

PROBABILITÉS SUR UN UNIVERS FINI

a - Expérience aléatoire et univers.

L'ensemble des issues (*ou résultats possibles ou réalisations*) d'une expérience aléatoire est appelé univers.

Événements,

- événement élémentaires (*singletons, "atomes"*),
- événement contraire (*complémentaire*),
- événement "A et B" (*intersection*),
- événement "A ou B" (*réunion*),
- événement impossible (*vide*),
- événements incompatibles (*intersection vide*),
- système complet d'événements
(*partition de l'ensemble* : $\forall a \in \Omega, \exists ! i \in I, a \in A_i$).

Lancers de pièces, lancers de dés, tirages d'urnes, dates d'anniversaires, parcours de l'ivrogne, défauts d'une machine, gain au jeu, rendez vous galant,...

L'univers envisagé est fini dans notre programme, dénombrable dans le programme de Spé

EXERCICE CLASSIQUE.

Donnez le cardinal de l'univers Ω dans les cas suivants :

- distribution en deux paquets égaux d'un jeu de 32 cartes pour jouer à bataille

Les cartes sont toutes distinctes. Il serait équivalent de les numéroté.

On en choisit 16 parmi 32 (jeu du premier joueur). Le jeu du second est alors imposé.

$$\frac{32}{1} \cdot \frac{31}{2} \cdot \frac{30}{3} \cdot \frac{29}{4} \cdot \frac{28}{5} \cdots \frac{17}{16}$$

Dans le produit au numérateur, on voit le choix des cartes une par une, sans remise.

Le produit du dénominateur indique que l'ordre dans lequel les cartes ont été tirées ne modifie pas le jeu du joueur.

- distribution en deux paquets pas forcément égaux (mais aucun n'est vide) d'un jeu de 32 cartes (l'ordre dans les deux paquets n'a pas d'importance)

Il suffit de « lister » les 32 cartes une par une et d'indiquer dans quel paquet elle est (deux choix).

On a donc 2^{32} possibilités.

Mais on doit en refuser deux : toutes les cartes dans le paquet 0, toutes les cartes dans le paquet 1.

Il reste $2^{32} - 2$ éléments dans l'univers.

On pouvait aussi passer par $\sum_{k=1}^{31} \binom{32}{k}$ qui donne évidemment la même chose.

On note qu'une configuration se code par un mot binaire de longueur 32.

- distribution en deux paquets égaux d'un jeu de 34 cartes pour jouer à bataille (*il y a deux jokers indistinguables*)

Cas 1 : le premier joueur a les deux jokers.

Il lui reste 15 cartes à choisir parmi 32 (ou l'autre joueur en choisit 17 parmi 32, même coefficient

$$\binom{32}{17} = \binom{32}{15}.$$

Cas 2 : chaque joueur a un joker.

Chacun en choisit alors 16 parmi 32.

Cas 3 : c'est le second joueur qui a les deux jokers.

Même calcul que dans le premier cas.

$$\text{Total par disjonction de cas : } \binom{32}{17} + \binom{32}{16} + \binom{32}{15}.$$

Pour visualiser : s'il n'y avait que quatre cartes A, B, C et D et deux jokers J et J : $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$

premier cas			deuxième cas			troisième cas		
JJA / BCD	JJB / ACD	JJC / ABD	JAB / JCD	JAC / JBD	JAD / JBC	ABC / JJD	ABD / JJC	ACD / JJB
JJD / ABC			JBC / JAD	JBD / JAC	JCD / JAB		BCD / JJA	

- affectation de 100 élèves dans trois écoles ayant respectivement 25, 35 et 40 places,

La première école choisit : $\binom{100}{25}$.

La seconde choisit parmi les élèves qui restent : $\binom{75}{35}$.

La dernière « choisit » : $\binom{40}{40}$.

On réécrit le produit des trois binomiaux

$$\binom{100}{25} \cdot \binom{75}{35} \cdot \binom{40}{40} = \frac{100!}{25! \cdot 75!} \cdot \frac{75!}{35! \cdot 40!} \cdot \frac{40!}{40! \cdot 0!} = \frac{100!}{25! \cdot 35! \cdot 40!}$$

Sous cette forme, on perçoit que l'ordre dans lequel les écoles se servent importe peu.

C'est un coefficient du multinôme quand on développe $(a + b + c)^{100}$ et qu'on cherche combien on a de termes en $a^{25} \cdot b^{35} \cdot c^{40}$.

- marche d'un ivrogne de n déplacement dans le plan

A chaque étape, l'ivrogne choisit au hasard une des quatre directions N, E, S, W.

On forme donc un mot de n lettres avec quatre choix possibles pour chacune. On a 4^n trajectoires.

Question supplémentaire : si on veut qu'à la fin l'ivrogne soit revenu au point de départ, il faut imposer :

- autant de N que de S
- autant de W que de E .

- marche auto-évitante de n déplacements d'un ivrogne dans le plan (il n'a pas le droit de revenir là où il est déjà passé

Dénombrement très compliqué, car la condition est très exigeante.

- marche d'un ivrogne de n déplacement dans l'espace

Il y a cette fois 8 directions d'où 8^n .

- référendum "Oui/Non" à n votants successifs

cette fois, c'est juste 2^n .

Si en revanche l'issue du référendum est connue avec p oui et q non (en $p+q$ votes), il suffit de choisir les p oui parmi $p+q$ bulletins.

- lancers d'un dé jusqu'à avoir obtenu des résultats identiques sur la liste des lancers

On peut construire un arbre.

On sait qu'il s'arrête en au maximum 7 lancers.

- lancers d'un dé dans un espace vectoriel euclidien de dimension 4 (et pas forcément 3, le dé n'a donc plus six faces)

Combien de faces sur l'hypercube? C'est juste ça la question. De la géométrie.
 L'objet est fait des sommets $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ avec une écriture déplorable.
 Proprement : $\{-1, 1\}^4$.
 Une face est définie par des sommets coplanaires.
 Et par un vecteur normal !
 Bon, il a 24 faces carrées.
 Et 8 faces « cubiques ».
 Reste à savoir ce qu'on appelle « valeur affichée par le dé ».
 Est il tomé sur un plan (faces carrées)
 ou sur un sous-espace de dimension 3 (faces « cubiques »).
 La question est mal posée.

- répartition de douze canettes de bière toutes semblables entre 5 élèves, sachant que chacun doit en avoir au moins une.

Chaque élève prend déjà une canette. Il reste à en répartir 7 parmi 5 élèves.
 On indique à quel élève revient chaque canette : 5^7 cas.

b - Espaces probabilisés finis.

1- Une probabilité sur un univers fini Ω est une application P de $P(\Omega)$ dans $[0, 1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour tout couple d'événements disjoints A et B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

EXERCICE CLASSIQUE.

A	B	C	D
[0, 0, 4, 4, 4, 4]	[3, 3, 3, 3, 3, 3]	[2, 2, 2, 2, 6, 6]	[1, 1, 1, 5, 5, 5]

Ce sont des dés équilibrés à six faces (*appelés dés de Bradley Effron*).

Montrez que la probabilité que A batte B est $2/3$.

Le dé A bat le dé B quand il affiche 4, c'est à dire dans quatre cas sur six.
 On trouve bien $2/3$.

Montrez que la probabilité que B batte C est $2/3$.

Le dé B bat le dé C quand C affiche 2, c'est à dire dans quatre cas sur six là encore.
 On trouve bien $2/3$.

Montrez que la probabilité que C batte D est $2/3$.

Le dé C bat le dé D quand il affiche 6 (un cas sur trois)
 ou quand il affiche 2 (deux cas sur trois) mais que D affiche 1 (un cas sur deux) : le produit des probabilités donne un cas sur trois.

On somme les deux événements incompatibles et on a encore $2/3$.

On peut aussi faire un arbre. Ou un tableau

	2	6
1	oui	oui
5		oui

mais il faut calculer la probabilité de

chacune de ces cases.

On peut aussi raisonner par l'événement contraire et sa probabilité : $P(C \text{ gagne}) = 1 - P(C = 2 \text{ et } B = 5) = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$.

On trouve bien $2/3$ dans tous les cas.

Quelle est la probabilité que D batte A ?

Le dé D bat le dé A :		1	1	1	5	5	5	24 cases sur un total de 36 cette fois
	0	oui	oui	oui	oui	oui	oui	
	0	oui	oui	oui	oui	oui	oui	
	4				oui	oui	oui	
	4				oui	oui	oui	
	4				oui	oui	oui	
	4				oui	oui	oui	

équiprobables dans cette représentation.

Bilan du jeu : laissez l'adversaire choisir son dé.
 Prenez alors celui qui va le battre dans deux cas sur trois.
 Quand votre adversaire commence à protester, proposez lui de changer et de prendre le dé qu'il veut.
 Vous aurez toujours la possibilité de choisir un dé plus fort que le sien dans deux cas sur trois.

EXERCICE DE CONCOURS.

On lance un dé équilibré à six faces classique. On note A l'événement "tirer un nombre pair" et B l'événement "tirer un nombre impair". Calculez $P(A).P(B) - P(A \cap B)$.

On a classiquement : $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = 0$ (impossible !).

$$P(A).P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

On va voir qu'on ne peut pas faire mieux pour des événements A et B .

On se donne un univers probabilisé (Ω, P) et deux événements A et B . On note $a = P(A)$ et $b = P(B)$. Montrez : $P(A \cap B) \leq \sqrt{a.b}$ (c'est une inégalité de Cauchy Schwarz sur $\sum_{\omega \in \Omega} 1_{A \cap B}(\omega).P(\omega)$).

Une partie X dont on cherche à mesurer la probabilité se découpe en réunion disjointe des éléments qui la constituent

$$P(X) = \sum_{x \in X} P(\{x\})$$

qu'on écrit abusivement $P(X) = \sum_{x \in X} P(x)$.

Mais autant prendre tous les éléments de l'univers Ω en ne gardant que ceux qui sont dans X

$$P(X) = \sum_{\omega \in \Omega} 1_{\omega \in X}.P(\{\omega\})$$

On a alors (en profitant de l'indicatrice de l'intersection)

$$P(A \cap B) = \sum_{\omega \in \Omega} 1_{\omega \in A \cap B}.P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} 1_{\omega \in A}.1_{\omega \in B}.P(\{\omega\})$$

Pour pouvoir utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_i a_i.b_i \leq \sqrt{\sum_i (a_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_i (b_i)^2}$$

qui figure dans tout bon cours de maths, on se contente de poser $a_\omega = 1_{\omega \in A} \cdot \sqrt{P(\{\omega\})}$ et $b_\omega = 1_{\omega \in B} \cdot \sqrt{P(\{\omega\})}$.

Comme les indicatrices valent 0 ou 1, le carré n'y change rien pour elles et tout se termine très bien.

$$\text{Montrez : } a.b - P(A \cap B) = \left| \begin{array}{cc} P(A \cap \bar{B}) & P(\bar{A} \cap \bar{B}) \\ P(A \cap B) & P(\bar{A} \cap B) \end{array} \right|.$$

Partons du membre le plus compliqué : $P(A \cap \bar{B}).P(\bar{A} \cap B) - P(A \cap B).P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

Découpons alors l'univers Ω en quatre parties deux à deux disjointes dont la réunion fait bien Ω

$$\Omega = (A) \cup (\bar{A}) = ((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) \cup ((\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}))$$

Ceci permet de remplacer $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ par $1 - P(A \cap B) - P(A \cap \bar{B}) - P(\bar{A} \cap B)$:

$$det = P(A \cap \bar{B}).P(\bar{A} \cap B) - P(A \cap B).(1 - P(A \cap B) - P(A \cap \bar{B}) - P(\bar{A} \cap B))$$

$$det = P(A \cap \bar{B}).P(\bar{A} \cap B) - P(A \cap B) + (P(A \cap B))^2 + P(A \cap B).P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B).P(\bar{A} \cap B)$$

On regroupe $P(A \cap \bar{B}).P(\bar{A} \cap B)$ avec $P(A \cap B).P(\bar{A} \cap B)$ tout au bout et on trouve $P(\bar{A} \cap B).(P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B))$ ce qui fait $P(\bar{A} \cap B).P(A)$.

$$det = P(A).P(\bar{A} \cap B) - P(A \cap B) + (P(A \cap B))^2 + P(A \cap B).P(A \cap \bar{B})$$

On regroupe les deux derniers qu'on n'aurait peut-être pas dû séparer

$$(P(A \cap B))^2 + P(A \cap B).P(A \cap \bar{B}) = P(A \cap B).(P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})) = P(A \cap B).P(A)$$

On peut enfin regrouper

$$det = P(A).P(\bar{A} \cap B) - P(A \cap B) + P(A \cap B).P(A)$$

En factorisant $P(A)$ il reste

$$det = P(A).(P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)) - P(A \cap B)$$

et les pièces du puzzle s'assemblent enfin en $P(A).P(B) - P(A \cap B)$.

Il y a peut être plus direct. Saurez vous le trouver ?

$$(g \cup v)_D - q.v = \begin{vmatrix} (g)_D & (g \cup v)_D \\ 1 & P(v)_D \end{vmatrix} = (g \cup v)_D - P(v)_D$$

Cette fois on obtient

$$\begin{vmatrix} (g \cup v)_D + (g \cup \bar{v})_D & (g \cup v)_D \\ (v)_D + (\bar{v})_D & P(v)_D \end{vmatrix} = (g \cup v)_D - q.v$$

$$\cdot \begin{vmatrix} P(v)_D & P(v \cup \bar{v})_D \\ P(\bar{v})_D & P(v \cup \bar{v})_D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P(v)_D & P(v \cup \bar{v})_D \\ P(\bar{v})_D & P(v \cup \bar{v})_D \end{vmatrix} = (g \cup v)_D - P(v)_D$$

$$\begin{vmatrix} (g \cup v)_D & (g \cup \bar{v})_D \\ P(v \cup \bar{v})_D & P(v \cup \bar{v})_D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (g \cup v)_D & (g \cup \bar{v})_D \\ P(v \cup \bar{v})_D & P(v \cup \bar{v})_D \end{vmatrix} = (g \cup v)_D - P(v)_D$$

On repart de $a.b - P(A \cap B) = \begin{vmatrix} P(A \cap B) & P(\bar{A} \cap B) \\ P(A \cap B) & P(\bar{A} \cap B) \end{vmatrix}$ et on effectue des opérations qui ne modifient pas le déterminant (on se comprend avec $L1 := L1 + L2$?)

Déduisez $|a.b - P(A \cap B)| \leq \max(a.(1 - a), b.(1 - b))$.

On a obtenu à un moment $a.b - P(A \cap B) = \begin{vmatrix} P(A) & P(\bar{A}) \\ P(A \cap B) & P(\bar{A} \cap B) \end{vmatrix}$ qu'on développe et majore

$$a.b - P(A \cap B) = \begin{vmatrix} P(A) & P(\bar{A}) \\ P(A \cap B) & P(\bar{A} \cap B) \end{vmatrix} = a.P(\bar{A} \cap B) - \dots \leq a.P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

On majore encore (tous les multiplicateurs sont positifs, c'est ça qui est bien en probas)

$$a.b - P(A \cap B) \leq a.P(\bar{A} \cap \bar{B}) \leq a.P(\bar{A}) = a.(1 - a)$$

Les rôles sont symétriques, on peut faire de même avec B et b .

A finir.

Déduisez enfin $|a.b - P(A \cap B)| \leq \frac{1}{4}$.

Quand a décrit $[0, 1]$ (puisque c'est une probabilité), le produit $a.(1 - a)$ ne dépassera jamais $\frac{1}{4}$.
 Quand b décrit $[0, 1]$ (puisque c'est une probabilité), le produit $b.(1 - b)$ ne dépassera jamais $\frac{1}{4}$.
 Le réel $\max(a.(1 - a), b.(1 - b))$ ne dépasse donc pas $\frac{1}{4}$.
 On peut conclure par transitivité de la relation d'ordre.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Un dé pas équilibré du tout a six faces. Le résultat d'un lancer est appelé A .

Est il possible d'avoir

$P(A < 4)$	$P(A \text{ pair})$	$P(A \geq 5)$
$1/2$	$1/3$	$1/4$

Comment peut on avoir $P(A < 4) + P(A \geq 5) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} > 1$?
 Par disjonction de cas, la somme $P(A < 4) + P(A \geq 5)$ est $P(A \in \{1, 2, 3, 5, 6\})$ ce qui fait $1 - P(A = 4)$.

2- Détermination d'une probabilité par les images des singletons.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

On veut simuler un dé à six faces non équilibré avec les probabilités suivantes :

1	2	3	4	5	6
1/13	2/13	5/13	1/13	3/13	1/13

Écrivez un script Python qui s'en charge.

Méthode : tirer un nombre entre 0 et 13. Chaque valeur a probabilité $\frac{1}{13}$.

Attribuer alors la sortie en fonction de la valeur tirée.

```
def tirage() :
    ....L = [1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6]
    ....index = randrange(13)
    ....return L[index]
```

On peut bien sûr compacter en une ligne.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Montrez :

$$\max(0, P(A) + P(B) - 1) \leq P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$$

On rappelle : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

On a donc $P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$ et donc $P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B)$.

Toutefois, quand le premier membre est négatif, on se contente de $0 \leq P(A \cap B)$.

Ayant $A \cap B \subset A$, on obtient $P(A \cap B) \leq P(A)$.

de la même manière $P(A \cap B) \leq P(B)$.

Étant plus petite que les deux, elle est plus petite que leur minimum.

3- Probabilité uniforme : $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

EXERCICE DE CONCOURS.

n est un entier fixé. On tire de manière uniforme l'une des $n!$ permutations de S_n (groupe symétrique). Pour j dans $\{1, 2, \dots, n\}$, on dit que σ bat un record en j si $\sigma(j) > \sigma(i)$ pour tout i entre 1 et $j - 1$. Déterminez la probabilité de l'événement " σ bat un record en j ".

Soit j entre 1 et n . Notons R_j l'événement « σ bat un record en j ».
 Pour chaque sous-ensemble A à j éléments dans $\{1, \dots, n\}$, on considère l'ensemble des permutations σ de S_n telles que $\sigma(\{1, \dots, j\}) = A$ qu'on appelle $F(j, A)$.
 On peut alors calculer suivant la formule des probabilités totales :

$$P(R_j) = \sum_{\substack{A \subset \{1, \dots, n\} \\ \text{Card}(A)=j}} P(R_j \mid F(j, A)) \cdot P(F(j, A))$$

Or comme S_n est muni de la probabilité uniforme :

$$P(R_j \mid F(j, A)) = \frac{\text{Card}(R_j \cap F(j, A))}{\text{Card}(F(j, A))}$$

donc :

$$P(R_j \mid F(j, A)) = \frac{(j-1)!}{j!} = \frac{1}{j}$$

(au numérateur, le nombre de bijections de $\{1, \dots, j\}$ dans A vérifiant $\sigma(j) = \max(A)$ et au dénominateur les bijections de $\{1, \dots, j\}$ dans A)

On trouve bien un quotient de factorielles.

En effet une bijection de $\{1, \dots, j\}$ dans A qui envoie j sur $\max(A)$ est définie par la donnée de sa restriction à $\{1, \dots, j-1\}$ qui est une bijection quelconque de $\{1, \dots, j-1\}$ dans $A \setminus \{\max(A)\}$.

On reporte la seconde relation dans la première, on obtient :

$$P(R_j) = \frac{1}{j} \cdot \sum_{\substack{A \subset \{1, \dots, n\} \\ \text{Card}(A)=j}} P(F(j, A)) = \frac{1}{j}$$

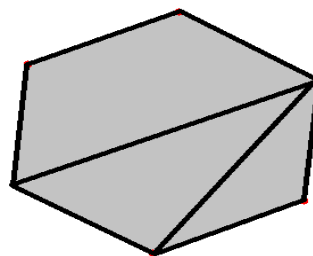
puisque les $F(j, A)$ pour A décrivant les parties de $\{1, \dots, n\}$ à j éléments forment un système complet d'événements.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Trois garçons et trois filles s'installent aléatoirement aux six places d'une table hexagonale. Calculez la probabilité que les garçons forment un triangle équilatéral.

Quelle est la probabilité que les filles forment un triangle équilatéral ?

Quelle est la probabilité que les filles forment un triangle rectangle, sur l'univers restreint où les garçons forment un triangle isocèle ?



On un un triangle équilatéral si et seulement si la configuration est une alternance parfaite filles/garçons, du type

$$F - G - F - G - F - G \text{ ou } G - F - G - F - G - F - G$$

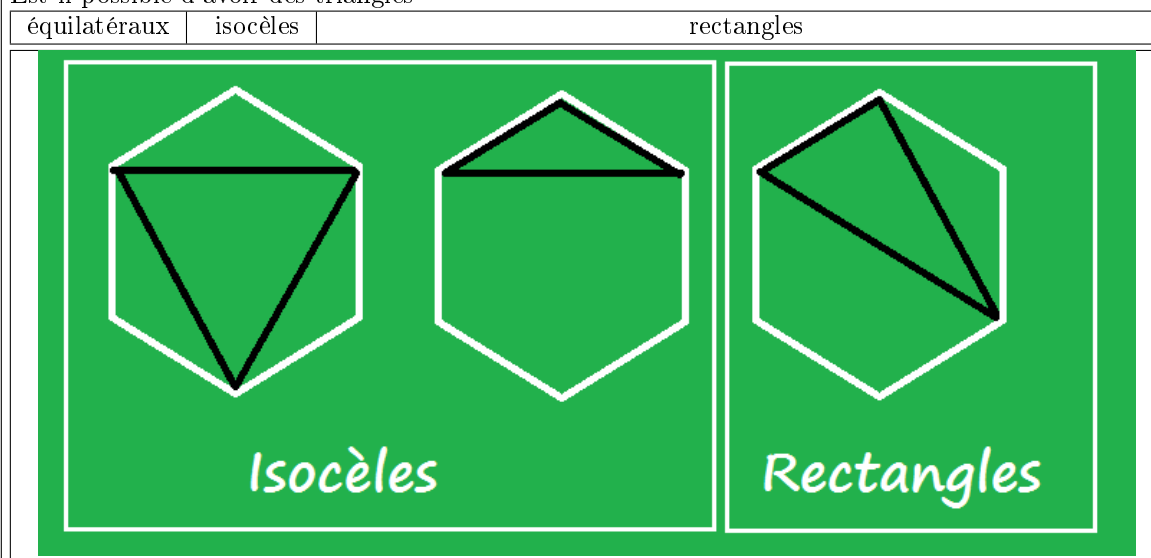
Combien de configurations ? $\binom{6}{3}$ en ayant numéroté les sommets et en décidant où on place alors les trois garçons parmi six cases.

Combien de configurations favorables ? Deux, c'est tout.

Probabilité : $\frac{2}{20}$ ce qui fait dix pour cent.

On notera que « filles en triangle équilatéral » = « garçons en triangle équilatéral ».

Est il possible d'avoir des triangles



La probabilité que les filles forment un triangle rectangle est non nulle.

La probabilité que les garçons forment un isocèle est non nulle.

Mais la probabilité que les filles forment un triangle rectangle et les garçons un triangle isocèle est nulle.

$$P_{G \text{ iso}}(F \text{ rect}) = \frac{P((F \text{ rect}) \cap (G \text{ rect}))}{P(G \text{ iso})} = 0$$

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Un dé non équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4 vérifie :

tirage	pair	premier	≤ 3
probabilité	1/2	1/3	3/5

Calculez la probabilité de tirer 1.

On n'a que quatre faces et donc quatre inconnues : $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ et $P(4)$.
Et on a quatre informations. Mais si ! La somme des probabilités vaut 1.

On écrit un système :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 3/5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On inverse la matrice

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 3/5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 3/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

C'est cohérent, les quatre probabilités sont positives

$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	$P(4)$
4/15	1/10	7/30	2/5

Ou si vous préférez

$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	$P(4)$
8/30	3/30	7/30	12/30

4- Propriétés des probabilités :

• probabilité de la réunion de deux événements :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

• probabilité de l'événement contraire : $P(A^c) = 1 - P(A)$,

• croissance : $(A \subset B) \Rightarrow (P(A) \leq P(B))$,

• cas d'un système complet : $P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i)$.

Quelle notation préférez vous pour le complémentaire ? $\overline{A}$, A^c ou $\Omega - A$?

DÉMONSTRATION. • On se donne A et B . On écrit $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. C'est une réunion de deux ensembles d'intersection vide, on a donc $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$.

On écrit aussi $A \cup B = B \cup (A \cap \overline{B})$ et c'est encore une réunion de deux ensembles d'intersection vide. On a cette fois $P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap \overline{B})$. On reporte une formule dans l'autre : $P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$.

• Pour A donné, on écrit $\Omega = A \cup \overline{A}$; c'est une réunion disjointe, donc $P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$.

• Si A est inclus dans B , on écrit $B = A \cup (B \cap \overline{A})$. C'est encore une réunion disjointe, on a donc $P(B) = P(A) + P(B \cap \overline{A}) \geq P(A)$ car une probabilité est toujours positive.

• La formule $P(B) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k)$ se démontre par récurrence sur le nombre de parties du système complet.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Comparez les probabilités de “avoir au moins un 6 avec six dés” et “avoir au moins deux 6 avec douze dés” (et pourquoi pas “avoir au moins un 12 avec douze dés” ?).

On passe classiquement par le contraire.

Aucun 6 avec six dés : $\left(\frac{5}{6}\right)^6$.

Le complémentaire de au moins deux, c'est aucun ou exactement un.

Pour aucun : $\left(\frac{5}{6}\right)^{12}$.

Pour exactement un $12 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1$ (quel dé va avoir un 6, et les 11 autres ont autre chose qu'un 6).

$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$	$\frac{31031}{46656}$	0,665...
$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 12 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1$	$\frac{1346704211}{2176782336}$	0,618...

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Pouvez vous définir un univers et trois événements A , B et C de cet univers chacun de probabilité $1/2$, de sorte que la probabilité que deux d'entre eux exactement soient réalisés soit égale à $2/3$?

On veut donc $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$ mais aussi

$$P(A \cap B \cap \overline{C}) + P(A \cap \overline{B} \cap C) + P(\overline{A} \cap B \cap C) = 2/3$$

puisque ces trois événements incompatibles décrivent bien « deux et pas trois ».

On prend un dé à six faces équilibrées. On définit alors

	1	2	3	4	5	6
A	x	x	x			
B		x		x		x
C	x		x	x		

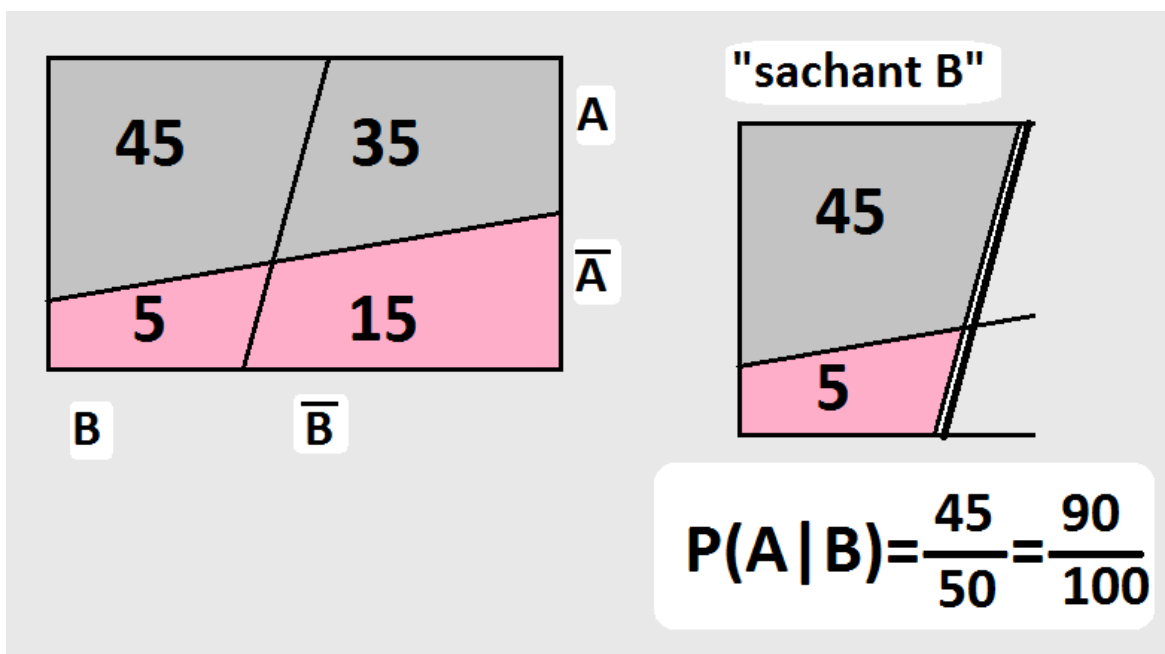
et on vérifie.

c - Probabilités conditionnelles.

1- Si B est un événement de probabilité non nulle, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

L'appellation "sachant B " est ambiguë et devrait être remplacée par "sur l'univers restreint à B ".



En général, la probabilité de A change quand on restreint l'univers à B , sauf si "la proportion d'éléments de A dans B est la même que la proportion d'éléments de A dans l'univers total Ω ".

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Calculez (et interprétez) : $P(A | A)$, $P(A | \bar{A})$ et $P(A | \Omega)$.

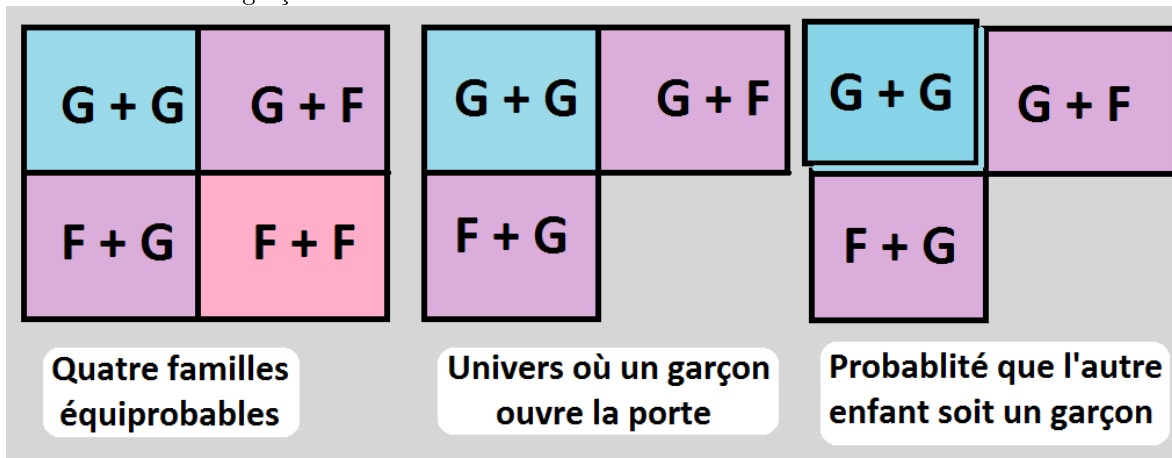
$P(A | A) = 1$ et c'est logique (on impose quand même $P(A) \neq 0$ pour pouvoir le mettre au numérateur).

$P(A | \bar{A}) = 0$ logique aussi.

$P(A | \Omega) = 1$, toujours cohérent.

EXERCICE CLASSIQUE.

Vous vous rendez dans une famille qui a deux enfants (on considère les sexes à la naissance équiprobables, et les naissances indépendantes). Un enfant ouvre la porte, c'est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi un garçon ?



Variantes :

•1• Vous vous rendez dans une famille qui a deux enfants. L'aîné ouvre la porte, c'est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi un garçon ?

Le sexe du second enfant est indépendant de celui du premier. La probabilité est de $1/2$.

•2• Vous vous rendez dans une famille qui a trois enfants. L'un d'eux ouvre la porte, c'est un garçon, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un autre garçon ?

On a cette fois huit configurations équiprobables, de GGG à FFF .

Vous savez qu'il y a un garçon. Vous éliminez juste FFF .

Il reste sept situations équiprobables.

	favorable	défavorable	impossible
	GGF	GFF	FFF
Parmi ces sept situations,	GFG	FGF	
	GGG	FFG	
	FGG		

Quatre sur sept.

Mais il reste un problème de « mal posé ».

Comment a été choisi l'enfant qui ouvre la porte ?

Si la convention est « si on somme, c'est l'ainé(e) qui ouvre » ou « si on sonne, c'est à un garçon d'aller ouvrir ».

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Dans cette ville, il y a mille couples. Soixante sont des couples "gay" et quarante sont des couples "saphiques"¹. Vous frappez à une porte, un homme vient vous ouvrir. Quelle est la probabilité que l'autre membre du foyer soit une femme.

situation générale		$H + H$	$H + F$	$F + F$	
	probabilité	$\frac{60}{1000}$	$\frac{900}{1000}$	$\frac{40}{1000}$	
un homme ouvre		$H + H$	$H + F$	$F + F$	
	probabilité	$\frac{60}{1000}$	$\frac{900}{1000}$	impossible	$\rightarrow \frac{960}{1000}$
sachant qu'un homme ouvre		$H + H$	$H + F$	$F + F$	
	probabilité	$\frac{60}{960}$	$\frac{900}{960}$		$\rightarrow 1$
l'autre est une femme		$\frac{900}{960}$			

EXERCICE DE CONCOURS.

Soient Ω un ensemble fini, A et B des parties telles que $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ soient non vides. Soient $(a, b, c, d) \in [0, 1]^4$. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d) pour qu'il existe sur $(\Omega, P(\Omega))$ une probabilité P vérifiant $P(A | B) = a$, $P(A | \overline{B}) = b$, $P(B | A) = c$ et $P(B | \overline{A}) = d$.

1. après l'Informatique Pour Tous, c'est le Mariage Pour Tous

On veut donc (avec des dénominateurs non nuls) :

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = a, \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = b, \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = c, \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = d$$

En effectuant des produits en croix et en remplaçant $P(\bar{A})$ par $1 - P(A)$

$$P(A \cap B) = a.P(B), P(A \cap \bar{B}) = b.(1 - P(B)), P(A \cap B) = c.P(B), P(B \cap \bar{A}) = d.(1 - P(A))$$

Mais on sait aussi $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ (réunion disjointe, probabilités totales si on veut)

$$P(A \cap B) = a.P(B), P(A) - P(A \cap B) = b.(1 - P(B)), P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = c.P(B), P(B) - P(A \cap B) = d.(1 - P(A))$$

Ceci donne finalement un système linéaire en trois inconnues $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -a & 1 \\ 1 & b & -1 \\ 0 & -c & 1 \\ d & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P(A) \\ P(B) \\ P(A \cap B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$$

Il faut et il suffit que ce système (sur-contraint) ait des solutions, et que ces solutions soient cohérentes (positives, plus petites que 1 avec $P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$).

Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$ doit être dans l'ensemble image du morphisme de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -a & 1 \\ 1 & b & -1 \\ 0 & -c & 1 \\ d & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On annule donc un déterminant (les trois colonnes de la matrice forment une famille génératrice de l'image)

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & 1 & 0 \\ 1 & b & -1 & b \\ 0 & -c & 1 & 0 \\ d & 1 & -1 & d \end{vmatrix}$$

L'équation (nécessaire) s'écrit $(a - c).d.(1 - b) = 0$.

Premier cas : $a = c = 0$.

$$P(A \cap B) = 0.P(B), P(A) - P(A \cap B) = b.(1 - P(B)), P(A \cap B) = 0.P(B), P(B) - P(A \cap B) = d.(1 - P(A))$$

On obtient $P(A \cap B) = 0$ et ensuite $P(A) = b.(1 - P(B))$, $P(B) = d.(1 - P(A))$.

A finir.

Deuxième cas : $a = c \neq 0$.

On a cette fois $P(A) = P(B)$ et aussi

$$P(A \cap B) = a.P(B), P(A) - P(A \cap B) = b.(1 - P(B)), P(B) - P(A \cap B) = d.(1 - P(A)).$$

A finir.

Troisième cas $b = 1$.

Quatrième cas : $d = 0$.

A finir.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Montrez : $P(A | B) \geq P(A) \Rightarrow P(B | A) \geq P(B)$. Interprétation ?

Avec des dénominateurs non nuls (et des multiplicateurs positifs)

$$P(A | B) \geq P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) \geq P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow \dots$$

$$P(A | B) \geq P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq P(B) \Leftrightarrow P(B | A) \geq P(B)$$

Si B renforce A, alors A renforce B.

Pour comprendre, prenons

A	bon en physique
B	sexe féminin

dans une classe par exemple celle ci

	filles	garçons
bons en φ	8	10
nuls en φ	5	8

La proportion de filles bonnes en physique est plus grande que la proportion d'élèves (tous genres confondus) bons en physique :

$$\frac{8}{13} > \frac{18}{31}$$

C'est donc que si vous prenez un élève qui cartonne en physique, c'est plus sûrement une fille que si vous prenez un élève au hasard

$$\frac{8}{18} \geq \frac{13}{31}$$

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Comparez $P(A \cap B | A \cup B)$ et $P(A \cap B | A)$. Interprétez.

On calcule déjà

$$P(A \cap B | A \cup B) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)}$$

et toujours avec un dénominateur non nul

$$P(A \cap B | A) = \frac{P((A \cap B) \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

et en comparant les dénominateurs (positifs)

$$P(A \cap B | A \cup B) \leq P(A \cap B | A)$$

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Une urne contient huit tétraèdres roses et trois tétraèdres transparents². Vous tirez trois tétraèdres. Quelle est la probabilité que l'un au moins soit rose ?

Sachant que vous avez tiré au moins un rose, quelle est la probabilité que ce fût le premier tiré ?

². pour changer des boules noires et blanches

On passe par l'événement contraire. Aucun tétraèdre rose c'est donc « tous transparents ». Et même « les trois transparents parmi les onze tétraèdres » :

$$P(\text{au moins un rose}) = 1 - \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9}$$

On note T_1 à T_3 les trois tirages. On nous demande $P(T_1 = R \mid R \in \{T_1, T_2, T_3\})$

$$P(T_1 = R \mid R \in \{T_1, T_2, T_3\}) = \frac{P(R \in \{T_1, T_2, T_3\} \mid T_1 = R) \cdot P(T_1 = R)}{P(R \in \{T_1, T_2, T_3\})}$$

$$P(T_1 = R \mid R \in \{T_1, T_2, T_3\}) = \frac{1 \cdot \frac{8}{11}}{1 - \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9}} = \frac{30}{41}$$

2- Formule des probabilités composées :

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B \mid A) \times P(C \mid A \cap B) \times P(D \mid A \cap B \cap C).$$

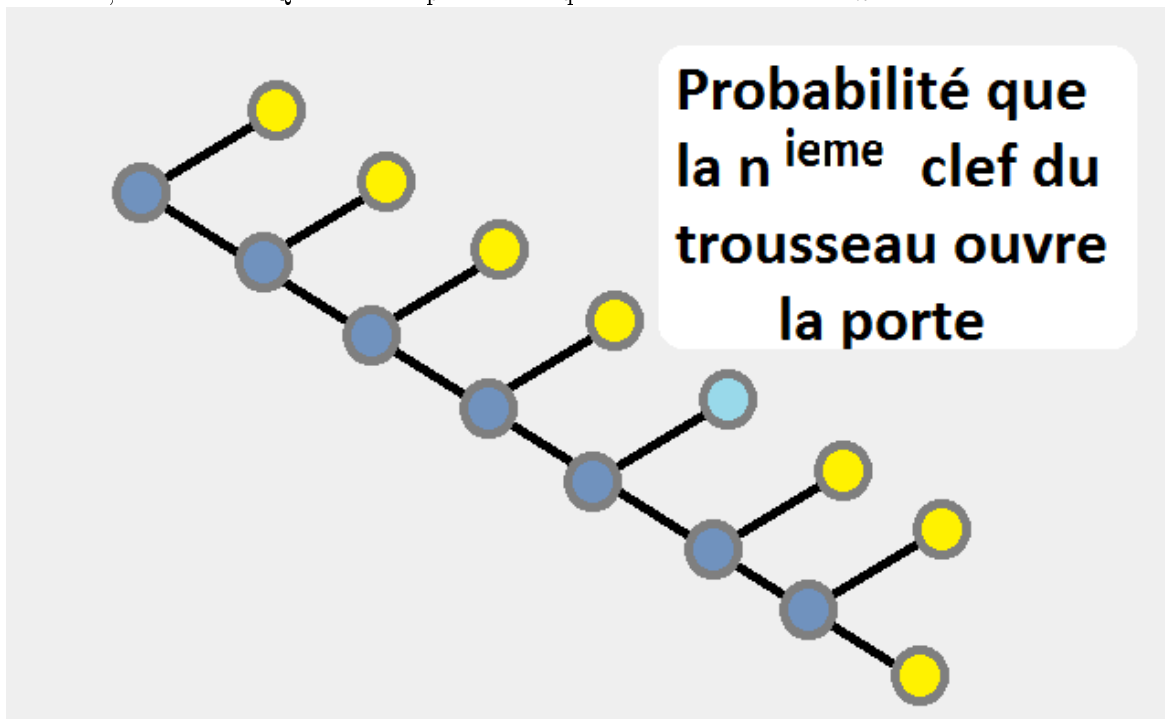
C'est un simple produit télescopique.

On écrit la formule générale $P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P\left(A_k \mid \bigcap_{k=1}^{i-1} A_i\right)$ avec une convention naturelle sur une intersection vide.

C'est la formule utilisée pour calculer le "poids" d'une feuille d'un arbre de probabilités en multipliant les poids des branches menant à cette feuille.

EXERCICE DE CONCOURS.

Pour ouvrir une serrure, vous disposez de n clefs. Une seule ouvre la serrure. Vous les essayez successivement, sans remise. Quelle est la probabilité que la serrure s'ouvre au $k^{\text{ième}}$ essai ?

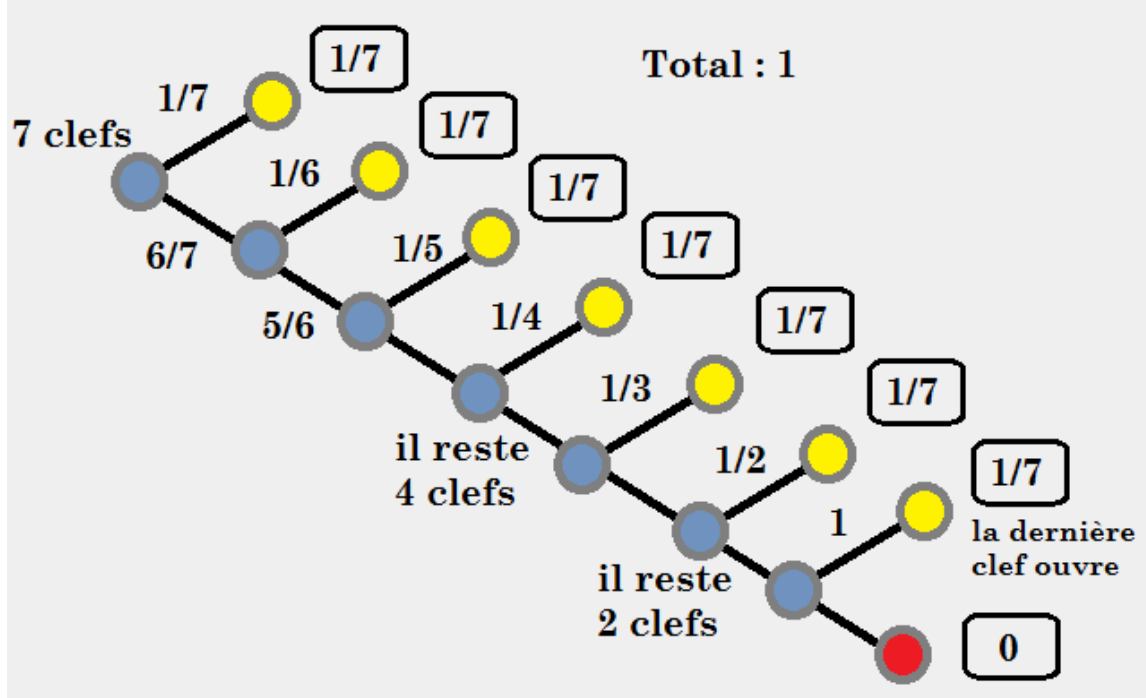


On note A_k l'événement « la porte s'ouvre au k^{ieme} essai », avec $A_0 = \emptyset$.

On a évidemment $P(A_1) = \frac{1}{n}$ (et c'est $P(A_1 | \overline{A_0})$). On a aussi

$$P(A_{k+1} | \overline{A_k}) = \frac{1}{n-k}$$

puisque'il nous reste $n-k$ clefs (on en a testé et jeté k) et qu'une seule ouvre la porte.



On trouve $P(A_2) = P(A_2 | \overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_1}) = \frac{1}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$.

On continue

$$P(A_3) = P(A_3 | \overline{A_2} \text{ et } \overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2} \text{ et } \overline{A_1}) = P(A_3 | \overline{A_2} \text{ et } \overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2} | \overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_1})$$

$$P(A_3) = \frac{1}{n-2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

Plus généralement, pour k plus petit que n , on a par la formule des probabilités composées

$$P(A_k) = \frac{1}{n-k+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n-k+2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n-k+3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

Enfin, $P(A_{n+1}) = 0$ car on aura tout essayé.

On constate que la somme des probabilités vaut bien 1.

EXERCICE CLASSIQUE.

En supposant les dates d'anniversaires de N personnes uniformément réparties sur une année (de 365 jours), quelle est la probabilité que personne n'ait la même date d'anniversaire que vous ?

Votre date d'anniversaire est connue.

La probabilité qu'une personne n'ait pas la même date que vous est $\frac{364}{365}$.

La probabilité que les n personnes n'ait pas la même date que vous est $\left(\frac{364}{365}\right)^n$.

Application numérique pour situer

n	1	5	10	15	25	50	100
probabilité	99.7%	98.6%	97.3%	95.9%	93.7%	87.2%	76.0%
150	200	250	300	350	400	500	1000
66.3%	57.8%	50.4%	44.1%	38.2%	33.3%	25.1%	6.4%

En supposant les dates d'anniversaires de N personnes uniformément réparties sur une année (*de 365 jours*), quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes aient la même date d'anniversaire? A partir de quelle valeur de N (notée N_0) cette probabilité dépasse $1/2$? Faut il en déduire qu'à partir de $2.N_0$, elle vaut 1?

Pour au moins deux, on passe par l'événement contraire : personne n'a la même date d'anniversaire qu'un autre.

On demande que l'application de la classe vers les dates soit injective.

On fait défiler les élèves.

Le premier a la date qu'il veut.

Le second a toute date sauf celle du premier.

Le troisième doit éviter deux dates.

La quatrième voit son choix se restreindre encore.

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdots \frac{(365 - N + 1)}{365}$$

On simplifie en $\frac{365!}{(365 - N)!} \cdot \frac{1}{365^N}$ (pour des dates toutes différentes).

A la calculatrice, on trouve $N = 23$ pour que $1 - \frac{365!}{(365 - N)!} \cdot \frac{1}{365^N}$ dépasse $\frac{1}{2}$.

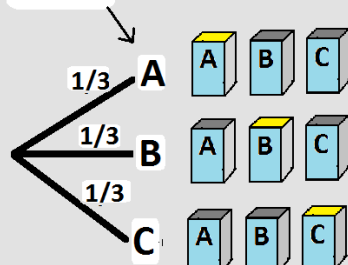
Un grand classique des petits jeux mathématiques.

Évidemment le passage de N à $2.N$ n'a aucun sens. Disons juste qu'à $N = 46$ on atteint 9%.

Et pour $N = 366$, le principe des tiroirs dit qu'on est sûr que deux personnes auront la même date d'anniversaire.

D'ailleurs, en moyenne une grossesse sur 80 conduit à des jumeaux. Donc, il va y avoir des jumeaux dans la classe !

Le trésor est en



J'ai désigné la porte A

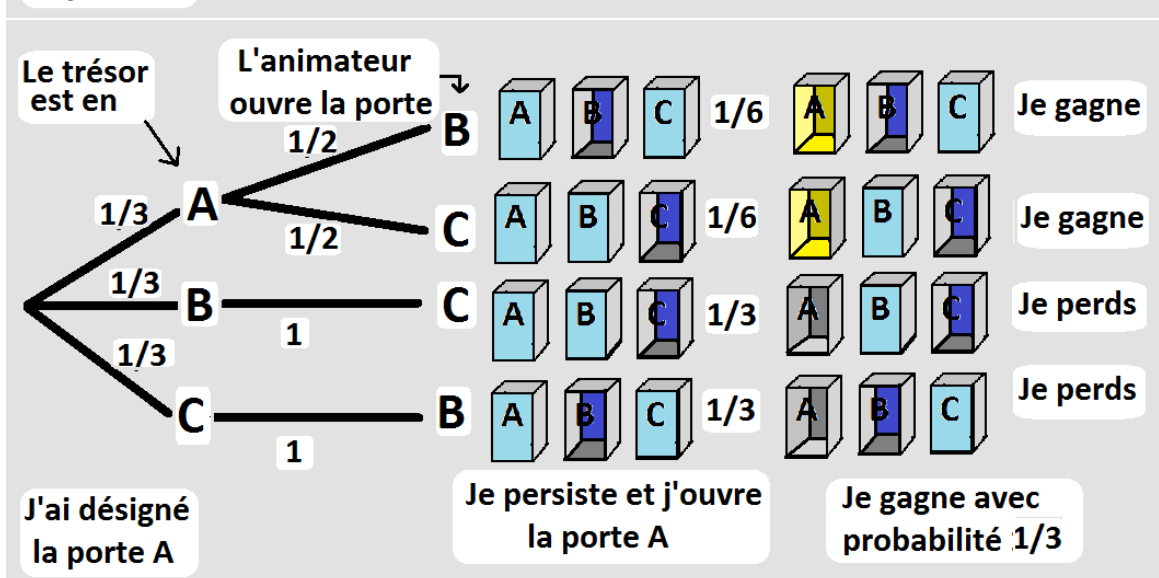
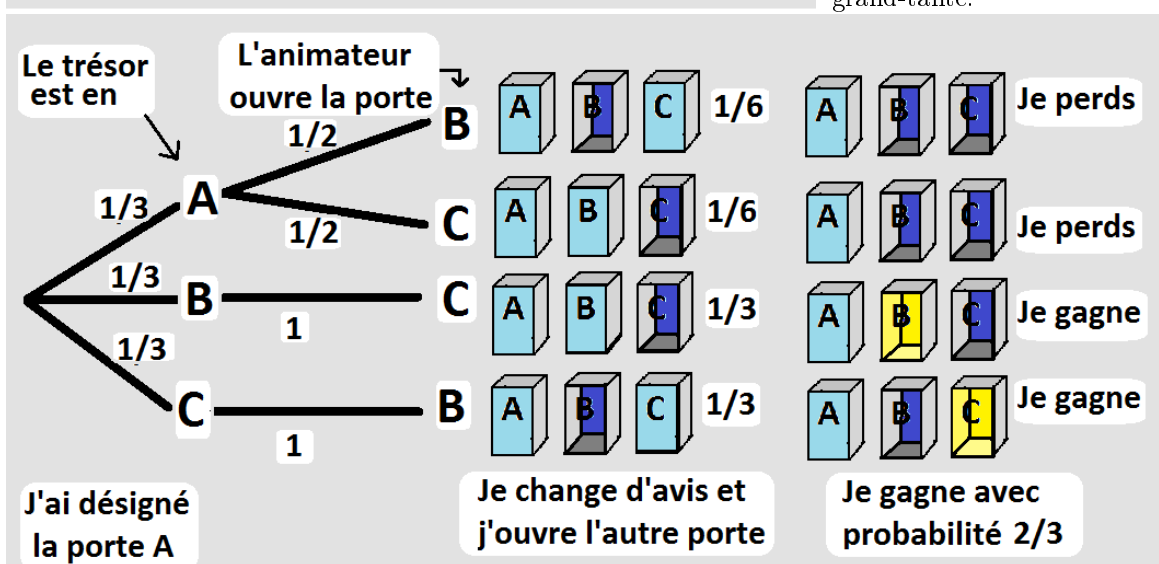
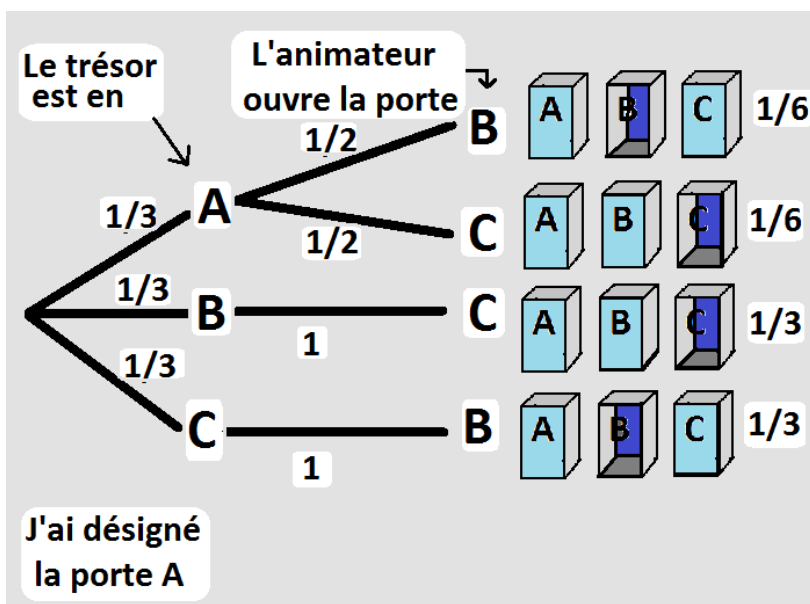
Problème de MONTY HALL, qui divisa même la communauté mathématique.

Vous jouez à un jeu télévisé. Devant vous, trois portes. Derrière l'une il y a un trésor, derrière les deux autres, il n'y a rien^a. Vous indiquez une porte (*au hasard, puisqu'il n'y a aucun indice, on l'appellera donc A*).

L'animateur^b ouvre alors l'une des deux autres portes (*B ou C*) pour vous montrer qu'il n'y a rien derrière (*il sait pour sa part où se trouve le trésor*).

^a. le jeu original parle d'une voiture et de deux chèvres

^b. Vincent Lagaff dans la version française du jeu, appelé alors Big-Dil



3- Formule des probabilités totales

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i)$$

C'est la formule que vous utilisez pour dire "j'ai étudié toutes les possibilités menant à cet événement".

EXERCICE DE CONCOURS.

Une urne contient $2.n$ boules numérotées de 1 à $2.n$. Vous en tirez n au hasard, sans remise. Quelle est la probabilité que vous tiriez 1, 3, 5, jusqu'à $2.n - 1$, dans cet ordre ?

Quelle est la probabilité que vous tiriez 1, 3, 5, jusqu'à $2.n - 1$, pas forcément dans cet ordre ?

Donnez la loi de la variable aléatoire donnant le rang du dernier numéro impair alors obtenu. Calculez son espérance.

Il y a $(2.n).(2.n - 1) \dots (n + 1)$ tirages différents, tous équiprobables.

Le tirage $[1, 3, 5, \dots, 2.n - 1]$ est l'un d'entre eux, il a pour probabilité

$$\frac{1}{(2.n).(2.n - 1) \dots (n + 1)} = \frac{n!}{(2.n)!}$$

On peut aussi l'écrire

$$P(T_1 = 1).P(T_2 = 3 \mid T_1 = 1).P(T_3 = 5 \mid (T_1, T_2) = (1, 3)) \dots = \frac{1}{2.n} \cdot \frac{1}{2.n - 1} \cdot \frac{1}{2.n - 2} \dots$$

Il existe $n!$ listes formées des éléments 1, 3, 5 jusqu'à $2.n - 1$, et elles ont toutes la même probabilité.

On somme et on trouve $n!$ fois la probabilité précédente :

$$\frac{(n!)^2}{(2.n)!} = \frac{1}{\binom{2.n}{n}}$$

L'énoncé semble indiquer "sur l'univers restreint où on tire les n nombres impairs".

Les n nombre impairs ont des rôles symétriques. Chacun a donc la même probabilité $\frac{1}{n}$.

L'espérance est donc $\sum_{k=1}^n (2.k - 1) \cdot \frac{1}{n} = \frac{n^2}{n} = n$.

Pour comprendre la formule de Bayes qui va suivre, imaginons une expérience :

j'ai dans ma poche trois dés : un tétraèdre à quatre faces (1 à 4)

un cube à six faces (1 à 6)

un octaèdre à huit faces (1 à 8).

Je tire un dé au hasard : probabilité $1/3$ pour chacun. C'est une probabilité a priori : $P(T) = P(C) = P(O)$.

Je lance le dé et je vous dit que j'ai obtenu un 1. Modifiez vous les probabilités ?

Oui, parce que le dé à quatre faces a deux fois plus de chances de donner un 1 qu'un dé à huit faces.

On doit avoir $P(T) = 2 \times P(O)$. Et $P(C)$ soit se trouver quelque part entre les deux.

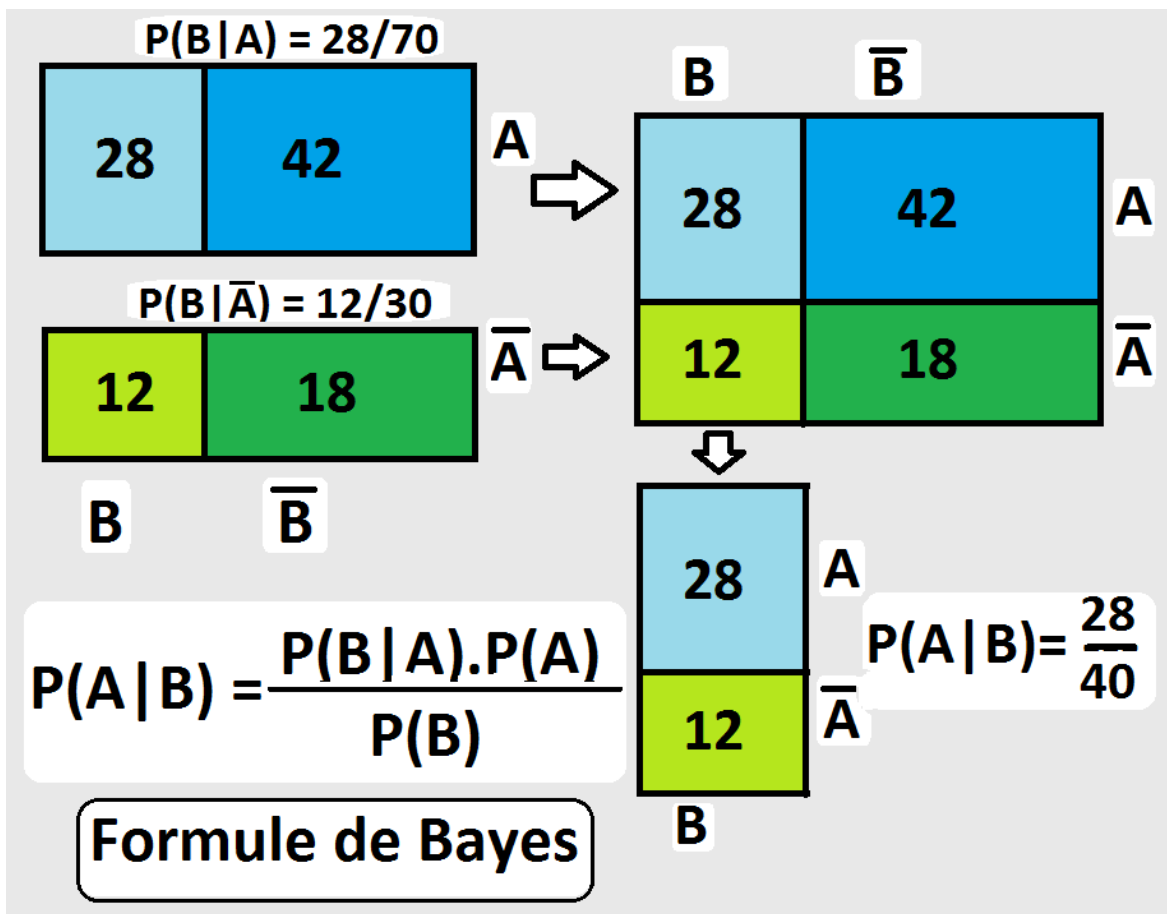
Plus clair encore. J'ai tiré un dé. Probabilités a priori $1/3$, $1/3$ et $1/3$.

Je le lance et je dis que j'ai obtenu un 7. Probabilités a posteriori : 0, 0, 1.

4- Formules de BAYES :

• si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, alors on a

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \times P(A)}{P(B)}$$



4bis- Formule de BAYES :

• si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors on a

$$P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j) \times P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i) \times P(A_i)}$$

EXERCICE CLASSIQUE.

Un test de dépistage est mis en place pour dépister une maladie qui frappe statistiquement une personne sur cent.

Ce test n'est pas fiable à cent pour cent, et a deux types d'erreurs :

- répondre "*malade*" alors que l'individu est sain (probabilité conditionnelle d'erreur : 2 pour cent)
- répondre "*sain*" alors que l'individu est malade (probabilité conditionnelle d'erreur : 1 pour cent).

Vous faites le test. Il indique "*malade*". Quelle est la probabilité que vous soyez effectivement malade ?

Avec les formules, en posant M pour malade et P pour test positif.
On va calculer $P(M | P)$. La formule de Bayes dit

$$P(M | P) = \frac{P(P | M) \cdot P(M)}{P(P)} = \frac{0.99 \times 0.01}{P(P)}$$

On évalue $P(P)$ par la formule des probabilités totales

$$P(P) = P(P | M) \times P(M) + P(P | \overline{M}) \times P(\overline{M}) = 0.99 \times 0.01 + 0.02 \times 0.99$$

On effectue l'application numérique

$$P(M | P) = \frac{0.99 \times 0.01}{0.99 \times 0.01 + 0.02 \times 0.99} = \frac{1}{3}$$

On peut se convaincre avec un effectif d'un million de personnes

	malade	sain
test positif	9 900	19 800
test négatif	100	970 200
	10 000	990 000

Vous êtes sur la première ligne. Vous avez deux fois plus de chances d'être dans la première colonne que dans la seconde.

EXERCICE CLASSIQUE.

Je joue contre un adversaire pris au hasard dans la salle. Je sais quand même qu'un élève sur dix triche. Face à un tricheur, je perds une fois sur trois. Face à un joueur honnête, je perds une fois sur vingt. J'ai joué, j'ai perdu. Je le traite de tricheur. Quelle est la probabilité que ce soit vrai.

Là encore, directement comme aux concours.

On note T « c'est un tricheur ». On note G « je gagne ».

On cherche $P(T | \overline{G})$. On applique la formule de Bayes et celle des probabilités totales

$$P(T | \overline{G}) = \frac{P(\overline{G} | T) \cdot P(T)}{P(\overline{G})} = \frac{P(\overline{G} | T) \cdot P(T)}{P(\overline{G} | T) \cdot P(T) + P(\overline{G} | \overline{T}) \cdot P(\overline{T})}$$

On utilise les données (probabilités a priori)

$$P(T | \overline{G}) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{20} \cdot \frac{9}{10}} = \frac{20}{47}$$

Bref, une chance sur deux pour que j'aie raison.

	adversaire réglo	adversaire tricheur
je perds	27	20
je gagne	513	40
	540	60

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

On vous a donné deux dés dont les six faces sont étrangement numérotées :

dé <i>Graflesoutif</i>	1	2	3	3	3	4
dé <i>Crochlalune</i>	1	1	2	2	3	3

mais ils sont équilibrés (*faces équiprobables*).

Vous lancez les deux, quelle est la probabilité que vous ayez un double ?

Pour un duel, lequel des deux dés prenez vous ?

Je lance un dé, je vois affiché 4. Quelle est la probabilité que ce soit le dé *Graflesoutif* ?

Je lance un dé, je vois affiché 2. Quelle est la probabilité que ce soit le dé *Graflesoutif* ?

Dans ce tableau, l'événement « avoir un double » :

	1	2	3	3	3	4
1	x					
1	x					
2		x				
2		x				
3			x	x	x	
3			x	x	x	

de probabilité $\frac{10}{36}$ ce

qui fait $\frac{5}{18}$.

Dans ce tableau, *Graflesoutif* bat *Crochlalune* :

	1	2	3	3	3	4
1		x	x	x	x	x
1		x	x	x	x	x
2			x	x	x	x
2			x	x	x	x
3						x
3						x

de probabilité $\frac{50}{36}$ ce

qui fait plus que $\frac{1}{2}$.

Par la formule de Bayes (et même sans)

$$P(G | 4) = \frac{P(4 | G).P(G)}{P(4)} = \frac{P(4 | G).P(G)}{P(4 | G).P(G) + P(4 | C).P(C)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

$$P(G | 2) = \frac{P(2 | G).P(G)}{P(2)} = \frac{P(2 | G).P(G)}{P(2 | G).P(G) + P(2 | C).P(C)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Le 2 a renforcé la probabilité d'avoir tiré *Crochlalune*.

EXERCICE CLASSIQUE.

Dans ce café, il y a cinq WC : deux pour hommes, trois pour femmes. Vous savez par expérience qu'un WC "homme" a soixante pour cent de "chances" d'être souillé, et qu'un WC "dame" a seulement quarante pour cent de chances d'être souillé. Vous ouvrez une porte au hasard. Les lieux sont propres. Quelle est la probabilité que vous soyez dans les toilettes correspondants à votre sexe ?

Les événements à croiser sont H ou F pour l'intitulé des toilettes, et P ou S pour l'état des toilettes.

	<i>Homme</i>	<i>Femme</i>
<i>Propre</i>		
<i>Sale</i>		

Le nombre de portes vous donne

	<i>Homme</i>	<i>Femme</i>
<i>Propre</i>		
<i>Sale</i>		

$\downarrow \frac{2}{5}$ $\downarrow \frac{3}{5}$

Les probabilités conditionnelles donnent

<i>Homme</i>		<i>Femme</i>	
<i>Propre</i>	40/100	<i>Propre</i>	60/100
<i>Sale</i>	60/100	<i>Sale</i>	40/100

$\downarrow \frac{2}{5}$ $\downarrow \frac{3}{5}$

<i>Propre</i>	80/500	180/500	→ 260/500
<i>Sale</i>	120/500	120/500	→ 240/500
vérification	200/500	200/500	

On extrait ce dont on se doutait : la probabilité que les toilettes soient propres ou sales. $\frac{12}{25}$ et $\frac{13}{25}$ (environ une chance sur deux d'avoir un siège propre).

Mais tout à coup, l'univers se retreint : vous avez ouvert la porte, les lieux d'aisance sont clean :

inter <i>Propre</i>	$\frac{80}{500}$	$\frac{180}{500}$	→ $\frac{13}{25}$
On renormalise	sachant <i>Propre</i>	$\frac{4}{13}$	$\frac{9}{13}$

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Vous êtes entrepreneur désireux de bâtir un complexe industriel dans une zone protégée. Vous devez donc soudoyer un élu en Mairie. Vous savez que les élus *Cubration* se laissent corrompre dans trente pour cent des cas, et que les élus *Cidé* se laissent corrompre dans soixante pour cent des cas. Quant aux élus *Teufinal*, ils sont incorruptibles. La composition du Conseil Municipal est de quatre *Cubration*, cinq *Cidé* et un *Teufinal*.

Vous prenez rendez vous avec un élu. Le secrétaire de Mairie a choisi au hasard. Quelle est la probabilité que vous réussissiez à obtenir votre autorisation pourtant illégale ?

Vous avez réussi à obtenir votre permis. Quelle est la probabilité que vous ayez eu affaire à un élu *Cubration* ?

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Un homme a six chances sur mille d'avoir un vrai jumeau. Dans ce cas, si l'un est somnambule, l'autre a une chance sur deux de l'être aussi. Huit fois sur dix, un des jumeaux est droitier et l'autre gaucher. "Somnambulisme" et "dextrographie/senestrographie" sont des événements indépendants.

Alain est somnambule et gaucher.

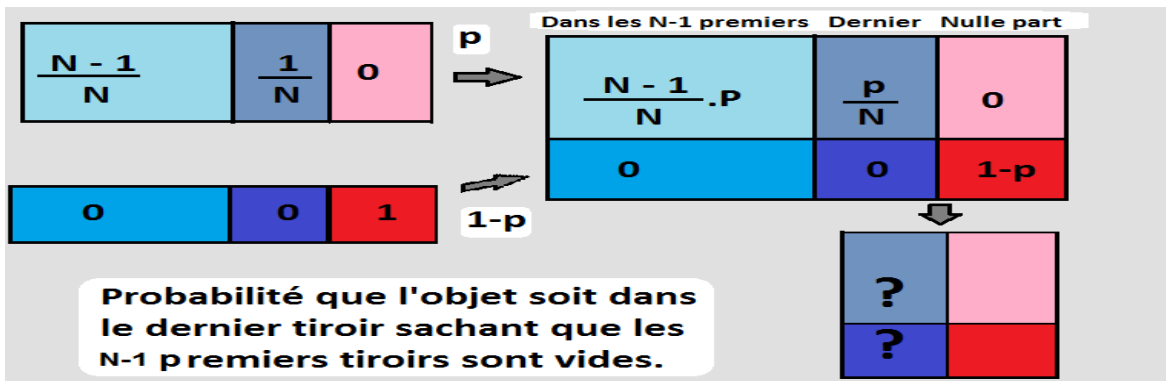
Quelle est la probabilité qu'il ait un frère jumeau gaucher ?

Quelle est la probabilité qu'il ait un frère jumeau somnambule ?

Quelle est la probabilité d'avoir un jumeau gaucher et somnambule ?

EXERCICE DE CONCOURS.

Un meuble a huit tiroirs. Un objet se trouve dans le meuble avec une probabilité p . Le propriétaire vient d'ouvrir les sept premiers tiroirs sans y trouver l'objet. Quelle est la probabilité que l'objet soit dans le huitième tiroir ? Non, ce n'est pas p .



Normalement, le schéma ci dessus donne tout.
Mais on peut aussi écrire des formules.

$$P(7 \text{ tiroirs vides}) = P(7 \text{ tiroirs vides} \mid \text{dans le meuble}).P(\text{dans le meuble}) + \\ + P(7 \text{ tiroirs vides} \mid \text{pas dans le meuble}).P(\text{pas dans le meuble})$$

$$P(7 \text{ tiroirs vides}) = \frac{1}{8}.p + 1.(1 - p) = 1 - \frac{7.p}{8}$$

(et si 7 est peu différent de 8, c'est presque $1 - p$).

(si l'objet est dans le meuble, une chance sur huit que l'objet soit dans le huitième tiroir et donc une chance sur huit qu'il ne soit dans aucun des premiers)

On fait appel à Thomas Bayes (1702-1761)

$$P(\text{tiroir } 8 \mid 7 \text{ tiroirs vides}) = \frac{P(7 \text{ tiroirs vides et tiroir } 8)}{P(7 \text{ tiroirs vides})}$$

$$P(\text{tiroir } 8 \mid 7 \text{ tiroirs vides}) = \frac{\frac{1}{8}.p}{1 - \frac{7.p}{8}} = \frac{p}{8 - 7.p}$$

Et pour généraliser avec n tiroirs

$$P(\text{tiroir } n \mid (n - 1) \text{ tiroirs vides}) = \frac{p}{n - (n - 1).p}$$

(est ce cohérent pour $n = 1$?).

EXERCICE DE CONCOURS.

On rappelle que pour une pièce équilibrée, les tirages successifs sont indépendants. C'est ainsi que contrairement à ce que pensent les débutants, la probabilité d'obtenir Pile sachant qu'on a obtenu Face aux cent tirages précédents reste toujours $\frac{1}{2}$. La loi des grands nombres qui tend à équilibrer le nombre moyen de Pile est un théorème asymptotique, qui parle de $\forall \varepsilon, \exists N$, et à 100 ou même 10^{20} , on est encore très loin de l'infini³.

Mais passons à l'exercice : vous avez deux pièces de monnaie dans votre poche : une pièce classique avec des faces P/F, et une pièce avec deux faces Face (F/F, pratique pour tricher).

Vous sortez une pièce au hasard (vous ne savez pas laquelle des deux). Vous la lancez cent fois, vous avez obtenu cent fois Pile. Quelle est la probabilité que vous obteniez Face au tirage suivant ?

Cet exercice est idiot. On sait que la pièce est celle avec Pile et Face. La probabilité est donc $1/2$.

Vous sortez une pièce au hasard (vous ne savez pas laquelle des deux). Vous la lancez cent fois, vous

3. d'ailleurs, quand vous commencez à lancer la pièce, vous estimez normal que les probabilités soient $1/2$ et $1/2$, alors même que vous ignorez si elle n'est tombée trente fois sur Pile juste avant que vous ne la ramassiez

avez obtenu cent fois Face. Quelle est la probabilité que vous obteniez Face au tirage suivant ?

Les deux probabilités a priori valent $1/2$ (deux pièces).

On considère l'événement « cent fois face » qu'on sépare en deux suivant la pièce choisie

$$P(F^{100}) = P(F^{100} | \text{truquee}).P(\text{truquee}) + P(F^{100} | \text{equilibree}).P(\text{equilibree}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100} + 1 \cdot \frac{1}{2}$$

On estime alors les deux probabilités conditionnelles $P(\text{truquee} | F^{100})$ et $P(\text{equilibree} | F^{100})$

$$P(\text{truquee} | F^{100}) = \frac{P(F^{100} | \text{truquee}).P(\text{truquee})}{P(F^{100})} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100} + 1 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$P(\text{equilibree} | F^{100}) = \frac{P(F^{100} | \text{equilibree}).P(\text{equilibree})}{P(F^{100})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100} + 1 \cdot \frac{1}{2}}$$

Par formule des probabilités totales, on a alors

$$P(F^{101} | F^{100}) = P(F^{101} | \text{truquee et } F^{100}).P(\text{truquee} | F^{100})$$

$$+ P(F^{101} | \text{equilibree et } F^{100}).P(\text{equilibree} | F^{100})$$

et on s'applique numériquement

$$P(F^{101} | F^{100}) = 1 \cdot P(\text{truquee} | F^{100}) + \frac{1}{2} \cdot P(\text{equilibree} | F^{100})$$

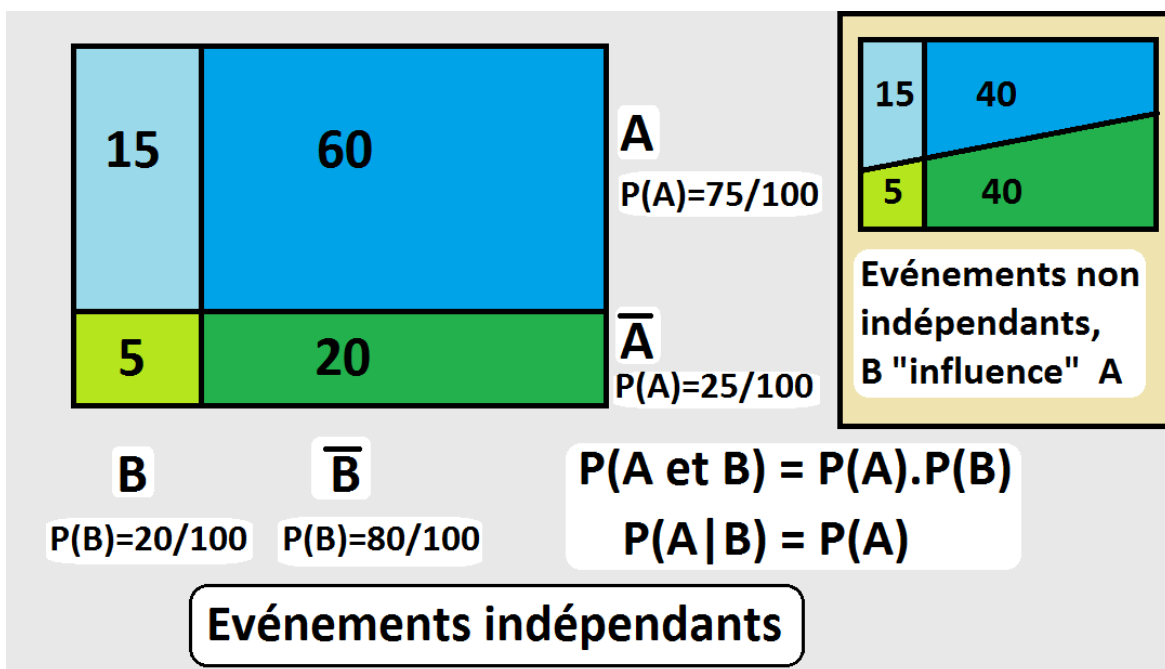
$$P(P^{100} \times F | P^{100}) = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100} + 1 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{100} + 1 \cdot \frac{1}{2}}$$

La calculatrice donne 1. Mais c'est parce qu'elle arrondit. En fait, c'est à 10^{-31} près.

Avec 10 à la place 100, c'est plus intéressant : 0.9995 à 10^{-4} près.

d - Événements indépendants.

1- Couple d'événements indépendants.



	A	$\bar{A}$
B	$P(A \cap B) = \alpha.\beta$	$P(\bar{A} \cap B) = (1 - \alpha).\beta$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B}) = \alpha.(1 - \beta)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (1 - \alpha).(1 - \beta)$

Les deux événements sont indépendants si et seulement si $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ est nul.

EXERCICES ÉLÉMENTAIRES.

Que signifie “ A est indépendant de lui même” ?

On se met à demander $P(A \cap A) = P(A).P(A)$ et ceci donne $P(A) = (P(A))^2$.
 $P(A)$ vaut 0 ou 1. Bref, événement pas aléatoire.

Montrez que si A est indépendant de B , alors $\bar{A}$ est indépendant de B , A est indépendant de $\bar{B}$ et $\bar{A}$ est indépendant de $\bar{B}$.

La relation “être indépendant de” est elle réflexive, symétrique, transitive, antisymétrique ?

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Dans l’univers des entiers de 0 à 239, les événements “être un multiple de 2” et “être un multiple de 3” sont ils indépendants ?

On va compter les multiples de 2, de 3, de 6 (multiples de 2 et de 3)

nombre de multiples de 2 : 120	nombre de multiples de 3 : 80	nombre de multiples de 6 : 40
$P(\text{multiple de } 2) = \frac{1}{2}$	$P(\text{multiple de } 3) = \frac{1}{3}$	$P(\text{multiple de } 2 \text{ et de } 3) = \frac{1}{6}$

Les événements sont indépendants.

les événements “être un multiple de 2” et “être un multiple de 5” sont ils indépendants ?

On va compter les multiples de 2, de 5, de 10

nombre de multiples de 2 : 120	nombre de multiples de 5 : 48	nombre de multiples de 10 : 24
$P(\text{multiple de } 2) = \frac{1}{2}$	$P(\text{multiple de } 5) = \frac{1}{5}$	$P(\text{multiple de } 2 \text{ et de } 5) = \frac{1}{10}$

Les événements sont indépendants.

les événements “être un multiple de 3” et “être un multiple de 7” sont ils indépendants ?

On va compter les multiples de 3, de 7, de 21

nombre de multiples de 3 : 80	nombre de multiples de 7 : 34	nombre de multiples de 21 : 11
$P(\text{multiple de } 3) = \frac{1}{3}$	$P(\text{multiple de } 7) = \frac{34}{240}$	$P(\text{multiple de } 2 \text{ et de } 3) = \frac{1}{240}$

Les événements sont dépendants.

Parmi les 80 multiples de 3, il y a 11 multiples de 7.

Parmi les 240 entiers, il y a 34 multiples de 7, c'est plus que 3×11 .

Parmi les 34 multiples de 7, il y a 11 multiples de 3.

0	21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	231
7	28	49	70	91	112	133	154	175	196	217	238
14	35	56	77	98	119	140	161	182	203	224	

2- Lien avec les probabilités conditionnelles.

On montre que A et B sont indépendantes si et seulement si on a $P(A | B) = P(A)$.
 La proportion d'éléments de B vérifiant A est la même que la proportion d'éléments de Ω vérifiant A .
 On a alors $P(B | A) = P(B)$ et $P(\bar{A} | B) = P(\bar{A})$.

3- Famille finie d'événements mutuellement indépendants.

EXERCICE DE CONCOURS.

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements indépendants d'un univers probabilisé $(\Omega, P(\Omega), P)$. Montrez que la probabilité qu'aucun ne soit réalisé est majorée par $\exp\left(-\sum_{k=1}^n P(A_k)\right)$.

Avec la notation « barre » pour le complémentaire, on nous demande d'estimer $P(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k)$.

Par indépendance des A_k entre eux (et donc de leurs complémentaires), c'est $\prod_{k=1}^n P(\bar{A}_k)$.

On estime donc le produit de termes positifs $\prod_{k=1}^n (1 - p_k)$.

On majore $1 - p_k$ par e^{-p_k} (inégalité de convexité $1 - x \leq e^{-x}$ pour x réel). Toute est positif (j'insiste) et on multiplie membre à membre. Il reste à mettre en boucle la propriété de morphisme de l'exponentielle $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ pour arriver à la majoration par $\exp\left(-\sum_k p_k\right)$ (qui est utile car le majorant est plus petit que 1).

EXERCICE CLASSIQUE.

X et Y sont deux expériences : lancer de deux pièces indépendantes, équilibrées.

$A = X \text{ tombe sur pile}$

On donne trois événements :

$B = Y \text{ tombe sur pile}$

$C = X \text{ et } Y \text{ tombent sur la même face}$

Montrez : $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(\Omega)}$ et $\frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(\Omega)}$. Concluez.

$P(A) = \frac{1}{2}$	$P(B) = \frac{1}{2}$	$P(C) = P(A \text{ et } B) + P(\overline{A} \text{ et } \overline{B}) = \frac{1}{2}$
On continue :		
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{4}$ événements indépendants		$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$ $P(A \cap C) = P(A \text{ et } B) = \frac{1}{4}$
$P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$ $P(B \cap C) = P(A \cap B) = \frac{1}{4}$	et	$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$ $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$
Conclusion	A et B sont indépendants.	A, B et C ne sont pas indépendants
	B et C sont indépendants.	
	C et A sont indépendants.	
C'est bien la différence entre « deux à deux » et « dans leur ensemble ».		

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Montrez par un contre-exemple que si A est indépendant de B et de C , il n'est pas forcément indépendant de $B \cap C$.

Si A est indépendant de B et de C , est-il indépendant de $B \cup C$?

Le contre-exemple ci dessus est parfait :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B), P(A \cap C) = P(A) \times P(C), P(A \cap (B \cap C)) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = P(A) \times P(B \cap C)$$

On écrit ensuite

$$P(A \cap (B \cup C)) = P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$P(A) \times P(B \cup C) = P(A) \times \left(P(B) + P(C) - P(B \cap C) \right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8}$$

et c'est logique, puisque $B \cup C$ fait intervenir $B \cap C$.

VARIABLES ALÉATOIRES

a - Variables aléatoires.

1- Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E . Lorsque E est une partie de $\mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.

On pourra construire les variables aléatoires constantes comme $\omega \mapsto 1$ (espérance 1, variance nulle).

On pourra aussi construire pour un événement A donné sa fonction indicatrice $\omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$ (espérance $P(A)$, variance $P(A) \times (1 - P(A))$).

2- Loi P_X de la variable aléatoire X .

On ne cherche en général pas à connaître totalement la variable aléatoire, " ω par ω ".

Ce qui nous importe est de savoir mesurer les événements liés à la variable aléatoire par image réciproque.

Le probabiliste ne veut pas connaître les notes de chaque élève de l'univers MPSI2, il veut juste connaître l'histogramme des notes.

Si on connaît pour chaque a chaque $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$, on connaît la variable.

Si on connaît pour chaque a chaque $P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\})$, on connaît la loi de la variable, ce qui est amplement suffisant. La “masse” de l’image réciproque $P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\})$ est simplement notée $P(X = a)$.

On notera que les $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$ avec a dans l’ensemble image forment un système complet d’événements.

EXERCICE DE CONCOURS.

On a un Q.C.M. à n questions, avec 4 choix à chaque question. Pour chaque question, on a une probabilité p de connaître la réponse (*quand on la connaît, on répond juste*). Quand on ne connaît pas la réponse, on coche au hasard une des quatre cases. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses obtenues en connaissant la réponse. On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses quand on répond au hasard. Trouvez la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

.

3- Image d’une variable aléatoire par une fonction, loi associée.

Si X est une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E et f une application de E dans F , alors $f(X)$ est à son tour une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans F .

La nouvelle loi est la liste des $P(f(X) = y)$. On montre alors $P(f(X) = y) = \sum_{\substack{x \in E \\ f(x) = y}} P(X = x)$.

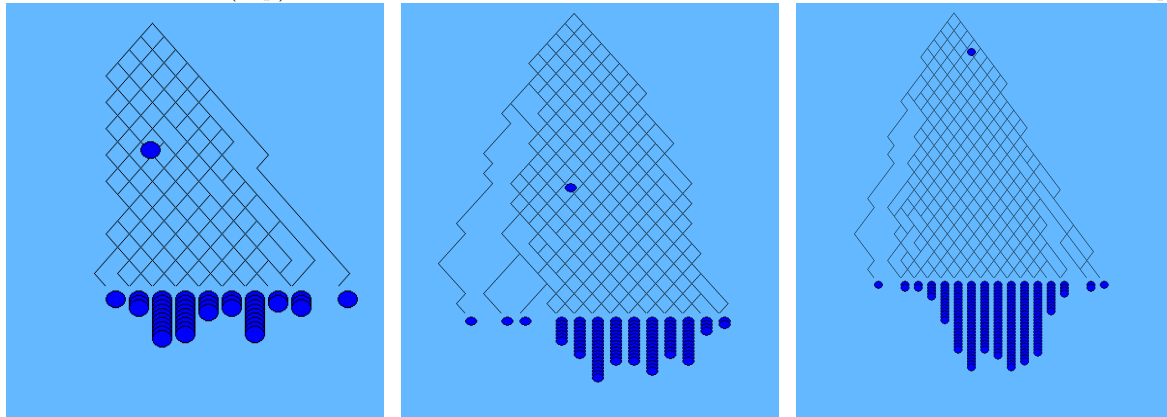
b - Lois usuelles.

Loi uniforme sur $\text{range}(1, n+1)$	$P(U_n = k) = \frac{1}{n}$
Loi de BERNOULLI de paramètre p (dans $[0, 1]$) :	$P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$
Loi binomiale de paramètres n (dans $\mathbb{N}^*$) et p (dans $[0, 1]$) :	$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p \times (1 - p)^{n-k}$

On ajoutera si nécessaire la loi de Rademacher $P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$. Il s’agit de la translation/dilatation d’une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et elle modélise le tirage “pile ou face équilibré”.

La loi de Bernoulli est une binomiale avec $n = 1$.

La loi binomiale $\mathfrak{B}(n, p)$ est la somme de n lois de BERNOULLI indépendantes de même paramètre p .



Tant qu’on y est, allez sur YouTube voir des vidéos de la planche de GALTON, y compris la vidéo (travaillée avec Blender3D) dans laquelle une planche de Galton semble servir à trier des billes de

couleur.

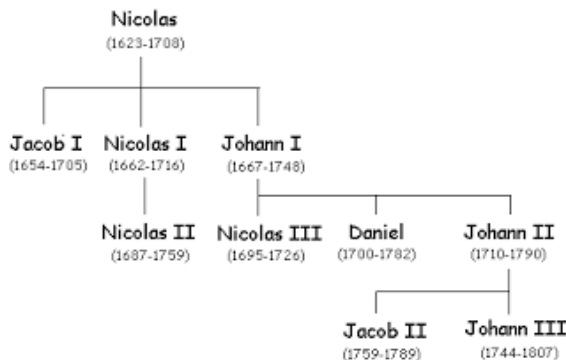
EXERCICE IDIOT.

Vous tirez un Bernoulli au hasard, quelle est la probabilité qu'il s'appelle Jean ?

Vous tirez un Bernoulli au hasard, quelle est la probabilité qu'il s'appelle Daniel ?

Vous tirez un Bernoulli au hasard, quelle est la probabilité qu'il soit fils de Jean ?

Vous tirez un Bernoulli au hasard, quelle est la probabilité qu'il s'appelle Jean sachant qu'il est fils de Jacob ?



EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Vrai ou faux :

- si X suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(n, p)$, alors $n - X$ suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(n, 1 - p)$,

X compte les succès pour n essais indépendants de même loi.

$n - X$ va donc compter les échecs. Et ce sont des échecs indépendants. Et chaque échec survient avec probabilité $1 - p$.

Donc oui.

- si X suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(n, p)$, alors $2.X$ suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(2.n, p)$,

Ah non !

Déjà, $2.X$ ne prend que $n + 1$ valeurs : 0, 2, 4, jusqu'à $2.n$. $P(2.X = 1) = 0$.

Alors que la loi $\mathfrak{B}(2.n, p)$ prend par exemple la valeur 1 avec probabilité non nulle.

- si X suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(2.n, p)$, alors $X/2$ suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(n, p)$,

Ah non ! Même type d'ânerie. Une variable qui suit $\mathfrak{B}(n, p)$ ne prend jamais la valeur $1/2$ tandis que $X/2$ réussit !

- si X et Y suivent une loi binomiale $\mathfrak{B}(n, p)$, alors $X + Y$ suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(2.n, p)$.

Si X et Y sont indépendantes alors c'est vrai (car on compte alors les succès de $n + n$ essais indépendants).

Mais sinon, on a un contre exemple quelques lignes plus haut avec $X = Y$.

EXERCICE CLASSIQUE.

On considère la marche de l'ivrogne parti de $(0, 0)$ dans le plan en $2.n$ étapes (à chaque étape, les déplacements $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, sont équiprobables).

Montrez que la probabilité que l'ivrogne soit revenu sur l'axe Oy est $\binom{2.n}{n} \times \frac{1}{4^n}$.

Pour revenir à l'origine, condition nécessaire et suffisante :

autant de déplacements $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ que de déplacements $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (est et ouest)

autant de déplacements $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ que de déplacements $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (nord et sud)

On va donc choisir p déplacements $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ parmi $2.n$ déplacements : $\binom{2.n}{p}$.

On choisit ensuite p déplacements $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ parmi les $2.n - p$ qui restent : $\binom{2.n - p}{p}$.

On choisit ensuite $n - p$ déplacements $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ parmi les $2.n - 2.p$ qui restent : $\binom{2.n - 2.p}{n - p}$ (oui, il faut au total $2.n$ déplacements, donc $p + p + (n - p) + (n - p)$).

On (ne) choisit (plus) les $n - p$ déplacements $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ parmi les $2.n - 2.p - (n - p)$ qui restent : $\binom{n - p}{n - p} = 1$.

On simplifie donc

$$\begin{aligned} \binom{2.n}{p} \cdot \binom{2.n - p}{p} \cdot \binom{2.n - 2.p}{n - p} \cdot \binom{n - p}{n - p} &= \frac{(2.n)!}{p! \cdot (2.n - p)!} \cdot \frac{(2.n - p)!}{p! \cdot (2.n - 2.p)!} \cdot \frac{(2.n - 2.p)!}{(n - p)! \cdot (n - p)!} \cdot \frac{(n - p)!}{(n - p)! \cdot (0)!} \\ &= \frac{(2.n)!}{p! \cdot p! \cdot (n - p)! \cdot (n - p)!} \end{aligned}$$

et on reconnaît un coefficient du multinôme. Il reste à diviser par $2^{2.n}$ (nombre de chemins).

Mais on n'en est pas à la formule demandée. D'autant qu'il reste un p dont on se demande ce qu'il fait là.

Mais il faut sommer sur p qui peut aller de 0 à n .

Pour $p = 0$ l'ivrogne ne se déplace que dans les directions N et S.

Pour $p = n$, l'ivrogne ne se déplace que dans les directions E et O.

Exemples de mots ramenant à l'origine avec $2.n = 8$: *NNSNSSEO*, *NNESOOSE*, *NSEESNOO*, *NNNNSSSS*, *EENOOOS*.

La probabilité cherchée est donc $\frac{1}{4^n} \cdot \sum_{p=0}^n \frac{(2.n)!}{p! \cdot p! \cdot (n - p)! \cdot (n - p)!}$ qu'on écrit même

$$\frac{1}{4^n} \cdot \sum_{p=0}^n \frac{n!}{(n - p)! \cdot p!} \cdot \frac{n!}{p! \cdot (n - p)!} \cdot \frac{(2.n)!}{n! \cdot n!}$$

Un exercice classique remplace $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \cdot \binom{n}{n - p}$ par $\binom{2.n}{n}$ (en cherchant le coefficient de X^n dans $(1 + X)^n \cdot (1 + X)^n$).

On a donc

$$P(\text{retourn a l'origine}) = \frac{1}{4^n} \cdot \binom{2.n}{n}^2$$

Montrez que la probabilité que l'ivrogne soit revenu sur l'axe Ox est $\binom{2.n}{n} \times \frac{1}{4^n}$.

Quelle est la probabilité p_n que l'ivrogne soit revenu à l'origine ?

Donnez un équivalent de p_n à l'aide de la formule de Stirling.

La série de terme général p_n converge-t-elle ?

Pourquoi n'envisage-t-on pas la probabilité que l'ivrogne soit revenu en $(0,0)$ en $2.n + 1$ étapes ?

c - Couples de variables aléatoires.

1- Loi conjointe : liste des $P((X, Y) = (a, b))$ pour a et b décrivant A et B .

EXERCICE VRAIMENT ÉLÉMENTAIRE. A et B sont deux variables aléatoires indépendantes “lancer d'un dé équilibré à six faces”.

Complétez la loi conjointe de (A, B) .

Complétez la loi conjointe de (μ, M) avec $\mu = \min(A, B)$ et $M = \max(A, B)$.

	$A = 1$	$A = 2$	$A = 3$	$A = 4$	$A = 5$	$A = 6$
$B = 1$	1/36	1/36	1/36			
$B = 2$	1/36	1/36				
$B = 3$	1/36					
$B = 4$				1/36		
$B = 5$						1/36
$B = 6$						

	$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu = 3$	$\mu = 4$	$\mu = 5$	$\mu = 6$
$M = 1$	1/36		0			
$M = 2$	1/18	1/36				
$M = 3$			1/36			
$M = 4$						
$M = 5$	1/18					
$M = 6$						

EXERCICE MOINS ÉLÉMENTAIRE. Est il possible de créer deux dés “non équilibrés” pour avoir :

	$\mu = 1$	$\mu = 2$	$\mu = 3$	$\mu = 4$	$\mu = 5$	$\mu = 6$
$M = 1$	6/441	0	0	0	0	0
$M = 2$	17/441	10/441	0	0	0	0
$M = 3$	22/441	23/441	12/441	0	0	0
$M = 4$	27/441	26/441	25/441	12/441	0	0
$M = 5$	32/441	29/441	26/441	23/441	10/441	0
$M = 6$	37/441	32/441	27/441	22/441	17/441	6/441

EXERCICE DE CONCOURS (ÉLÉMENTS DU PROGRAMME DE SPÉ).

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $P(X = i \text{ et } Y = j) = 0$ si $i > j$ et

$P(X = i, Y = j) = \frac{1}{2^j} \times \binom{j}{i} \times p \times (1 - p)^j$ sinon. Vérifiez que c'est bien une loi de probabilité.

Calculez les lois de X et Y .

Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

☐

2- Lois marginales d'un couple de variables aléatoires

$$P(X = a) = \sum_{b \in B} P((X, Y) = (a, b)).$$

Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe. sauf en cas d'indépendance.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Complétez

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 1$		1/5	1/20
$Y = 2$	3/20		3/20
$Y = 3$		1/20	

sachant $P(X = 2) = \frac{7}{20}$, $P(X = 3) = \frac{3}{10}$ et $P(Y = 1) = \frac{1}{4}$.

Calculez $P(X = 1)$. Calculez $P(X = 2 | Y = 1)$.

Calculez $P(X > Y)$, $P(X = Y)$ et $P(X > Y | X \geq Y)$ et $P(X \geq Y | X > Y)$.

$P(X = 2) = \frac{7}{20}$ donc

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 1$		$4/20$	$1/20$
$Y = 2$	$3/20$	$2/20$	$3/20$
$Y = 3$		$1/20$	

$P(X = 3) = \frac{6}{20}$ donc

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 1$		$4/20$	$1/20$
$Y = 2$	$3/20$	$2/20$	$3/20$
$Y = 3$		$1/20$	$2/20$

$P(Y = 1) = \frac{5}{20}$ donc

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 1$	$0/20$	$4/20$	$1/20$
$Y = 2$	$3/20$	$2/20$	$3/20$
$Y = 3$		$1/20$	$2/20$

 et la dernière case pour un total de 1 :

$P(X = 1 \text{ et } Y = 3) = \frac{4}{20}$.

On extrait

	$X = 1$
$Y = 1$	$0/20$
$Y = 2$	$3/20$
$Y = 3$	$4/20$

 puis $P(X = 1) = \frac{7}{20}$.

On ne garde qu'une ligne

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 1$	$0/20$	$4/20$	$1/20$

 qu'on re-normalise : $P(X = 2 | Y = 1) = \frac{4/20}{5/20} = \frac{4}{5}$.

On somme quelques cases

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 1$	$0/20$		
$Y = 2$		$2/20$	
$Y = 3$			$2/20$

 et

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 1$		$4/20$	$1/20$
$Y = 2$			$3/20$
$Y = 3$			

$P(X = Y) = \frac{4}{20}$ et $P(X > Y) = \frac{8}{20}$.

On termine avec

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 1$		$4/20$	$1/20$
$Y = 2$			$3/20$
$Y = 3$			

 et

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 1$	$0/20$	$4/20$	$1/20$
$Y = 2$		$2/20$	$3/20$
$Y = 3$			$2/20$

et on calcule $P(X > Y | X \geq Y) = \frac{8/20}{12/20} = \frac{8}{12}$ (déjà calculable avec ce qui précédait).

Bien évidemment $P(X \geq Y | X > Y) = 1$.

3- Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.

	X=a	X=b	X=c	X=d
Y=1	0,1	0,1	0,2	0,05
Y=2	0,1	0,1	0,05	0,1
Y=3	0,05	0,05	0	0,1

Loi conjointe

	X=a	X=b	X=c	X=d	
Y=1	0,1	0,1	0,2	0,05	0,45
Y=2	0,1	0,1	0,05	0,1	0,35
Y=3	0,05	0,05	0	0,1	0,2
	0,25	0,25	0,25	0,25	

loi marginale de X

Lois marginales

Couples de variables aléatoires

	X=a	X=b	X=c	X=d
Y=1	0,1	0,4	0,2	0,05
Y=2	0,1	0,4	0,05	0,1
Y=3	0,05	0,2	0	0,1

Loi conditionnelle de Y sachant X = b

EXERCICE POUR CASER UNE CONTREPETRIE.

Maintenant, je peux vous l'avouer. Pour noter vos devoirs, c'était simple, Solène et moi disposions d'une urne⁴ contenant vingt boules numérotées de 1 à 20 (*le serpent Python était bien déçu, pas de 0*). Je tirais une note, puis Solène en tirait une autre (*j'ai bien dit une autre, je gardais ma boule*).

Complétez la loi conjointe du tirage : $P(N = k, S = n) = \begin{cases} si & k \neq n \\ 0 & si & k = n \end{cases}$.

Ensuite, comme c'est moi le plus gentil, je vous donnais en maths la meilleure des deux notes, et bien sûr $\Phi = \min(N, S)$.

Complétez : $P(M = k, \Phi = n) = \begin{cases} 0 & si & k \leq n \\ si & k > n \end{cases}$. Vérifiez que la somme vaut 1.

Déduisez $P(M = k) = \frac{2 \times (k - 1)}{19 \times 20}$. Déterminez $P(\Phi = n)$.

4- Extension aux n -uplets de variables aléatoires.

Les exercices classiques de tirages dans des urnes (*ou de situations répétitives équivalentes*) correspondent à des n -uplets de variables aléatoires. La précision "*avec remise*" fait que les variables sont indépendantes. La mention "*sans remise*" fait intervenir un arbre ou la formule des probabilités composées.

EXERCICE CLASSIQUE.

x est un réel et les X_i sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et de même loi.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit $Y_n = \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^n X_k$.

Montrez que si on a $P(X_1 < x) = 1$ alors pour tout n , $P(Y_n < x) = 1$.

Montrez que si on a $P(X_1 \geq x) > 0$ alors pour tout n , $P(Y_n \geq x) > 0$.

m et n sont deux entiers naturels non nuls, montrez :

$$\left(\{Y_n \geq x\} \cap \left\{ \frac{1}{n} \times \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x \right\} \right) \subset \{Y_{n+m} \geq x\}$$

Déduisez : $P(Y_{n+m} \geq x) \geq P(Y_m \geq x) \cdot P(Y_n \geq x)$.

4. une urne énorme et un petit cube

Démontrez la convergence de la suite $\left(\sqrt[n]{P(Y_n \geq x)}\right)_n$.

d - Variables aléatoires indépendantes.

1- Si X et Y sont indépendantes :
 $P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$.

EXERCICE CLASSIQUE.

Deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\{a_1, \dots, a_n\}$ et $\{b_1, \dots, b_p\}$ sont indépendantes si et seulement si la matrice de terme général $P(X = a_i \text{ et } Y = b_k)$ est de rang 1.

Sens direct. On suppose les deux variables indépendantes.

Le terme général de la matrice est alors $P(X = a_i).P(Y = b_k)$ (produit).

La colonne k est alors $P(Y = b_k).$
$$\begin{pmatrix} P(X = a_1) \\ P(X = a_2) \\ \vdots \\ P(X = a_n) \end{pmatrix}$$

Toutes les colonnes sont proportionnelles. La matrice est de rang 1.

Elle ne peut pas être de rang 0 car au moins un terme est non nul (la somme donne 1).

Sens indirect. On suppose la matrice de rang 1.

Toutes les colonnes sont proportionnelles à une colonne
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

(du type
$$\begin{pmatrix} \beta_1.\alpha_1 & \beta_2.\alpha_1 & \dots & \beta_p.\alpha_1 \\ \beta_1.\alpha_2 & \beta_2.\alpha_2 & \dots & \beta_p.\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_1.\alpha_n & \beta_2.\alpha_n & \dots & \beta_p.\alpha_n \end{pmatrix}$$
).

Mais attention, les α_i ne sont pas forcément les $P(X = a_i)$, il peut trainer un rapport de proportionnalité.

La somme des termes de la matrices vaut 1. Or, cette somme $\sum_{\substack{i \leq n \\ k \leq p}} \alpha_i.\beta_k$ vaut 1 (probabilité de l'univers entier) et se factorise en $\left(\sum_{i \leq n} \alpha_i\right) \cdot \left(\sum_{k \leq p} \beta_k\right)$. C'est donc qu'une des deux sommes n'est nulle.

On va pouvoir poser $A = \sum_{j \leq n} \alpha_j$ et $B = \sum_{q \leq p} \beta_q$ et re-normaliser : $\gamma_i = \frac{\alpha_i}{A}$ et $\delta_k = \frac{\beta_k}{B}$.

On constate déjà qu'on a $A.B = 1$ ce qui va nous servir.

On vérifie alors que ce sont nos probabilités marginales

$$P(X = a_i) = \sum_{k=1}^p P(X = a_i \text{ et } Y = b_k) = \sum_{k=1}^p \alpha_i.\beta_k = \alpha_i \cdot \sum_{k=1}^p \beta_k = \alpha_i.B = \frac{\alpha_i}{A} = \gamma_i$$

de même en sommant en ligne

$$P(Y = b_k) = \sum_{i=1}^n P(X = a_i \text{ et } Y = b_k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i.\beta_k = \beta_k \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i = \beta_k.A = \frac{\beta_k}{B} = \delta_k$$

On vérifie l'indépendance : pour tout couple (i, k)

$$P(X = a_i \text{ et } y = b_k) = \alpha_i.\beta_k = \frac{\alpha_i}{A} \cdot \frac{\beta_k}{B} = \gamma_i.\delta_k = P(X = a_i).P(Y = b_k)$$

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Complétez pour que les variables aléatoires “note en maths” et “note en physique” soient indépendantes, pour faire plaisir à l’inspecteur.

élève	Alice	Bintou	Camille	Diane	Élie	Fred	Gwen	Hans	Ilias	Jules
maths	A	A	A	B	A	B	C	B	B	
physique	A	B	C		C			B	B	
élève	Kian	Lev	Max	Naomi	Omar	Piotr	Quik	Ruth	Swen	Tcheng
maths	B	B	B		B	B	B	C		C
physique								A		A

2- Variables aléatoires mutuellement indépendantes.

X suit une loi uniforme sur l’ensemble à deux éléments $\{-1, 1\}$. Y aussi et est indépendante de X :

la table conjointe est donc

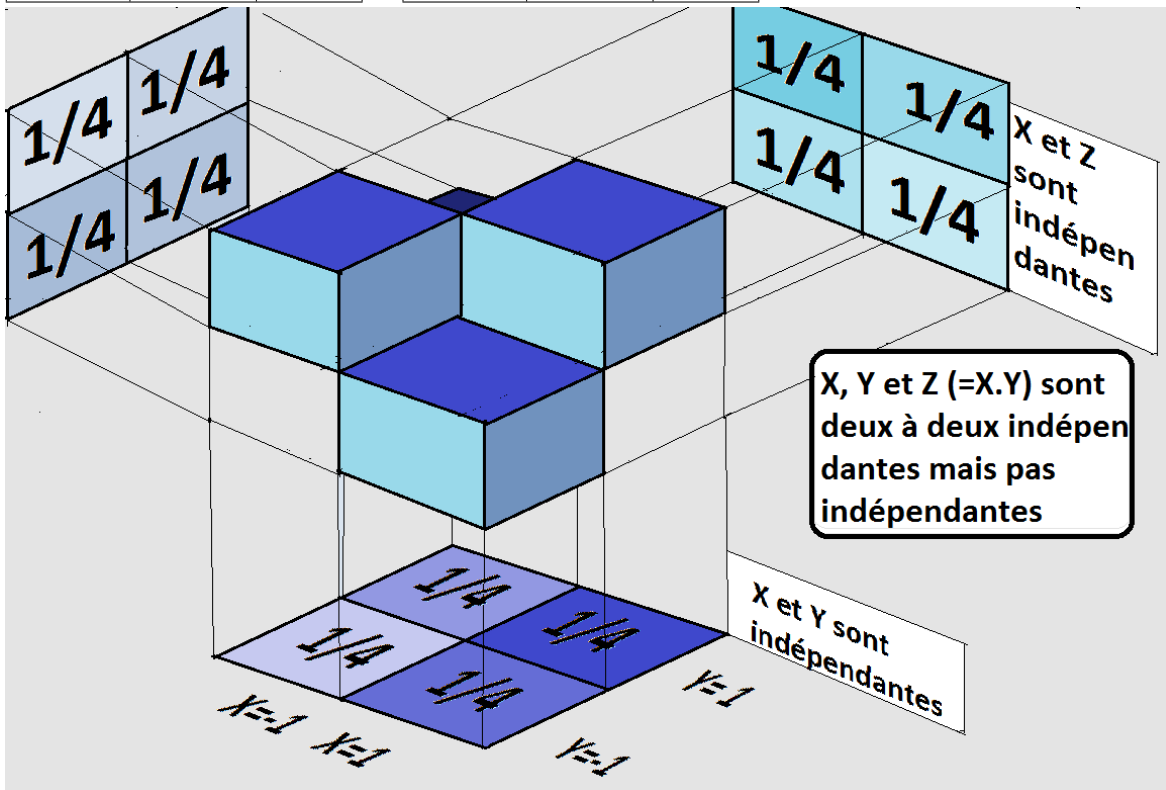
	$X = -1$	$X = 1$
$Y = -1$	1/4	1/4
$Y = 1$	1/4	1/4

Le produit $Z = X \times Y$ suit aussi une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$:

$Z = 1$	$X = -1$	$X = 1$
$Y = -1$	1/4	
$Y = 1$		1/4

et

$Z = -1$	$X = -1$	$X = 1$
$Y = -1$		1/4
$Y = 1$	1/4	



Les couples (X, Y) , (Y, Z) et (X, Z) sont faits de variables indépendantes.

Mais le triplet (X, Y, Z) n’est pas fait de variables indépendantes : $P((X, Y, Z) = (1, 1, -1)) = 0$ et

$$P(X = 1) \times P(Y = 1) \times P(Z = -1) = \frac{1}{8}.$$

3- Modélisation de n expériences indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes.

Il paraît qu’il faut montrer un jour aux élèves que si par exemple $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ est un sextuplet de variables mutuellement indépendantes, alors pour toute application F , G et H , les variables $F(X_1, X_2)$, $G(X_3, X_4, X_5)$ et $H(X_6)$ sont mutuellement indépendantes.

4- Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi $B(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $B(n, p)$.

EXERCICE DE CONCOURS.

Deux variables indépendantes X et Y suivent deux lois binomiales $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(n', p')$.

A quelle condition $X + Y$ suit elle une loi binomiale ?

A quelle condition supplémentaire $n - X + Y$ suit elle aussi une loi binomiale ?

Pour $p = p'$, on sait que la somme $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres $n + n'$ et p .
En effet, c'est la somme de n et n' variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p .

C'est pratique en passant par les fonctions caractéristiques :

$$\phi_{X+Y}(x) = (p.x + (1-p))^n \cdot (p.x + (1-p))^{n'} = (p.x + (1-p))^{n+n'}$$

Mais sinon, la somme ne suit plus une loi binomiale.

On suppose que $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres m et q .

Comme $X + Y$ ne peut varier que de 0 à $n + n'$ (avec $n + n'$ pouvant être atteint), on déduit que m vaut nécessairement $n + n'$.

Ensuite, on cherche $P(X + Y) = 0$. La seule solution est (avec indépendance)

$$P(X + Y = 0) = P(X = 0 \text{ et } Y = 0) = P(X = 0).P(Y = 0)$$

On a donc $\binom{n+n'}{0} \cdot q^0 \cdot (1-q)^{n+n'} = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n \cdot p'^0 \cdot (1-p')^{n'}$ et ceci donne déjà

$$(1-q)^{n+n'} = (1-p)^n \cdot (1-p')^{n'}$$

Mais avec $P(X + Y = n + n') = P(X = n).P(Y = n')$ on a aussi

$$q^{n+n'} = p^n \cdot p'^{n'}$$

A finir.

5- Si X et Y sont indépendantes, les variables $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

OUTIL CLASSIQUE. Si A est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (comme un temps d'attente), on définit sa fonction caractéristique : $\phi_A(x) = \sum_k P(A = k) \times x^k$ (somme finie donc polynôme car on a une variable aléatoire à support fini, sinon, on a une série).

- Calculez $\phi_A(1)$, $\phi'_A(1)$. Qui est $\frac{\phi_A^{(n)}(0)}{n!}$?

Facile : $\phi(1) = \sum_k P(A = k) = 1$.

On dérive : $\phi'(x) = \sum_k k.P(A = k).x^{k-1}$ et $\phi'(1) = E(X)$.

Ensuite, on sait que les dérivées du polynôme en 0 sont associées à ses coefficients sur la base canonique

$$\frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} = \text{coefficient de } x^n = P(A = n)$$

- Exprimez $Var(A)$ à l'aide de ϕ_A .

On re-dérive $\phi''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k.(k-1).P(A=k).x^{k-2}$ et on estime en 1

$$\phi''(1) = \sum_k k^2.P(X=k) - \sum_k k.P(X=k) = E(A^2) - E(A)$$

On extrait ce qui nous intéresse :

$$Var(X) = \phi''(1) + \phi'(1) - (\phi'(1))^2$$

- Déterminez ϕ_A quand A suit une loi uniforme ; quand A suit une loi de Bernoulli ; quand A suit une loi binomiale.

Pour une loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$ on trouve $\phi(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

Pour la variable de Bernoulli, il n'y a que deux termes

$$\phi(x) = (1-p) + p.x$$

Pour la binomiale, pas de grande surprise, tout est fait pour

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} . p^k . (1-p)^{n-k} . x^k = (p.x + 1 - p)^n$$

et c'est normal car c'est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes.

- Montrez que si A et B sont indépendantes, on a $\phi_{A+B}(x) = \phi_A(x) . \phi_B(x)$ pour tout x .

Partons comme toujours du membre de droite avec deux variables de sommation distinctes

$$\phi_A(x) . \phi_B(x) = \sum_i P(A=i) . x^i \sum_j P(B=j) . x^j = \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ j \in \mathbb{N}}} P(A=i) . P(B=j) . x^{i+j}$$

On regroupe en fonction de la valeur de l'entier $i+j$

$$\phi_A(x) . \phi_B(x) = \sum_k \left(x^k . \sum_{i+j=k} P(A=i) . P(B=j) \right)$$

Par indépendance de nos variables

$$\phi_A(x) . \phi_B(x) = \sum_k \left(x^k . \sum_{i+j=k} P(A=i \text{ et } B=j) \right)$$

La somme $\sum_{i+j=k} P(A=i \text{ et } B=j)$ tient compte de toutes les possibilités d'avoir $A+B=k$. On trouve bien

$$\phi_A(x) . \phi_B(x) = \sum_k x^k . P(A+B=k) = \phi_{A+B}(x)$$

Pour additionner des variables aléatoires indépendantes, il suffit de multiplier leurs fonctions caractéristiques. Pratique, non ?

APPLICATIONS.

Retrouvez sans effort la fonction caractéristique de la loi de Bernoulli.

On a bien trouvé $(1-p+p.x)^n$ car il y a n variables de Bernoulli indépendantes à additionner.

On rappelle que la somme de deux tirages uniformes sur $\{1, \dots, 6\}$ indépendants n'est pas un tirage uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$. Donnez la fonction génératrice de sa loi.

On trouve avant développement

$$\frac{(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)}{6} \cdot \frac{(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)}{6}$$

puis après développement

$$\frac{1.x^2 + 2.x^3 + 3.x^4 + 4.x^5 + 5.x^6 + 6.x^7 + 5.x^8 + 4.x^9 + 3.x^{10} + 2.x^{11} + 1.x^{12}}{36}$$

On reconnaît ce qu'on savait déjà.

Est il possible d'écrire une variable uniforme sur $\{1, \dots, 12\}$ comme somme de deux variables aléatoires indépendantes (*aucune n'étant constante*) ?

On devrait alors avoir

$$\phi_A(x) \cdot \phi_B(x) = \frac{x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{12}}{12} = \frac{x - x^{13}}{12 \cdot (1 - x)}$$

avec ϕ_A et ϕ_B polynômes réels à coefficients positifs.

On factorise dans $\mathbb{R}[X]$

$$\frac{x \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 - x + 1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x^4 - x^2 + 1)}{12}$$

et on trouve une séparation astucieuse

$$\frac{\left((x + 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 - x + 1) \cdot (x^4 - x^2 + 1) \right)}{4} \cdot \frac{\left(x \cdot (x^2 - x + 1) \right)}{3}$$

Ce n'est pas clair ainsi ? Je vous le rejoue

$$\frac{1 + x^3 + x^6 + x^9}{4} \cdot \frac{x + x^2 + x^3}{3}$$

Et le bricoleur dit « évidemment ! un dé à quatre faces

0	3	9
	6	

 et un dé à trois faces

1	2
	3

 ».

Leur somme est bien uniforme de 1 à 12.

Est il possible d'écrire une variable uniforme sur $\{1, \dots, 13\}$ comme somme de deux variables aléatoires indépendantes (*notion de loi divisible*) ?

Cette fois ci, ça ne passe plus si bien.

Le polynôme visé $\frac{x^{14} - x}{14 \cdot (1 - x)}$ ne se factorise plus si bien.

A approfondir.

e - Espérance.

1- **Espérance d'une variable aléatoire réelle.**

Relation : $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \times X(\omega).$

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Démontrez pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) \text{ (sachant qu'il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls dans cette somme).}$$

Partons du membre de droite pour arriver à celui de gauche

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X = i) \right) = \sum_{0 \leq k < i} P(X = i)$$

et permutons les sommes (si on avait une infinité de termes, on utiliserait le théorème de Fubini)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{i-1} P(X = i) \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} i \cdot P(X = i)$$

car k agit comme un simple compteur.

On peut y incorporer le terme $i = 0$ qui est nul, et on reconnaît $E(X)$.

EXERCICE DE CONCOURS.

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On en tire une poignée (pouvant même être vide). Les 2^n poignées possibles sont supposées équiprobables. On note X la variable aléatoire donnant la somme des numéros tirés. Calculez $E(X)$.

On va donc sommer sur les parties de $\{1, \dots, n\}$

$$E(X) = \sum_{A \in P(\{1, \dots, n\})} \frac{\sum_{i \in A} i}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{A \subset \{1, \dots, n\}} \left(\sum_{i \in A} i \right)$$

On va recourir à une indicatrice pour faire défiler tous les éléments de $\{1, \dots, n\}$

$$E(X) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{A \subset \{1, \dots, n\}} \left(\sum_{i=1}^n i \cdot 1_{i \in A} \right)$$

Ceci nous permet de permuter nos sommes (finies)

$$E(X) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(i \cdot \sum_{A \subset \{1, \dots, n\}} 1_{i \in A} \right)$$

Pour chaque i , la somme $\sum_{A \subset \{1, \dots, n\}} 1_{i \in A}$ sert juste à compter « combien de parties contiennent i ? ».

Il y en a 2^{n-1} (il y a autant de parties contenant i que de parties ne contenant pas i ; on peut dire que ce sont des parties de $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ auxquelles on ajoute i). Notre calcul donne alors

$$E(X) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(i \cdot \sum_{A \subset \{1, \dots, n\}} 1_{i \in A} \right) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{i=1}^n i \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Et pour confirmer, voici les huit poignées pour $n = 3$

1		
	2	
1	2	
		3
1		3
	2	3
1	2	3

EXERCICE DE CONCOURS.

n est un entier fixé ; on donne une matrice M de $M_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients $m_{i,j}$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendants et de même loi. Calculez l'espérance de la trace de M .

Calculez l'espérance du déterminant de M .

Pour λ dans $\mathbb{C}$, donnez l'espérance de $\chi_M(\lambda)$ (polynôme caractéristique de M calculé en λ).

La trace est la somme de n variables indépendantes de même loi.
 Son espérance est la somme des espérances : $E(\text{Tr}(M)) = n.E(X)$ où X est la loi suivie par nos coefficients.

Le cas $n \leq 1$ étant mis à part, l'espérance du déterminant est nulle.
 Chaque fois qu'on a une matrice M , on a, avec la même probabilité, la matrice M' où on a permuté deux colonnes.
 Les deux déterminants sont opposés et s'annulent entre eux.

Sinon, on prend la formule $\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{Sgn}(\sigma).m_1^{\sigma(1)} \dots m_n^{\sigma(n)}$ et on passe à l'espérance.

Par linéarité, on a

$$E(\det(M)) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{Sgn}(\sigma).E(m_1^{\sigma(1)} \dots m_n^{\sigma(n)})$$

Par indépendance des variables

$$E(\det(M)) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{Sgn}(\sigma).E(m_1^{\sigma(1)}) \dots E(m_n^{\sigma(n)})$$

Comme toutes les variables suivent une même loi X

$$E(\det(M)) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{Sgn}(\sigma).E(X) \dots E(X) = E(X)^n. \sum_{\sigma \in S_n} \text{Sgn}(\sigma) = 0$$

Les autres coefficients du polynôme caractéristique vont aussi s'annuler par antisymétrie.

EXERCICE DE CONCOURS.

On dispose d'un dé truqué à six faces tel que la probabilité de tomber sur la face est proportionnelle au chiffre sur lequel le dé tombe. On note X la variable aléatoire donnant le chiffre tiré. Calculez la loi de X , son espérance et sa variance.

De quel concours peut-il s'agir ?

$P(X=1)$	$P(X=2)$	$P(X=3)$	$P(X=4)$	$P(X=5)$	$P(X=6)$	avec $s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
$1/s$	$2/s$	$3/s$	$4/s$	$5/s$	$6/s$	

L'espérance vaut $\frac{13}{3}$ (c'est plus que le $\frac{7}{2}$ du dé équilibré).

L'espérance du carré vaut 21 et la variance vaut donc $\frac{20}{9}$.

EXERCICE DE CONCOURS.

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\text{range}(1, n+1)$. Déterminez l'espérance de $\min(X, Y)$, de $\max(X, Y)$ et de $|X - Y|$.

Avec juste un tableau

	1	2	3	...	n
1	1	1	1		1
2	1	2	2		2
3	1	2	3		3
⋮					
n	1	2	n		n

chaque case ayant la même probabilité $1/n^2$.

Il suffit ensuite de compter :

$$n.1 + (n-1).3 + (n-2).5 + \dots + 3.(2n-5) + 2.(2n-3) + 1.(2n-1)$$

Proprement :

$$\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k.(2n-2k+1) = \frac{2.n^3 + 3.n^2 + n}{6.n^2}$$

Pour la maximum, on passe par $Max(X, Y) = (X + Y) - Min(X, Y)$ et on profite de la linéarité

$$E(Max(X, Y)) = E(X) + E(Y) - \frac{2.n^3 + 3.n^2 + n}{6.n^2} = \frac{4.n^2 + 3.n - 1}{6.n}$$

Pour la différence en valeur absolue, on peut faire la même chose avec un tableau.

Mais dans l'esprit concours

$$E(|X - Y|) = \frac{\sum_{i,k} |i - k|}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |i - k| \right)$$

$$E(|X - Y|) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{i-1} |i - k| + \sum_{k=i}^n |i - k| \right)$$

$$E(|X - Y|) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{i-1} (i - k) + \sum_{k=i}^n (k - i) \right)$$

$$E(|X - Y|) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{i-1} j + \sum_{j=0}^{n-i} j \right)$$

et on trouve $\frac{n^2 - 1}{3.n}$ (comme déjà vu dans un T.D.).

EXERCICE DE CONCOURS.

Les X_i sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi : $P(X = -1) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$. On pose $Y = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Calculez de deux façons $E(Y)$. Déterminez la valeur de $P(Y = 1)$.

espérance du produit égale produit des espérances dans le cas de variables indépendantes. On a donc

$$E(Y) = (E(X))^3 = (-(1-p) + p)^3 = (2p-1)^3$$

On voit que Y ne prend que les valeurs -1 et 1 .

Pour que Y prenne la valeur 1 , il y a deux cas :

- trois variables de valeur 1 : $P(X_1 = X_2 = X_3 = 1) = p^3$
- deux variables de valeur -1 et une de valeur 1 : $P(X_1 = X_2 = -1 \text{ et } X_3 = 1) = (1-p)^2 \cdot p$ (mais il y a trois cas de ce type, car il faut choisir celle qui vaut 1).

$$P(Y = 1) = p^3 + 3 \cdot p \cdot (1-p)^2$$

De la même façon

$$P(Y = -1) = (1-p)^3 + 3 \cdot p^2 \cdot (1-p)$$

Et si on compare les deux façons de calculer $E(Y)$, on croise la formule du binôme.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Ayant constaté qu'en moyenne un paquet sur vingt n'arrive pas à destination, j'hésite. Je dois envoyer deux objets de valeurs respectives 100 et 150 euros. Je fais un seul paquet groupé, ou je fais deux envois ?

Calculez l'espérance (*le mot est il bien choisi ?*) de la valeur perdue dans chacun des deux cas.

Et pour trois objets, de valeurs 100, 150 et 200 euros ?

Je fais un seul paquet de valeur 250 :

$$E(\text{perte}) = \frac{1}{20} \cdot 250$$

Je fais un paquet de valeur 100 et un paquet de valeur 150.

Si les pertes sont indépendantes,

$$E(\text{perte}_1 + \text{perte}_2) = \frac{1}{20} \cdot 100 + \frac{1}{20} \cdot 150$$

Bref, ça ne change rien. L'espérance est la même, même si les situations ne le sont pas.

un seul paquet	deux paquets													
<table><tr><td>1/20</td><td>19/20</td></tr><tr><td>250</td><td>0</td></tr></table>	1/20	19/20	250	0	<table><tr><td>1/20</td><td>1/20</td><td>19/20</td></tr><tr><td>250</td><td>250</td><td>100</td></tr><tr><td>19/20</td><td>150</td><td>0</td></tr></table>	1/20	1/20	19/20	250	250	100	19/20	150	0
1/20	19/20													
250	0													
1/20	1/20	19/20												
250	250	100												
19/20	150	0												
$\frac{1}{20} \cdot (150 + 100) + \frac{19}{20} \cdot 0$	$\frac{1}{400} \cdot (150 + 100) + \frac{19}{400} \cdot 100 + \frac{19}{400} \cdot 150 + \frac{361}{400} \cdot 0$													

Ce qui change quand même ? La probabilité de perdre les deux paquets.

$\frac{1}{20}$ dans le premier cas, et $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20}$ dans le second cas.

Je ne vois pas ce qui va changer avec trois objets. A part la valeur totale.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Une loterie a édité deux cent billets, dont trois qui font gagner vingt euros, cinq qui font gagner dix euros et sept qui font gagner deux euros. Vous achetez dix billets. Quelle est la probabilité que vous ayez un gain de vingt euros ? Quelle est la probabilité que vous ayez un gain de douze euros ? Complétez l'espérance de votre gain :

$$\frac{20 \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{5}{0} \cdot \binom{7}{0} \cdot \binom{185}{9} + 40 \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{5}{0} \cdot \binom{7}{0} \cdot \binom{185}{8} + \dots + 30 \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{7}{0} \cdot \binom{185}{8} + \dots + 12 \cdot \binom{3}{0} \cdot \binom{5}{0} \cdot \binom{7}{6} \cdot \binom{185}{4} + \dots}{\binom{200}{10}}$$

2- Une variable aléatoire centrée est une variable aléatoire d'espérance nulle ; $X - E(X)$ est centrée.

Qu'est ce que l'algébriste qui est en vous pense de la formule $X = E(X) + (X - E(X))$?

On dirait vraiment une projection sur l'espace des variables aléatoires constantes

$$\vec{u} = p(\vec{u}) + (\vec{u} - p(\vec{u}))$$

Et devinez quel est le minimum de $(\alpha \mapsto E((X - \alpha)^2))$? Qu'en pense votre côté pas obscur du tout (le côté algébriste).

On développe $E((X - \alpha)^2) = \alpha^2 - 2\alpha.E(X) + E(X^2)$ et on cherche le minimum de ce trinôme du second degré.

Il est atteint en $\alpha = E(X)$, et le minimum vaut justement $Var(X)$.

La variance est la plus courte distance de la variable aléatoire X aux variables aléatoires constantes. Et sa projection orthogonale est son espérance.

3- Propriétés de l'espérance :

- **linéarité** $E(a.X + b.Y) = a.E(X) + b.E(Y)$,
- **positivité, croissance** : $(X \leq Y) \Rightarrow (E(X) \leq E(Y))$.

4-	Espérance d'une variable aléatoire constante	$E(C) = c$
	Espérance d'une variable de BERNOULLI de paramètre p	$E(B_p) = p$
	Espérance d'une variable binomiale de paramètres n et p	$E(\mathcal{B}_{n,p}) = n.p$

5- Formule de transfert : si X est une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) \times f(x)$$

Formule technique, mais facile à comprendre ($f(X)$ est une nouvelle variable aléatoire). Il suffit d'écrire

$$E(f(X)) = \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega)) \times p(\{\omega\}) = \sum_{x \in E} \left(\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} f(X(\omega)) \times p(\{\omega\}) \right) = \sum_{x \in E} \left(f(x) \times \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega) = x}} p(\{\omega\}) \right)$$

EXERCICE HORS PROGRAMME DE SUP.

Vous avez un dé à six faces équilibré que vous lancez sans répéter. Quand il tombe sur un nombre pair au $n^{ième}$ lancer, vous posez $a_n = \frac{1}{2^n}$, et sinon, vous posez $a_n = \frac{1}{3^n}$. Montrez que la série de terme général a_n converge. Quelle est l'espérance de la somme de la série ?

Variante : vous lancez toujours votre dé sans répéter. Quand il tombe sur la valeur f au $n^{ième}$ lancer, vous posez $a_n = \frac{1}{f^n}$. Quelle est la probabilité que la série de terme général a_n converge ? Quelle est l'espérance de la somme de la série ?

6- Inégalité de MARKOV : $P(A \geq a) \leq \frac{E(A)}{a}$

DÉMONSTRATION. On prend une variable aléatoire positive A et un réel a strictement positif.

On écrit la définition : $E(A) = \sum_x x \times P(A = x)$.

On coupe en deux $E(A) = \sum_{x < a} x \times P(A = x) + \sum_{a \leq x} x \times P(A = x)$.

La première somme est positive, car la variable aléatoire est positive.

Dans la seconde, on minore : $a \leq x$ donc $a \times P(A = x) \leq x \times P(A = x)$.

On a donc à ce stade $E(A) \geq \sum_{a \leq x} a \times P(A = x) = a \times \sum_{a \leq x} P(A = x)$.

Or, la somme $\sum_{a \leq x} P(A = x)$ est précisément $P(A \geq a)$.

Il ne reste plus qu'à diviser par a strictement positif.

Pour a trop proche de 0, cette inégalité est sans intérêt.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Montrez pour g croissante : $P(|X| \geq a) \leq \frac{E(g(X))}{g(a)}$.

EXERCICE DE CONCOURS.

X est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}$. Montrez, pour tout m de $\{1, 2, \dots, n\}$: $E(X) \leq m - 1 + n \cdot P(X \geq m)$.

7- Si X et Y sont indépendantes : $E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$.

DÉMONSTRATION. On écrit la définition de l'espérance pour la variable aléatoire produit :

$$E(X \times Y) = \sum_{(a,b)} a \times b \times P((X, Y) = (a, b))$$

On profite de l'indépendance :

$$E(X \cdot Y) = \sum_{(a,b)} a \times b \times P(X = a) \times P(Y = b)$$

On compare avec le produit de sommes :

$$\left(\sum_a a \times P(X = a) \right) \cdot \left(\sum_b b \times P(Y = b) \right)$$

EXERCICE DE CONCOURS.

X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé ne prenant chacune que deux valeurs. Montrez que X et Y sont indépendantes si et seulement si on a $E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$. Mais attention, c'est juste si elles ne prennent que deux valeurs.

Sens direct : c'est du cours.

Si X et Y sont indépendantes alors on a $E(X.Y) = E(X).E(Y)$.

Pour la réciproque, on va utiliser « seulement deux valeurs ».

Disons que X prend les valeurs a et α avec probabilités p et $1 - p$.

Disons que Y prend les valeurs b et β avec probabilités q et $1 - q$.

On a alors $E(X).E(Y) = (a.p + \alpha.(1 - p)).(b.q + \beta.(1 - q))$.

On peut développer si on y tient.

Mais ensuite, on a le tableau pour la variable $X.Y$ avec des probabilités inconnues si on ne suppose pas les variables indépendantes.

Mais on connaît quand même les lois marginales :

	$X = a$	$X = \alpha$	
$Y = b$			q
$Y = \beta$			$1 - q$
	p	$1 - p$	

Il suffit donc d'une inconnue pour compléter le tableau : $P(X = a \text{ et } Y = b)$ qu'on va noter x .

	$X = a$	$X = \alpha$	
$Y = b$	x	$q - x$	q
$Y = \beta$	$p - x$	$1 - p - q + x$	$1 - q$
	p	$1 - p$	

On peut alors calculer l'espérance du produit :

$$E(X.Y) = a.b.x + \alpha.b.(q - x) + a.\beta.(p - x) + \alpha.\beta.(1 - p - q + x)$$

L'égalité $E(X.Y) = E(X).E(Y)$ conduit à

$$-a.b.p.q + a.\beta.p.q + \alpha.b.p.q - \alpha.\beta.p.q + a.b.x - a.\beta.x - \alpha.b.x + \alpha.\beta.x$$

Pas très pratique ? sauf qu'on se doute de ce à quoi on doit arriver : $x = p.q$.

On cherche la factorisation et on trouve

$$E(X.Y) - E(X).E(Y) = (b - \beta).(a - \alpha).(x - p.q)$$

On met de côté le cas où les variables ne le sont pas et ne prennent qu'une valeur, et on trouve $x = p.q$.

On revient à la distribution du produit

	$X = a$	$X = \alpha$	
$Y = b$	$p.q$	$q - p.q = (q.(1 - p))$	q
$Y = \beta$	$p - p.q = p.(1 - q)$	$1 - p - q + p.q = (1 - p).(1 - q)$	$1 - q$
	p	$1 - p$	

Ce sont bien deux variables indépendantes (chaque $P(X = ?, Y = *)$ est égal à $P(X = ?).P(Y = *)$).

On aurait eu intérêt à simplifier en translatant le problème avec les variables $X' = \frac{X - a}{\alpha - a}$ et $Y' = \frac{Y - b}{\beta - b}$ qui deviennent deux variables de Bernoulli et vérifient alors sous notre hypothèse : $E(X'.Y') = E(X').E(Y')$.

f - Variance, écart-type et covariance.

1- Moments. Le moment d'ordre k de X est $E(X^k)$.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Un dé à six faces non équilibré porte la valeur 1 sur deux de ses faces, la valeur 2 sur deux autres et la valeur 3 sur les deux dernières (c'est finalement ce qu'on pourrait appeler un dé à trois faces et il est non équilibré je le rappelle).

On lance ce dé, l'espérance du résultat est $47/22$. Écrivez l'équation linéaire concernant $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.

La variance est $365/484$.

Complétez : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$. Calculez alors les trois probabilités.

Que serait ce problème avec un dé à quatre faces numérotées a, b, c et d ? Que vient faire ici VanDerMonde ?

2- Variance, écart-type :

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Que signifie "la variance de X est nulle" ?

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Dans l'entreprise A , il y a vingt salariés dont dix neuf touchent 2 000 euros par mois.

Dans l'entreprise B , il y a aussi vingt salariés, tous payés 2 500 euros par mois.

Retrouvez le salaire du dernier salarié de A sachant que l'espérance du salaire est la même dans les deux entreprises.

Comparez les variances.

Pouvez vous modifier les salaires de deux salariés de A pour que l'espérance reste la même mais que la variance soit divisée par 2 ?

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

X, Y et Z sont trois variables de Bernoulli de même paramètre p , mutuellement indépendantes.

Calculez et comparez $Cov(X, Y)$, $Cov(X, Z)$, $Cov(2X, Y+Z)$, $Cov(X+Z, Y+Z)$ et $Cov(XZ, YZ)$.

3- Une variable aléatoire réduite est une variable aléatoire de variance 1 ; $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

La preuve est élémentaire.

4- Relation $Var(a.X + b) = a^2 \times Var(X)$.

DÉMONSTRATION. On développe $E((a.X+b)^2) = E(a^2.X^2 + 2.a.X + b^2) = a.E(X^2) + 2.a.E(X) + b^2$.

On développe aussi $(E(a.X + b))^2 = (a.E(X) + b)^2 = a^2.(E(X))^2 + 2.a.E(X) + b^2$.

On soustrait : $E((a.X + b)^2) - (E(a.X + b))^2 = a^2.(E(X^2) - E(X)^2) = a^2.Var(X)$.

Sinon, plus simplement, la translation de b déplace la moyenne et ne change rien à la dispersion par rapport à la moyenne.

Quant au a^2 qui sort, c'est une affaire d'homogénéité.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

On dispose d'un dé équilibré à six faces. On le lance une première fois (*variable aléatoire* X). Si la valeur affichée vaut 4 ou 5, on la garde ($Y = X$), sinon, on relance (*nouvelle valeur* : Y).

Complétez	$P(Y) = 1$	$P(Y) = 2$	$P(Y) = 3$	$P(Y) = 4$	$P(Y) = 5$	$P(Y) = 6$

Calculez espérance et variance de X et de Y .

Calculez l'espérance de $X.Y$ et la covariance du couple (X, Y) .

	Variance d'une variable aléatoire de BERNOULLI :	$p \times (1 - p)$
5-	Variance d'une variable aléatoire binomiale :	$n \times p \times (1 - p)$
	Variance d'une variable uniforme sur range(1, n+1) :	$\frac{n^2 - 1}{12}$

La variance de la loi binomiale peut se calculer à l'aide des sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^n k \times (k-1) \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \text{ et } \sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k} \times p \times (1-p)^{n-k}.$$

Mais il suffit de se dire que pour n variables de Bernoulli indépendantes, les variances s'additionnent.

6- Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

DÉMONSTRATION. On prend une variable aléatoire X , d'espérance $E(X)$ et de variance $Var(X)$. La variable aléatoire $(X - E(X))^2$ est positive. Elle a pour espérance $Var(X)$.

On lui applique l'inégalité de Markov avec $A = (X - E(X))^2$ et $a = \varepsilon^2$:

$$P((X - E(X))^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E((X - E(X))^2)}{\varepsilon^2}.$$

$$\text{C'est exactement } P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}.$$

EXERCICE DE CONCOURS (PRESQUE).

Soit (Y_k) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n Y_k$. Prouvez

pour tout a strictement positif : $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq \frac{V(Y_n)}{n \cdot a^2}\right) \leq \frac{V(Y_n)}{n \cdot a^2}$. (une question de cours juste avant demandait comme par hasard "rappeler l'inégalité de Bienaymé Tchebychev").

Application : une urne contient 2 boules carmin et 3 boules ébène (ça change de rouge et noir). On les tire, avec remise (sinon elle sera vite vide). A partir de combien de tirages peut on garantir à plus de 95% que la proportion de boules carmin restera comprise entre 0,35 et 0,45 ? (Indication : $Y_k = k^{ieme}$ tirage, Bernoulli).

EXERCICE DE CONCOURS (GÉNÉTIQUEMENT MODIFIÉ).

Neuf fois sur dix, Martine⁵ se prend un râteau quand elle tente sa chance avec un garçon. Est ce que ça veut dire que si elle tente sa chance dix fois elle va emballer à coup sûr ? Non. Quelle est la probabilité qu'elle se prenne dix râteaux ?

Combien son Bienaymé lui recommande-t-il de faire de tentatives pour emballer avec quatre vingt dix huit pour cent de chances ?

EXERCICE DE CONCOURS.

Un avion peut transporter 200 passagers et leurs bagages. Avant de les charger, il pèse déjà 190 tonnes (matériel, équipage, carburant). IL ne pourra décoller que si sa masse ne dépasse pas 220 tonnes.

Les passagers, mutuellement indépendants, ont une masse qui suit une loi d'espérance 68 kilogrammes et d'écart-type 10 (quelle unité pour la variance, quelle unité pour l'écart-type ?).

La loi de la masse des bagages a pour espérance 18 kilogrammes et pour variance 49 kilogrammes-carrés

5. pour éviter tout problème et préserver son anonymat, le prénom a été changé, et le visage a été flouté, ce qui explique peut être son peu de succès

(pardon ? j'ai répondu à la question précédente ?).

Calculez la masse moyenne du chargement passagers et bagages.

Calculez la variance du chargement passagers et bagages.

Montrez que la probabilité que l'avion soit en surcharge se majore par $3,3 \times 10^{-4}$ (on sera amené à inclure le cas où l'avion est au contraire en sous-poids sous la barre des 160 tonnes).

7- Covariance de deux variables aléatoires :

$$Cov(X, Y) = E(X \times Y) - E(X) \times E(Y)$$

Et si on l'avait définie avant la variance ? Comme une forme bilinéaire symétrique, positive ?

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Montrez : $(Cov(X, Y))^2 \leq Var(X).Var(Y)$.

Qu'est ce que l'algébriste qui est en vous en pense ? Quelles sont les lois "orthogonales" à toutes les autres ?

On réalise des essais successifs mutuellement indépendants, avec tous probabilité de réussite égale à p .

On note S_n la variable aléatoire "nombre de succès sur les n premiers essais. On suppose $0 < n < N$.

Montrez que S_n et $S_N - S_n$ sont indépendantes et donnez leurs lois.

Montrez $Cov(S_n, S_N) = n \times p \times (1 - p)$ (utilisez la bilinéarité).

8- Cas de variables indépendantes :

la covariance est nulle (pas de réciproque).

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Probabilités	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
On donne $Y = 0$	0	1/2	0
$Y = 1$	1/4	0	1/4

Montrez que X et Y ne sont pas indépendantes. Complétez :

$P(X = -1)$	$P(X = 0)$	$P(X = 1)$	$E(X)$	$P(Y = 0)$	$P(Y = 1)$	$E(Y)$

$P(X.Y = -1)$	$P(X.Y = 0)$	$P(X.Y = 1)$	$E(X.Y)$

et Concluez.

9- Variance d'une somme,

cas de variables deux à deux indépendantes.

EXERCICE DE CONCOURS (SPÉ).

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si elle est à valeurs dans

$[n, +\infty[\cap \mathbb{N}$ et vérifie $P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} \times (1-p)^{n-k} \times p^n$.

Vérifiez que c'est une loi de probabilité.

Montrez que c'est la loi suivie par la somme de n variables géométriques indépendantes de paramètre p .

EXERCICE DE CONCOURS (SPÉ).

Les X_k sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes ayant toutes pour espérance μ et variance v . Montrez que $\prod_{i=1}^n X_n$ a pour espérance μ^n et pour variance $(v + \mu^2)^n - \mu^{2.n}$.

La question qu'on se posait est « il est possible que deux lois de covariance nulle ne soient pas indépendantes ».

	0	1/2	0	$Y = 0$
	1/4	0	1/4	$Y = 1$

La réponse était oui, avec le contre-exemple

$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
----------	---------	---------

Mais si les variables ne peuvent prendre chacune que deux valeurs ?

La réponse est alors « covariance nulle implique indépendantes ».

Quitte à traduire et faire des homothéties, ce qui ne change pas la nullité de la covariance, on va prendre deux variables de Bernoulli dont la covariance est nulle et on va montrer qu'elles sont indépendantes.

Le schéma pour deux variables de Bernoulli est le suivant :

		$Y = 0$
		$Y = 1$

$X = 0$	$X = 1$
---------	---------

cases à compléter.

On veut que X soit de paramètre p et Y de paramètre q . Ceci force les lois marginales à avoir les valeurs imposées ci dessous :

		$P(Y = 0) = 1 - q$	$Y = 0$
		$P(Y = 1) = q$	$Y = 1$

$P(X = 0) = 1 - p$	$P(X = 1) = p$
$X = 0$	$X = 1$

Pour travailler avec ces lois marginales et jointes, on montre qu'on peut avoir ces lois marginales avec des variables pourtant « non indépendantes ».

Exemple : ☐ On commence par remplir une case avec un 0, on va comprendre pourquoi :

0		$P(Y = 0) = 1 - q$	$Y = 0$
		$P(Y = 1) = q$	$Y = 1$

$P(X = 0) = 1 - p$	$P(X = 1) = p$
$X = 0$	$X = 1$

On complète pour la validité des lois marginales :

0	$1 - q$	$P(Y = 0) = 1 - q$	$Y = 0$
$1 - p$		$P(Y = 1) = q$	$Y = 1$

$P(X = 0) = 1 - p$	$P(X = 1) = p$
$X = 0$	$X = 1$

somme des lignes

et même

0	$1 - q$	$P(Y = 0) = 1 - q$	$Y = 0$
$1 - p$	$p + q - 1$	$P(Y = 1) = q$	$Y = 1$

$P(X = 0) = 1 - p$	$P(X = 1) = p$
$X = 0$	$X = 1$

somme des cases 1

Une petite condition : $p + q > 1$; par exemple

0	3/12	$P(Y = 0) = 3/12$
4/12	5/12	$P(Y = 1) = 9/12$

$P(X = 0) = 4/12$	$P(X = 1) = 8/12$
-------------------	-------------------

On n'a pas $P(X = Y = 0) = P(X = 0).P(Y = 0)$.

Les variables ne sont pas indépendantes.

Mais il est vrai que la covariance est non nulle.

Exemple : Ici : $E(X.Y) = 0 \cdot \frac{7}{12} + 1 \cdot \frac{5}{12}$ et $E(X).E(Y) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$. ☐ !

Passons maintenant à notre exercice. Comment compléter la loi conjointe pour que la covariance soit nulle :

☺ On part de

$P(Y=0) = 1-q$	$Y=0$
$P(Y=1) = q$	$Y=1$

 avec l'exigence

$P(X=0) = 1-p$	$P(X=1) = p$
$X=0$	$X=1$

covariance nulle.

On remplit une case avec une valeur à déterminer, et ensuite on complète les autres :

	x	$P(Y=0) = 1-q$	$Y=0$
		$P(Y=1) = q$	$Y=1$

$P(X=0) = 1-p$	$P(X=1) = p$	début
$X=0$	$X=1$	

On commence à compléter :

	x	$P(Y=0) = 1-q$	$Y=0$
$q-x$		$P(Y=1) = q$	$Y=1$

$P(X=0) = 1-p$	$P(X=1) = p$	somme en ligne
$X=0$	$X=1$	

puis on complète en colonne :

$1-p-q+x$	$p-x$	$P(Y=0) = 1-q$	$Y=0$
$q-x$	x	$P(Y=1) = q$	$Y=1$

$P(X=0) = 1-p$	$P(X=1) = p$	sommes en colonne
$X=0$	$X=1$	on vérifie en lignes

La variable aléatoire produit $X.Y$ ne prend que deux valeurs : 0 et 1.

Son espérance vaut donc $0.((1-p-q+x) + (p-x) + (q-x)) + 1.x$ ce qui fait x .

Et le produit des espérances se calcule : $E(X).E(Y) = p.q$.

On n'a donc pas le choix pour la valeur de x : $x = p.q$.

$1-p-q+p.q$	$p-p.q$	$P(Y=0) = 1-q$	$Y=0$
$q-p.q$	$p.q$	$P(Y=1) = q$	$Y=1$

Et voici la loi du couple :

$P(X=0) = 1-p$	$P(X=1) = p$	
$X=0$	$X=1$	
$(1-p).(1-q)$	$p.(1-q)$	$P(Y=0) = 1-q$
$q.(1-p)$	$p.q$	$Y=0$
		$P(Y=1) = q$
		$Y=1$

Je vous la reformule :

$P(X=0) = 1-p$	$P(X=1) = p$
$X=0$	$X=1$

Chaque case a pour probabilité le produit des probabilités en ligne et en colonne.

Je reformule :

$P(X=0, Y=0) = (1-p).(1-q) = P(X=0).P(Y=0)$	$P(X=1, Y=0) = p.(1-q) = P(X=1).P(Y=0)$
$P(X=0, Y=1) = (1-p).q = P(X=0).P(Y=1)$	$P(X=1, Y=1) = p.q = P(X=1).P(Y=1)$

On a bien $P(X=a, Y=b) = P(X=a).P(Y=b)$.

C'est bien l'indépendance des deux variables aléatoires.

On a donc bien prouvé « deux Bernoulli de covariance nulle sont forcément indépendantes ». ☺

Mais suivant votre point de vue (algébriste, je l'espère), vous pouvez mettre la loi jointe sous forme de

matrice : $\begin{pmatrix} (1-p).(1-q) & p.(1-q) \\ (1-p).q & p.q \end{pmatrix}$.

Et cette matrice est de rang 1, ce qui prouve bien que les variables sont indépendantes...

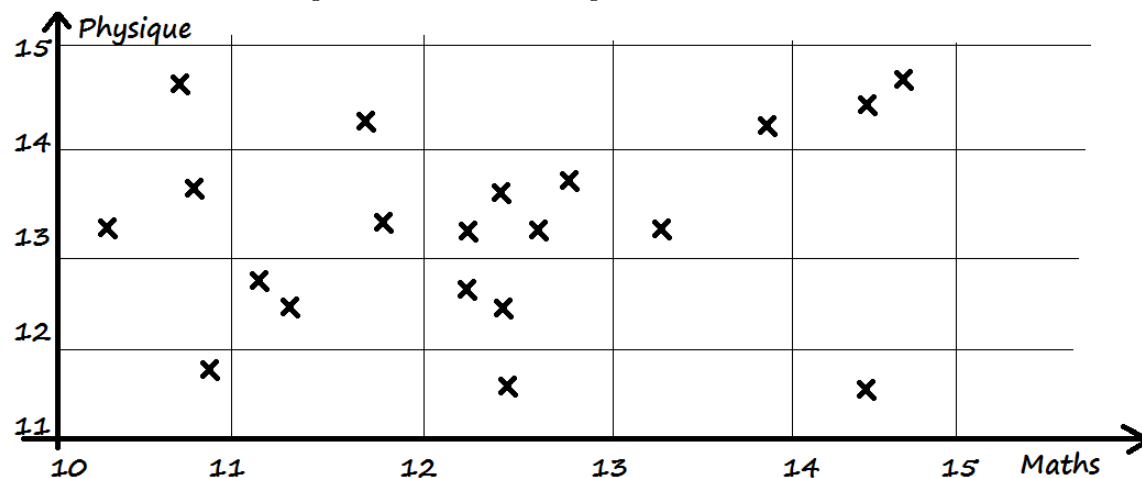
A quoi me servait cet exercice ? A vous montrer comment les lois jointes sont des histoires de matrices.

Et comment les lois marginales se lisent dessus, de même que l'éventuelle indépendance.

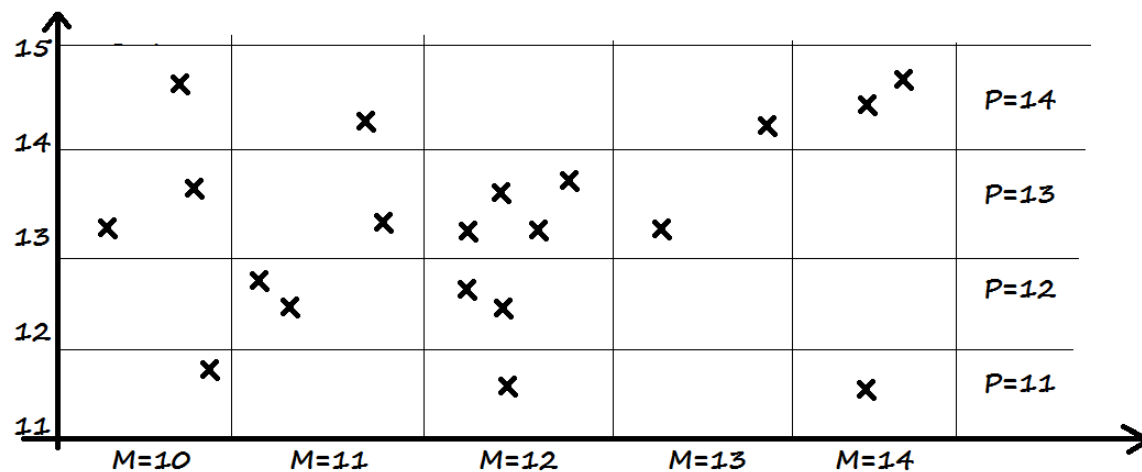
Arrivons y par un exemple que vous connaissez bien : nos graphes Maths-Physique.

L'univers est celui des élèves. La note en maths est une variable aléatoire à valeurs réelles (positives),
la note en physique est aussi une variable aléatoire
le couple de notes (maths, physique) est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$
Et je désespère de faire une version dans $\mathbb{R}^3$ un tant soit peu lisible.

Prenons une classe de vingt élèves, et traçons un graphique.



Je vous laisse mettre des noms ou prénoms sur ce graphique. Mais comme c'est un exercice de probabilités, les noms n'ont aucune importance, seul importe le nombre d'éléments et leurs positions. Arrondissons les notes à l'entier inférieur. On a le nouveau tableau. Et des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, plus simples.



Contentons nous maintenant de compter et d'estimer des probabilités.
On a créé une matrice, non ?

15	1/20	1/20	0	1/20	2/20	P=14
14	2/20	1/20	4/20	1/20	0	P=13
13	0	2/20	2/20	0	0	P=12
12	1/20	0	1/20	0	1/20	P=11
11						
	M=10	M=11	M=12	M=13	M=14	

Maintenant, on peut extraire des informations en ligne.

C'est la loi marginale de Physique.

On est passé d'une matrice à un seul vecteur.

On notera qu'il s'agit d'une projection sur un axe. Et celle ci permet de calculer la moyenne de physique par exemple :

$$14 \cdot \frac{5}{20} + 13 \cdot \frac{8}{20} + 12 \cdot \frac{4}{20} + 11 \cdot \frac{3}{20}$$

15	1/20	1/20	0	1/20	2/20	P=14	proba 5/20
14	2/20	1/20	4/20	1/20	0	P=13	proba 8/20
13	0	2/20	2/20	0	0	P=12	proba 4/20
12	1/20	0	1/20	0	1/20	P=11	proba 3/20
11							
	M=10	M=11	M=12	M=13	M=14		

On peut aussi extraire la loi marginale en mathématiques

Si la matrice a pour terme général $c_i^k = P(M = k, Ph = i)$

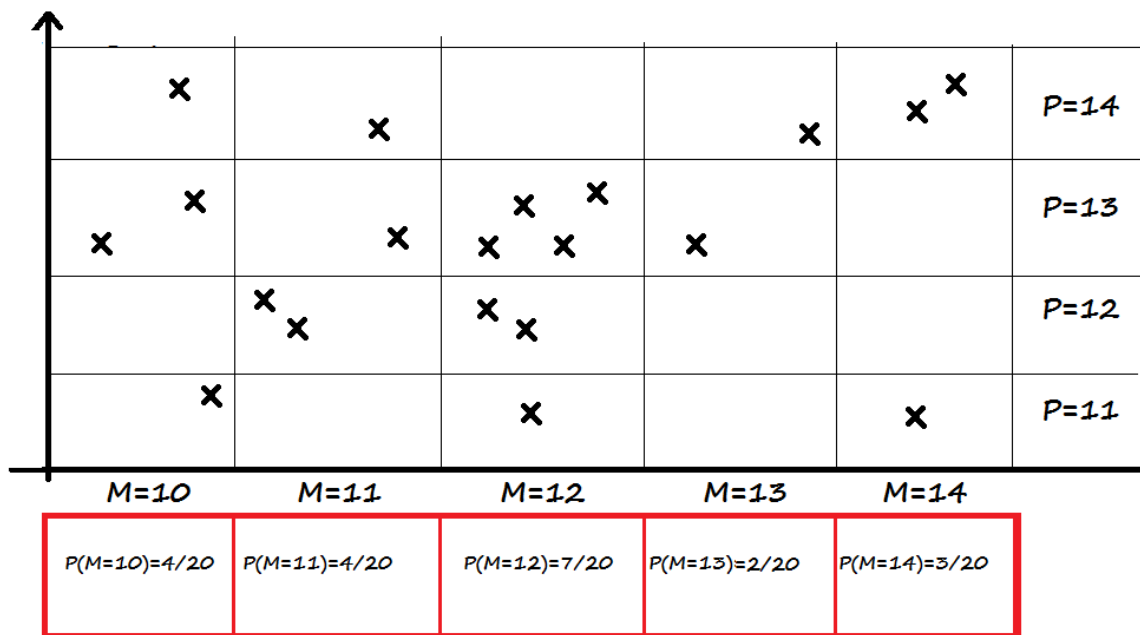
alors on calcule des sommes

$$P(M = k) = \sum_i P(M = k, Ph = i) = \sum_i c_i^k$$

On avait calculé de même $P(Ph = i) = \sum_k P(M = k, Ph = i) = \sum_k c_i^k$.

Je vous laisse voir comment récupérer ces vecteurs avec une formule telle que $M \cdot U$ ou ${}^tU \cdot M$ où U est le vecteur formé « que de 1 ».

Je vous laisse aussi vérifier $\sum_k P(M = k) = 1$.



Sur une telle répartition, on comprend bien que les maths et la physique ne sont pas indépendantes. On vérifie par exemple $P(M = 10, Ph = 14) \neq P(M = 10).P(Ph = 14)$.

Ah oui, au fait

c'est quoi la définition de « indépendantes » pour des événements : $P(A \text{ et } B) = P(A).P(B)$.

Et pour des variables aléatoires : les événements issus de X sont indépendants des événements issus de Y .

Et qui sont les événements issus de X : ce sont des réunions de $(X = a)$

et ceux de Y : des réunions de $(Y = b)$.

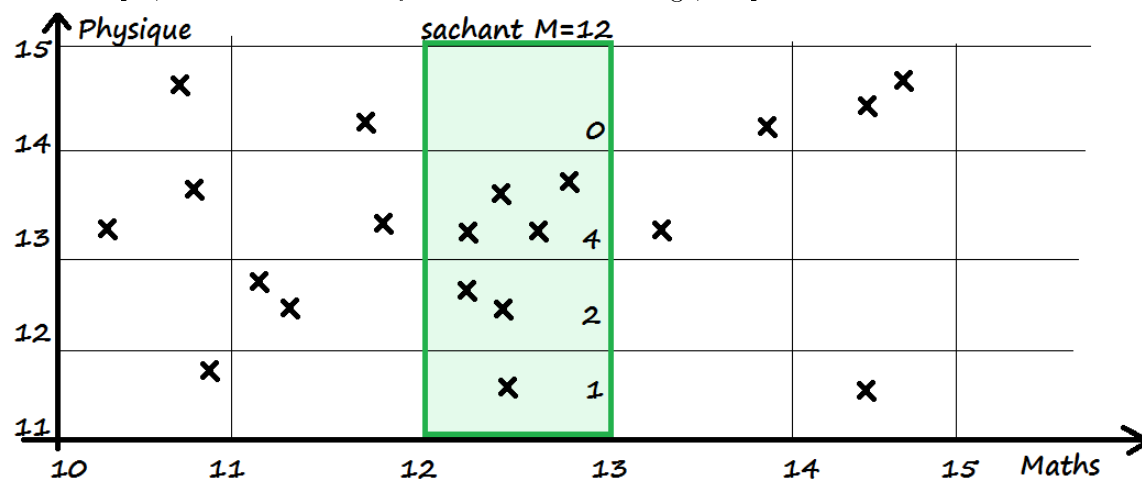
On va donc demander que chaque $(X = a)$ soit indépendant de chaque $(Y = b)$.

Ceci revient à écrire :

$$P(X = a \text{ et } Y = b) = P(X = a).P(Y = b) \text{ pour tout couple } (a, b)$$

On peut aussi déterminer des lois conditionnelles. On regarde une tranche du graphique.

Par exemple, celle des matheux ayant 12. L'univers change, les probabilités sont aussi recalculées.



Ici, on va avoir une nouvelle loi

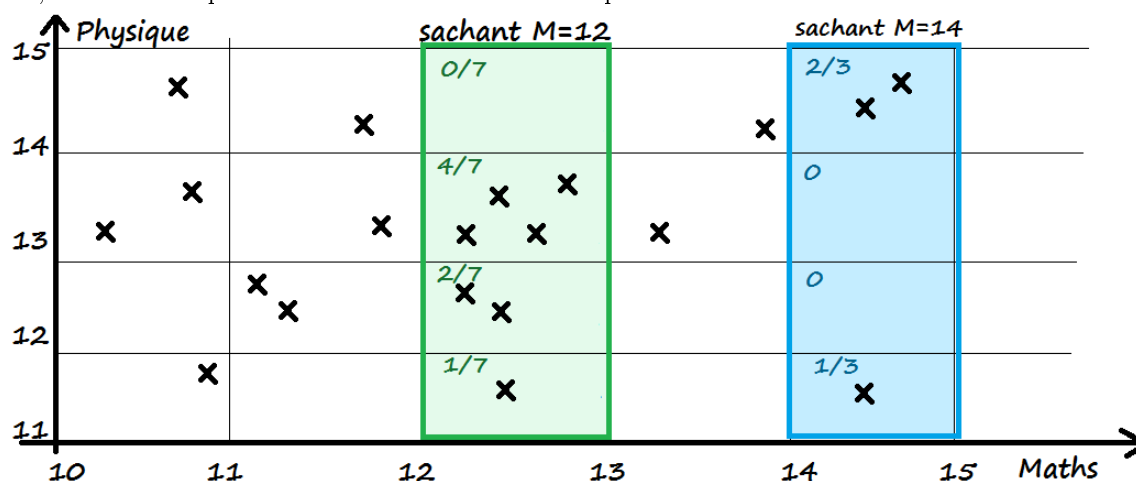
sachant $M = 12$		
$Ph = 14$	personne	0
$Ph = 13$	4 personnes	$4/7$
$Ph = 12$	2 personnes	$2/7$
$Ph = 11$	1 personne	$1/7$

La formule générale est

$$P(X = a | Y = b) = \frac{P(X = a, Y = b)}{\sum_{\alpha} P(X = \alpha, Y = b)}$$

On peut aussi s'interroger : la loi de « Physique sachant Maths = a » dépend elle de a ?

Ici, il est visible que les tranches ne se ressemblent pas du tout.



Quand vous savez que la note de maths vaut 14, vous savez des choses sur la note de physique. Par exemple qu'il y a pour elle des valeurs interdites. Les deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

Pourriez vous compléter les cases du graphique pour que la note de maths soit indépendante de la note de physique.

La condition nécessaire et suffisante sur la matrice des probabilités est que son terme général soit $P(X = k).P(Y = i)$ au lieu de $P(X = k, Y = i)$.

On doit passer de c_i^k assez général à $a_i.b_k$.

Cela revient à demander que les colonnes soient toutes proportionnelles.

A qui ? Disons qu'elles soient proportionnelles entre elles.

Ou proportionnelles à l'une d'entre elles.

Ou proportionnelles à leur somme : la loi marginale.

Parmi les tables suivantes, vous retrouverez facilement celles qui correspondent à des variables indépendantes :

1.q	3.q	5.q	2.q	1.q	puis	1.q	4.q	5.q	0	1.q	A = a ₁
4.q	12.q	20.q	8.q	4.q		4.q	16.q	20.q	0	4.q	
2.q	6.q	10.q	4.q	2.q		2.q	8.q	10.q	0	2.q	
1.q	3.q	5.q	2.q	1.q		1.q	4.q	5.q	0	1.q	
avec $q = 1/96$						avec $q = 1/88$					A = a ₂
B = b ₁	B = b ₂	B = b ₃	B = b ₄	B = b ₅		B = b ₁	B = b ₂	B = b ₃	B = b ₄	B = b ₅	

mais aussi (et là c'est raté)

2.q	3.q	5.q	ou	0	1/5	1/5	A = a ₁
3.q	10.q	6.q		1/5	1/5	0	
1.q	5.q	5.q		0	1/5	1/5	
avec $q = 1/40$				B = b ₁ B = b ₂ B = b ₃			A = a ₂

Notez que pour des variables aléatoires indépendantes, la connaissance d'une colonne et d'une ligne

permet de tout reconstruire.

Et le résultat général est « si on connaît les lois marginales, on peut tout reconstruire » :

			$P(A = a_1) = 1/3$
			$P(A = a_2) = 1/4$
			$P(A = a_3) = 5/12$

$P(B = b_1) = 1/2$	$P(B = b_2) = 1/4$	$P(B = b_3) = 1/4$
--------------------	--------------------	--------------------

On a tout de suite par exemple $P(A = a_3, B = b_1) = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2}$ et ainsi de suite.

Mais si on n'impose pas indépendantes, on peut remplir le tableau avec de multiples valeurs, une fois que les sommes en colonnes et en lignes sont bonnes...

Le type de questions auquel vous aurez droit avec des variables indépendantes ou non.

Quasiment jamais la question « prouver que ces variables sont indépendantes ».

Parfois : prouver que ces variables ne sont pas indépendantes. Vous devez alors comparer $E(A.B)$ et $E(A).E(B)$.

S'il n'y a pas égalité, c'est bon, elles ne sont pas indépendantes.

S'il y a égalité, il faut aller chercher ailleurs et trouver un couple (a, b) avec $P(A = a \text{ et } B = b) \neq P(A = a).P(B = b)$.

En général, ceci viendra d'une situation avec $P(A = a \text{ et } B = b) = 0$.

Parfois aussi : montrer que des variables sont deux à deux indépendantes, mais pas « dans leur ensemble ».

Mais le plus souvent, l'énoncé vous placera d'office avec des variables indépendantes.

Et ce sera à vous alors d'exploiter : probabilités qui se multiplient,

variance nulle,

matrice de rang 1

Puisque la chose a été citée quelques lignes plus haut, il se pose une question dès qu'on a plus de deux variables et qu'on parle d'indépendance⁶.

Une phrase ambiguë est « soient n variables aléatoires indépendantes sur l'univers Ω ».

S'agit il de variables aléatoires deux à deux indépendantes ?

indépendantes dans leur ensemble.

Rappelons par exemple et par analogie qu'on peut avoir des vecteurs deux à deux non colinéaires, mais ne formant pas une famille libre. Dans le plan, prenez $(\vec{i}, \vec{i} + \vec{j}, \vec{j})$.

Chaque famille d'un ou deux vecteurs est libre. La grande famille ne l'est plus.

indépendantes dans leur ensemble		indépendantes deux à deux
$P(A_1 = a_1, A_2 = a_2, \dots, A_n = a_n) = P(A_1 = a_1).P(A_2 = a_2) \dots P(A_n = a_n)$		$\forall(i, k), P(A_1 = a_1, A_k = a_k) = P(A_i = a_i).P(A_k = a_k)$

$\Rightarrow$

L'indépendance dans leur ensemble entraîne l'indépendance deux à deux.

Ça tombe bien en général, dans les énoncés, on aura des variables indépendantes « dans leur ensemble », ce qui permettra de traiter le cas où on n'en utilise que deux.

6. Tiens, pourrait on parler d'une variable indépendante ? Et si oui, indépendante de qui ? D'elle même ? Que signifie A est indépendante de A ? Que A est constante ?