défini p.	On prend P, on suppose que cette somme est nulle. C'est forcément que chaque terme est nul. Chaque $P^{(k)}(0)$ pour k de 0 à n est nul. Et alors ? Mais si on écrit $P(X)=\sum_{i=0}^{n} a_i.X^i$, on trouve $P^{(k)}(0)=k!.a_k$. C'est donc que chaque a_k est nul. Et P est le polynôme nul. Question : qui s'est arrêté fièrement à « tous les $P^{(k)}(0)$ sont nuls, alors que le but est bel et bien « P est nul ». D'autre part, vous voyez le rapport entre $P^{(k)}(0)=k!.a_k$ et la formule de Taylor ?

Si on regarde les polynômes 1, X, X^2 jusqu'à X^n, ils sont deux à deux orthogonaux pour ce produit scalaire.
En effet, quand on met X^i face à X^j, leurs dérivées en 0 sont toutes nulles, sauf la i^{emme} pour l'un et la j^{ieme} pour l'autre. mais ces deux termes ne seront pas e »en vis à vis » dans la somme de 0 à n.

Mais ces vecteurs ne sont pas normés. C'est $\dfrac{X^i}{\sqrt{i!}}$qu'il faut prendre. [13].

> $(P,\ Q)\longmapsto \sum_{k=0}^{3} P^{(k)}(k).Q^{(k)}(k)$ est il un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$?

Le lot de propriétés élémentaires passe bien.
Tout ce qui pose problème est « défini positif ».

On prend P et on suppose $\sum_{k=0}^{3}(P^{(k)}(k))^2=0$. Il faut aboutir à $P=0$.

Déjà, la somme de carrés de réelles nulle donne que chacun des quatre $P^{(k)}(k)$ est nul.
On écrit $P(X)=a+b.X+c.X^2+d.X^3$.
La condition $P^{(3)}(3)=0$ donne $6.d=0$. P s'écrit $P(X)=a+b.X+c.X^2$
On reporte dans $P^{(2)}(2)=0$ donne $c=0$.On continue, et finalement, P est nul (système triangulaire).

∘131∘

> Complétez $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \clubsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}$ *(notée A)* pour que ce soit la matrice d'un projecteur de $(\mathbb{R}^2,+,.)$. Diagonalisez la.
> Déterminez une base de $\{M\in M_2(\mathbb{R})\mid A.M=M.A\}$ *(après avoir vérifié que cet ensemble noté $Com(A)$ est bien un espace vectoriel Com comme commutant)*.
> Montrez que ce projecteur n'est pas orthogonal pour le produit scalaire usuel *(pour un projecteur, être orthogonal, c'est "noyau orthogonal à image")*.
> ♣ Soit un produit scalaire ϕ pour lequel c'est un projecteur orthogonal. Déterminez alors $|\overrightarrow{i}|_\phi/|\overrightarrow{j}|_\phi$ et $(\widehat{\overrightarrow{i}\ \overrightarrow{j}})_\phi$.

$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \clubsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \clubsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \clubsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Autre approche : la matrice doit être semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc avoir même trace et même déterminant.

Pour la diagonaliser, on cherche image : $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ et noyau $Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix})$ (image de $Id-P$).

On a alors des vecteurs propres de valeurs propres respectives 1 et 0.

On en fait une matrice de passage : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

et on vérifie $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

13. je me dis qu'appeler i la variable de sommation va peut être vous induire en erreur ; quand certains croisent $i!$ ils voient la factorielle de la racine de -1

$Com(A)$ est le noyau de $M \longmapsto A.M - M.A$ (morphisme).
Le plus simple est de résoudre directement.
On trouve $Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix})$.

On peut d'ailleurs l'avoir ainsi : dans $Com(A)$, il y a I_2 et il y a A (évident).
$Com(A)$ est au moins de dimension 2.
Mais c'est le noyau de $M \longmapsto A.M - M.A$, dont l'ensemble image est au moins de dimension 2
(on y trouve $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$,
qui sont indépendantes).
Par encadrement, le noyau est de dimension 2 et l'image est de dimension 2, et (I_2, A) est une base du noyau.

$Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ n'est pas orthogonal à $Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix})$, ce projecteur n'est pas orthogonal.
D'ailleurs, sa matrice sur la base canonique (orthonormée) n'est pas symétrique.

On veut un produit scalaire pour lequel $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Pourquoi ne pas dire chacun est normé et ils sont orthogonaux entre eux ?
On écrit simplement $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
La matrice de Gram est alors $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ c'est à dire $\begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$.
On vérifie $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

∘132∘

Est il possible que la somme de deux isométries soit une isométrie ?

En dimension 0, j'ai ma réponse. mais c'est un peu étrange.
Sinon, on veut f et g vérifiant $\forall \overrightarrow{a},\ ||f(\overrightarrow{a})|| = ||\overrightarrow{a}||$

$\forall \overrightarrow{a},\ ||f(\overrightarrow{a})|| = ||\overrightarrow{a}||$

$\forall \overrightarrow{a},\ ||(f+g)(\overrightarrow{a})|| = ||\overrightarrow{a}||$

La dernière exigence, élevée au carré, dit $(f(\overrightarrow{a}) + g(\overrightarrow{a})) \cdot (f(\overrightarrow{a}) + g(\overrightarrow{a})) = ||\overrightarrow{a}||^2$.
On développe l'exigence : $||f(\overrightarrow{a})||^2 + ||g(\overrightarrow{a})||^2 + 2.f(\overrightarrow{a}) \cdot g(\overrightarrow{a}) = ||\overrightarrow{a}||^2$.
En comparant avec la première : $||g(\overrightarrow{a})||^2 + 2.f(\overrightarrow{a}) \cdot g(\overrightarrow{a}) = 0$ pour tout $\overrightarrow{a}$.
En comparant avec la seconde : $||f(\overrightarrow{a})||^2 + 2.f(\overrightarrow{a}) \cdot g(\overrightarrow{a}) = 0$ pour tout $\overrightarrow{a}$.
Quitte à revenir à des produits scalaires : $g(\overrightarrow{a}) \cdot (g(\overrightarrow{a}) + 2.f(\overrightarrow{a})) = 0$ et $f(\overrightarrow{a}) \cdot (f(\overrightarrow{a}) + 2.g(\overrightarrow{a})) = 0$.
En notant l'angle α entre $f(\overrightarrow{a})$ et $g(\overrightarrow{a})$, on peut écrire $f(\overrightarrow{a}) \cdot g(\overrightarrow{a}) = ||f(\overrightarrow{a})||.||g(\overrightarrow{a})||.\cos(\alpha)$.
Or, $||f(\overrightarrow{a})||$, $||g(\overrightarrow{a})||$ ont la même norme.
On veut donc $||\overrightarrow{a}||^2.(1 + 2.\cos(\alpha)) = 0$ pour tout vecteur $\overrightarrow{a}$.

Est il possible d'exiger cela ? Prenons dans le plan $f = I_d$ et $g = Rot(2.\pi/3)$ (rotation d'angle $2.\pi/3$.
Les deux sont des isométries, et leur somme est aussi une isométrie.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$+$	$\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
Id , isométrie		$R_{2.\pi/3}$, isométrie		$R_{\pi/2}$, isométrie

∘133∘

**Vérifiez que ces formes bilinéaires symétriques sont des produits scalaires
et dites moi si la dérivation est un produit scalaire pour celles sur $Vect(\sin, \cos)$:**

$(a.\cos + b.\sin,\ \alpha.\cos + \beta.\sin)$	$a.\alpha + b.\beta$
$(a.\cos + b.\sin,\ \alpha.\cos + \beta.\sin)$	$a.\alpha + 2.b.\beta$
$(a.\cos + b.\sin,\ \alpha.\cos + \beta.\sin)$	$a.\alpha + +a.\beta + b.\alpha + 3.b.\beta$
$(f,\ g)$	$f(0).g(0) + f'(0).g'(0)$
$(f,\ g)$	$\int_0^{2.\pi} f(t).g(t).dt$

Toutes ces formes existent (pour l'une, il faut évoquer la continuité).
Elles sont symétriques (commutativités...).
Elles sont linéaires par rapport à la première fonction, puis bilinéaires.

On teste ensuite une fonction $a.\cos + b.\sin$contre elle même :

$a^2 + b^2$	positif	
$a^2 + 2.b^2$	positif	
$a^2 + 2.a.b + 3.b^2$	$(a+b)^2 + 2.b^2$ positif	mot clef : carrés de réels »
$(f(0))^2 + (f'(0))^2$	positif	
$\int_0^{2.\pi} (f(t))^2.dt$	positif	

On suppose cette quantité nulle.
Les trois premières donnent $a = b = 0$, la fonction est nulle.
La quatrième donne $f(0) = f'(0) = 0$. Et en écrivant $a.\cos + b.\sin$ on a encore $a = b = 0$.
La dernière est un classique, f par continuité est nulle sur $[0, 2.\pi]$ puis nulle partout car périodique (combinaison de sinus et cosinus).

Nos formes sont toutes les produits scalaires.

La dérivation est un endomorphisme de $Vect(\sin, \cos)$, puisqu'elle est linéaire et transforme $a.\sin + b.\cos$ en $-b.\sin + a.\cos$.

Reste à voir si les produits scalaires sont préservés.
A-t-on $\phi(f, g) = \phi(f', g')$.
Par bilinéarité, on n'a as besoin de le vérifier pour toutes les applications, il suffit de le vérifier pour une base :
$\phi(\cos, \cos) = \phi(-\sin, -\sin)$, $\phi(\sin, \sin) = \phi(\cos, \cos)$, $\phi(\cos, \sin) = \phi(-\sin, \cos)$.

Les deux premières donnent deux fois la même chose, et la dernière impose $\phi(\cos, \sin) = 0$.On regarde alors :

	$\phi(\cos, \cos) = \phi(\sin, \sin)$	$\phi(\cos, \sin) = 0$	
$a.\alpha + b.\beta$	oui	oui	☺
$a.\alpha + 2.b.\beta$	non	oui	
$a.\alpha + +a.\beta + b.\alpha + 3.b.\beta$	non	non	
$f(0).g(0) + f'(0).g'(0)$	oui	oui	☺
$\int_0^{2.\pi} f(t).g(t).dt$	oui	oui	☺

Attention : Trois lignes☺ donnent la même réponse : la dérivation est une isométrie.
Mais en fait, c'est le même produit scalaire trois fois (à un facteur π près), sur l'espace $Vect(\sin, \cos)$.
Faites le calcul...