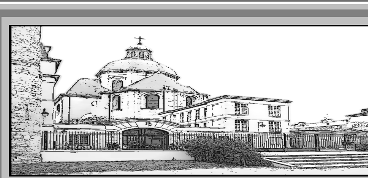
LYCEE CHARLEMAGNE

Lundi 6 septembre

M.P.S.I.2



2023 2024

TD00

◁0▷ ♡ On a un jeu de cartes. Chaque carte a un chiffre sur une face, une lettre sur l'autre. On aligne devant vous quatre cartes dont les faces visibles sont A 7 4 B On vous dit "*quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre*". Quelles cartes retournez vous pour vous assurer que l'affirmation est correcte ?

Même question sur les retournements si l'affirmation est "*il y a un nombre pair sur une face si et seulement si il y a une voyelle sur l'autre*".

Cette fois, les cartes peuvent avoir deux lettres. Ou deux chiffres. Ou une lettre et un chiffre. On voit les mêmes quatre faces, et l'affirmation à vérifier est encore "*quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre*". Que retournez vous ?

Pour finir, les cartes peuvent avoir deux lettres. Ou une lettre et un chiffre. Mais pas deux chiffres. On voit les mêmes quatre faces, et l'affirmation à vérifier est encore "*quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre*". Que retournez vous ?

◁1▷ Résolvez l'équation $n! = 6.(k!)$ d'inconnues n et k dans $\mathbb{N}$.

◁2▷ ♡Prouvez que $1.3.5.7\dots(2.n-1)$ (produit de n entiers impairs) est égal à $\dfrac{(2.n)!}{2^n.n!}$. (plusieurs preuves possibles).

◁3▷ ♡ a, b et c sont entre 0 et $\pi/2$ et vérifient $\cos(a) = 0,4$, $\sin(b) = 0,8$ et $\tan(c) = 1,3$. Classez a, b et c par ordre croissant. *(là encore, si votre preuve repose sur les valeurs approchées de la calculatrice, vous vous êtes trompé de salle ; ce ne peut être qu'une aide, mais pas une preuve).*

◁4▷ ♡ Ajustez $(a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ a_3,\ b_3)$ pour avoir

$(t \longmapsto a_1.t.\ln(t) + b_1.t)' = \ln$	$(t \longmapsto a_2.t^2.\ln(t) + b_2.t^2)'' = \ln$	$(t \longmapsto a_3.t^3.\ln(t) + b_3.t^3)^{(3)} = \ln$

◁5▷ ♡ Résolvez l'équation $(n!)^2 \geqslant (2.n)!$ d'inconnue entière n.

Résolvez l'équation $(n!)^3 \geqslant (2.n)!$ d'inconnue entière n.

◁6▷ Une comptine enfantine dit *(ou plutôt chante)* : "*Promenons nous dans les bois, pendant que le loup n'y est pas ; si le loup y était, il nous mangerait, mais comme il n'y est pas, il ne nous mangera pas*". Commentez d'un point de vue logique.

◁7▷ On définit $f = x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-2}$ et $g = x \longmapsto |x| - 1$.

Résolvez

$f(x) \geqslant 0$	$f(g(x)) \geqslant 0$	$g(f(x)) \geqslant 0$	$f(f(x)) \geqslant 0$	$g(g(x)) \geqslant 0$

d'inconnue réelle x.

◁8▷ ♡ Calculez module et argument de $(2+i)^{10}.(3+i)^{10}$.

◁9▷ ♡ On définit $y = \log_a(x)$ (logarithme de base a) par $a^y = x$. Montrez : $\log_a(b) = \dfrac{1}{\log_b(a)}$.

Justifiez $\log_2(125) < 7$.

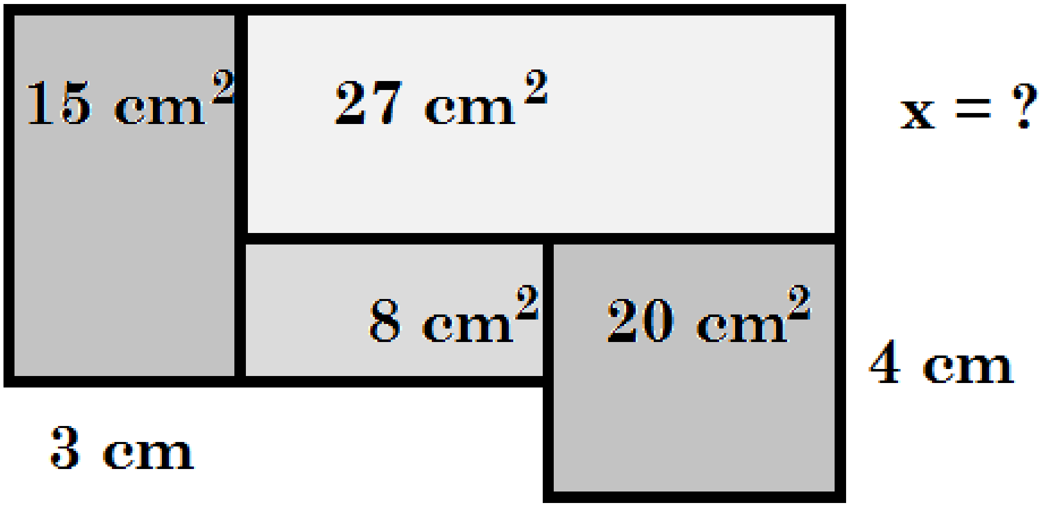
◁10▷ ♠ Le critère de divisibilité par 7 est le suivant :

« pour savoir si un nombre donné est divisible par 7, efface le chiffre, soustrais le double du chiffre des unités ; ton nombre initial est multiple de 7 si et seulement si l'entier obtenu est multiple de 7 »

Par exemple partant de 456239, on construit $45623 - 2.9$ qui vaut 45605.
Tiens, d'ailleurs, plutôt que 45605, regardons $4560 - 2.5$ (qui vaut 4550).

Et pour 4550, on va regarder $455 - 2.0$. Et ensuite $45 - 2.5$.
Comme 35 est multiple de 7, tous les entiers concernées sont multiples de 7.

Justifiez la validité de ce test.
Appliquez le pour trouver le chiffre qui manque pour faire de 1#4321765 soit un multiple de 7, sans poser la division.



◁11▷

◁12▷ Peut on choisir b réel pour que $(1+i.b)^5$ soit un imaginaire pur ?

◁13▷ Résolvez $\int_0^{\ln(7)} \frac{e^x}{a+e^x}.dx = \ln(3)$ d'inconnue a réelle (trouvez la forme en $\frac{u'}{u}$ cachée).

◁14▷ ♣ Sachant $x^3 + 2.x^2 + 5.x = 1$, saurez vous prouver $\sqrt[3]{x} + \sqrt[2]{x} = 1$?

◁15▷ Sachant $x^2 + 1 = 3.x$, montrez : $\frac{x^4}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{4.x^3}{x^4 + x^2 + 1} = -\frac{1}{6}$. Une solution peut consister à calculer x (deux choix), puis à reporter ; vous vous doutez que ce n'est a priori pas la démarche du matheux.

◁16▷ a, b et c sont les trois longueurs des côtés d'un triangle. On pose alors : $x = a+b-c$, $y = a-b+c$ et $z = -a+b+c$.
Montrez qu'ils sont tous positifs.
Montrez pour α et β positifs : $\alpha + \beta \geqslant 2.\sqrt{\alpha.\beta}$.
En l'appliquant à x et y puis x et z puis y et z, déduisez : $a.b.c \geqslant (a+b-c).(a-b+c).(-a+b+c)$.

◁17▷ ♡ On pose $f = x \longmapsto \frac{a.x+b}{c.x+d}$ et $g = x \longmapsto \frac{\alpha.x+\beta}{\gamma.x+\delta}$, puis $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.
Comparez le calcul de $f \circ g$ et de $M.N$.
On pose $h = x \longmapsto \frac{2.x-1}{x+1}$. Déterminez rapidement $h \circ h \circ h \ldots \circ h$ (11 termes h, le résultat contiendra de grands nombres, dommage).

◁18▷ Pour tout n, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrez : $\sum_{n=1}^{9} H_n = 10.H_{10} - 10$.

◁19▷ ♡ Qui a raison :

-a- $n!$ est divisible par 2019 dès que n a dépassé 2019 lui même.
-b- $n!$ est divisible par 2019 dès que n a dépassé 673.
-c- si n est premier, alors $n!$ n'est pas divisible par n^2.
-d- si n n'est pas premier, alors $n!$ est divisible par n^2.

◁20▷ Calculez $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$. Justifiez : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $\cos\left(\frac{17.\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et calculez

$\sin\left(\frac{17.\pi}{12}\right)$.
Représentez graphiquement $\left(\theta \longmapsto \cos\left(\theta+\frac{\pi}{12}\right)\right)+\left(x \longmapsto \cos\left(x+\frac{3.\pi}{4}\right)\right)+\left(t \longmapsto \cos\left(t+\frac{17.\pi}{12}\right)\right)$.

◁21▷ Classez du plus petit au plus grand : $(3!)^{2!}$, $(3^2)!$, $(2^3)!$ et $(2!)^{3!}$.
On est en mathématiques et non dans le domaine de la foi, il faut évidemment argumenter.

◁22▷ ♡ Simplifiez $\exp\left(\ln\left(\sqrt{7}-1\right)+\ln(\sqrt{7}+1)+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\ln(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$.

◁23▷ ♡ Comparaison des moyennes par la méthode de Cauchy.
Montrez pour tout couple de réels positifs : $\sqrt{a.b} \leqslant \frac{a+b}{2}$.

Montrez pour tout quadruplet de réels positifs : $\sqrt[4]{a.b.c.d} \leqslant \frac{\sqrt{a.b}+\sqrt{c.d}}{4} \leqslant \frac{a+b+c+d}{4}$.

Déduisez pour tout triplet de réels positifs : $\sqrt[3]{a.b.c} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$ (pensez à prendre $d=\frac{a+b+c}{3}$) .

Montrez pour tout quintuplet de réels positifs : $\sqrt[5]{a.b.c.d.e} \leqslant \frac{a+b+c+d+e}{5}$.

Comment généraliserez vous pour $\sqrt[7]{a_1\ldots a_7} \leqslant \frac{a_1+\ldots+a_7}{7}$ (les a_k sont positifs).

Et pour $\sqrt[n]{a_1\ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ (les a_k sont positifs).

◁24▷ L'élève A dit $\int_{4.\pi/3}^{5.\pi/3} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.d\theta$ n'existe pas puisque la primitive $\theta \longmapsto \ln(\sin(\theta))$ n'existe ni en $4.\pi/3$ ni en $5.\pi/3$.
L'élève B dit $\int_{\pi/3}^{9.\pi/4} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.d\theta = \ln(\sin(9.\pi/4)) - \ln(\sin(\pi/3)) = \ln(\sqrt{6}/3)$.
Montrez que les deux ont tort.

◁25▷ ♡ Résolvez $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{a+\cos(t)}.dt = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ d'inconnue a.

◁26▷ ♡ Dérivez $x \longmapsto \ln(\sqrt[3]{x^4-4.x^3+6.x^2-4.x+1})$ [1]

◁27▷ `Retrouvez les stations (métro, R.E.R. et S.N.C.F.) d'anagrammes` *`(Nord-Ouest)`* `:`
Sucre collé. Elfe danse. Hôpital du pénis pueril. L'artisane gazera. Asile Tarzan. Petit-connard. Ah ce fluor.

◁28▷ ♡ Résolvez $log_a(7) = 7$.

◁29▷ Dans cette classe, il y a des garçons et des filles. Voici les moyennes

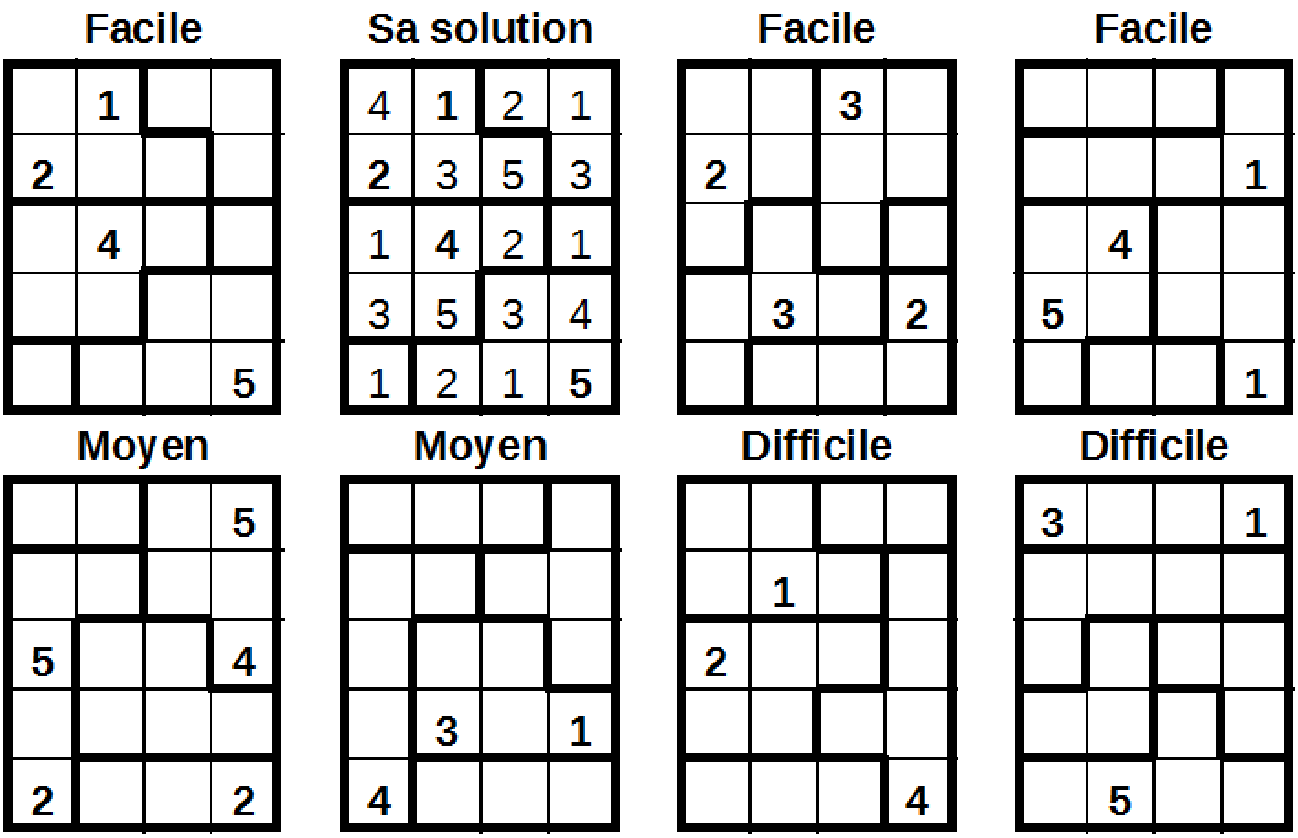
	moyenne de la classe	moyenne des garçons	moyenne des filles
mathématiques	11,4	10,6	12,5
physique	12,8		13,2

Retrouvez la moyenne qui manque.

◁30▷ ♡ Le nombre $\log_2(3).\log_3(4).\log_4(5).\log_5(6).\log_6(7).\log_7(8)$ est il rationnel ? On rappelle : $y=\log_a(x)$ signifie $a^y = x$.

◁31▷ ♣ Tectonic est un jeu développé depuis quelques années maintenant. Il s'agit de compléter une grille. La règle : une maison de taille n contient les entiers de 1 à n. Deux cases voisines ne peuvent pas contenir la même valeur. Une première grille résolue vous permet de comprendre. Et ensuite, c'est à vous.

1. le résultat doit être très simple ; le raisonnement aussi...



◃32▹ L'objectif (en sept parties de plusieurs questions) est de démontrer une formule due à Leonhard Euler : $\boxed{1+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{6}{7+\cfrac{8}{9+\cfrac{10}{11+\dots}}}}}=\frac{1}{\sqrt{e}-1}}$ et aussi de lui donner un sens car l'infini s'y cache. Les diverses parties sont assez indépendantes.

I∼0) Donnez sous forme irréductible les rationnels $1+\frac{2}{3}$, $1+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5}}$ et $1+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{6}{7}}}$ et classez les par ordre croissant[2]. 3 pt.

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

Des suites utiles pour la suite.

II∼0) On note S l'ensemble des suites (u_n) vérifiant $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=(2.n+5).u_{n+1}+(2.n+4).u_n}$
Soient (p_n) et (q_n) les suites de E vérifiant $p_0 = 0$ et $p_1 = 2$ ainsi que $q_0 = 1$ et $q_1 = 3$. Complétez

n	0	1	2	3	4	5
p_n	0	2				
q_n	1	3				

(ces deux suites (p_n) et (q_n) serviront dans la suite du problème)

II∼1) Montrez que si les deux suites (u_n) et (v_n) sont dans E alors pour tout couple $(\alpha,\ \beta)$ de réels, la suite $(\alpha.u_n+\beta.v_n)$ est aussi dans E.

II∼2) Montrez que la suite $(2^{n+1}.(n+1)!)$ appartient à E.

II∼3) Soit (u_n) une suite de E. On pose $s_n=\dfrac{u_n}{2^{n+1}.(n+1)!}$ pour tout n. Exprimez s_{k+2} à l'aide de k, s_{k+1} et s_k pour

2. sans calculatrice ; quand on fera de la physique ou de la finance, on vous le dira

tout k de $\mathbb{N}$.
II~4) Montrez alors : $(-2)^{k+2}.(k+2)!.(s_{k+1}-s_k) = (-2)^{k+1}.(k+1)!.(s_k - s_{k-1})$.
II~5) Déduisez $s_{k+1}-s_k = \dfrac{\lambda}{(-2)^{k+2}.(k+2)!}$ avec $\lambda = 8.(s_1 - s_0)$.
II~6) Déduisez pour tout n : $s_n = s_0 + \lambda.\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!}.\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{k+1}$.
II~7) Calculez s_0 et λ dans le cas des deux suites (p_n) et (q_n) définies plus haut.

II~8) Déduisez pour tout n : $\dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{1-2.L_n}{L_n - 1}$ avec $\boxed{L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!}.\Big(-\frac{1}{2}\Big)^i}$

Rappel : $0! = 1$ et $(n+1)! = (n+1).n!$.

Des matrices pour aller un peu plus loin.

III~0) Pour tout n, on définit $H_n = \begin{pmatrix} 0 & 2.n \\ 1 & 2.n+1 \end{pmatrix}$ et $P_n = H_1 \times H_2 \times H_3 \times \ldots \times H_n$ (attention, le produit matriciel n'est pas commutatif). Calculez P_n pour n de 1 à 3.
III~1) Montrez pour tout n : $P_n = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}$.

Etude de la suite (L_n).

IV~0) Calculez L_n pour n de 0 à 3. Montrez que la suite (L_n) n'est ni croissante, ni décroissante.
IV~1) Montrez $L_{2.n+2} - L_{2.n} = \dfrac{4.n+5}{(2.n+3)!.2^{2.n+3}}$. Déduisez que $(L_{2.n})$ est croissante et montrez que que $(L_{2.n+1})$ est décroissante.

V~0) n est un entier naturel donné. On définit l'application F_n. Calculez $F_n(0)$ et $F_n(1)$.

$$F_n = t \longmapsto e^{-t/2} + \frac{(t-1)}{2.1!}.e^{-t/2} + \frac{(t-1)^2}{2^2.2!}.e^{-t/2} + \frac{(t-1)^3}{2^3.3!}.e^{-t/2} + \ldots + \frac{(t-1)^{n+1}}{2^{n+1}.(n+1)!}.e^{-t/2}$$

V~1) Rappelez la formule pour la dérivée du produit de deux fonctions dérivables. Montrez qu'après simplification $(F_n)'$ ne contient qu'un terme.
V~2) Déduisez : $L_n = \dfrac{1}{\sqrt{e}} - \Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^{n+2}.\dfrac{1}{(n+1)!}.\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n+1}.e^{-t/2}.dt$ puis

$$\Big|L_n - \frac{1}{\sqrt{e}}\Big| \leqslant \frac{1}{2^{n+2}.(n+1)!}.\int_0^1 (1-t)^{n+1}.e^{-t/2}.dt \leqslant \frac{1}{2^{n+2}.(n+1)!}.\int_0^1 (1-t)^{n+1}.dt = \frac{1}{2^{n+2}.(n+2)!}$$

V~3) Déduisez que la suite (L_n) converge et donnez sa limite.

Un peu de produit matriciel.

VI~0) Pour tout entier naturel n, on pose $h_n = t \longmapsto \dfrac{2.n}{2.n+1+t}$ et $H_n = \begin{pmatrix} 0 & 2.n \\ 1 & 2.n+1 \end{pmatrix}$.

Justifiez : $h_1(h_2(h_3(\ldots h_n(t))\ldots)) = \cfrac{2}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{6}{7 + \cfrac{\ldots}{\cfrac{2.n}{2.n+1+t}}}}}$.

VI~1) On appelle homographie toute application de la forme $h = t \longmapsto \dfrac{a.t+b}{c.t+d}$. Montrez que la composée de deux homographies est encore une homographie. On pourra poser $\gamma = t \longmapsto \dfrac{\alpha.t+\beta}{\gamma.t+\delta}$ et expliciter $h \circ \gamma = (t \longmapsto h(\gamma(t)))$.

VI∼2) Justifiez alors $h_1 \circ h_2 \circ \ldots \circ h_n = t \longmapsto \dfrac{p_{n-1}.t + p_n}{q_{n-1}.t + q_n}$.

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24
.	Allez, on termine.	.

VII∼0) Mettez bout à bout tous les résultats de ce devoir pour arriver à

$$1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{6}{7 + \cfrac{\ldots}{\cfrac{2.n}{2.n+1}}}}} \longrightarrow_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{e} - 1}$$

Démonstration mise en forme par René Adad, prof de MPSI à Marseille, site Maths-OS.

♣ 0 ♣ Même si ça n'a pas de rapport direct avec notre problème, on définit $r = t \longmapsto \dfrac{t.\cos(\pi/7) - \sin(\pi/7)}{t.\sin(\pi/7) + \cos(\pi/7)}$. Montrez $r \circ r \circ r \circ r \circ r \circ r \circ r = Id$ (application identité $t \longmapsto t$). Votre démonstration pourra utiliser certains éléments démontrés ci-dessus.

Rappel $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ et plus généralement $\sum_{i=p}^{q} b_i = b_p + b_{p+1} + b_{p+2} + \ldots + b_q$ (avec $q - p + 1$ termes).

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.\alpha + b.\gamma & a.\beta + b.\delta \\ c.\alpha + d.\gamma & c.\beta + d.\delta \end{pmatrix}$$

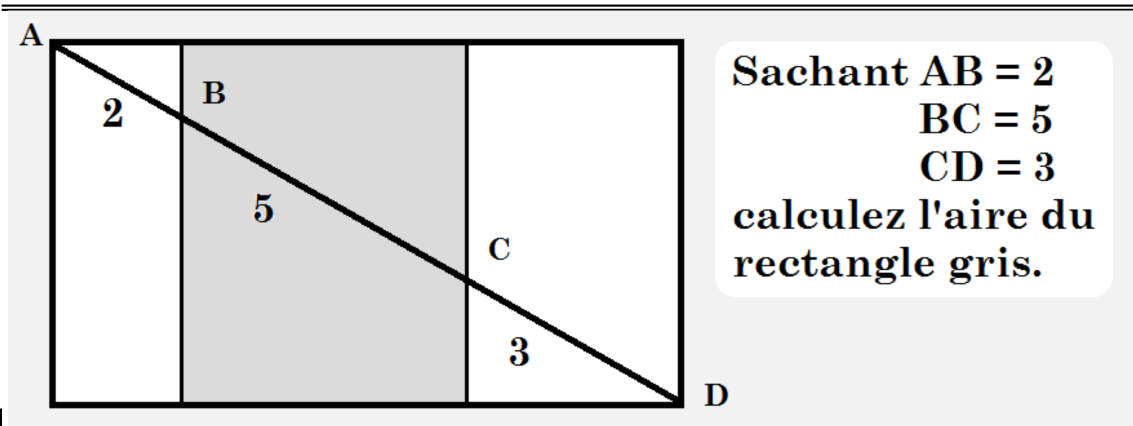
$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha & \bigcirc \\ \gamma & \bigcirc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.\alpha + b.\gamma & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \bigcirc & \beta \\ \bigcirc & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigcirc & a.\beta + b.\delta \\ \bigcirc & \bigcirc \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bigcirc & \bigcirc \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha & \bigcirc \\ \gamma & \bigcirc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigcirc & \bigcirc \\ c.\alpha + d.\gamma & \bigcirc \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \bigcirc & \bigcirc \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \bigcirc & \beta \\ \bigcirc & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & c.\beta + d.\delta \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 21 & 33 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 1 \\ 14 & -2 \end{pmatrix}$$

$\cos(\pi/12) = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ (et on s'en fout),
$\cos(\pi/7) \simeq 0,901$ à 10^{-3} près (mais évidemment, ça ne sert à rien, on est en maths).



◁ 33 ▷