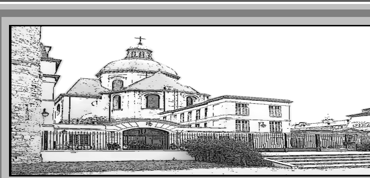
LYCEE CHARLEMAGNE 2024 2025

Vendredi 6 septembre

M.P.S.I.2



DS00

Rappel : vous composez anonymement (le meilleur pseudonyme recevra un point de plus), et la note « compte pour du beurre ».
Pensez à tirer un trait entre chaque question traitée (donc, vous allez en traiter plusieurs).
Indexez vos copies.
Par politesse, évitaient les phautes d'orthografe.

Équations du second degré pour la loi de composition.

On rappelle la loi de composition pour les fonctions : si f et g sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (par exemple), on définit leur composée $g \circ f = (x \longmapsto g(f(x)))$.

On va alors envisager des équations du second degré pour la loi de composition :

$f \circ f = F$ *d'inconnue* f *et de paramètre* F *pour*	$F = x \longmapsto x^2$	$F = \cos$	$F = x \longmapsto \|x\|$	
	$F = -\exp$	$F = \exp$		
$f \circ f = f$ *d'inconnue* f				

Les différentes parties sont totalement indépendantes. Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez.

Le but de cette partie est de trouver les « racines carrées » d'une application F donnée.
Pour F donnée (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), on cherche les applications f (également de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) vérifiant $f \circ f = F$ (c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = F(x)$).

On pourra dans certaines questions chercher juste une solution (ici, une solution, c'est une application, on n'est plus au bac à sable où les solutions sont des nombres).
On pourra aussi dans une partie montrer qu'il n'existe pas de solution (et pour cela, on ne se contentera évidemment pas de l'« argument » « je n'en ai pas trouvé, donc il ne doit pas y en avoir », mais on construira un raisonnement par l'absurde « s'il y avait une solution (que je nomme f même si je ne la connais pas), alors j'arriverais à une absurdité (comme $1 + 1 = 3$) ».

Premiers exemples.

I$\sim$0) Cas :$F = Id$ (c'est à dire $\forall x,\ F(x) = x$). Lesquelles des applications suivantes sont solutions (justifiez) ?

$x \longmapsto x$	$x \longmapsto -x$	$x \longmapsto \pi - x$	$x \longmapsto \begin{cases} x & si \quad x \in \mathbb{Z} \\ -x & si \quad x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$	$x \longmapsto \begin{cases} x & si \quad x \in \mathbb{Z} \\ \pi - x & si \quad x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$	3 pt.

I$\sim$1) Cas $F = x \longmapsto |x|$. Trouvez une solution f (quand on vous demande une solution, vous pouvez vous contenter d'un proposer une (et de justifier bien sûr), on ne vous demande fort heureusement pas de les trouver toutes). 1 pt.

I$\sim$2) Cas $F = x \longmapsto x^2$. Ajustez l'exposant a pour que $x \longmapsto |x|^a$ soit solution. 1 pt.

I$\sim$3) Cas $F = x \longmapsto x^3$. Donnez une solution f. 2 pt.

I$\sim$4) Trouvez les solutions f polynomiales dans le cas $F = x \longmapsto x^4 - 6.x^3 + 10.x^2 - 3.x$. 3 pt.

I$\sim$5) Cas $F = x \longmapsto [x]$ (notation pour la partie entière, qui arrondit un réel x à l'entier inférieur, par exemple $[\pi] = 3$, $[2023] = 2023$ et $[-12,7] = -13$ (si si)). Trouvez une solution f. 1 pt.

Cas $F = \cos$. On va montrer qu'il n'existe pas de solution f dérivable. On va donc supposer (à tort !) qu'il en existe une qu'on note f_0, et on verra bien quand on aura une contradiction (normalement à la fin !).

II$\sim$0) Montrez que l'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution réelle (qu'on va noter c, qu'on ne cherchera pas à calculer, mais dont on prouvera existence et unicité en introduisant l'application $\varphi = x \longmapsto x - \cos(x)$). Montrez alors $\sin(c) = \sqrt{1 - c^2}$. 3 pt.

II∼1) En calculant $f_0(f_0(f_0(c)))$, montrez $\cos(f_0(c)) = f_0(c)$ puis $f_0(c) = c$. $\boxed{\text{2 pt.}}$
II∼2) Montrez pour tout x réel : $f_0'(f_0(x)).f_0'(x) = -\sin(x)$. $\boxed{\text{1 pt.}}$
II∼3) Déduisez $(f_0'(c))^2 < 0$. Concluez. $\boxed{\text{2 pt.}}$

On va maintenant montrer qu'il n'existe pas de solution de $\forall x,\ f\circ f(x) = -e^x$ avec f continue.

> *Rappel : une application g est dérivable si elle admet une dérivée g'. Une application continue est une application « qui ne saute pas ». La vraie définition est « pour tout a, $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a ». C'est plus délicat à manipuler. Il existe des applications continues mais non dérivable comme la valeur absolue (continue partout, mais pas dérivable en 0), et il existe évidemment des application non continues, comme*
> *Ce qui sera vrai : « derivable $\Rightarrow$ continue », mais pas la réciproque. Donc, même si on a prouvé que notre problème n'avait pas de solution dérivable, il pourrait avoir des solutions continues.*

III∼0) On suppose donc qu'il existe une solution qu'on va noter f_1, continue, vérifiant $f_1(f_1(x)) = -e^x$ pour tout x. Montrez $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (f_1(x) = f_1(y)) \Rightarrow (x = y)$. $\boxed{\text{1 pt.}}$

> *Cette propriété s'appelle l'injectivité. Elle dit que des réels différents ont forcément des images différentes. Si on travaille sur $\mathbb{R}$ tout entier, le cosinus n'est pas injectif, car on connaît des couples $(a,\ b)$ avec a et b distincts et pourtant $\cos(a) = \cos(b)$ (par exemple 0 et $2.\pi$ (ou $-\pi/7$ et $\pi/7$)). En revanche, sur $[0,\ \pi]$, le cosinus est injectif par stricte décroissance.*

III∼1) On se donne a et b vérifiant $a < b$ et on définit $g_1 = t \longmapsto f_1(t.b + (1-t)) - f_1(t.a)$. Calculez $g_1(0)$ et $g_1(1)$. $\boxed{\text{1 pt.}}$
III∼2) Montrez pour tout t de $[0,\ 1]$: $t.b + (1-t) > t.a$ et $f_1(t.b + (1-t)) \neq f_1(t.a)$. $\boxed{\text{2 pt.}}$
III∼3) Déduisez que $g_1(0)$ et $g_1(1)$ sont de même signe (vous serez amené à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires). $\boxed{\text{2 pt.}}$
III∼4) Déduisez que f_1 est soit croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ soit décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

> *Rappelons qu'une application peut n'être ni croissante ni décroissante, comme par exemple $x \longmapsto x^2$ si on la regarde sur $\mathbb{R}$. On verra même cette année des applications qui, quel que soit l'intervalle sur lequel on les regarde (aussi petit soit il) ne sont ni croissante ni décroissante.*

III∼5) Montrez que $f_1 \circ f_1$ est alors croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Concluez. $\boxed{\text{2 pt.}}$

On va construire une solution de l'équation $f \circ f = \exp$.

IV∼0) On pose $c_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = e^{c_n}$. Montrez que la suite (c_n) est croissante et tend vers $+\infty$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

> *Pour information : valeurs approchées des cinq premiers termes [0, 1, 2.718, 15.154, 3814279.104], et $\ln(\ln(5)) \simeq 0,47$ à 10^{-2} près.*

IV∼1) Montrez : $\forall x \in [0,\ +\infty[,\ \exists! n \in \mathbb{N},\ x \in [c_n,\ c_{n+1}[$. Dans quel intervalle $[c_p,\ c_{p+1}[$ est alors $\ln(x)$? $\boxed{\text{2 pt.}}$

IV∼2) On définit alors

```
def f(x) :
....if 0 <= x < 0.5 :
........return x+0.5
....if 0.5 <= x < 1 :
........return exp(x-0.5)
....return exp(f(log(x)))
```

(après avoir pensé à `from math import exp, log`) Montrez $f(5) = 5^{\sqrt{e}}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$
IV∼3) Justifiez que ceci définit bien une application de $[0,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. f est elle continue en $1/2$? f est elle continue en 1 (calculez à chaque fois la limite à droite et la limite à gauche). $\boxed{\text{3 pt.}}$
IV∼4) Justifiez : $\forall x \in I,\ f(f(x)) = e^x$, successivement pour $I = [0,\ 1/2]$, $I = [1/2,\ 1[$, $I = [1,\ \sqrt{e}[$, $I = [\sqrt{e},\ e[$. $\boxed{\text{4 pt.}}$
IV∼5) Comment définir f sur $\mathbb{R}^-$ pour avoir $\forall x \in \mathbb{R}^-,\ f(f(x)) = e^x$? $\boxed{\text{2 pt.}}$

Dans cette partie, on va s'intéresser à l'équation $f \circ f = f$, pour des applications de $[0,\ 1]$ dans $[0,\ 1]$.

V∼0) Montrez que les fonctions constantes sont solution. $\boxed{\text{1 pt.}}$
V∼1) Montrez que si une solution f de l'équation est surjective de $[0,\ 1]$ sur $[0,\ 1]$ alors est est injective de $[0,\ 1]$ dans $[0,\ 1]$. $\boxed{\text{2 pt.}}$
V∼2) Montrez que si une solution f de l'équation est injective de $[0,\ 1]$ dans $[0,\ 1]$ alors est est surjective de $[0,\ 1]$

sur $[0,\ 1]$. 2 pt.

V∼3) On définit ensuite $f_2 = x \longmapsto \dfrac{20 - 18.x + 8.|3.x-1| - 6.|3.x-2|}{24}$. Représentez graphiquement f_2 sur $[0,\ 1]$ (en séparant par intervalles), et montrez que f_2 vérifie $\forall x \in [0,\ 1],\ f_2(f_2(x)) = f_2(x)$. 3 pt.

V∼4) L'objectif est de montrer que les seules solutions de classe C^1 de $f \circ f = f$ d'inconnue f sont les fonctions constantes et l'identité (f est dite de classe C^1 si f est dérivable que f' est à son tour continue). Montrez déjà que les seules applications affines solutions de l'équation sont l'identité et les constantes.

V∼5) Un élève propose : partons de $\forall x \in [0,\ 1],\ f(f(x)) - f(x) = 0$ et dérivons puisque f est dérivable $\forall x \in [0,\ 1],\ f'(f(x)).f'(x) - f'(x) = 0$; on résout et on trouve : $\forall x \in [0,\ 1],\ f'(x) = 0$ ou $\forall x \in [0,\ 1],\ f'(f(x)) = 1$; la première donne $f = C^{te}$ et la deuxième donne f que f est affine de la forme $x \longmapsto 1.x + b$, et on retrouve finalement Id.
Où est l'erreur dans son raisonnement ? 2 pt.

V∼6) Pouvez corriger son erreur. 2 pt.

On cherche maintenant les applications f linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $f \circ f = f$.

> *Une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est une application de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour quatre réels donnés a, b, c et d (et pour les règles bien connues du produit matriciel).*

VI∼0) Montrez que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont deux solutions, et que toutes les autres solutions $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifient $a.d - b.c = 0$ et $a + d = 1$. 3 pt.

VI∼1) Cette condition nécessaire est elle suffisante ? 1 pt.

VI∼2) Trouvez la solution vérifiant en plus $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. 1 pt.

Rappels : $\cos(a+b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$, $\sin(a+b) = \sin(a).\cos(b) + \cos(a).\sin(b)$

$\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$, $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$, $\tan' = 1 + \tan^2$

f est injective de A dans B si : $\forall (x,t) \in A^2,\ (f(x) = f(t)) \Rightarrow (x = t)$

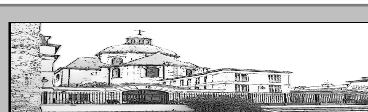
Pour **Python**, `a==b` est un teste d'égalité, et `a<=b` correspond au test $a \leqslant b$.

f est surjective de A sur B si : $\forall b \in B,\ \exists a \in A,\ f(a) = b$

Une relation $\Re$ sur E est transitive si $(\forall (a,b,c) \in E^3,\ (a \Re b \text{ et } b \Re c) \Rightarrow (a \Re c)$

Une loi $*$ sur un ensemble E est associative si $\forall (a,\ b,\ c) \in E^3,\ (a * b) * c = a * (b * c)$

Le produit matriciel n'est pas commutatif : $\exists (A,B) \in (M_2(\mathbb{R}))^2,\ A.B \neq B.A$

LYCEE CHARLEMAGNE M.P.S.I.2  2024 DS00 58- points 2025

DS00 Cas $f = Id$.

On ne vas pas chercher toutes les solutions. On va en tester certaines.
Je vous propose de faire un tableau pour rendre les choses visibles et propres. Ligne par ligne, on teste.

f	$f(x)$	$f(f(x))$	réponse
$x \longmapsto x$	x	$f(f(x)) = f(x) = x$	oui
$x \longmapsto -x$	$-x$	$f(f(x)) = f(-x) = -(-x) = x$	oui
$x \longmapsto \pi - x$	$\pi - x$	$f(f(x)) = f(\pi - x) = \pi - (\pi - x) = x$	oui
$x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} x & si & x \in \mathbb{Z} \\ -x & si & x \notin \mathbb{Z} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{ccc} x & si & x \in \mathbb{Z} \\ -x & si & x \notin \mathbb{Z} \end{array} \right.$	$x \in \mathbb{Z} : f(f(x)) = f(x) = x$ $x \notin \mathbb{Z} : f(f(x)) = f(-x) = -(-x) = x$ car $-x$ n'est toujours pas dans $\mathbb{Z}$	oui
$x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} x & si & x \in \mathbb{Z} \\ \pi - x & si & x \notin \mathbb{Z} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{ccc} x & si & x \in \mathbb{Z} \\ \pi - x & si & x \notin \mathbb{Z} \end{array} \right.$	$x \in \mathbb{Z} : f(f(x)) = f(x) = x$ $x \notin \mathbb{Z} : f(f(x)) = f(\pi - x) = ?$ mais où est $\pi - x$	attention !

Le dernier nous pose problème. Il faut réfléchir. Quand on calculer $f(f(x))$ pour x non entier, on peut avoir des surprises.
Le premier teste porte sur x mais le second porte sur la nouvelle variable $\pi - x$.
Prenons justement $x = \pi$ (ou c'est mauvais signe, on part vers un contre-exemple et une réponse négative).

$$f(f(\pi)) = f(\pi - \pi) = f(0) = 0$$

La dernière fonction n'est donc pas solution.

DS00 Une solution de $f(f(x)) = |x|$.

Et si on essayait sans effort la fonction valeur absolue elle même ?
Pour tout réel x

$$f(f(x)) = f(|x|) = ||x|| = |x|$$

C'est bon. Et on ne nous demande pas toutes les solutions.

DS00 Une solution de $f(f(x)) = x^2$.

On nous propose d'ajuster. On prend donc $f = x \longmapsto |x|^\alpha$et on l'« élève au carré » pour tout x

$$f(f(x)) = f(|x|^a) = ||x|^a|^a = (|x|^a)^a$$

la seconde valeur absolue ne sert à rien. On a finalement $|x|^{a^2}$ (en vertu de la formule $(x^a)^b = (x)^{a.b}$.
On va donc naturellement imposer $a^2 = 2$ et prendre $a = \sqrt{2}$.
Mais il reste une valeur absolue.
Toutefois, elle ne me gène pas : $|x|^2 = x^2$ car sur $\mathbb{R}$ le signe est effacé.

On ne prendra pas de risque avec $a = -\sqrt{2}$ qui poserait problème en $x = 0$.

DS00 Une solution de $f(f(x)) = x^3$.

On va donc s'inspirer de l'exemple précédent.
On peut proposer $x \longmapsto x^{\sqrt{3}}$ et l'élever au carré.
On calcule $f(f(x)) = f(x^{\sqrt{3}}) = (x^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} = x^{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = x^3$ et le tour semble joué.

Mais il y a un problème.
Quel sens donner à $x^{\sqrt{3}}$? L'exposant n'est pas entier.

> *Par exemple* $(-2)^3 = (-2).(-2).(-2) = -8$.
> *Mais* $(-2)^{\sqrt{3}}$ *c'est quoi ?*

La seule façon de définir x^b c'est $e^{b.\ln(x)}$ quand b n'est pas entier.
Et il faut donc que x soit strictement positif (ou pour le moins positif si b est positif).

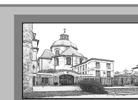
On notera qu'on peut définir $x \longmapsto x^{1/3}$ comme étant $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.
C'est le cas avec les racines n^{ieme} avec n impair.
Mais ici, avec $x \longmapsto x^{\sqrt{3}}$ on en est loin.

On ne va donc pas prendre $x \longmapsto e^{\sqrt{3}.\ln(x)}$ qui n'est définie que sur $[0,\ +\infty[$.

La bonne idée est de ne pas tenir compte du signe $x \longmapsto |x|^{\sqrt{3}}$comme à la question précédente.
C'est une vraie fonction définie sur tout $\mathbb{R}$: $x \longmapsto \begin{matrix} 0 & si & x = 0 \\ e^{\sqrt{3}.\ln(|x|)} & si & x \neq 0 \end{matrix}$.
Mais elle a un défaut.
Si on calcule $f \circ f$ on trouve (comme pour l'exposant $\sqrt{2}$) : $x \longmapsto |x|^3$.
Et on a perdu le signe.

La bonne solution sera en fait $x \longmapsto \begin{matrix} -e^{\sqrt{3}.\ln(|x|)} & si & x < 0 \\ 0 & si & x = 0 \\ e^{\sqrt{3}.\ln(x)} & si & x > 0 \end{matrix}$
L'exposant est alors le bon dans $f \circ f$, et le signe devant est aussi le bon.

DS00 — Solutions polynomiales de $f(f(x)) = x^4 - 6.x^3 + 10.x^2 - 3.x$.



On prend pour f un polynôme.
D'accord, mais de quel degré ?

• Imaginons que f soit constante. Euh non.

• Imaginons que f soit de degré 1 : $x \longmapsto a.x + b$.
On a alors $f(f(x)) = a.(a.x + b) + b$. Le degré n'est pas le bon.

• Imaginons que f soit du second degré : $f = x \longmapsto a.x^2 + b.x + c$.
On va cette fois développer
$$x \longmapsto a.(a.x^2 + b.x + c)^2 + b.(a.x^2 + b.x + c) + c$$
L'idée semble bonne, le degré est le bon. Pour les coefficients, c'est à nous de voir en développant et en identifiant.

		$a.x^2$	$+b.x$	$+c$
$a.$	$a.x^2$	$a^2.x^4$	$+a.b.x^3$	$+a.c.x^2$
	$+b.x$	$+a.b.x^3$	$+b^2.x^2$	$+b.c.x$
	$+c$	$+a.c.x^2$	$+b.c.x$	$+c^2$

+b.	$a.x^2$	$+b.x$	$+c$

$+c$

$a^3.x^4$	$+2.a^2.b.x^3$	$+(a.b^2 + 2.a.c + a.b).x^2$	$+(2.a.b.c + b^2 + b).x$	$+a.c^2 + b.c + c$

On a un système à résoudre avec cinq équations pour seulement trois inconnues. On prie pour que l'exemple soit bien choisi.

$$\begin{matrix} a^3 & & & = & 1 \\ 2.a^2.b & & & = & -6 \\ a.b^2 & +2.a.c & +a.b & = & 10 \\ 2.a.b.c & +b^2 & & = & -3 \\ a.c^2 & +b.c & +c & = & 0 \end{matrix}$$

On résout et on trouve $a = 1$ par la première, puis $b = -3$ par la seconde et enfin la troisième donne $c = 2$.

Mais il en reste deux. Si elles ne sont pas validées, tout est foutu.
Et justement : $2.(-3).2 + (-3)^2 = -3$. On soupire.
Et enfin $1.2^2 + (-3).2 + 2 = 0$.

On peut vérifier
$$(x^2 - 3.x + 2)^2 - 3.(x^2 - 3.x + 2) + 2 = x^4 - 6.x^3 + 10.x^2 - 3.x$$
pour tout x.

• Enfin, avec un degré plus élevé, de la forme $f(x) = a.x^n + \ldots$, le calcul de $f(f(x))$ donne des horreurs en $a.(a.x^n + \ldots)^n + \ldots$ c'est à dire du degré n^2 qui sera trop élevé.

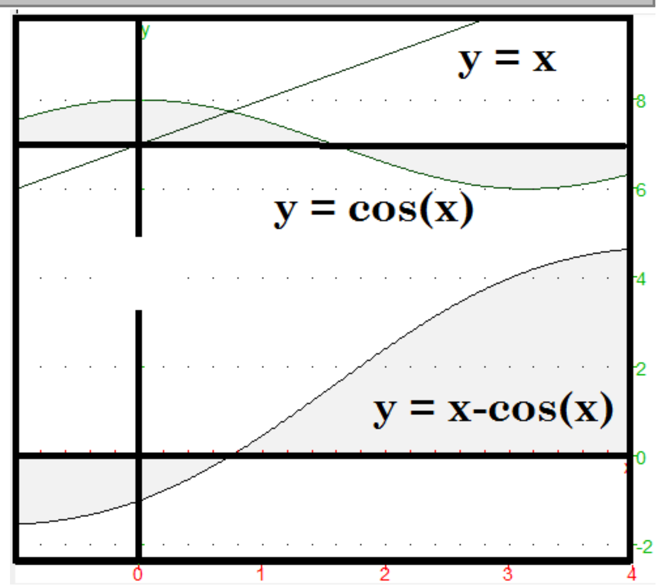
On pouvait dès le début dire que seul le degré 2 convenait.

DS00 — Une solution pour $f(f(x)) = [x]$.

Bon, c'est cadeau, il suffit de prendre $x \longmapsto [x]$.
Une fois qu'on a pris la partie entière, on peut recommencer, on reste sur la partie entière.

Avec des crochets de taille ajustée : $\forall x \in \mathbb{R},\ \big[[x]\big] = [x]$.

DS00 — Cas $f \circ f = \cos$.



Pour montrer l'existence d'une solution à une équation telle que $\cos(x) = x$ d'inconnue réelle x, on crée comme presque toujours une fonction auxiliaire à laquelle on va appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (pour l'existence) et dresser un tableau de variations précis (pour avoir l'unicité).
C'est donc la fonction différence $x \longmapsto x - \cos(x)$ qu'on va étudier.
Elle est continue et même dérivable.

Pour en parler sans se prendre la tête, pour calculer, on commence par la nommer.

On l'appelle φ puisque c'est ce que propose l'énoncé.
En tout cas, il ne vaut mieux pas l'appeler f ou F puisque ce sont des notations qui servent déjà.

Sa dérivée $x \longmapsto 1 + \sin(x)$ est positive ou nulle.
L'application φ est croissante sur l'intervalle $]-\infty,\ +\infty[$ (mais quel théorème se cache derrière « dérivée positive sur un intervalle implique application croissante » ?).
Mieux encore, cette dérive ne s'annule qu'en des points isolés (des multiples impairs de π).
L'application φest donc strictement croissante. Elle ne pourra pas s'annuler plus d'une fois.

La stricte monotonie donne l'unicité en cas d'existence.

Mais ensuite, on calcule φ en quelques points. Et on se laisse guider par l'énoncé ou notre instinct visuel.
• $\varphi(0) = -1 < 0$. L'application est négative en 0.
• $\varphi(\pi/2) = \pi/2 - 1 > 0$. L'application est positive en $\pi/2$.

Elle est donc tenue, par continuité, de s'annuler et changer de signe entre 0 et $\pi/2$.

On tient une racine et c'est la seule. On peut la nommer.
Reste à dire qu'elle est entre 0 et $\pi/2$.

Son cosinus est positif (normal, c'est c).
Son sinus est positif.

Bonus : on connait son cosinus, c'est $\cos(c)$, et c'est donc aussi c.
On connaît son sinus au signe près puisque on a toujours $\cos^2 + \sin^2 = 1$.
On a donc $\sin(c) = \sqrt{1-\cos^2(c)}$ ou $\sin(c) = -\sqrt{1-\cos^2(c)}$.
Mais comme c est entre 0 et $\pi/2$, on ne retient que $\sin(c) = \sqrt{1-\cos^2(c)}$.

Ensuite, comme on a $\cos(c) = c$ on peut remplacer : $\sin(c) = \sqrt{1-c^2}$.

> *Si vous n'avez pas pensé à surveiller le signe, vous n'avez rien fait.*
> *Tout au plus avez vous fait un peu de calcul pour passer de* $\cos^2 + \sin^2 = 1$ *à* $\sin = \sqrt{1-\cos^2}$*.C'est du petit calcul, de la science de boutique.*
> *Mais les maths, c'est se dire « attention au signe, quel argument pour mettre un signe plus ».*

On en vient à notre preuve par l'absurde (ou par ironie). On imagine que l'on a trouvé une solution.
On la nomme f_0 et on regarde ce qui ne vas pas (car en notre for intérieur, on sait qu'il va y avoir un problème).

On part de $f_0(f_0(x)) = \cos(x)$, prétendument valable en tout point.

On a par exemple $f_0(f_0(c)) = \cos(c) = c$ pour x égal à c. On compose par f_0

$$f_0(f_0(f_0(c))) = f_0(c)$$

Mais dans le premier membre, on peut regrouper les deux premiers f_0 ensemble $f_0(f(_0(f_0(c))) = f_0(f_0(d))$ avec $d = f_0(c)$.
Or, $f_0(f_0(d)) = \cos(d)$ pour tout d.

> *Pour mieux comprendre, si on notait avec des puissances au lieu de composition, on calcule* $f^3(c)$ *de deux façons*
>
> $$\begin{array}{ccccccc} f^3(c) & = & f^2.f(c) & = & \cos(f(c)) & & \\ f^3(c) & = & f.f^2(c) & = & f(\cos(c))) & = f(c) \end{array}$$
>
> *Le résultat* $\cos(f_0(x)) = f_0(\cos(x))$ *est valable pour tout* x*. C'est ensuite en* c *qu'il se passe des choses jolies.*

On a obtenu $\cos(f_0(c)) = f_0(c)$. On déduit que $f_0(c)$ est une solution de l'équation $\cos(x) = x$ d'inconnue réelle x.

> *C'est gentil, mais ça ne dit pas tout.*

Or, l'équation $\cos(x) = x$ n'a qu'une solution. C'est c.
On peut donc identifier (comme avec un test ADN) : $f_0(c) = c$.

> *Ici,* $f_0(c)$ *est solution de l'équation que* c *est le seul à vérifier. Trop joli l'argument pour obtenir* $f_0(c) = c$*.*

On dérive alors l'égalé $\forall x,\ f_0(f_0(x)) = \cos(x)$ (le premier membre est une composée, comme $f(u(x))$ dans le cours avec ici $u = f$)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0'(f_0(x)) \times f_0'(x) = -\sin(x)$$

C'est vrai en tout point ? Pas besoin de les convoquer tous.
Regardons là où nous guident notre instinct et l'énoncé.
On convoque le cas particulier $x = c$ (le c solution de $\cos(c) = c$).

$$f_0'(f_0(c)) \times f_0'(x) = -\sin(c)$$

Mais on vient de prouver $f_0(c) = c$ (c'est à ça que ça sert), alors on remplace

$$f_0'(c) \times f_0'(x) = -\sin(c)$$

Le premier membre est un carré de réel. Il est positif.

> *Attention, la phrase « un carré est toujours positif » n'a de valeur que dans* $\mathbb{R}$*. Dans* $\mathbb{C}$*, ça n'a plus de sens.*
> *Pensez donc au réflexe « carré de réel ».*

Le second membre vaut $-\sqrt{1-c^2}$ et il est négatif.

Pas besoin de pousser plus loin. on tient notre contradiction.

Il fallait effectivement être guidé par l'énoncé, sinon comment penser à c, et à obtenir $f_0(c) = c$.
Peut être aurions nous pu trouver une contradiction ailleurs, mais ici, c'est la plus rapide à surgir.

DS00 Cas de $f(f(x)) = -e^x$.

Ce qui suit va pouvoir se généraliser. Il n'y a pas de solution continue si F est décroissante.

On commence par une implication en $\forall(x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ truc \Rightarrow machin$.
On rédige comme en maths (c'est normal, on est en maths).

On se donne x et y quelconques (c'est bon pour $\forall(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$).

On fait une hypothèse : $f_1(x) = f_1(y)$.
Comme on ne connaît pas encore f_1, on ne peut pas dire grand chose pour l'instant.
Mais on a une hypothèse à utiliser : $f_1 \circ f_1 = -Id$.
On va donc appliquer f_1 pour avoir des $f_1 \circ f_1$.
On passe donc de $f_1(x) = f_1(y)$ à $f_1(f_1(x)) = f_1(f_1(y))$.
Et là, on insère notre hypothèse sur f_1.
Ceci donne $-e^x = -e^y$.
On efface les signes moins.
On passe au logarithme. On trouve bien $x = y$.

En renversant l'implication $f_1(x) = f_1(y) \Rightarrow x = y$, on trouve $(x \neq y) \Rightarrow (f_1(x)) \neq f_1(y))$.
Deux réels différents ont des images différentes.

---

a et b sont donnés, sans aucune hypothèse dessus hormis $a < b$. Pourquoi pas.
Et g_1 est bien une application de la variable notée t.

On calcule comme demandé

$t = 0$	$t = 1$
$f_1(0.b + (1-0)) - f_1(0.a)$	$f_1(1.b + (1-1)) - f_1(1.a)$
$f_1(1) - f_1(0)$	$f_1(b) - f_1(a)$

Ceci va ben servir à quelquechose et pas juste à vérifier que vous savez calculer et appliquer une consigne.

Comme t est entre 0 et 1, on doit pouvoir montrer des inégalités.
Mais de la méthode S.V.P. On doit prouver $t.b + (1-t) > t.a$ et $f_1(t.b + (1-t)) \neq f_1(t.a)$.
Ne prenons pas les choses à l'envers. Ne partons pas de $t.b + (1-t) > t.a$ qui est notre but.
On suit la consigne du cours en calculant la différence, avec l'espoir que son signe soit une évidence

$$t.b + (1-t) - t.a = t.(b-a) + (1-t)$$

Et là, c'est trop facile. t est positif et $b - a$ aussi.
Le premier produit est positif.
Et $1 - t$ est positif aussi, puisque t est plus petit que 1.
C'est donc fini.

Avec des réflexes pas encore adaptés, vous aurez peut être fait une étude de fonction différence
$t \longmapsto t.b + (1-t) - t.a$ entre 0 et 1.
Pourquoi pas, mais c'est du bricolage.

De plus, il est impossible qu'on ait à la fois $t.(b-a) = 0$ et $1 - t = 0$ (t ne peut valoir à la fois 0 et 1), la différence est strictement positive.

Contentons nous de dire que $t.b + (1-t)$ et $t.a$ sont deux réels distincts.

Il est donc impossible d'avoir $f(t.b + (1-t)) = f(t.a)$.

C'est ce qu'on a dit plus haut. Si on avait $f(t.b + (1-t)) = f(t.a)$ on aurait $(t.b + (1-t)) = (t.a)$.
Et ceci est impossible comme on vient de le voir (en tout cas pour t entre 0 et 1).

Pourquoi $g_1(0)$ et $g_1(1)$ sont ils de même signe ?
Parce que sinon, en appliquant à g_1 (continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$) le théorème des valeurs intermédiaires, on aurait un réel t_0 vérifiant $g_1(t_0) = 0$. Et ceci vient d'être interdit.

En fait, c'est une forme du théorème des valeurs intermédiaires.
Le sens usuel est
« une application continue qui change de signe sur un intervalle est obligée de s'annuler au moins une fois ».
Et la version contraposée est
« une application continue qui ne s'annule pas sur un intervalle ne peut pas changer de signe ».

Comme $g_1(0)$ et $g_1(1)$ sont connues, on déduit : $f_1(b) - f_1(a)$ est du même signe que $f_1(1) - f_1(0)$, et ce, pour tout couple $(a,\ b)$ avec $a < b$.

Comme on ignore le signe de $f_1(1) - f_1(1)$, on a deux cas.

• $f_1(1) > f_1(0)$. Alors pour tout couple $(a,\ b)$ avec $a < b$ on a $f(a) < f(b)$.
On reconnaît que f est croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

• $f_1(1) < f_1(0)$. Alors pour tout couple $(a,\ b)$ avec $a < b$ on a $f(a) > f(b)$.
On reconnaît que f est décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On a montré ici un résultat général du cours de Sup :
une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne prend pas deux fois la même valeur est forcément strictement monotone.
Et c'est un sens qui semble normal si on essaye avec un crayon, mais qui n'est pas évident à démontrer.

Il est temps de conclure.
Si f est croissante, alors $f \circ f$ l'est aussi.

$$(a < b) \Rightarrow (f(a) < f(b)) \Rightarrow (f(a) < f(b))$$

Et elle ne peut pas être égale à $x \longmapsto -e^x$ (qui est décroissante).

Si f est décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $f \circ f$ est croissante

$$(a < b) \Rightarrow (f(a) > f(b)) \Rightarrow (f(a) < f(b))$$

Et là encore, $f \circ f$ ne peut pas être égal à $x \longmapsto -e^x$.

Les deux cas conduisent à une contradiction.

Notre seule erreur a été de supposer qu'il existait f_1 vérifiant $f_1 \circ f_1 = (x \longmapsto -e^x)$.
L'équation n'a donc pas de solution.

Le résultat général est que l'équation $f \circ f = F$ n'a pas de solution si F est décroissante.

DS00 — Une suite (c_n).

Le premier terme de la suite (c_n) existe.
Et chaque fois qu'un terme c_n existe, le terme c_{n+1} existe.

Toute la suite est définie ; par récurrence.

On a deux démonstrations pour la croissance de la suite.
• On se donne un entier n, on veut prouver $c_{n+1} \geqslant c_n$ c'est à dire $e^{c_n} \geqslant c_n$.
Or, pour tout réel x, on a $e^x \geqslant x$ (variation de fonction $x \longmapsto e^x - x$ si nécessaire, ou simple étude graphique si le correcteur n'est pas trop exigeant).

• On commence par constater $c_1 = 1 \geqslant 0 = c_0$.
On se donne un entier n et on suppose $c_{n+1} \geqslant c_n$.
On passe à l'exponentielle (application croissante) : $e^{c_{n+1}} \geqslant e^{c_n}$.
On reconnaît $c_{n+2} \geqslant c_{n+1}$.
On a donc prouvé par récurrence sur n la propriété P_n : $c_{n+1} \geqslant c_n$.

Que fait la suite à part croitre ? Elle tend vers l'infini ?
Là aussi, plusieurs solutions.

• En tant que suite croissante, elle n'a que deux possibilités : converger ou tendre vers l'infini.
Mais si elle converge (vers une limite λ), alors en passant à la limite dans $c_{n+1} = e^{c_n}$ on a $\lambda = e^{\lambda}$.
Or, cette équation n'a pas de solution réelle (comparaison des graphes encore).
Par élimination, c'est vers l'infini qu'elle part.

• Pour tout tout n, on a $c_n \geqslant n$.
Je vous le fais par récurrence sur n facile à initialiser.
On se donne n et on suppose $c_n \geqslant n$. On passe à l'exponentielle : $e^{c_n} \geqslant e^n$.
On écrit ensuite $e^n \geqslant n+1$ par comparaison (graphique) des fonctions.
On a bien obtenu $c_{n+1} \geqslant n+1$.
Maintenant que l'on a $c_n \geqslant n$ pour tout n, on termine avec le théorème du gendarme.

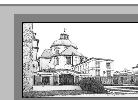
Chaque x de $[0,\ +\infty[$ est dans un et un seul de ces intervalles.
En effet, il est entre deux termes consécutifs de la suite.
Calculer n si on connaît x est en revanche un peu compliqué.
Ceci dit, par exemple pour $x = 100$, on reconnait $c_3 = e^e < 100 < c_4 = e^{(e^e)}$. On a donc $n = 3$.

Mais si x est entre c_n et c_{n+1} alors $\ln(x)$ est entre $\ln(c_n)$ et $\ln(c_{n+1})$.
Et si on revient à la définition : $\ln(c_n) = \ln(e^{c_{n-1}}) = c_{n-1}$, et $\ln(c_{n+1}) = \ln(e^{c_n}) = c_n$.

On a donc rapidement $\forall x,\ \forall n,\ x \in [c_n,\ c_{n+1}[\Rightarrow \ln(x) \in [c_{n-1},\ c_n[$
L'application logarithme nous fait descendre à l'intervalle précédent.

On traitera à part le cas $x \in]c_0,\ c_1[$ qui conduit à $\ln(x) < 0$.
Et on refusera de traiter le cas $x = 0$.

DS00 — Construction d'une fonction f solution de $f \circ f = \exp$.



On va calculer $f(5)$.
On entre dans le premier test : $0 \leqslant 5 < 0.5$. Non. On passe au suivant.
A-t-on $0.5 \leqslant 5 < 1$. Toujours pas.
On passe donc à la ligne finale : $e^{f(\ln(5))}$. Et $\ln(5)$ existe.
On a son ordre de grandeur ? On profite du cadeau :

$$c_0 = 0 < c_1 = 1 < c_2 = e \simeq 2{,}718 < c_3 = e^e \simeq 15{,}154 < c_4 = e^{(e^e)} \simeq 3814279{,}104$$

Ayant $e < 5 < e^e$ on déduit $1 < \ln(5) < e$.

On peut donc calculer $f(\ln(5))$ et voir que sa variable ne valide aucun des deux test :

$0 \leqslant \ln(5) < 0.5$	non
$0.5 \leqslant \ln(5) < 1$	non

On va donc avoir $f(\ln(5)) = e^{f(\ln(\ln(5)))}$.

On a besoin de $f(\ln(\ln(5)))$. On doit donc encadrer $\ln(\ln(5))$ à partir de $1 < \ln(5) < e$:

$$0 < \ln(\ln(5)) < 1$$

Cette fois, on est entre 0 et 1. L'un des premiers tests va répondre favorablement.
Mais lequel ?

$$0 < \ln(\ln(5)) < 0.5 \text{ ou } 0.5 < \ln(\ln(5)) < 1$$

On nous a donné $\ln(\ln(5)) \simeq 0{,}47$. On est donc « sous 1/2 ». C'est donc $f(\ln(\ln(5))) = \ln(\ln(5)) + \dfrac{1}{2}$.
On remonte alors

$$f(\ln(5)) = e^{\frac{1}{2}+\ln(\ln(5))} = e^{\frac{1}{2}}.e^{\ln(\ln(5))} = \sqrt{e}.\ln(5)$$

On termine avec

$$f(5) = e^{f(\ln(5))} = e^{\ln(5).\sqrt{e}} = (e^{\ln(5)})^{\sqrt{e}} = 5^{\sqrt{e}}$$

Qu'en est il de la continuité en $\dfrac{1}{2}$?

Le problème est que la fonction obéit à deux formules suivant qu'on est à droite ou à gauche de $\dfrac{1}{2}$.

On regarde si les deux limites sont les mêmes :

$x \in]0,\ 0.5[$	$x = 0.5$	$x \in]0.5,\ 1[$
$f(x) = x + \dfrac{1}{2}$	$f(0.5) = 1$	$f(x) = e^{x-\frac{2}{2}}$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0.5\\ x<0.5}} = x + \dfrac{1}{2} = 1$		$\lim\limits_{\substack{x\to 0.5\\ x>0.5}} e^{x-\frac{1}{2}} = e^0 = 1$

f est continue en $1/2$.

On a besoin de connaître aussi f en 1 et « à droite de 1 ».
Pour x plus grand que 1, on a $f(x) = e^{f(\ln(x))}$ et $\ln(x)$ est positif.
Déjà, $f(1) = e^{f(0)} = e^{1/2} = \sqrt{e}$.
Ensuite, si x est plus grand que 1 mais « proche de 1 », on peut lui imposer $x \in [1,\ \sqrt{e}[$.
On a alors $f(x) = e^{f(\ln(x))} = e^{\ln(x)+1/2} = x.e^{1/2}$.

$x \in]0.5,\ 1[$	$x = 0.5$	$x \in]1,\ \sqrt{e1}[$
$f(x) = e^{x-1/2}$	$f(1) = \sqrt{e}$	$f(x) = x.\sqrt{e}$
$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} = x + \dfrac{1}{2} = 1$		$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x.\sqrt{e} = \sqrt{e}$

f est continue en 1.

On peut montrer que f est continue sur tout $[0,\ +\infty[$, chaque raccordement en c_n ($n \in \mathbb{N}$) étant continu.

Pourquoi f définit bien une application.
Déjà, tous les x de $[0,\ 1[$ ont une image, assez facile à calculer.

Prenons ensuite x dans $[1,\ e[$. Alors on doit poser $f(x) = e^{f(\ln(x))}$. Et où est $\ln(x)$? Entre 0 et 1.
$f(\ln(x))$ est donc calculable. Et $e^{f(\ln(x))}$ aussi.
A ce stade, f est définie sur $[0,\ 1[\cap[1,\ e[$.

Prenons ensuite x dans $[e,\ e^e[$. La définition est $f(x) = e^{f(\ln(x))}$ avec $\ln(x)$ dans $[1,\ e[$.
On est donc ramené au cas précédent. $f(\ln(x))$ existe et $e^{f(\ln(x))}$ aussi. C'était le cas de $f(5)$.
A ce stade, f est définie sur $[0,\ 1[\cap[1,\ e[\cap[e,\ e^e[$.

La récurrence commence.
On se donne n et on suppose que f est connue sur $[0,\ c_n[$.
Elle l'est alors sur $[c_n,\ c_{n+1}[$ par la formule $f(x) = e^{f(\ln(x))}$ avec $\ln(x)$ dans $[0,\ c_n[$ (en fait dans $[c_{n-1},\ c_n[$).
En recollant les morceaux, f est alors définie sur $[0,\ c_n[\cup[c_n,\ c_{n+1}[$ c'est à dire sur $[0,\ c_{n+1}[$.

Par récurrence, f est définie sur chaque $[0,\ c_n[$ donc par réunion sur $[0,\ +\infty[$.

On aura par exemple $f(100) = e^{f(\ln(100))} = e^{e^{f(\ln(\ln(100)))}} = e^{e^{e^{f(\ln(\ln(\ln(100))))}}}$ avec $\ln(\ln(\ln(100)))$ qui est enfin tombé entre 0 et 1.

On va justifier intervalle par intervalle que l'application f ainsi définie vérifie bien $f \circ f = \exp$.

• Pour $\boxed{x \text{ entre } 0 \text{ et } 1/2}$ on a $f(x) = x + \dfrac{1}{2}$.
On prend ce nombre $x + \dfrac{1}{2}$ et on fait porter le test sur lui. Il est entre $\dfrac{1}{2}$ et 1. On a donc $f(f(x)) = f\Big(x + \frac{1}{2}\Big) = e^{(x+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} = e^x$
Pour ceux là c'est bon.

• On prend $\boxed{x \text{ entre } \dfrac{1}{2} \text{ et } 1}$ La définition donne $f(x) = e^{x-\frac{1}{2}}$. On encadre alors $0 \leqslant x - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$ puis $1 < e^{x-\frac{1}{2}} < e^{\frac{1}{2}} < e$.

On est donc dans le troisième cas pour $f(e^{x-\frac{1}{2}})$ (le cas récursif) :

$$e^{f(\ln(e^{x-\frac{1}{2}}))} = e^{f(x-\frac{1}{2})} = e^{(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}} = e^x$$

puisque $x - \dfrac{1}{2}$ est entre 0 et $\dfrac{1}{2}$.

• Passons à présent à $\boxed{x \text{ entre } 1 \text{ et } \sqrt{e}}$ (donc plus grand que 1).

Cette fois, la définition donne déjà $f(x) = e^{f(\ln(x))}$. Mais où est $\ln(x)$? Tout simplement entre 0 et $\dfrac{1}{2}$. On a donc

$$f(x) = e^{f(\ln(x))} = e^{\ln(x)+\frac{1}{2}} = e^{\ln(x)}.e^{\frac{1}{2}} = x.\sqrt{e}$$

On encadre : $x.\sqrt{e}$ est entre $\sqrt{e}$ et e (donc plus grand que 1). C'est la troisième formule qui sert donc encore pour lui

$$f(f(x)) = f(x.\sqrt{e}) = e^{f(\ln(x.\sqrt{e}))} = e^{f(\ln(x)+\frac{1}{2})}$$

Et dans quel intervalle est $\ln(x) + \dfrac{1}{2}$? Entre $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$. On a donc

$$f(\ln(x) + \frac{1}{2}) = e^{\ln(x)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = e^{\ln(x)} = x$$

On reporte dans la formule trois lignes plus haut

$$f(f(x)) = f(x.\sqrt{e}) = e^{f(\ln(x.\sqrt{e}))} = e^{f(\ln(x)+\frac{1}{2})} = e^x$$

On termine avec $\boxed{x \text{ entre } \sqrt{e} \text{ et } e}$ On dit tout de suite : $\dfrac{1}{2} \leqslant \ln(x) < 1$ (donc $f(\ln(x)) = e^{\ln(x)-1/2}$) et bien sûr $x \geqslant 1$.
On peut commencer à calculer

$$f(x) = e^{f(\ln(x))} = e^{(e^{\ln(x)-1/2})} = e^{x.e^{-1/2}}$$

Le réel $x.e^{-1/2}$ est entre 1 et e, et $e^{x.e^{-1/2}}$ est entre e (c'est c_2) et e^e(c'est c_3).
On peut poursuivre

$$f(f(x)) = f(e^{x.e^{-1/2}}) = e^{f(\ln(e^{x.e^{-1/2}}))} = e^{f(x.e^{-1/2})}$$

On a besoin de $f(x.e^{-1/2})$ qui passe par la troisième formule

$$f(x.e^{-1/2}) = e^{f(\ln(x.e^{-1/2}))} = e^{f(\ln(x)-1/2)} = e^{(\ln(x)-1/2)+1/2} = e^{\ln(x)} = x$$

car cette fois, $\ln(x) - 1/2$ est entre 0 et $1/2$.
On reporte donc enfin

$$f(f(x)) = f(e^{x.e^{-1/2}}) = e^{f(\ln(e^{x.e^{-1/2}}))} = e^{f(x.e^{-1/2})} = e^x$$

On pourrait montrer, intervalle par intervalle que l'on a $f(f(x)) = e^x$ pour tout x positif.

DS00 Equation $f \circ f = f$.

On commence par le sens qui marche bien : si f est constante ou égale à Id on a bien $f \circ f = f$.

Prenons en effet $f = Id$, on a sans effort $f(f(x)) = f(x)$ pour tout x.

Prenons ensuite $f = (x \longmapsto a)$ une fonction constante, et on a encore $\forall x,\ f(f(x)) = a = f(x)$.

On montre ensuite un résultat qui parle d'injections et de surjection.
Pour la première implication, on suppose que f est injective et solution de $f \circ f = f$.
On a donc $\forall x,\ f(f(x)) = f(x)$.
Mais en posant $y = f(x)$, on a $f(y) = f(x)$.
Par injectivité, ceci permet d'arriver tout de suite à $y = x$.
On a donc $f(x) = x$ pour tout x.
On reconnaît $f = Id$.

Est il vrai alors que f est surjective de $[0,\ 1]$ dans $[0,\ 1]$?
Oui, puisque tout réel b de $[0,\ 1]$ peut s'écrire $b = f(a)$ pour a justement égal à b.

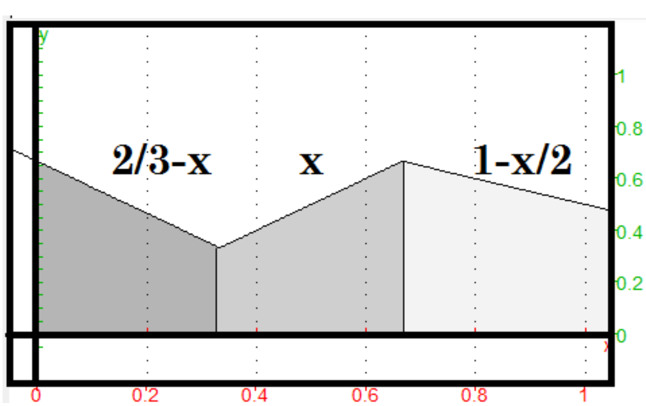
Pour l'autre implication, on suppose f surjective (tout élément b est l'image d'au moins un élément a).
On doit prouver l'injectivité, c'est à dire bâtir un raisonnement.
On prend b et b' et on suppose $f(b) = f(b')$.
Comment arriver à $b = b'$. Rien ne nous permet d'effacer f.
Mais il faut utiliser nos hypothèses. Par exemple b s'écrit $f(a)$ pour un a bien choisi.
Et b' s'écrit $f(a')$ pour un (autre) a'.
L'hypothèse $f(b) = f(b')$ devient $f(f(a)) = f(f(a'))$.
Et cette fois, on fait appel à l'autre hypothèse : $f \circ f = f$.
On a donc maintenant $f(a) = f(a')$.
Et c'est justement $b = b'$ comme espéré.

DS00 Une solution de $f \circ f = f$.

L'application $f_2 = x \longmapsto \dfrac{20 - 18.x + 8.|3.x - 1| - 6.|3.x - 2|}{24}$ est difficile à représenter si on garde les valeurs absolues.
On va découper par intervalles, en fonction du signe de $3.x - 1$ et de $3.x - 2$ pour virer les valeurs absolues.
Par exemple, $|3.x - 1| = 3.x - 1$ pour $x > 1/3$.

	$x = 0$	$x \in [0,\ 1/3]$	$x = 1/3$	$x \in [1/3,\ 2/3]$	$x = 2/3$	
$\lvert 3.x - 1\rvert$		$1 - 3.x$		$3.x - 1$		
$\lvert 3.x - 2\rvert$		$2 - 3.x$		$2 - 3.x$		
$f_2(x)$		$\dfrac{20 - 18.x + 8.(1 - 3.x) - 6.(2 - 3.x)}{24}$		$\dfrac{20 - 18.x + 8.(3.x - 1) - 6.(2 - 3.x)}{24}$		$20 -$
$f_2(x)$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{2}{3} - x$	$\dfrac{1}{3}$	x	$\dfrac{2}{3}$	

On constate que f est affine sur chaque intervalle.
Son graphe est donc formé de segments de droites, de coefficients directeurs -1, 1 et $-1/2$.



On sait aussi qu'elle se raccorde de façon continue en $1/3$ et $2/3$.

On peut donc représenter graphiquement f, par intervalles.

Calculer $f(f(x))$ avec des valeurs absolues partout devient une horreur ensuite.
Sauf si on regarde le graphe.
Pour tout x de $[0,\ 1]$, $f(x)$ est entre $1/3$ et $2/3$.
Et quelle est l'action de f entre $1/3$ et $2/3$?

$$\forall y \in [1/3,\ 2/3],\ f(y) = y$$

Ceci permet de dire, en utilisant cette variable intermédiaire y

$$\forall x \in [0,\ 1],\ f(x) \in [1/3,\ 2/3] \text{ et } f(f(x)) = f(x)$$

L'information $f(f(x)) = f(x)$ se lit donc $f \circ f = f$. C'est ce qu'on voulait.

DS00 Un faux raisonnement pour $f \circ f = f$.

Que fait l'élève ? Il dérive et trouve bien $f'(f(x)).f'(x) = f'(x)$ en utilisant effectivement le cas particulier de $(f \circ u)' = (f' \circ u) \times u'$ dans le cas particulier $u = f$.

Quitte à tout faire passer d'un côté et factoriser

$$\forall x,\ f'(x) \times (f'(f(x)) - 1) = 0$$

Avec la phrase « un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul » on a très vite

$$\forall x,\ f'(x) = 0 \ ou\ f'(f(x)) = 1$$

Mais on ne passe pas

$$(\forall x,\ f'(x) = 0) \ ou\ (\forall x,\ f'(f(x)) = 1)$$

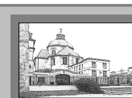
C'est là l'erreur de l'élève. Il peut y avoir des x pour lesquels on a $f'(x) = 0$ et des x pour lesquels on a $f'(f(x)) = 1$. Pourquoi ne pas avoir $f'(x) = 0$ sur $[0,\ 1/2]$ (et f constante), puis $f'(f(x)) = 1$ pour les x de $]1/2,\ 1]$?

De plus, $f'(f(x)) = 1$ ne donne pas $f'(x) = 1$.

Bref, il serait temps d'arrêter d'arnaquer !

Comment s'en sortir ?
Avec le TVI appliqué à f'. Comment f' peut elle valoir seulement 0 ou 1 ?
Si elle n'est pas constante égale à 0 ou constante égale à 1, alors il y a au moins un point de $[0,\ 1]$ oùelle vaut autre chose que 0 (donc 1) et au moins un point $f(x)$ de $[0,\ 1]$ où elle vaut autre chose que 1 (donc 0).
Mais alors entre ces deux abscisses elle doit valoir au moins un fois $0,5$ par exemple.
Et la valeur $0,5$ est interdite pour f'.

DS00 Cas des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.



Un application de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a.x + b.y \\ c.x + d.y \end{pmatrix}$ va bien de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et peut se recomposer avec elle même.
Soit par le calcul lourd, soit par $U \longmapsto M.(M.U)$), on trouve

$$f \circ f = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a^2 + b.c & a.b + b.d \\ a.c + c.d & b.c + d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La condition $f \circ f = f$ se ramène à

$$\begin{pmatrix} a^2 + b.c & a.b + b.d \\ a.c + c.d & b.c + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

que certains résumeront en $M^2 = M$ où M est la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (ce qui est naturel).

On teste les deux matrices proposées et on a bien

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(et c'est normal d'avoir $Id \circ Id = Id$) puis

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et cette fois c'est l'application constante nulle.

Dans le cas général, on va résoudre

$$\begin{pmatrix} a^2 + b.c & a.b + b.d \\ a.c + c.d & b.c + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

si possible par conditions nécessaires et suffisantes (par équivalences), pour n'avoir pas à traiter un sens puis l'autre.
On écrit le système de quatre équations et il faudra en garder quatre tout au long du travail

$$\begin{array}{ccccc} a^2 & +b.c & & = & a \\ & b.c & +d^2 & = & d \\ b & .(a & +d) & = & b \\ c & .(a & +d) & = & c \end{array}$$

Les deux dernières sont bien pratiques car elles peuvent se séparer en deux possibilités :

$$\begin{array}{ccc} b & = c & = 0 \\ & ou & \\ a & +d & = 1 \end{array}$$

Le cas $b = c = 0$ donne ensuite $a^2 = a$ et $d^2 = d$. Cette équation (deux fois la même) se traite sans effort quand on l'écrit $a^2 - a = 0$ c'est à dire $a.(a - 1) = 0$.

Qui traite $a^2 = a$ en divisant par a sans se demander si a est non nul ?
Qui traite $x^2 = x$ en l'écrivant $a.x^2 + b.x + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = 0$ puis $\Delta = b^2 - 4.a.c = (-1)^2 - 4.1.0 = 1$?
Ce n'est pas faux, mais qu'est ce que c'est lourd ! C'est n'avoir pas compris ce qu'est une équation du second degré.

On trouve alors quatre matrices possibles

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b et c sont nuls, et les choix pour a et d sont indépendants).
Elles correspodeant aux deux cas mis de côté, et les deux autres (au milieu) obéissent à $a + d = 1$ et $a.d - b.c = 0$.
Jusque là tout va bien.

Le cas $a + d = 1$ donne ensuite le système $\begin{array}{ccccc} a^2 & +b.c & & = & a \\ & b.c & +d^2 & = & d \\ b & .1 & & = & b \\ c & .1 & & = & c \end{array}$ puis $\begin{array}{ccccc} a^2 & & -d^2 & = & a-d \\ & b.c & +d^2 & = & d \\ b & & & = & b \\ c & & & = & c \end{array}$ (on ne remplace pas deux équations par leur différence, on en garde aussi une des deux). On reporte et on a alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$avec $a + d = 1$ et $a.d - b.c = 0$ (si si, c'est $a^2 + b.c = a$ et c'est $b.c + d^2 = d$).

Les deux chemins, une fois mises de côté $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ conduisent bien aux modèles en « $a + d + 1$ et $a.d - b.c = 0$ ».

On a raisonné par équivalences avec une disjonction de cas.
On peut aussi se contenter de dire qu'on a raisonné par condition nécessaire.

Il reste la condition suffisante.
On suppose donc $a.d = b.c$ et $a + d = 1$ et on regarde si on a bien

$$\begin{array}{ccccc} a^2 & +b.c & & = & a \\ & b.c & +d^2 & = & d \\ b & .(a & +d) & = & b \\ c & .(a & +d) & = & c \end{array}$$

Les deux dernières tombent en une fois.
Et si on remplace d par $1 - a$ on a bien $a.(1 - a) = b.c$ c'est à dire $a^2 + b.c = a$.
De même en écrivant $a = 1 - d$ et en reportant dans $a.d = b.c$ on trouve $(1 - d).d = b.c$ soit $d^2 + b.c = d$ comme souhaité.
L'implication est correcte.

On traite un exemple. On veut $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a^2 + b.c & a.b + b.d \\ a.c + c.d & b.c + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Comme ce n'est pas avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ni $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qu'on aura $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on sait qu'en fait on va demander

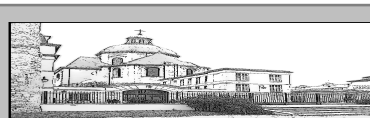
$$\begin{array}{ccccc} a.d & - & b.c & = & 0 \\ a & + & d & = & 1 \\ a & + & b & = & 1 \\ c & + & d & = & 2 \end{array}$$

On exprime tout à l'aide de a dans les trois dernières : $d = 1 - a$, $c = 1 + a$, $b = 1 - a$.
On reporte dans la première : $a.(1 - a) - (1 - a).(1 + a) = 0$. L'équation est du premier degré en a : $a = 1$.
On reporte en on trouve l'unique solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Comme on veut toutes les solutions, on ne peut pas se contenter de « on propose/on vérifie » qui valide cette solution mais ne permet pas de dire si c'est la seule.

LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2024 2025
DS00
58- points

Sources :
- $f \circ f = \cos$: oral de concours
- $f \circ f = -\exp$: le même oral de concours
- $f \circ f = f$: à approfondir sur une vidéo de Ayoub et les maths
- $f \circ f = \exp$: un sujet de synthèse de Terminale

`http ://mathematiques.ac-bordeaux.fr/profplus/docmaths/anabases/8_pb_synt/fof_exp.pdf`