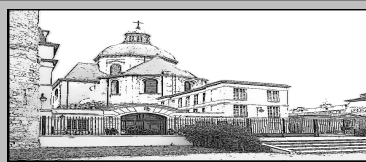


LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 6 septembre
M.P.S.I.2



2024

2025

TD00

◀0▶ ♡ On a un jeu de cartes. Chaque carte a un chiffre sur une face, une lettre sur l'autre. On aligne devant vous quatre cartes dont les faces visibles sont **A** **7** **4** **B**. On vous dit "quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre". Quelles cartes retournez vous pour vous assurer que l'affirmation est correcte ?

On a quatre cartes avec une face visible chacune : **A** **7** **4** **B**

On a une affirmation à valider ou invalider : "quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre".

Bien évidemment, on doit retourner **4** pour voir si il y a bien une voyelle sur l'autre face.

Il est inutile de retourner **7** puisque rien ne parle des cartes ayant une face impaire.

Il est inutile de retourner **A** en effet, si on trouve un nombre pair, on sera content, mais si on trouve un nombre impair, ça ne prouvera rien puisque personne n'a parlé de ce qu'il devait y avoir derrière une nombre impair.

En revanche, il faut retourner **B** et si l'on trouve un nombre pair de l'autre côté, on aura un contre-exemple à l'affirmation "quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre".

En termes de logique pure, la phrase est "pair \Rightarrow voyelle". Il faut donc vérifier le dos des faces paires.

Mais c'est aussi sa contraposée "consonne \Rightarrow impair". Il faut donc vérifier au dos des consonnes.

Que penser de l'élève qui me dira "je retourne toutes les cartes", et tant pis si j'en ai retourné trop ; l'énoncé ne me demandait pas de minimiser".

Même question sur les retournements si l'affirmation est "il y a un nombre pair sur une face si et seulement si il y a une voyelle sur l'autre".

Cette fois, c'est une équivalence. Il faut retourner toutes les cartes.

Cette fois, les cartes peuvent avoir deux lettres. Ou deux chiffres. Ou une lettre et un chiffre. On voit les mêmes quatre faces, et l'affirmation à vérifier est encore "quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre". Que retournez vous ?

Pour finir, les cartes peuvent avoir deux lettres. Ou une lettre et un chiffre. Mais pas deux chiffres. On voit les mêmes quatre faces, et l'affirmation à vérifier est encore "quand il y a un nombre pair sur une face, il y a une voyelle sur l'autre". Que retournez vous ?

◀1▶ Résolvez l'équation $n! = 6.(k!)$ d'inconnues n et k dans \mathbb{N} .

L'application factorielle étant croissante, il faut que n soit plus grand que k (strictement).

En simplifiant alors par $k!$ il reste $(k+1).(k+2) \dots n = 6$.

Mais 6 n'a que peu de facteurs. Et de surcroit consécutifs : 1.2.3 ou juste 2.3 ou même 6 en une seule fois.

La première solution donne $3! = 6.(0!)$.

La deuxième solution donne $3! = 6.(1!)$.

La troisième possibilité : $k+1 = n = 6$ donne $6! = 6.(5!)$.

Pour conclure proprement : $S_{(k,n)} = \{(0,3), (1,3), (5,6)\}$

◀2▶ ♡ Prouvez que $1.3.5.7 \dots (2.n-1)$ (produit de n entiers impairs) est égal à $\frac{(2.n)!}{2^n.n!}$.

On peut faire une récurrence sur n .

Initialisation : $1 = \frac{(2.0)!}{2^0.0!}$ et même $1 = \frac{(2.0)!}{2^0.0!}$

Hérédité : on se donne un entier n quelconque. On suppose $1.3.5.7 \dots (2.n - 1) = \frac{(2.n)!}{2^n.n!}$.

On veut passer au rang suivant. Regardons ce qu'il advient du premier membre. Il a un entier de plus : on étudie $1.3.5.7 \dots (2.n - 1).(2.n + 1)$
on remplace :

$$1.3.5.7 \dots (2.n - 1).(2.n + 1) = \frac{(2.n)!}{2^n.n!} \cdot (2.n + 1)$$

par hypothèse de récurrence

On étudie ensuite le second membre au rang $n + 1$:

$$\frac{(2.(n + 1))!}{2^{n+1} \cdot (n + 1)!} = \frac{(2.n)! \cdot (2.n + 1) \cdot (2.n + 2)}{2^n \cdot 2.n! \cdot (n + 1)} = \frac{(2.n)! \cdot (2.n + 1)}{2^n \cdot n!}$$

en simplifiant par $2.n + 2$.

$$\text{On a donc bien } 1.3.5.7 \dots (2.n - 1).(2.n + 1) = \frac{(2.n)!}{2^n.n!} \cdot (2.n + 1) = \frac{(2.(n + 1))!}{2^{n+1} \cdot (n + 1)!}$$

Et la récurrence s'achève.

On peut aussi se lancer dans une preuve directe.

On part du produit des entiers impairs et on glisse le produit des entiers pairs :

numérateur	1	×2	×3	×4	×5	×6	×7	...	×(2.n + 1)	×(2.n)
dénominateur		2		×4		×6		...		×(2.n)

Le numérateur est devenu $(2.n)!$.

Et chaque terme du dénominateur donne un 2 :

numérateur	1	×2	×3	×4	×5	×6	×7	...	×(2.n + 1)	×(2.n)
dénominateur		2 × 1		×2 × 2		×2 × 3		...		×2 × n

Le dénominateur est fait de n facteurs 2 et du produit $1 \times 2 \times 3 \times n$. C'est donc bien $2^n \cdot n!$.

Et pour le faire avec rigueur ?

Partons de $(2.n)!$, produit de tous les entiers. Séparons en fonction de leur parité :

$$(2.n)! = \prod_{i=1}^{2.n} i = \left(\prod_{\substack{1 \leq i \leq 2.n \\ i \text{ pair}}} i \right) \cdot \left(\prod_{\substack{1 \leq i \leq 2.n \\ i \text{ impair}}} i \right)$$

Écrivons les $2.k$ ou $2.k + 1$ avec k n'allant pas trop loin.

$$(2.n)! = \left(\prod_{k=1}^n (2.k) \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^n (2.k - 1) \right)$$

Factorisons un peu les 2 comme tout à l'heure :

$$(2.n)! = \left(\prod_{k=1}^n 2 \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^n k \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^n (2.k - 1) \right)$$

Reconnaissons des choses :

$$(2.n)! = (2^n) \cdot (n!) \cdot \left(\prod_{k=1}^n (2.k - 1) \right)$$

Il ne reste qu'à diviser.

Quelle est pour vous la meilleure des trois démonstration ?

◀3▶

♡ a, b et c sont entre 0 et $\pi/2$ et vérifient $\cos(a) = 0,4$, $\sin(b) = 0,8$ et $\tan(c) = 1,3$. Classez a, b et c par ordre croissant. (là encore, si votre preuve repose sur les valeurs approchées de la calculatrice, vous vous êtes trompé de salle ; ce ne peut être qu'une aide, mais pas une preuve).

Pour trier ces nombres, il suffit de trier leurs tangentes. En effet, par croissance de l'application tangente sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$,

si on arrive à $\tan(a) > \tan(b) > \tan(c)$ on déduira $a > b > c$.

Vu l'intervalle sur lequel on est, on va calculer les sinus et cosinus par la formule de Pythagore : $\sin(a) = \sqrt{1 - \cos^2(a)}$ (pas de signe moins, sinus et cosinus sont positifs).

Reste ensuite à calculer les tangentes. On résume tout dans un tableau :

données			
	a	b	c
sin		0,8	
cos	0,4		
tan			1,3

Et on calcule donc, en gardant si possible des dénominateurs lisibles :

Pythagore			
	a	b	c
sin	$\frac{\sqrt{84}}{10}$	$\frac{8}{10}$	
cos	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	
tan	$\frac{\sqrt{84}}{4}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{13}{10}$

Pour simplifier et bien trier, on regarde même les carrés de tangentes :

Pythagore			
	a	b	c
\tan^2	$\frac{21}{4} = \frac{4725}{900}$	$\frac{16}{9} = \frac{1600}{900}$	$\frac{169}{100} = \frac{1521}{900}$

On a donc $(a > b > c)$

◀4▶

♥ Ajustez $(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3)$ pour avoir

$$(t \mapsto a_1 \cdot t \cdot \ln(t) + b_1 \cdot t)' = \ln \quad (t \mapsto a_2 \cdot t^2 \cdot \ln(t) + b_2 \cdot t^2)'' = \ln \quad (t \mapsto a_3 \cdot t^3 \cdot \ln(t) + b_3 \cdot t^3)^{(3)} = \ln$$

$$(t \mapsto t \cdot \ln(t) - t)' = \ln \quad (t \mapsto \frac{t^2 \cdot \ln(t)}{2} - \frac{3 \cdot t^2}{4})'' = \ln \quad (t \mapsto \frac{t^3 \cdot \ln(t)}{6} - \frac{11 \cdot t^3}{36})^{(3)} = \ln$$

Tout ce qu'on a besoin de faire, c'est de dériver justement par exemple deux fois $t \mapsto a \cdot t^2 \cdot \ln(t) + b \cdot t^2$

$$\text{en } t \mapsto 2 \cdot a \cdot t \cdot \ln(t) + a \cdot t^2 \cdot \frac{1}{t} + 2 \cdot b \cdot t$$

$$\text{puis } t \mapsto 2 \cdot a \cdot \ln(t) + 3 \cdot a + 2 \cdot b.$$

Et surtout, ensuite, il faut réagir en matheuse...

Le sens pertinent pour l'exercice est $((t \mapsto a_2 \cdot t^2 \cdot \ln(t) + b_2 \cdot t^2)'' = \ln) \Leftrightarrow (2 \cdot a = 1 \text{ et } 3 \cdot a + 2 \cdot b = 0)$.

Certes, l'implication $((t \mapsto a \cdot t^2 \cdot \ln(t) + b \cdot t^2 + c \cdot e^t)'' = \ln) \Rightarrow (2 \cdot a = 1 \text{ et } 3 \cdot a + 2 \cdot b = 0)$ est ici correcte aussi (de fait, on a une équivalence), mais elle n'apporte rien à notre exercice.

Tenez : $((t \mapsto a \cdot t^2 \cdot \ln(t) + b \cdot t^2 + c \cdot e^t)'' = \ln) \Rightarrow (2 \cdot a = 1 \text{ et } 3 \cdot a + 2 \cdot b = 0)$ est vrai. En effet, il est nécessaire d'avoir $2 \cdot a = 1$ et $3 \cdot a + 2 \cdot b = 0$ mais ça ne suffit pas. Il faut aussi avoir $c = 0$, non ?

◀5▶

♥ Résolvez l'équation $(n!)^2 \geq (2 \cdot n)!$ d'inconnue entière n .

Au fait, n pourrait être autre chose qu'un entier ?

Quitte à simplifier par $n!$ non nul (et même positif), ceci revient à demander : $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \geq (n+1) \dots (n+1)$.

Ou plus proprement $\prod_{k=1}^n k \geq \prod_{k=1}^n (n+k)$.

Or, comme n est entier, chaque $n+k$ dépasse chaque k . Terme à terme, on a donc pour tout n : $\prod_{k=1}^n k \leq \prod_{k=1}^n (n+k)$.

La seule façon de s'en sortir est d'avoir égalité, avec $n = 0$.

Et en effet : $S_n = \{0\}$, avec $(0!)^2 \geq (2 \cdot 0)!$. Et sinon, $(1!)^2 < (2 \cdot 1)!$ et ainsi de suite.

On pouvait aussi passer au quotient (tout est positif). L'équation $(n!)^2 \geq (2.n)!$ devient $\frac{(2.n)!}{n!.n!} \leq 1$. Et avec de l'habitude, on reconnaît un coefficient binomial : $\binom{2.n}{n} \leq 1$. Or, un coefficient binomial est un entier naturel. La seule solution est qu'il vaille 1 et ce n'est le cas que pour $n = 0$.

Résolvez l'équation $(n!)^3 \geq (2.n)!$ d'inconnue entière n .

Cette fois, on veut $\prod_{k=1}^n k^2 \geq \prod_{k=1}^n (n+k)$. Le carré nous laisse un peu de marge ?

Ça marche pour 0.

Mais pour 1 c'est déjà raté. Encore pire pour 2 et ainsi de suite.

En fait la seule solution est 0.

Prouvons le. On a initialisé. Mais l'hérédité ne semble pas bien passer.

Et même, elle ne passe pas.

Et si on regarde plus en détails :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$(n!)^3$	1	1	8	216	13824	1728000	373248000	128024064000	65548320768000
$(2.n)!$	1	2	24	720	40320	3628800	479001600	87178291200	20922789888000
équation	True	False	False	False	False	False	False	True	True

Et en fait, à partir de 7, le basculement se fait.

Et il se conserve.

Le tableau laborieux ci dessus indique que l'inéquation $(n!)^3 \geq (2.n)!$ pour n égal à 7.

Prenons un entier n quelconque et supposons $(n!)^3 \geq (2.n)!$.

On veut établir $((n+1)!)^3 \geq (2.(n+1))!$.

Comment a évolué le premier membre : $((n+1)!)^3 = (n!)^3 \cdot (n+1)^3$

le second membre : $(2.(n+1))! = (2.n)! \cdot (2.n+1) \cdot (2.n+2)$

Il suffit donc d'écrire deux inégalités entre réels positifs :

$(n!)^3 \geq (2.n)!$	hypothèse de rang n
$(n+1)^3 \geq (2.n+1) \cdot (2.n+2)$	vrai pour $n \geq 3$

On multiplie membre à membre et c'est fini.

«6» Une comptine enfantine dit (ou plutôt chante) : "Promenons nous dans les bois, pendant que le loup n'y est pas ; si le loup y était, il nous mangerait, mais comme il n'y est pas, il ne nous mangera pas". Commentez d'un point de vue logique.

L'implication énoncée est « il y est implique il nous mange » (forme $p \Rightarrow q$)

Au mieux, par contraposée, on peut déduire : « il ne nous mange pas implique il n'y est pas » (forme $\text{non}(q) \Rightarrow \text{non}(p)$)

Mais ceci ne nous renseigne pas sur « il n'y est pas implique il ne nous mange pas » (forme $\text{non}(p) \Rightarrow \text{non}(q)$).

La seule obligation pour le loup est en cas de présence, il doit nous manger.

Le loup absent a le droit de quand même nous manger. Même si la chose semble physiquement peu cohérente.

En fait, la comptine énonce deux résultats sans rapports entre eux : « il y est implique il nous mange »
« il n'y est pas implique il ne nous mange pas »

«7» On définit $f = x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$ et $g = x \mapsto |x| - 1$.

Résolvez $f(x) \geq 0$ | $f(g(x)) \geq 0$ | $g(f(x)) \geq 0$ | $f(f(x)) \geq 0$ | $g(g(x)) \geq 0$ d'inconnue réelle x .

$f(x) \geq 0$ | $\frac{x+1}{x-2} \geq 0$ | exclure 2 | tableau de signes | $] - \infty, -1[\cup]2, +\infty[$

Le tableau de signes, c'est bien pour les produits, mais aussi pour les quotients !

$f(g(x)) \geq 0$ | $\frac{|x|-1+1}{|x|-1-2} \geq 0$ | $|x|-3 > 0$ | $] - \infty, -3[\cup]3, +\infty[$

Une valeur absolue est toujours positive. On regarde donc juste le signe du dénominateur (jamais nul !).

$g(f(x)) \geq 0$ | $\left| \frac{x+1}{x-2} \right| \geq 1$ | $|x+1| \geq |x-2|$

On peut faire le produit en croix sans changer le sens, mais ensuite, il faut distinguer les cas.

On trouve $[1/2, +\infty[$

$f(f(x)) \geq 0$	$\frac{2x-1}{-x+5} \geq 0$	tableau de signes	$[1/2, 5[$
------------------	----------------------------	-------------------	------------

On a composé f avec elle-même en calculant $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

$g(g(x)) \geq 0$	$ x - 1 \geq 1$	sur \mathbb{R}^+ : $ x-1 \geq 1$	$\mathbb{R}^+ -]0, 2[$] $-\infty, -2] \cup \{0\} \cup [2, +\infty[$
		sur \mathbb{R}^- : $ x+1 \geq 1$	$\mathbb{R}^- -]-2, 0[$	

◀8▷ \heartsuit Calculez module et argument de $(2+i)^{10} \cdot (3+i)^{10}$.

Déjà $(2+i)^{10} \cdot (3+i)^{10} = ((2+i) \cdot (3+i))^{10} = (5+5i)^{10}$

On écrit alors $5+5i = 5 \cdot (1+i) = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right) = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$.

On élève à la puissance 10 : le module est élevé à la puissance 10

l'argument est multiplié par 10

(généralisation de $|a \times b| = |a| \times |b|$)

$$\text{Arg}(a \times b) = \text{Arg}(a) + \text{Arg}(b) [2\pi]$$

$(2+i)^{10} \cdot (3+i)^{10}$ a pour module $5^{10} \cdot 2^5$ et pour argument $10 \cdot \frac{\pi}{4}$ (on réduit à $\frac{\pi}{2}$).

C'est $312500000 \cdot i$.

◀9▷ \heartsuit On définit $y = \log_a(x)$ (logarithme de base a) par $a^y = x$. Montrez : $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$.

Justifiez $\log_2(125) < 7$.

Le physicien dit « j'ai appris par cœur : $\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$ (quotient de deux logarithmes népériens¹).

On a alors $\log_a(b) \cdot \log_b(a) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} \cdot \frac{\ln(a)}{\ln(b)} = 1$.

L'élève de Prépas retrouve $\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$ en repartant de $a^y = b$.

Il passe au logarithme usuel : $\ln(a^y) = \ln(b)$.

Il utilise une propriété du logarithme : $y \cdot \ln(a) = \ln(b)$.

Il divise par $\ln(a)$ non nul : $y = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$.

En ayant toujours ce petit raisonnement en tête, il retrouve toujours la formule sans perte de temps et sans ambiguïté, et aussi sans encombrer son cerveau de formules pas forcément comprises ou mal assimilées. Retenir le chemin en plus de la destination permet de mieux voir où on est et où on va.

L'élève de pur esprit matheux qui abuse² pose : $y = \log_a(b)$ et $x = \log_b(a)$.

Il traduit : $a^y = b$ et $b^x = a$.

Il reporte : $a^y = b$ et $(a^y)^x = a$.

Il simplifie : $a^y = b$ et $a^{x \cdot y} = a$.

Dans la seconde, il identifie que $x \cdot y$ vaut nécessairement 1.

Il a donc $x \cdot y = 1$ c'est à dire $\log_a(b) \cdot \log_b(a) = 1$.

On ne connaît pas $\log_2(3)$ ni $\log_3(2)$ mais on sait qu'ils sont inverse l'un de l'autre.

On sait aussi que $\log_2(3)$ est entre $\log_2(2)$ et $\log_2(4)$ c'est à dire entre 1 et 2.

On veut montrer $\log_2(125) < 7$ autrement que par « c'est 6,9657 et des poussières ».

Posons $y = \log_2(125)$. On a donc $2^y = 125$.

Et on sait aussi $2^7 = 128$ (qui n'a jamais compté 2,4, 8, 16, 32, 64, 128 et ainsi de suite, en jouant sur son smartphone à 2048 ?).

On a donc $2^y < 2^7$, d'où par croissance de l'exponentielle de base 2 : $y < 7$.

1. ce qui explique que a ne peut valoir 1, et logiquement, il n'y a pas de logarithme de base 1, ni de logarithme de base négative
2. celui qui dit « pourquoi je retiendrais ça, je peux le retrouver sans effort »

<10>

♠ Le critère de divisibilité par 7 est le suivant :

« pour savoir si un nombre donné est divisible par 7, efface le chiffre, soustrais le double du chiffre des unités ; ton nombre initial est multiple de 7 si et seulement si l'entier obtenu est multiple de 7 »

Par exemple partant de 456239, on construit $45623 - 2 \cdot 9$ qui vaut 45605.

Tiens, d'ailleurs, plutôt que 45605, regardons $4560 - 2 \cdot 5$ (qui vaut 4550).

Et pour 4550, on va regarder $455 - 2 \cdot 0$. Et ensuite $45 - 2 \cdot 5$.

Comme 35 est multiple de 7, tous les entiers concernées sont multiples de 7.

Justifiez la validité de ce test.

Appliquez le pour trouver le chiffre qui manque pour faire de 1#4321765 soit un multiple de 7, sans poser la division.

On part donc d'un nombre N qui s'écrit « un entier a suivi d'un chiffre b ».

C'est quoi « un entier a suivi du chiffre b » ? C'est $10 \cdot a + b$.

On a donc $n = 10 \cdot a + b$.

Et on construit « l'entier moins de double du chiffre », c'est à dire $n' = a - 2 \cdot b$.

L'histoire est « n est multiple de 7 si et seulement si n' est multiple de 7 ».

Premier sens.

On suppose que n est multiple de 7. On veut montrer que n' l'est aussi.

On traduit : $10 \cdot a + b$ est multiple de 7.

On multiplie par 5 : $50 \cdot a + 5 \cdot b$ est multiple de 7.

On enlève $49 \cdot a$ qui est assurément multiple de 7 : $a + 5 \cdot b$ est multiple de 7.

On soustrait $7 \cdot b$ qui est multiple de 7 : $a - 2 \cdot b$ est multiple de 7. C'est lui n' . Gagné.

Second sens.

On suppose que n' est un multiple de 7.

On traduit : $a - 2 \cdot b$ est multiple de 7.

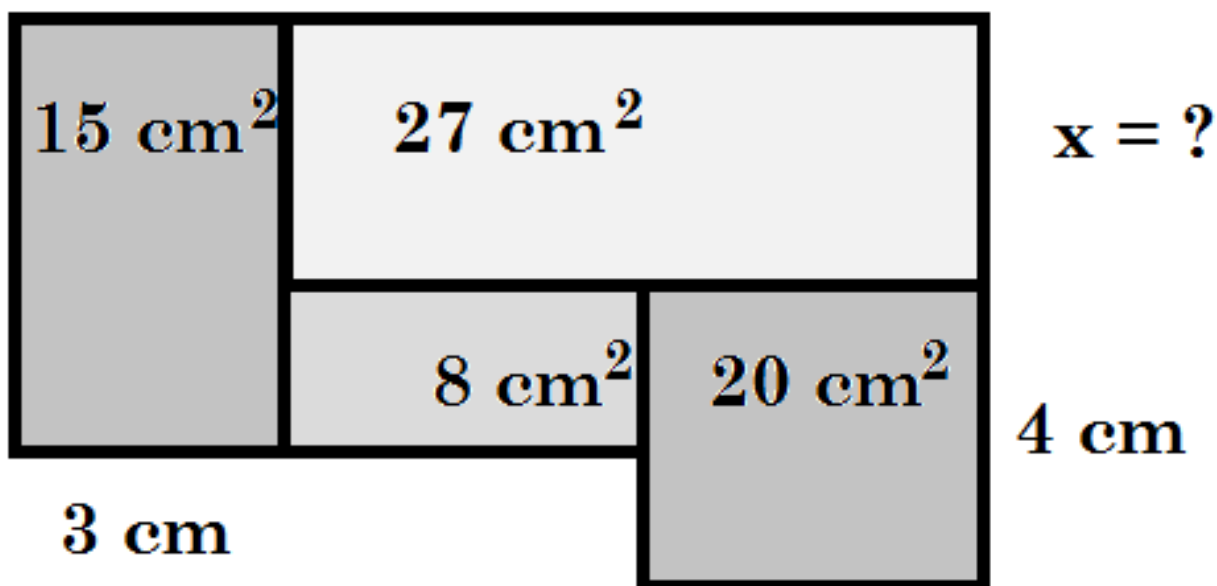
On multiplie par 10 : $10 \cdot a - 20 \cdot b$ est multiple de 7.

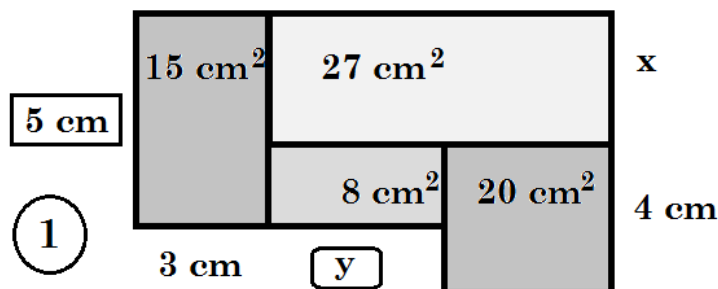
On ajoute $21 \cdot b$ qui est multiple de 7 par construction : $10 \cdot a + b$ est multiple de 7.

On a passé notre temps à utiliser que l'ensemble des multiples de 7 est stable par addition. Et que certains nombres sont multiples évidents de 7.

Et on n'a pas écrit partout des $7 \cdot k$ qui ne sont pas des maths... Surtout si k n'est pas quantifié.

<11>





On détermine la longueur 5 cm des deux triangles sombres par simple division.
On nomme y la longueur qui manque.

Réponse : $x = 3$

3

On a un petit système :

$$(5 - x) \cdot y = 8$$

$$x \cdot (y + 5) = 27$$

2

On somme :

$$5 \cdot y - x \cdot y + x \cdot y + 5 \cdot x = 35$$

On simplifie :

$$x + y = 7.$$

On reporte dans deuxième :

$$x \cdot (7 - x + 5) = 27$$

On résout : $x = 3$ ou $x = 9$.

Comme indiqué, on calcule deux longueurs par une formule comme $a \cdot 3 = 15$.

On nomme une longueur utile (nommer les objets que l'on ne connaît pas c'est une étape de l'intelligence).

On mesure les aires des deux autres rectangles.

On a un petit système qu'il suffit alors de résoudre.

On finit avec une équation du second degré.

Elle admet certes deux solutions, mais une seule est cohérente (la solution $x = 9$ conduit à y négatif).

◀12▶ Peut-on choisir b réel pour que $(1 + i \cdot b)^5$ soit un imaginaire pur ?

Oui.

Il suffit par exemple que l'argument de $1 + i \cdot b$ soit $\frac{\pi}{10}$.

C'est jouable avec justement $\tan(\pi/10)$.

$$\text{On a en effet : } 1 + i \cdot \tan(\pi/10) = 1 + i \cdot \frac{\sin(\pi/10)}{\cos(\pi/10)} = \frac{\cos(\pi/10) + i \cdot \sin(\pi/10)}{\cos(\pi/10)} = \frac{e^{i \cdot \pi/10}}{\cos(\pi/10)}$$

$$\text{On élève à la puissance 5 : } (1 + i \cdot b)^5 = \left(\frac{e^{i \cdot \pi/10}}{\cos(\pi/10)} \right)^5 = \frac{e^{5 \cdot i \cdot \frac{\pi}{10}}}{(\cos(\pi/10))^5} = \frac{e^{i \cdot \pi/2}}{(\cos(\pi/10))^5} = \frac{i}{(\cos(\pi/10))^5}.$$

Que demande le peuple ? Imaginaire pur au pouvoir.

◀13▶ Résolvez $\int_0^{\ln(7)} \frac{e^x}{a + e^x} dx = \ln(3)$ d'inconnue a réelle (trouvez la forme en $\frac{u'}{u}$ cachée).

Souhaitons de tout cœur que a soit positive pour ne pas avoir de dénominateur nul.

$$\text{L'équation devient vite } \ln\left(\frac{a + e^{\ln(7)}}{a + e^0}\right) = \ln(3).$$

$$\text{Par injectivité du logarithme } \frac{a + 7}{a + 1} = 3.$$

On résout par produit en croix : $a + 7 = 3 \cdot a + 3$. La solution unique est $a = 2$

◀14▶ ♣ Sachant $x^3 + 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x = 1$, saurez-vous prouver $\sqrt[3]{x} + \sqrt[2]{x} = 1$?

Première approche.

On trace le graphe de $x \mapsto x^3 + 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x$ (dérivée $x \mapsto 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 5$ toujours positive).

L'équation donne une unique racine positive. On en calcule une valeur approchée : $x \simeq 0.185$ à 10^{-3} près.

On calcule alors une valeur approchée de $x^{1/3} + x^{1/2}$ et on jubile.

Mais peut être que la valeur trouvée n'est pas égale à 1, mais presque égale à 1. Et en maths, ça fait toute la différence, ce « presque ».

Deuxième approche.

Qui est la quantité importante ? C'est x ? Mais ensuite on a besoin de $x^{1/3}$ et de $x^{1/2}$.

Et connaître une formule pour x déjà moche avec des racines cubiques et des racines carrées (si si, ce sera la formule de Cardan) ne nous permet pas de simplifier ensuite \sqrt{x} .

La quantité en jeu est donc plutôt $x^{1/6}$.

On va la noter a .

Les données sont alors $(a^6)^3 + 2.(a^6)^2 + 5.a^6 = 1$ et on doit prouver $a^2 + a^3 = 1$.

◀15▶ Sachant $x^2 + 1 = 3.x$, montrez : $\frac{x^4}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{4.x^3}{x^4 + x^2 + 1} = -\frac{1}{6}$. Une solution peut consister à calculer x (deux choix), puis à reporter ; vous vous doutez que ce n'est a priori pas la démarche du matheux.

La démarche du physicien consistera donc à assez juste titre à trouver $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ (ou $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$).

Il reporte alors petit à petit : $x^2 = \frac{9 + 5 + 6.\sqrt{5}}{4} = \frac{7 + 3.\sqrt{5}}{2}$ puis de la même façon $x^4 = \frac{47 + 21.\sqrt{5}}{2}$ et même $x^4 - x^2 + 1 = 21 + 9.\sqrt{5}$.

On continue avec une bonne vieille quantité conjuguée

$$\frac{x^4}{x^4 - x^2 + 1} = \frac{47 + 21.\sqrt{5}}{42 + 18.\sqrt{5}} = \frac{(47 + 21.\sqrt{5}).(42 - 18.\sqrt{5})}{42 - 18^2.5} = \dots = \frac{7 + 3.\sqrt{5}}{12}$$

On fait de même avec l'autre terme, et on arrive à la fin des $\sqrt{3}$.

On peut alors se féliciter d'avoir conduit proprement et efficacement un calcul.

On doit alors se dire qu'il reste le cas $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ à traiter.

On recommence les calculs, et tout ce qui change est le signe devant les $\sqrt{5}$. Le résultat est le même à la fin, car les $\sqrt{5}$ disparaissent.

Peut on parler de conjugaison, comme avec $\bar{z} = x - i.y$? Oui.

On peut aussi poser $x = \frac{3 + \varepsilon.\sqrt{5}}{2}$ avec ε qui à la fin vaut 1 ou -1 , histoire de mener les deux calculs en une seule fois.

Mais le matheux ne considère pas x pour ce qu'il vaut mais pour les propriétés qu'il a. C'est ça les maths.

Il sait donc $x^2 = 3.x - 1$ et c'est bien mieux que des trucs avec des racines.

En effet, on peut alors élever au carré et remplacer

$$x^4 = (x^2)^2 = (3.x - 1)^2 = 9.x^2 - 6.x + 1 = 9.(3.x - 1) - 6.x + 1 = 21.x - 8$$

On poursuit :

$$\frac{x^4}{x^4 - x^2 + 1} = \frac{21.x - 8}{18.x - 6}$$

On fait de même pour l'autre terme sachant

$$x^3 = x^2.x = (3.x - 1).x = 3.x^2 - x = 3.(3.x - 1) - x = 8.x - 3$$

on a donc

$$\frac{4.x^3}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{32.x - 12}{24.x - 8}$$

On réunit les deux termes en réduisant au dénominateur commun

$$\frac{x^4}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{4.x^3}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{(21.x - 8).(24.x - 8) - (32.x - 12).(18.x - 6)}{(18.x - 6).(24.x - 8)}$$

On développe, on remplace encore les x^2 par $3.x - 1$ et à la fin il ne reste que $-1/6$.

Et même, si l'objectif nous est donné, on vérifie si on a bien

$$(21.x - 8).(24.x - 8) - (32.x - 12).(18.x - 6) = -\frac{(18.x - 6).(24.x - 8)}{6}$$

ce qui nous épargne des facteurs 2 et des facteurs 3.

Et je suis presque sûr qu'il doit y avoir encore plus efficace.

◀16▶ a, b et c sont les trois longueurs des côtés d'un triangle. On pose alors : $x = a + b - c$, $y = a - b + c$ et $z = -a + b + c$. Montrez qu'ils sont tous positifs.
Montrez pour α et β positifs : $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$.
En l'appliquant à x et y puis x et z puis y et z , déduisez : $a.b.c \geq (a + b - c).(a - b + c).(-a + b + c)$.

Quitte à noter A, B et C les sommets du triangle et à poser $\boxed{AB = c \quad BC = a \quad CA = b}$, on doit prouver $a + b \geq c$ par exemple.

Ceci se ramène à $AB \leq AC + CB$. C'est ce qu'on appelle inégalité triangulaire (on va plus vite de A à B en ligne droite qu'en passant par C).

On note ici l'intérêt qu'il y a eu à introduire des notations en plus.

Pour prouver $\sqrt{\alpha\beta} \leq \alpha + \beta$ (qui reviendra souvent cette année), on lit une indication plus loin dans le devoir : $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2$.

Ce nombre est un carré de réel ; il est positif.

Ce nombre se développe en $\alpha - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \beta$.

On a donc $\alpha - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \beta \geq 0$.

On fait passer de l'autre côté : $\alpha - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$.

Cette formule est un classique, on l'appelle comparaison des moyennes, et on se souvient de sa démonstration...

Puisque l'on nous dit de l'écrire pour quelques couples, on le fait :

$$2\sqrt{x.y} \leq x + y = a + b - c + a - b + c = 2.a$$

$$2\sqrt{y.z} \leq y + z = a - b + c - a + b + c = 2.c$$

$$2\sqrt{z.x} \leq z + x = -a + b + c + a + b - c = 2.b$$

On multiplie terme à terme ces inégalités entre réels positifs :

$$8.\sqrt{x.y.z.z.x} \leq 2.a.2.c.2.b$$

On simplifie par 8 sans changer le sens des inégalités : $\sqrt{x^2.y^2.z^2} \leq a.b.c$.

C'est ce qui était attendu.

Extrait d'un sujet d'Olympiade ou de truc de ce genre. Simple question : qui d'entre vous y serait parvenu sans les questions intermédiaires. Et même avec...

◀17▶ ♡ On pose $f = x \mapsto \frac{a.x + b}{c.x + d}$ et $g = x \mapsto \frac{\alpha.x + \beta}{\gamma.x + \delta}$, puis $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.
Comparez le calcul de $f \circ g$ et de $M.N$.
On pose $h = x \mapsto \frac{2.x - 1}{x + 1}$. Déterminez rapidement $h \circ h \circ h \dots \circ h$ (11 termes h , le résultat contiendra de grands nombres, dommage).

$f \circ g$ est l'application $x \mapsto f(g(x))$.

$$\text{On calcule } f(g(x)) = \frac{a.g(x) + b}{c.g(x) + d} = \frac{a.\frac{\alpha.x + \beta}{\gamma.x + \delta} + b}{c.\frac{\alpha.x + \beta}{\gamma.x + \delta} + d}$$

On simplifie :

$$f(g(x)) = \frac{a.g(x) + b}{c.g(x) + d} = \frac{a.(\alpha.x + \beta) + b.(\gamma.x + \delta)}{c.(\alpha.x + \beta) + d.(\gamma.x + \delta)} = \frac{a.(\alpha.x + \beta) + b.(\gamma.x + \delta)}{c.(\alpha.x + \beta) + d.(\gamma.x + \delta)}$$

Trop fort : encore une application en $x \mapsto \frac{A.x + B}{c.x + D}$.

Précisément : $\frac{(a.\alpha + b.\gamma).x + (a.\beta + b.\delta)}{(c.\alpha + d.\gamma).x + (c.\beta + d.\delta)}$.

f		g		$f \circ g$	
a	b	α	β	$a.\alpha + b.\gamma$	$a.\beta + b.\delta$
c	d	γ	δ	$c.\alpha + d.\gamma$	$c.\beta + d.\delta$
$\frac{a.x+b}{c.x+d}$		$\frac{\alpha.x+\beta}{\gamma.x+\delta}$		voir plus haut	

Si on regarde juste les quatre coefficient :

Et ceci rappelle le produit matriciel : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.\alpha + b.\gamma & a.\beta + b.\delta \\ c.\alpha + d.\gamma & c.\beta + d.\delta \end{pmatrix}$.

Bref, non seulement la composée de deux homographies⁴ est une homographie.
Mais en plus, composer des homographies, c'est multiplier des matrices.

Pour calculer $f \circ f$, il suffit d'élever la matrice au carré.

Et de recommencer.

La question $h \circ h \circ h \dots \circ h$ se ramène à $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ multipliée par elle même.

C'est quand même moche (surtout à cause d'un 1 qui est resté intempestivement).

Disons qu'on va calculer M^{11} le plus vite possible.

$$M^2 = M.M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 & -2-1 \\ 2+1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^2.M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$$

$$M^5 = M^4.M = \begin{pmatrix} -9 & -9 \\ 9 & -18 \end{pmatrix}$$

On continue avec M^6 puis on multiplie M^5 par M^6 .

$$M^{11} = M^5.M^6 = \begin{pmatrix} 243 & 243 \\ -243 & 486 \end{pmatrix}$$

On extrait : $h^{11} = x \mapsto \frac{243.x + 243}{-243.x + 486}$. On simplifie en

$$h^{11} = x \mapsto \frac{x+1}{-x+2}$$

qu'on pouvait aussi trouver rapidement en conjecturant des choses sur la forme de h^n pour tout n .

◀18▶

Pour tout n , on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrez : $\sum_{n=1}^9 H_n = 10.H_{10} - 10$.

$H_1 =$	1									
$H_2 =$	1	+1/2								
$H_3 =$	1	+1/2	+1/3							
$H_4 =$	1	+1/2	+1/3	+1/4						
$H_5 =$	1	+1/2	+1/3	+1/4	+1/5					
$H_6 =$	1	+1/2	+1/3	+1/4	+1/5	+1/6				
$H_7 =$	1	+1/2	+1/3	+1/4	+1/5	+1/6	+1/7			
$H_8 =$	1	+1/2	+1/3	+1/4	+1/5	+1/6	+1/7	+1/8		
$H_9 =$	1	+1/2	+1/3	+1/4	+1/5	+1/6	+1/7	+1/8	+1/9	
on va sommer en colonnes										
$\sum_{n=1}^9 H_n =$	9	+8/2	+7/3	+6/4	+5/5	+4/6	+3/7	+2/8	+1/9	

Surtout, on garde sous cette forme, on ne somme pas tout de suite. On compte juste combien de fois on a chaque $\frac{1}{k}$.

4. les homographies ce sont les $x \mapsto \frac{a.x + b}{c.x + d}$, avec entre autre $x \mapsto x$ pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a $10 - k$ fois chaque $\frac{1}{k}$. La somme est donc $\sum_{k=1}^9 \frac{10 - k}{k}$.

On la sépare en $\sum_{k=1}^9 \frac{10}{k} - \sum_{k=1}^9 1$.

Mais on pouvait même l'écrire $\sum_{k=1}^{10} \frac{10 - k}{k}$ (le seul terme ajouté en 0)

et la séparer en $\sum_{k=1}^{10} \frac{10}{k} - \sum_{k=1}^{10} 1$.

Et ceci donne exactement (factorisation et compteur) : $10.H_{10} - 10$.

Méthode du physicien : je calcule tout, pourquoi se prendre la tête avec ce tableau et cette sommation en lignes ou en colonnes !

J'utilise même un logiciel de calcul formel :

```
sum(sum(1/k, k=1..n), n=1..10)
et sum(1/k, k=1..10)*10-10
```

Et si on généralisait ? On pose $A_N = \sum_{n=1}^N H_n$. On veut montrer

$$A_N = (N + 1).H_{N+1} - (N + 1)$$

Nest variable globale. n et ensuite k seront des variables muettes.

On écrit la définition :

$$A_N = \sum_{n=1}^N H_n = \sum_{n=1}^N \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$$

On fusionne en un seul sigma :

$$A_N = \sum_{1 \leq k \leq n \leq N} \frac{1}{k}$$

(triangle visible plus haut).

On somme d'abord sur k :

$$A_N = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{n=k}^N \frac{1}{k} \right)$$

(on va sommer en colonnes).

On factorise :

$$A_N = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{n=k}^N 1 \right) \cdot \frac{1}{k}$$

(sur chaque colonne c'est le même k).

On simplifie :

$$A_N = \sum_{k=1}^N (N + 1 - k) \cdot \frac{1}{k}$$

(n est un compteur, gare au nombre de termes).

On ajoute un terme nul :

$$A_N = \sum_{k=1}^{N+1} (N + 1 - k) \cdot \frac{1}{k}$$

(là, c'est joli/rusé).

On sépare :

$$A_N = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{N+1}{k} - \sum_{k=1}^{N+1} 1$$

(k/k vaut 1).

On sort le $N + 1$ et k est un compteur dans la seconde.

On a enfin :

$$A_N = (N + 1).H_{N+1} - (N + 1)$$

Pour qui n'a pas vu le coup de « je somme jusqu'à $N + 1$ car le terme ajouté vaut 0 », on peut quand même voir un 1 sortir de $(N + 1) \cdot H_{N+1}$ dans le dernier terme de

$$(N + 1) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} \right)$$

Petit conseil : n'essayez pas de simplifier H_n qui sera un de nos objets classiques, il est trop moche.

◀19▶

♥ Qui a raison :

-a- $n!$ est divisible par 2019 dès que n a dépassé 2019 lui même.

-b- $n!$ est divisible par 2019 dès que n a dépassé 673.

-c- si n est premier, alors $n!$ n'est pas divisible par n^2 .

-d- si n n'est pas premier, alors $n!$ est divisible par n^2 .

-a- $n!$ est divisible par 2019 dès que n a dépassé 2019 lui même.

$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 2019) \Rightarrow (2019 \mid n!) :$ oui car dans le produit, il y a un 2019.

-b- $n!$ est divisible par 2019 dès que n a dépassé 673.

$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 673) \Rightarrow (2019 \mid n!) :$ oui car dans le produit, il y a un 673 et un 3..

-c- si n est premier, alors $n!$ n'est pas divisible par n^2 .

On note \mathbb{P} l'ensemble des nombres premiers (2, 3, 5 et ainsi de suite).

$\forall n \in \mathbb{N}, (n \in \mathbb{P}) \Rightarrow (\forall k, n! \neq n^2 \cdot k) :$ oui.

En effet, $n!$ est divisible par n , mais ensuite $\frac{n!}{n}$ ne contient plus de facteur n . Plus de brique pour reformer n puisque n est premier.

-d- si n n'est pas premier, alors $n!$ est divisible par n^2 .

$\forall n \in \mathbb{N}, (n \notin \mathbb{P}) \Rightarrow (\exists k, n! = n^2 \cdot k) :$ non.

L'entier 4 est un contre-exemple (et il suffit d'un pour tout gâcher).

24 n'est pas divisible par 16.

En revanche, avec 6, c'est bon : $6! = 1.2.3.4.5.6 = (1.4.5) \cdot (2.3) \cdot (6)$. On a un facteur 6^2 .

Et ensuite, on peut reconstruire n dans $(n - 1)!$ car n est composé (c'est à dire non premier).

◀20▶

Calculez $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$. Justifiez : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, $\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ et calculez $\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$.

Représentez graphiquement $(\theta \mapsto \cos(\theta + \frac{\pi}{12})) + (x \mapsto \cos(x + \frac{3\pi}{4})) + (t \mapsto \cos(t + \frac{17\pi}{12}))$.

Pour $\cos(\pi/12)$, toute l'astuce est d'écrire $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$	$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$+ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	$+ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$	$= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$- \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$	$- \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)$	$= \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right)$	$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$- \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2}$	$- \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$	$= \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right)$	$= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$+ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2}$	$+ \frac{-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ensuite, on peut en profiter pour développer chaque application, en prenant la peine de mettre le même nom sur les variables muettes

Rappelons en effet : $f = (t \mapsto f(t)) = (x \mapsto f(x)) = (u \mapsto f(u))$ et ainsi de suite.

$(\theta \mapsto \cos(\theta + \frac{\pi}{12}))$	$= (\theta \mapsto \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cdot \cos(\theta))$	$- (\theta \mapsto \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \cdot \sin(\theta))$
$(\theta \mapsto \cos(\theta + \frac{3\pi}{4}))$	$= (\theta \mapsto \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(\theta))$	$- (\theta \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(\theta))$
$(\theta \mapsto \cos(\theta + \frac{17\pi}{12}))$	$= (\theta \mapsto \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cdot \cos(\theta))$	$- (\theta \mapsto \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \cdot \sin(\theta))$
la somme	$= (\theta \mapsto 0 \cdot \cos(\theta))$	$- (\theta \mapsto 0 \cdot \sin(\theta))$

Il ne reste plus rien. La somme est la fonction nulle.

Son graphe est un trait horizontal qui coïncide avec l'axe des abscisses.

Comme quoi il valait mieux simplifier avant de se lancer dans des calculs de dérivée... On est en maths.

Et si on est en physique, on reconnaît le principe du courant triphasé. je vous en reparlerai avec $j = \exp 2.i.\pi/3$, la célèbre racine cubique de l'unité.

◀21▶ Classez du plus petit au plus grand : $(3!)^{2!}$, $(3^2)!$, $(2^3)!$ et $(2!)^{3!}$.

On est en mathématiques et non dans le domaine de la foi, il faut évidemment argumenter.

On calcule les quatre nombres :

$(3!)^{2!}$	$(3^2)!$	$(2^3)!$	$(2!)^{3!}$
6^2	$9!$	$8!$	2^6
36	beaucoup	un peu moins	64

On trie :

$$36 = (3!)^{2!} < 64 = (2!)^{3!} < 8! = (2^3)! < 9! = (3^2)! = 362\,880$$

Et pour avoir de la rigueur, on intercale 100 entre 2^6 et $8!$.

◀22▶ ♡ Simplifiez $\exp(\ln(\sqrt{7}-1) + \ln(\sqrt{7}+1) + \ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + \ln(\sqrt{3}-\sqrt{2}))$.

On aboutit sans effort à 6.

◀23▶ ♡ Comparaison des moyennes par la méthode de Cauchy.

Montrez pour tout couple de réels positifs : $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$.

C'est du cours.

On part de $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ et on arrive au résultat.

Montrez pour tout quadruplet de réels positifs : $\sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot d} \leq \frac{\sqrt{a \cdot b} + \sqrt{c \cdot d}}{2} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$.

On a déjà : $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$ mais aussi $\sqrt{c \cdot d} \leq \frac{c+d}{2}$.

Mais on a aussi

$$\sqrt{\sqrt{a \cdot b} \cdot \sqrt{c \cdot d}} \leq \frac{\sqrt{a \cdot b} + \sqrt{c \cdot d}}{2}$$

en donnant à $\sqrt{a \cdot b}$ et $\sqrt{c \cdot d}$ les rôles de a et b .

On a donc

$$\sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot d} \leq \frac{\sqrt{a \cdot b} + \sqrt{c \cdot d}}{2}$$

car $\sqrt{\sqrt{x}} = (x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$.

Il ne reste qu'à enchaîner :

$$\sqrt[4]{a.b.c.d} \leq \frac{\sqrt{a.b} + \sqrt{c.d}}{2} \leq \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}$$

On accèdera de la même façon à $\sqrt[8]{a_1.a_2.a_3.a_4.a_5.a_6.a_7.a_8} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{8}$.

Déduisez pour tout triplet de réels positifs : $\sqrt[3]{a.b.c} \leq \frac{a+b+c}{3}$ (pensez à prendre $d = \frac{a+b+c}{3}$).

La ruse de fou diront certains.

En effet, on obtient alors $\sqrt[4]{a.b.c.\frac{a+b+c}{3}} \leq \frac{a+b+c + \frac{a+b+c}{3}}{4}$.

Le second membre est juste $\frac{a+b+c}{3}$ tous calculs faits.

Non ! Pas « tous calculs faits ». Aucun calcul bordel.

Vous avez eu trois notes a, b et c .

Vous avez pour moyenne $\frac{a+b+c}{3}$.

Et voilà que vous avez une nouvelle note égale justement à $\frac{a+b+c}{3}$.

Comment voulez vous que votre moyenne change !

C'est du bon sens, pas du calcul.

Écrivons avec des puissances :

$$(a.b.c)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

Élevons à la puissance 4 :

$$(a.b.c) \cdot \left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4$$

Simplifions par le réel positif $\frac{a+b+c}{3}$:

$$(a.b.c) \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

Revenons en aux racines cubiques :

$$\sqrt[3]{a.b.c} = (a.b.c)^{\frac{1}{3}} \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

C'est le résultat demandé.

On pouvait aussi jouer directement avec les exposants et des $1 - \frac{1}{4}$ puis des $\frac{1}{3}$.

Finalement, le coup de $d = \frac{a+b+c}{3}$ est génial mais il se comprend avec « la nouvelle note ne change pas la moyenne arithmétique ».

Montrez pour tout quintuplet de réels positifs : $\sqrt[5]{a.b.c.d.e} \leq \frac{a+b+c+d+e}{5}$.

Reprendre la même idée.

Partir de $\sqrt[3]{a.b.c} \leq \frac{a+b+c}{3}$ et $\sqrt[3]{d.e.f} \leq \frac{d+e+f}{3}$ et $\sqrt{\sqrt[3]{a.b.c}.\sqrt[3]{d.e.f}} \leq \frac{\sqrt[3]{a.b.c} + \sqrt[3]{d.e.f}}{2}$.

Aboutir à $\sqrt[6]{a.b.c.d.e.f} \leq \frac{a+b+c+d+e+f}{6}$ par transitivité.

Prendre le cas particulier $f = \frac{a+b+c+d+e}{5}$ et simplifier les exposants.

Comment généraliserez vous pour $\sqrt[7]{a_1 \dots a_7} \leq \frac{a_1 + \dots + a_7}{7}$ (les a_k sont positifs).

On va accéder déjà à $\sqrt[8]{a_1 \dots a_7.a_8} \leq \frac{a_1 + \dots + a_7 + a_8}{8}$.

On prend ensuite le cas particulier $a_8 = \frac{a_1 + \dots + a_7}{7}$ qu'on note m .

On a alors

$$(a_1 \dots a_7)^{1/8} \cdot m^{1/8} = \sqrt[8]{a_1 \dots a_7 \cdot m} \leq \frac{a_1 + \dots + a_7 + m}{8} = \frac{7 \cdot m + m}{8} = m$$

On élève à la puissance 8 et on simplifie

$$(a_1 \dots a_7) \cdot m \leq m^8$$

On simplifie par m positif et on passe à la racine huitième.

Et pour $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ (les a_k sont positifs).

La proposition P_n à prouver par récurrence sera : les deux inégalités

$${}^{2n-1}\sqrt{a_1 \dots a_{2n-1}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_{2n-1}}{2n-1} \text{ et } {}^{2n}\sqrt{a_1 \dots a_{2n}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_{2n}}{2n}$$

sont vraies.

On a initialisé.

Supposons la proposition vraie jusqu'au rang n (donc les inégalités pour 1, 2, 3 jusqu'à $2n$ termes).

On veut alors démontrer P_{n+1} c'est à dire

$${}^{2n+1}\sqrt{a_1 \dots a_{2n+1}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_{2n+1}}{2n+1} \text{ et } {}^{2n+2}\sqrt{a_1 \dots a_{2n+2}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_{2n+2}}{2n+2}$$

On prouve ${}^{2n+2}\sqrt{a_1 \dots a_{2n+2}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_{2n+2}}{2n+2}$ en écrivant $\sqrt{a \cdot \beta} \leq \frac{\alpha + \beta}{2}$ (déjà connu),

puis $\alpha = {}^{n+1}\sqrt{a_1 \dots a_{n+1}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_{n+1}}{n+1}$ et $\beta = {}^{n+1}\sqrt{a_1 \dots a_{n+1}} \leq \frac{a_{n+2} + \dots + a_{2n+2}}{n+1}$ (issues de notre hypothèse de récurrence).

Ensuite, en prenant $a_{2n+2} = \frac{a_1 + \dots + a_{2n+1}}{2n+1}$ on passe de ${}^{2n+2}\sqrt{a_1 \dots a_{2n+1} \cdot a_{2n+2}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_{2n+1} + a_{2n+2}}{2n+2}$ à ${}^{2n+1}\sqrt{a_1 \dots a_{2n+1}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_{2n+1}}{2n+1}$.

◀ 24 ▶ L'élève A dit $\int_{4.\pi/3}^{5.\pi/3} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \cdot d\theta$ n'existe pas puisque la primitive $\theta \mapsto \ln(\sin(\theta))$ n'existe ni en $4.\pi/3$ ni en $5.\pi/3$.

L'élève B dit $\int_{\pi/3}^{9.\pi/4} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \cdot d\theta = \ln(\sin(9.\pi/4)) - \ln(\sin(\pi/3)) = \ln(\sqrt{6}/3)$.

Montrez que les deux ont tort.

Le premier parle de LA primitive. L'erreur à se faire tuer.

Ensuite, ce n'est une primitive que par intervalle.

Et sur l'intervalle de $[4.\pi/3, 5.\pi/3]$, celle qui sert est $\theta \mapsto \ln(-\sin(\theta))$.

Sinon, avec le cours, on écrit

$$\int_{4.\pi/3}^{5.\pi/3} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \cdot d\theta = \ln\left(\frac{\sin(5.\pi/3)}{\sin(4.\pi/3)}\right)$$

et les deux signes moins s'en vont.

Le second élève n'est pas totalement en tort.

C'est celui qui lui a posé la question qui mérite d'être radié.

L'intégrale n'existe pas, car en π et en $2.\pi$, la fonction n'existe pas, et explose même.

◀ 25 ▶ ♡ Résolvez $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{a + \cos(t)} \cdot dt = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ d'inconnue a .

On calcule l'intégrale. On reconnaît une forme en $\frac{u'}{u}$.

L'équation devient $\left[-\ln(a + \cos(t))\right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

On simplifie en $\ln(1+a) - \ln(a) = \ln(3/2)$.

On arrange en $\ln\left(\frac{1+a}{a}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

Quitte à passer aux exponentielles (bijectivité) : $\frac{1+a}{a} = \frac{3}{2}$.

Par produit en croix, l'unique solution est $a = 2$.

Mais ne peut on avoir aussi $\left[-\ln(-a - \cos(t))\right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$? Bonne question.

◁26▷ ♡ Dériver $x \mapsto \ln(\sqrt[3]{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1})^a$

a. le résultat doit être très simple ; le raisonnement aussi...

Facile : $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x-1)^4$ (formule du binôme de Newton).

L'application est donc $x \mapsto \ln(\sqrt[3]{(x-1)^4})$ et même $x \mapsto \ln((x-1)^{4/3})$ puis $x \mapsto \frac{4}{3} \cdot \ln(x-1)$.

On dérive et on trouve $x \mapsto \frac{4}{3 \cdot (x-1)}$.

Avec un domaine égal à $] -\infty, 1[$ ou $]1, +\infty[$.

En effet, la vraie formule était même $x \mapsto \ln(\sqrt[3]{|x-1|^4})$ et même $x \mapsto \ln(|x-1|^{4/3})$ puis $x \mapsto \frac{4}{3} \cdot \ln(|x-1|)$.

Avec la même dérivée.

◁27▷ Retrouvez les stations (métro, R.E.R. et S.N.C.F.) d'anagrammes (*Nord-Ouest*) :

Sucre collé. Elfe danse. Hôpital du pénis puéril. L'artisane gazera. Asile Tarzan. Petit-connard. Ah ce fluor.

En vrac Saint-Lazare, Gare Saint-Lazare, Courcelles, Pont-Cardinet, Saint-Philippe du Roule, La Défense. La Fourche.

Bonus : Diversité de son internet, Mon odelette retarde, La farce étonna, Une face dessina ta layette.

◁28▷ Résolvez $\log_a(7) = 7$.

On revient à la définition : $\frac{\ln(7)}{\ln(a)} = 7$, on fait un produit en croix : $\ln(a) = \frac{\ln(7)}{7}$ et on efface le logarithme par exponentielle : $\sqrt[7]{7}$

◁29▷ Dans cette classe, il y a des garçons et des filles. Voici les moyennes

	moyenne de la classe	moyenne des garçons	moyenne des filles
mathématiques	11,4	10,6	12,5
physique	12,8		13,2

Retrouvez la moyenne qui manque.

On note G le nombre de garçons, F le nombre de filles.

On note GM la somme des notes des garçons en maths et GP la somme des notes des garçons en physique.

On note FM la somme des notes des filles en maths et FP la somme des notes des filles en physique.

On traduit :

	moyenne de la classe	moyenne des garçons	moyenne des filles
mathématiques	$(GM + FM) = 11,4 \times (G + F)$	$GM = 10,6 \times G$	$FM = 12,5 \times F$

On résout même si il y a moins d'équations que d'inconnues. Tout est défini à proportionnalité près.

En sommant : $GM + GF = 11,4 \times (G + F) = 10,6 \times G + 12,5 \times F$.

On trouve : $G = \frac{1,1}{0,8} \cdot F$. Il y a plus de garçons que de filles. Et ils ont tiré la moyenne de classe en maths vers le bas (avec autant de garçons que de filles, on aurait trouvé 11,55 de moyenne de classe).

On peut imaginer huit filles et onze garçons. Ou « F filles et $\frac{1,1}{0,8} \cdot F$ garçons ».

On calcule alors la moyenne de physique de la classe : $\frac{1,1 \times \mu + 0,8 \times 13,2}{1,1 + 0,8} = 12,8$ (μ est la moyenne des garçons).

On trouve 12,5 (aux arrondis près).

◀30▶ ♡ Le nombre $\log_2(3) \cdot \log_3(4) \cdot \log_4(5) \cdot \log_5(6) \cdot \log_6(7) \cdot \log_7(8)$ est-il rationnel ? On rappelle : $y = \log_a(x)$ signifie $a^y = x$.

On rappelle : $y = \log_a(x)$ signifie $a^y = x$, ce qui donne $y \cdot \ln(a) = \ln(x)$.

On résume $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ Pour a égal à 1, c'est impossible. Normal.
Pour a égal à e , c'est bien le logarithme naturel.

$$\text{Pour } a \text{ égal à } 100 : \text{Log}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Finalement, après télescopage $\log_2(3) \cdot \log_3(4) \cdot \log_4(5) \cdot \log_5(6) \cdot \log_6(7) \cdot \log_7(8) = \frac{\ln(8)}{\ln(2)} = 3$. C'est un rationnel.

◀31▶ ♣ Tectonic est un jeu développé depuis quelques années maintenant. Il s'agit de compléter une grille. La règle : une maison de taille n contient les entiers de 1 à n . Deux cases voisines ne peuvent pas contenir la même valeur. Une première grille résolue vous permet de comprendre. Et ensuite, c'est à vous.

Facile	Sa solution	Facile	Facile
Moyen	Moyen	Difficile	Difficile

Facile	Sa solution	Facile	Facile																																																																																
<table border="1"> <tr><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>4</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>5</td></tr> </table>		1			2					4										5	<table border="1"> <tr><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr> </table>	4	1	2	1	2	3	5	3	1	4	2	1	3	5	3	4	1	2	1	5	<table border="1"> <tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>5</td><td>2</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr> </table>	3	1	3	1	2	5	2	5	4	1	4	1	2	3	5	2	4	1	4	3	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	2	1	3	4	3	5	2	1	1	4	3	4	5	3	5	2	2	1	2	1
	1																																																																																		
2																																																																																			
	4																																																																																		
			5																																																																																
4	1	2	1																																																																																
2	3	5	3																																																																																
1	4	2	1																																																																																
3	5	3	4																																																																																
1	2	1	5																																																																																
3	1	3	1																																																																																
2	5	2	5																																																																																
4	1	4	1																																																																																
2	3	5	2																																																																																
4	1	4	3																																																																																
2	1	3	4																																																																																
3	5	2	1																																																																																
1	4	3	4																																																																																
5	3	5	2																																																																																
2	1	2	1																																																																																
Moyen	Moyen	Difficile	Difficile																																																																																
<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	1	2	1	5	3	4	3	2	5	2	1	4	1	4	5	3	2	3	1	2	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> </table>	1	2	3	2	3	5	1	4	1	4	2	3	2	3	5	1	4	1	2	3	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td><td>2</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td></tr> </table>	2	3	2	1	4	1	5	3	2	3	4	1	1	5	2	5	2	3	1	4	<table border="1"> <tr><td>3</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	3	4	2	1	2	1	5	3	4	3	2	1	2	1	4	3	3	5	2	1
1	2	1	5																																																																																
3	4	3	2																																																																																
5	2	1	4																																																																																
1	4	5	3																																																																																
2	3	1	2																																																																																
1	2	3	2																																																																																
3	5	1	4																																																																																
1	4	2	3																																																																																
2	3	5	1																																																																																
4	1	2	3																																																																																
2	3	2	1																																																																																
4	1	5	3																																																																																
2	3	4	1																																																																																
1	5	2	5																																																																																
2	3	1	4																																																																																
3	4	2	1																																																																																
2	1	5	3																																																																																
4	3	2	1																																																																																
2	1	4	3																																																																																
3	5	2	1																																																																																

◀ 32 ▶ L'objectif est de démontrer une formule due à Leonhard Euler : $1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{5 + \frac{6}{7 + \frac{8}{9 + \frac{10}{11 + \dots}}}}} = \frac{1}{\sqrt{e} - 1}$ et

aussi de lui donner un sens car l'infini s'y cache. Les diverses parties sont assez indépendantes.

I~0) Donnez sous forme irréductible les rationnels $1 + \frac{2}{3}$, $1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{5}}$ et $1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{5 + \frac{6}{7}}}$ et classez les par ordre croissant^a.

^a. sans calculatrice ; quand on fera de la physique ou de la finance, on vous le dira

Sous forme de tableau, c'est plus clair

$1 + \frac{2}{3}$	$1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{5}} = 1 + \frac{2}{\frac{19}{5}} = 1 + \frac{10}{19}$	$1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{5 + \frac{6}{7}}} = 1 + \frac{2}{3 + \frac{41}{7}}$
$= \frac{5}{3}$	$= \frac{29}{19}$	$= \frac{233}{151}$

Si on n'a jamais fait de maths, on pose des divisions pour avoir une valeur approchée.

Mais la seule bonne solution est le calcul des différences :

$\frac{5}{3}$	$= \frac{29}{19}$	$\frac{5}{3}$	$= \frac{233}{151}$
$\frac{29}{19} - \frac{5}{3} = \frac{29 \cdot 3 - 19 \cdot 5}{19 \cdot 3} = \frac{87 - 95}{19 \cdot 3} < 0$		$\frac{233}{151} - \frac{5}{3} = \frac{3 \cdot 233 - 5 \cdot 151}{\text{positif}} = \frac{699 - 755}{\text{positif}} < 0$	
$\frac{29}{19} < \frac{5}{3}$		$\frac{233}{151} < \frac{5}{3}$	

Il faut hélas comparer ensuite $\frac{29}{19}$ et $\frac{233}{151}$ ce qui nous amène par produit en croix à comparer 29.151 et 19.233. On pose le calcul posément : $29 \cdot 151 = 4\,379$ et $19 \cdot 233 = 4\,427$.

$$\frac{29}{19} < \frac{233}{151} < \frac{5}{3}$$

Des suites utiles pour la suite.

II~0) On note S l'ensemble des suites (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (2.n + 5).u_{n+1} + (2.n + 4).u_n$
Soient (p_n) et (q_n) les suites de E vérifiant $p_0 = 0$ et $p_1 = 2$ ainsi que $q_0 = 1$ et $q_1 = 3$. Complétez

n	0	1	2	3	4	5
p_n	0	2				
q_n	1	3				

(ces deux suites (p_n) et (q_n) serviront dans la suite du problème)

On applique la définition à la suite (p_n) aux rangs $n = 0, n = 1$ et ainsi de suite.

Certes, dans la définition de E on parle d'une suite. Mais c'est juste pour la nommer. Comme les réels s'appellent et peuvent ensuite prendre une valeur particulière, ou même être remplacés par d'autres variables ou expressions.

Quand l'énoncé dit que (p_n) est dans E , on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (2.n + 5).u_{n+1} + (2.n + 4).u_n$.
De même, on va avoir $\forall n \in \mathbb{N}, q_{n+2} = (2.n + 5).q_{n+1} + (2.n + 4).q_n$ en écrivant que (q_n) est dans E .

Comme l'hypothèse est vraie pour tout n , on peut donc l'appliquer à n « petit » :

$$p_2 = p_{0+2} = (2.0 + 5).p_{0+1} + (2.0 + 4).p_0 = 5.p_1 + 4.p_0 = 5.2 + 4.0 = 10$$

$$p_3 = p_{1+2} = (2.1 + 5).p_{1+1} + (2.1 + 4).p_1 = 7.p_2 + 6.p_1 = 7.10 + 6.2 = 82$$

$$p_4 = p_{2+2} = (2.2 + 5).p_{2+1} + (2.2 + 4).p_2 = 9.p_3 + 8.p_2 = 9.82 + 8.10 = 818$$

On continue pour les suivants, avec des calculs certes lourds, mais qui permettent de vérifier que vous savez interpréter et appliquer une définition. C'est déjà un joli premier pas vers le métier d'ingénieur.

n	0	1	2	3	4	5
p_n	0	2	10	82	818	9 818
q_n	1	3	19	151	1511	18 131

Les valeurs précises m'importent peu. Je ne cherche pas à savoir si vous savez calculer même sans calculatrice (mais quand même, j'espère que vous savez manipuler les nombres). Ce qui compte est "savez vous appliquer une définition?".

II~1) Montrez que si les deux suites (u_n) et (v_n) sont dans E alors pour tout couple (α, β) de réels, la suite $(\alpha.u_n + \beta.v_n)$ est aussi dans E .

On va montrer une stabilité qui ne nous servira pas ici sur les suites de l'ensemble E . C'est une question évidente pour laquelle il suffit d'utiliser la définition.

On nous donne deux suites u et v . On les suppose dans E . On traduit donc deux hypothèses valables pour tout n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (2.n + 5).u_{n+1} + (2.n + 4).u_n \text{ (hypothèse } U)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = (2.n + 5).v_{n+1} + (2.n + 4).v_n \text{ (hypothèse } V)$$

On s'intéresse à une suite $(\alpha.u_n + \beta.v_n)$ qu'on va nommer w . On doit donc prouver

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = (2.n + 5).w_{n+1} + (2.n + 4).w_n$$

c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\alpha.u_{n+2} + \beta.v_{n+2}) = (2.n + 5).(\alpha.u_{n+1} + \beta.v_{n+1}) + (2.n + 4).(\alpha.u_n + \beta.v_n)$$

et c'est une évidence si on effectue la combinaison des deux hypothèses écrites en (U) et (V) , pour tout n quelconque donné.

5. j'arrête d'écrire (u_n) et j'écris juste u puisque tel est le nom de la suite ; de même qu'une application s'appelle juste f en général

Encore une fois, juste la définition, mais comprendre justement ce qu'est une définition. C'est un problème de compréhension du langage. le plus difficile obstacle pour certains.

II~2) Montrez que la suite $(2^{n+1} \cdot (n+1)!)$ appartient à E .

On nous donne la suite $(2^{n+1} \cdot (n+1)!)$ (c'est à dire $(\forall n, u_n = 2^{n+1} \cdot (n+1)!)$).

On doit vérifier son appartenance à notre ensemble. On se donne un entier n quelconque et on compare deux quantités : u_{n+2} et $(2 \cdot n + 5) \cdot u_{n+1} + (2 \cdot n + 4) \cdot u_n$.

On n'écrit pas d'égalité tant que l'on n'est pas sûr. On calcule juste chaque membre. Et on part du plus compliqué, pour voir si il ressemble au plus simple.

Le plus simple : $u_{n+2} = 2^{n+3} \cdot (n+3)!$

Le plus complexe :

$$(2 \cdot n + 5) \cdot u_{n+1} + (2 \cdot n + 4) \cdot u_n = (2 \cdot n + 5) \cdot 2^{n+2} \cdot (n+2)! + (2 \cdot n + 4) \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1)!$$

On factorise $(n+1)!$:

$$(2 \cdot n + 5) \cdot u_{n+1} + (2 \cdot n + 4) \cdot u_n = ((2 \cdot n + 5) \cdot 2^{n+2} \cdot (n+2) + (2 \cdot n + 4) \cdot 2^{n+1}) \cdot (n+1)!$$

On factorise 2^{n+1} :

$$(2 \cdot n + 5) \cdot u_{n+1} + (2 \cdot n + 4) \cdot u_n = ((2 \cdot n + 5) \cdot 2 \cdot (n+2) + (2 \cdot n + 4)) \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1)!$$

On voit un joli $2 \cdot n + 4$ (et c'est $2 \cdot (n+2)$) :

$$(2 \cdot n + 5) \cdot u_{n+1} + (2 \cdot n + 4) \cdot u_n = ((2 \cdot n + 5) + 1) \cdot 2 \cdot (n+2) \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1)!$$

Puis un joli $2 \cdot (n+3)$:

$$(2 \cdot n + 5) \cdot u_{n+1} + (2 \cdot n + 4) \cdot u_n = 2 \cdot (n+3) \cdot 2 \cdot (n+2) \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1)!$$

On approche :

$$(2 \cdot n + 5) \cdot u_{n+1} + (2 \cdot n + 4) \cdot u_n = 2^2 \cdot 2^{n+1} \cdot (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1)!$$

Et on a bien obtenu $2^{n+3} \cdot (n+3)!$.

Variante : on pouvait aussi calculer la différence des deux membres, factoriser $(n+1)!$ et aussi 2^{n+1} , avec le ferme espoir d'obtenir à la fin

0. Et c'est le cas.

II~3) Soit (u_n) une suite de E . On pose $s_n = \frac{u_n}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}$ pour tout n . Exprimez s_{k+2} à l'aide de k , s_{k+1} et s_k pour tout k de \mathbb{N} .

La méthode qu'on va suivre ici est assez classique avec les suites récurrentes linéaires et les équations différentielles linéaires aussi. On tient une solution particulière ici $v_n = 2^{n+1} \cdot (n+1)!$. On cherche alors les solutions sous la forme $u_n = v_n \cdot s_n$ (donc $s_n = 1$ serait une solution, mais ici on les cherche toutes).

On reporte dans l'équation, et (s_n) est alors solution d'une équation plus simple qu'on pourra résoudre.

On a donc posé comme indiqué $u_n = 2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot s_n$ (ou plutôt $s_n = \frac{u_n}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}$ puisque le dénominateur ne s'annule jamais).

On a donc aussi $u_{n+1} = 2^{n+2} \cdot (n+2)! \cdot s_{n+1}$ et $u_{n+2} = 2^{n+3} \cdot (n+3)! \cdot s_{n+2}$.

On peut reporter dans $u_{n+2} = (2 \cdot n + 5) \cdot u_{n+1} + (2 \cdot n + 4) \cdot u_n$:

$$2^{n+3} \cdot (n+3)! \cdot s_{n+2} = (2 \cdot n + 5) \cdot 2^{n+2} \cdot (n+2)! \cdot s_{n+1} + (2 \cdot n + 4) \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot s_n$$

On simplifie par 2^{n+2} qui saute aux yeux⁶

$$2 \cdot (n+3)! \cdot s_{n+2} = (2 \cdot n + 5) \cdot (n+2)! \cdot s_{n+1} + (n+2) \cdot (n+1)! \cdot s_n$$

6. dans $(2 \cdot n + 4) \cdot 2^{n+1}$, il y a bien 2^{n+2} en facteur, non ?

On simplifie par $(n+2)!$ présent partout et non nul⁷ :

$$2.(n+3).s_{n+2} = (2.n+5).s_{n+1} + s_n$$

On peut diviser :

$$s_{n+2} = \frac{(2.n+5).s_{n+1} + s_n}{2.n+6}$$

Que dire d'autre ? Qu'on va écrire cette formule « vraie pour tout n » en formule « vraie pour tout k » :

$$s_{k+2} = \frac{(2.k+5).s_{k+1} + s_k}{2.k+6}$$

Ceci répond à la question.

II~4) Montrez alors : $(-2)^{k+2}.(k+2)!.(s_{k+1} - s_k) = (-2)^{k+1}.(k+1)!.(s_k - s_{k-1})$.

On doit prouver $(-2)^{k+2}.(k+2)!.(s_{k+1} - s_k) = (-2)^{k+1}.(k+1)!.(s_k - s_{k-1})$.

On dispose de s_{k+2} en fonction des précédents. Et on veut une formule avec s_{k+1} , s_k et s_{-1} .

On va devoir faire un pas de côté et passer de $s_{k+2} = \frac{(2.k+5).s_{k+1} + s_k}{2.k+6}$

à $s_{k-1+2} = \frac{(2.(k-1)+5).s_{k-1+1} + s_{k-1}}{2.(k-1)+6}$; on a donc

$$s_{k+1} = \frac{(2.k+3).s_k + s_{k-1}}{2.k+4}$$

On reporte dans le membre de gauche de la question

$$(-2)^{k+2}.(k+2)!.(s_{k+1} - s_k) = (-2)^{k+2}.(k+2)!. \left(\frac{(2.k+3).s_k + s_{k-1}}{2.k+4} - s_k \right)$$

On réduit au dénominateur commun, avec l'espoir d'arriver au membre de gauche, maintenant qu'il n'y a plus que s_k et s_{k-1} :

$$(-2)^{k+2}.(k+2)!.(s_{k+1} - s_k) = (-2)^{k+2}.(k+2)!. \left(\frac{(2.k+3).s_k + s_{k-1} - (2.k+4).s_k}{2.(k+2)} \right)$$

On voit déjà la simplification par 2 et la factorielle qui se « ronge » (il reste un signe moins de $(-2)^{k+2}$) :

$$(-2)^{k+2}.(k+2)!.(s_{k+1} - s_k) = -(-2)^{k+1}.(k+1)!. \left((2.k+3).s_k + s_{k-1} - (2.k+4).s_k \right)$$

On simplifie à présent le numérateur, et il reste :

$$(-2)^{k+2}.(k+2)!.(s_{k+1} - s_k) = -(-2)^{k+1}.(k+1)!.(s_{k-1} - s_k)$$

En passant le signe moins dans $s_{k-1} - s_k$ on a la formule demandée.

II~5) Déduisez $s_{k+1} - s_k = \frac{\lambda}{(-2)^{k+2}.(k+2)!}$ avec $\lambda = 8.(s_1 - s_0)$.

Si on regarde bien $(-2)^{k+2}.(k+2)!.(s_{k+1} - s_k) = (-2)^{k+1}.(k+1)!.(s_k - s_{k-1})$, on peut comprendre que c'est le même terme avec juste l'indice k remplacé par $k-1$.

Proprement, si on pose $d_k = (-2)^{k+1}.(k+1)!.(s_k - s_{k-1})$, alors tout naturellement, on a $d_{k+1} = (-2)^{k+2}.(k+2)!.(s_{k+1} - s_k)$. Et notre information précédente dit $d_{k+1} = d_k$ pour tout k .

La suite (d_k) est donc constante. Et que vaut elle ? Elle vaut d_1 , son premier terme, le plus facile à calculer.

Pour tout k , on a donc

$$(-2)^{k+2}.(k+2)!.(s_{k+1} - s_k) = d_{k+1} = d_k = d_{k-1} = \dots = d_1 = (-2)^2.2!.(s_1 - s_0)$$

On divise : $s_{k+1} - s_k = \frac{8.(s_1 - s_0)}{(-2)^{k+2}.(k+2)!}$. C'est ce que dit l'énoncé. On a le bon λ .

Peut être avez vous conduit une récurrence sur k . C'est la même chose en fait.

7. dans $(n+2).(n+1)!$, vous le voyez, non ?

II~6) Déduez pour tout n : $s_n = s_0 + \lambda \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.

Le résultat suivant peut faire l'objet d'une récurrence sur n . Ou avec les habitudes de Sup, vous y verrez très vite une somme télescopique. je vais vous livrer les deux.

Pour $n = 0$, la formule $s_n = s_0 + \lambda \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ est logique : $s_0 = s_0 + 0$ car la somme ne peut rien contenir.

Si vous trouvez ce résultat contestable car vous n'envisagez pas de somme vide, je vous laisse l'écrire pour $n = 1$

$$: s_1 = s_0 + \lambda \cdot \sum_{k=1}^1 \frac{1}{(k+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} = s_0 + \lambda \cdot \frac{1}{8} = s_0 + 8 \cdot (s_1 - s_0) \cdot \frac{1}{8}. \text{ C'est vrai.}$$

On se donne ensuite n et on suppose la formule vraie au rang n : $s_n = s_0 + \lambda \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.

On calcule alors

$$s_{n+1} = (s_{n+1} - s_n) + s_n = (s_{n+1} - s_n) + s_0 + \lambda \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

Mais on peut remplacer $s_{n+1} - s_n$ par $\frac{\lambda}{(-2)^{n+2} \cdot (n+2)!}$ grâce à la question précédente⁸

$$s_{n+1} = \frac{\lambda}{(-2)^{n+2} \cdot (n+2)!} + s_0 + \lambda \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

Et $\frac{\lambda}{(-2)^{n+2} \cdot (n+2)!}$ est justement le terme qui manque pour passer de

$$\lambda \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

$$\text{à } \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{(k+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

L'égalité est héréditaire, la propriété est vraie pour tout n .

Mais on peut aussi écrire

$$s_n = s_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (s_{k+1} - s_k)$$

C'est une formule qualifiée de télescopage, et elle dit juste que le $n^{\text{ième}}$ terme s_n d'une suite est obtenu par la somme des accroissements $s_{k+1} - s_k$. Elle servira souvent cette année. Et ici, il suffit de remplacer les $s_{k+1} - s_k$ par la valeur trouvée à la question précédente.

II~7) Calculez s_0 et λ dans le cas des deux suites (p_n) et (q_n) définies plus haut.

Connaissant p_0, p_1, q_0 et q_1 , on peut calculer s_0 et s_1 pour chacune, puis λ .

On peut ensuite reporter dans la formule générale $s_n = s_0 + \lambda \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ puis reporter

$$p_n = \left(s_0 + \lambda \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1)!$$

Rappelons quand même qu'on a supposé que (p_n) et (q_n) étaient des suites de E , sinon on ne pouvait rien faire.

n	0	1	$n =$	0	1
$p_n =$	0	2	$q_n =$	1	3
$s_n =$	$\frac{0}{1!} = 0$	$\frac{2}{2!} = \frac{1}{2}$	$s_n =$	$\frac{1}{1!}$	$\frac{3}{2!} = \frac{3}{4}$
	$s_0 = 0$	$\lambda = 8 \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) = 4$		$s_0 = 1$	$\lambda = 8 \cdot \left(\frac{3}{4} - 1\right) = -2$
	$p_n = 4 \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$			$q_n = 2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot \left(1 - 2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)$	

8. on enchaîne des résultats, ce ne sont pas des exercices consécutifs

Pour l'instant, on pourra se contenter de ces deux formules, mais on doit commencer à voir le rapport avec la suite définie plus loin.

II~8) Déduisez pour tout n : $\frac{p_n}{q_n} = \frac{1 - 2.L_n}{L_n - 1}$ avec $L_n = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^i$

Rappel : $0! = 1$ et $(n+1)! = (n+1).n!$.

Passons au quotient $\frac{p_n}{q_n}$.

La somme $L_n = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^i$ ressemble quand même beaucoup à nos $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.

Mais ce n'est pas la même chose. On n'a pas les mêmes bornes. Et on a i à la place de $k+1$.

Si on en a besoin, on écrit les termes de chacune avec des points de suspension :

$L_n = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^i$									
$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$			i		$i=n$	$i=n+1$
1	$\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)$			$\frac{1}{i!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^i$		$\frac{1}{n!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$	$\frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$									
	$k=1$	$k=2$	$k=3$			k		$k=n$	
	$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)$	$\frac{1}{24} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)$			$\frac{1}{(k+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}$		$\frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$	

On retrouve bien les mêmes termes, avec un décalage et deux termes de moins : $i=0$ et $i=1$ (de somme $\frac{1}{2}$).

On peut donc écrire

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^i - \sum_{i=0}^1 \frac{1}{i!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^i = L_n - \frac{1}{2}$$

On peut donc reporter dans nos formules pour p_n et q_n :

$$p_n = 4.2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} = 4.2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot \left(L_n - \frac{1}{2}\right) = (4.L_n - 2) \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1)!$$

$$q_n = 2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot \left(1 - 2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) = 2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot \left(1 - 2 \cdot \left(L_n - \frac{1}{2}\right)\right) = -(2.L_n) \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1)!$$

(coefficients à revoir).

Des matrices pour aller un peu plus loin.

III~0) Pour tout n , on définit $H_n = \begin{pmatrix} 0 & 2.n \\ 1 & 2.n+1 \end{pmatrix}$ et $P_n = H_1 \times H_2 \times H_3 \times \dots \times H_n$ (attention, le produit matriciel n'est pas commutatif). Calculez P_n pour n de 1 à 3.

On a défini les premières matrices, il suffit d'effectuer des produits H_1 , $H_1 \times H_2$ et $H_1 \times H_2 \times H_3$.

	$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	$H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$
$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$
	$H_1 \times H_2 = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 19 \end{pmatrix}$	$(H_1.H_2).H_3 = \begin{pmatrix} 10 & 82 \\ 19 & 151 \end{pmatrix}$

Juste une question pour voir si vous savez calculer des produits matriciels ? Ou une question pour préparer une récurrence à venir ?

III~1) Montrez pour tout n : $P_n = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}$.

n	0	1	2	3	4	5
p_n	0	2	10	82	818	9 818
q_n	1	3	19	151	1511	18 131

Rappelons ici les valeurs des deux suites :

Et si je vous avais demandé une matrice de plus, vous auriez obtenu $\begin{pmatrix} 82 & 818 \\ 151 & 1511 \end{pmatrix}$, c'est presque évident.

De toutes façons, on va mener une récurrence sur n déjà initialisée.

Supposons alors à un rang n quelconque donné : $P_n = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}$.

On va calculer P_{n+1} en multipliant juste à droite par H_{n+1} puisque

$$P_{n+1} = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n \times H_{n+1} = (H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n) \times H_{n+1} = P_n \times H_{n+1}$$

Si le produit matriciel n'est pas commutatif (en général $P \times Q \neq Q \times P$), il est quand même associatif (toujours $(P \times Q) \times R = P \times (Q \times R)$), ce qui permet de se passer des parenthèses et de la priorité.

On effectue à la main :

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2n+2 \\ 1 & 2n+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & (2n+2) \cdot p_{n-1} + (2n+3) \cdot p_n \\ q_n & (2n+2) \cdot q_{n-1} + (2n+3) \cdot q_n \end{pmatrix}$$

La première colonne est de la forme voulue.

Mais pour la seconde, il suffit d'écrire $(2n+2) \cdot p_{n-1} + (2n+3) \cdot p_n = p_{n+1}$ et la même formule pour q_{n+1} . C'est en fait juste la formule fondamentale

$$p_{n+2} = (2n+5) \cdot p_{n+1} + (2n+4) \cdot p_n$$

qu'au rang $n-1$ au lieu de n . On a donc prouvé l'hérédité.

Ces matrices vont être reliées aux homographies, puis à notre quotient de quotients.

Une question quand même. Si vous avez montré $P_n = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}$ (ou même lu dans l'énoncé), allez vous vraiment calculer P_1 , P_2 et P_3 , ou allez vous directement balancer la réponse ?

Lycee Charlemagne	MPSI2	Année 2023/24
Etude de la suite (L_n) .		

IV~0) Calculez L_n pour n de 0 à 3. Montrez que la suite (L_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

On a encore une fois une définition à appliquer, pour une somme sous forme de sigma.

$L_0 =$	$\frac{1}{0!} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^0$	$+\frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^1$			$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	0,5	
$L_1 =$	$\frac{1}{0!} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^0$	$+\frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^1$	$+\frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^2$		$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$	0,625	
$L_2 =$	$\frac{1}{0!} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^0$	$+\frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^1$	$+\frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^2$	$+\frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^3$	$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{48} = \frac{29}{48}$	0,604...	
$L_3 =$	$\frac{1}{0!} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^0$	$+\frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^1$	$+\frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^2$	$+\frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^3$	$+\frac{1}{4!} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^4$	$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{48} + \frac{1}{384} = \frac{233}{384}$	0,606...

C'est juste pour faire plaisir au physicien que j'ai mis les valeurs approchées. Et c'est pour avoir une petite idée pour la suite.

On place ces quelques nombres dans l'ordre pour pouvoir répondre à la question « suite croissante / décroissante ».

$\frac{1}{2} < \frac{5}{8}$ mais $\frac{5}{8} > \frac{29}{48}$ (produits en croix).

La suite n'est ni croissante ni décroissante.

En fait, on va voir qu'elle oscille, avec amortissement en direction d'une valeur. Grand classique cette année.

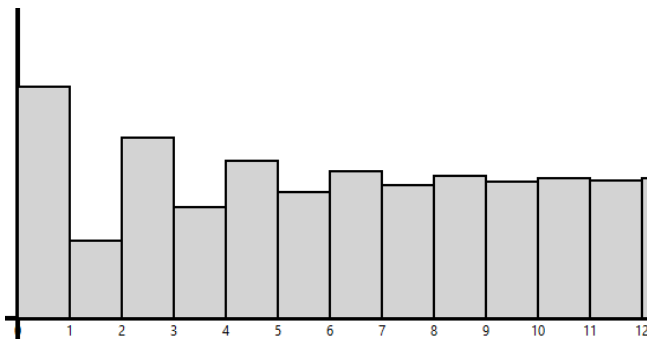
Comment rendre rigoureux « La suite n'est ni croissante ni décroissante » ?

En découpant en deux.

Elle n'est pas croissante. On a en effet un contre-exemple avec $L_2 < L_1$.

Elle n'est pas décroissante. On a cette fois un contre-exemple avec $L_2 > L_1$.

C'est tout.



Comme on a juste besoin de contre-exemple, il n'est pas utile de calculer $L_{n+1} - L_n$ en toute généralité, même si ce calcul donne une idée de la réponse.

En effet, on trouvera que le signe de $L_{n+1} - L_n$ dépend de n . Il n'est donc pas constant.

IV~1) Montrez $L_{2,n+2} - L_{2,n} = \frac{4.n + 5}{(2.n + 3)! \cdot 2^{2.n+3}}$. Déduisez que $(L_{2,n})$ est croissante et montrez que que $(L_{2,n+1})$ est décroissante.

On se donne n et on calcule $L_{2,n+2} - L_{2,n}$.

Dans une des sommes il y a $2.n + 4$ termes (de $\frac{1}{0!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^0$ à $\frac{1}{(2.n + 2 + 1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{2.n+2+1}$).

Dans l'autre il y a $2.n + 2$ termes (de $\frac{1}{0!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^0$ à $\frac{1}{(2.n + 1)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{2.n+1}$).

La différence est donc de deux termes. On a juste

$$\sum_{k=0}^{2.n+2+1} a_k - \sum_{k=0}^{2.n+1} a_k = a_{2.n+2} + a_{2.n+3}$$

ce qui donne ici

$$\sum_{k=0}^{2.n+3} \frac{1}{k!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{2.n+1} \frac{1}{k!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{(2.n+2)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{2.n+2} + \frac{1}{(2.n+3)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{2.n+3}$$

$$\sum_{k=0}^{2.n+3} \frac{1}{k!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{2.n+1} \frac{1}{k!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{(2.n+2)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2.n+2} - \frac{1}{(2.n+3)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2.n+3}$$

en tenant compte de la parité. On factorise le plus grand dénominateur. C'est $(2.n + 3)!$.

Rappelons que on cherche toujours le dénominateur commun le plus simple, et par exemple $\frac{1}{720} - \frac{1}{120}$ vaut juste $\frac{1-6}{720}$ plutôt que $\frac{120-720}{720 \cdot 120}$, même si c'est la même chose.

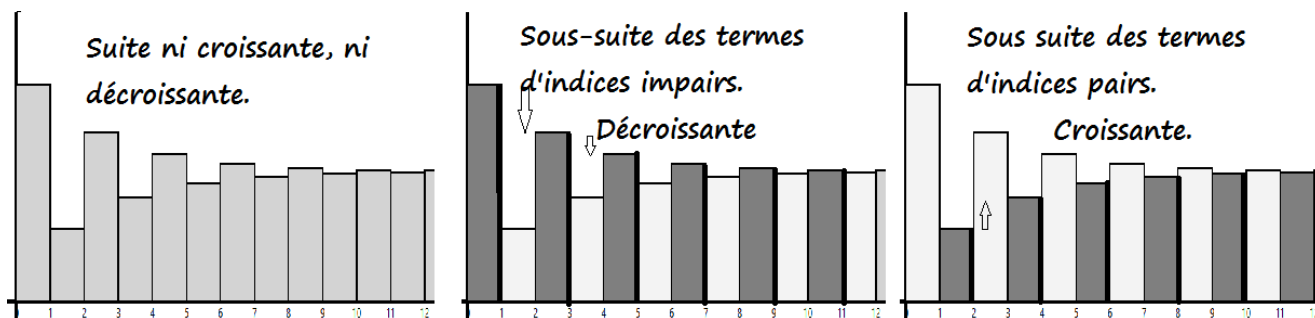
On factorise aussi $\left(\frac{1}{2}\right)^{2.n+3}$:

$$\sum_{k=0}^{2.n+3} \frac{1}{k!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{2.n+1} \frac{1}{k!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{(2.n+2)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2.n+2} - \frac{1}{(2.n+3)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2.n+3} = \frac{(2.n+3) \cdot 2 - 1}{(2.n+3)! \cdot 2^{2.n+3}}$$

On trouve bien $\frac{4.n + 5}{(2.n + 3)! \cdot 2^{2.n+3}}$ et cette quantité est positive.

Comme $L_{2,(n+1)} - L_{2,n}$ est positif pour tout n , on trouve que la suite $(L_{2,n})$ est croissante.

On a calculé une différence qui dépendait de n et trouvé son signe. J'espère que n'avez pas tenté à tout prix de mettre une récurrence, juste sous prétexte qu'il y avait un n dans la formule.



Pour la décroissance de (L_{2n+1}) , on se donne n et on calcule comme précédemment $L_{2(n+1)+1} - L_{2(n)+1}$ dans laquelle il reste encore exactement deux termes :

$$L_{2n+3} - L_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+4} \frac{1}{k!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{1}{k!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{(2n+3)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n+3} + \frac{1}{(2n+4)!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n+4}$$

$$L_{2n+3} - L_{2n+1} = -\frac{1}{(2n+3)! \cdot 2^{2n+3}} + \frac{1}{(2n+4)! \cdot 2^{2n+4}}$$

Avec le même type de factorisation, on trouve $L_{2n+3} - L_{2n+1} = -\frac{4n+7}{(2n+4)! \cdot 2^{2n+4}}$. Cette différence est toujours négative, la suite décroît.

Comme le confirme le graphe de la suite plus haut, il se peut que la sous-suite faite d'une moitié des termes soit croissante, que l'autre sous-suite "complémentaire" soit décroissante. Et la suite globale n'a aucun sens de variations imposé.

V~0) n est un entier naturel donné. On définit l'application F_n . Calculez $F_n(0)$ et $F_n(1)$.

$$F_n = t \mapsto e^{-t/2} + \frac{(t-1)}{2 \cdot 1!} \cdot e^{-t/2} + \frac{(t-1)^2}{2^2 \cdot 2!} \cdot e^{-t/2} + \frac{(t-1)^3}{2^3 \cdot 3!} \cdot e^{-t/2} + \dots + \frac{(t-1)^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot e^{-t/2}$$

On introduit une fonction un peu étrange. On aurait pu la donner sous forme de somme

$$F_n = t \mapsto \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(t-1)^k}{2^k \cdot k!} \cdot e^{-t/2}$$

avec les convention habituelles sur $0!$ et $(1-t)^0$.

Son nom, c'est F_n . C'est une fonction de t ici, mais son nom doit dépendre de n , car sa forme dépend de n . Ce sera votre rôle bien souvent de "surveiller les variables". Voir qui dépend de qui. C'est capital en mathématiques. Et aussi en sciences. Et aussi en ingénierie.)

On calcule pour t égal à 0. On trouve proprement $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!}$ et on reconnaît L_n .

Cette fois, il n'y a plus de k dans la réponse. k est une variable muette. En revanche, n est la vraie variable (dite "libre"); la seule qui reste.

Pour t égal à 1, tous les termes en $(t-1)^k$ s'en vont, sauf le premier. Il reste $F_n(1) = e^{-1/2}$.

V~1) Rappelez la formule pour la dérivée du produit de deux fonctions dérivables. Montrez qu'après simplification $(F_n)'$ ne contient qu'un terme.

On va dériver F_n . C'est une somme. On va donc dériver chaque terme de la somme, et additionner. Jusque là tout va bien.

Mais ensuite, chaque terme est un produit. On rappelle la formule

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

et on l'applique pour dériver un produit comme $\frac{(t-1)^k}{2^k \cdot k!} \cdot e^{-t/2}$ (ou plutôt $t \mapsto \frac{(t-1)^k}{2^k \cdot k!} \cdot e^{-t/2}$). On trouve deux termes

$$t \mapsto \frac{k \cdot (t-1)^{k-1}}{2^k \cdot k!} \cdot e^{-t/2} + \frac{(t-1)^k}{2^k \cdot k!} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-t/2}\right)$$

car on rappelle que $t \mapsto e^{a.t}$ se dérive en $t \mapsto a.e^{a.t}$ avec ici a égal à $\frac{-1}{2}$). Mine de rien, il va y avoir des simplifications et des regroupements

$$t \mapsto \frac{(t-1)^{k-1}}{2^k.(k-1)!}.e^{-t/2} - \frac{(t-1)^k}{2^{k+1}.k!}.e^{-t/2}$$

et les deux termes sont de la même forme $\frac{(t-1)^p}{2^{p+1}.p!}.e^{-t/2}$ avec p égal à $k-1$ ou k . Ça va servir. Mais sous cette forme, c'est un peu lourd à gérer en début d'année. C'est pourquoi je vais juste dériver sous la forme « points de suspension » pour voir ce qui s'en va vraiment

$F_n(t)$	$= e^{-t/2}$	$+ \frac{(t-1)}{2}.e^{-t/2}$	$+ \frac{(t-1)^2}{2^2.2!}.e^{-t/2}$	$+ \frac{(t-1)^3}{2^3.3!}.e^{-t/2}$	$+ \frac{(t-1)^4}{2^4.4!}.e^{-t/2}$	\dots	$+ \frac{(t-1)^{n+1}}{2^{n+1}.(n+1)!}.e^{-t/2}$
$F'_n(t)$	$= -\frac{1}{2}.e^{-t/2}$	$- \frac{(t-1)}{2.2}.e^{-t/2}$	$- \frac{(t-1)^2}{2.2^2.2!}.e^{-t/2}$	$- \frac{(t-1)^3}{2.2^3.3!}.e^{-t/2}$	$- \frac{(t-1)^4}{2.2^4.4!}.e^{-t/2}$	\dots	$- \frac{(t-1)^{n+1}}{2.2^{n+1}.(n+1)!}.e^{-t/2}$

Les termes s'en vont deux à deux.

$F'_n(t)$	$= -\frac{1}{2}.e^{-t/2}$	$- \frac{(t-1)}{2.2}.e^{-t/2}$	$- \frac{(t-1)^2}{2.2^2.2!}.e^{-t/2}$	$- \frac{(t-1)^3}{2.2^3.3!}.e^{-t/2}$	$- \frac{(t-1)^4}{2.2^4.4!}.e^{-t/2}$	\dots	$- \frac{(t-1)^{n+1}}{2.2^{n+1}.(n+1)!}.e^{-t/2}$
$F'_n(t)$	$=$	$+\frac{1}{2}.e^{-t/2}$	$+ \frac{2.(t-1)}{2^2.2!}.e^{-t/2}$	$+ \frac{3.(t-1)^2}{2^3.3!}.e^{-t/2}$	$+ \frac{4.(t-1)^3}{2^4.4!}.e^{-t/2}$	\dots	$+ \frac{(n+1).(t-1)^n}{2^{n+1}.(n+1)!}.e^{-t/2}$

puis

$F'_n(t)$	$=$	$-\frac{(t-1)}{2.2}.e^{-t/2}$	$- \frac{(t-1)^2}{2.2^2.2!}.e^{-t/2}$	$- \frac{(t-1)^3}{2.2^3.3!}.e^{-t/2}$	$- \frac{(t-1)^4}{2.2^4.4!}.e^{-t/2}$	\dots	$- \frac{(t-1)^{n+1}}{2.2^{n+1}.(n+1)!}.e^{-t/2}$
$F'_n(t)$	$=$	$+\frac{2.(t-1)}{2^2.2!}.e^{-t/2}$	$+ \frac{3.(t-1)^2}{2^3.3!}.e^{-t/2}$	$+ \frac{4.(t-1)^3}{2^4.4!}.e^{-t/2}$	\dots	$+ \frac{(n+1).(t-1)^n}{2^{n+1}.(n+1)!}.e^{-t/2}$	

puis

$F'_n(t)$	$=$	$-\frac{(t-1)^2}{2.2^2.2!}.e^{-t/2}$	$- \frac{(t-1)^3}{2.2^3.3!}.e^{-t/2}$	$- \frac{(t-1)^4}{2.2^4.4!}.e^{-t/2}$	\dots	$- \frac{(t-1)^{n+1}}{2.2^{n+1}.(n+1)!}.e^{-t/2}$
$F'_n(t)$	$=$	$+\frac{3.(t-1)^2}{2^3.3!}.e^{-t/2}$	$+ \frac{4.(t-1)^3}{2^4.4!}.e^{-t/2}$	\dots	$+ \frac{(n+1).(t-1)^n}{2^{n+1}.(n+1)!}.e^{-t/2}$	

et encore

$F'_n(t)$	$=$	$-\frac{(t-1)^3}{2.2^3.3!}.e^{-t/2}$	$- \frac{(t-1)^4}{2.2^4.4!}.e^{-t/2}$	\dots	$- \frac{(t-1)^{n+1}}{2.2^{n+1}.(n+1)!}.e^{-t/2}$
$F'_n(t)$	$=$	$+\frac{4.(t-1)^3}{2^4.4!}.e^{-t/2}$	\dots	$+ \frac{(n+1).(t-1)^n}{2^{n+1}.(n+1)!}.e^{-t/2}$	

jusqu'à l'unique terme qui va rester

$F'_n(t)$	$=$	$-\frac{(t-1)^{n+1}}{2.2^{n+1}.(n+1)!}.e^{-t/2}$
-----------	-----	--

Bref, il ne reste bien qu'un terme : $F'_n(t) = \frac{(t-1)^{n+1}}{2^{n+2}.(n+1)!}.e^{-t/2}$.

Le calcul peut être mené très proprement avec des sigmas et un télescope. Et c'est un classique : "formule de Taylor avec reste intégrale", écrite sur le tableau avec le Télétubbie.

V~2) Déduisez : $L_n = \frac{1}{\sqrt{e}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_0^1 (1-t)^{n+1} \cdot e^{-t/2} \cdot dt$ puis

$$dsp \left| L_n - \frac{1}{\sqrt{e}} \right| \leq \frac{1}{2^{n+2} \cdot (n+1)!} \cdot \int_0^1 (1-t)^{n+1} \cdot e^{-t/2} \cdot dt \leq \frac{1}{2^{n+2} \cdot (n+1)!} \cdot \int_0^1 (1-t)^{n+1} \cdot dt = \frac{1}{2^{n+2} \cdot (n+2)!}$$

La formule qui suit va vous sembler totalement incongrue, avec un L_n , un $\frac{1}{\sqrt{e}}$ et une intégrale.

Et aussi le verbe « déduisez ». Mais quel rapport bon sang ! Si on la regarde bien

$$L_n = \frac{1}{\sqrt{e}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_0^1 (1-t)^{n+1} \cdot e^{-t/2} \cdot dt$$

c'est quand même

$$F_n(0) = F_n(1) - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_0^1 (1-t)^{n+1} \cdot e^{-t/2} \cdot dt$$

et l'intégrale peut commencer à nous faire penser à F'_n ! L'idée est ici d'écrire

$$\int_0^1 F'_n(t) \cdot dt = [F_n(t)]_{t=0}^{t=1} = F_n(1) - F_n(0)$$

Quand on intègre la dérivée, on retombe sur les variations de la fonction elle même, c'est logique.

Avec les calculs de $F_n(1)$ et de $F_n(0)$ on a bien

$$\int_0^1 F'_n(t) \cdot dt = [F_n(t)]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{\sqrt{e}} - L_n$$

V~3) Déduisez que la suite (L_n) converge et donnez sa limite.

La différence $L_n - \frac{1}{\sqrt{e}}$ est donc une intégrale précédée d'un $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

On passe à la valeur absolue, ce qui remplace le $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2}$ par $\frac{1}{2^{n+2}}$

$$\left| L_n - \frac{1}{\sqrt{e}} \right| = \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_0^1 (1-t)^{n+1} \cdot e^{-t/2} \cdot dt$$

puisque sinon, dans l'intégrale, tout est positif.

On majore ensuite tous les $e^{-t/2}$ de l'intégrale par 1 (exponentielle de réel négatif)

$$\left| L_n - \frac{1}{\sqrt{e}} \right| = \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_0^1 (1-t)^{n+1} \cdot e^{-t/2} \cdot dt \leq \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_0^1 (1-t)^{n+1} \cdot 1 \cdot dt$$

Quant à l'intégrale $\int_0^1 (1-t)^{n+1} \cdot dt$ on le calcule avec une primitive explicite : $t \mapsto -\frac{(1-t)^{n+2}}{n+2}$.

Surtout, il ne fallait pas développer par la formule du binôme.

Il suffisait de s'inspirer de $\int_a^b t^{n+1} \cdot dt = \left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_a^b$ mais avec $1-t$ à la place de t .

Il nous reste le classique

$$\int_0^1 (1-t)^{n+1} \cdot dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{-0}{n+2} - \frac{-1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

Le signe moins s'explique car quand on dérive $t \mapsto (1-t)^{n+2}$ il y a certes un qui tombe mais aussi un signe moins qui sort.

Il ne reste qu'à voir : $\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)!}$ qui est là encore plus que classique.

Le majorant $\frac{1}{2^{n+2} \cdot (n+2)!}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini (évidence).

Le minorant 0 vaut 0, on ne pas pas dire mieux.

Par encadrement le terme $\left| L_n - \frac{1}{\sqrt{e}} \right|$ tend vers 0. Et on reconnaît ici que L_n tend vers $\frac{1}{\sqrt{e}}$ quand n tend vers l'infini.

La suite L_n converge vers $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Comme on avait obtenu $\frac{p_n}{q_n} = \frac{1 - 2.L_n}{L_n - 1}$, on déduit que le quotient $\frac{p_n}{q_n}$ converge vers $\frac{1 - \frac{2}{\sqrt{e}}}{\frac{1}{\sqrt{e}} - 1}$ ce qui fait $\frac{\sqrt{e} - 2}{1 - \sqrt{e}}$

(en multipliant haut et bas par \sqrt{e}) et même vers $\frac{2 - \sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1}$ si vous préférez les quotients de nombres positifs.

Lycee Charlemagne

MPSI2

Année 2023/24

Un peu de produit matriciel.

VI~0) Pour tout entier naturel n , on pose $h_n = t \mapsto \frac{2.n}{2.n + 1 + t}$ et $H_n = \begin{pmatrix} 0 & 2.n \\ 1 & 2.n + 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Justifiez : } h_1(h_2(h_3(\dots h_n(t))\dots)) = \frac{2}{3 + \frac{4}{5 + \frac{6}{7 + \frac{\dots}{2.n}}}}$$

La formule $h_1(h_2(h_3(\dots h_n(t))\dots)) = \frac{2}{3 + \frac{4}{5 + \frac{6}{7 + \frac{\dots}{2.n}}}}$ doit elle se justifier ?

On fait une récurrence avec

$$h_1(h_2(h_3(\dots h_n(h_{n+1}(t))\dots))\dots) = \frac{2}{3 + \frac{4}{5 + \frac{6}{7 + \frac{\dots}{2.n}}}} = \frac{2}{3 + \frac{4}{5 + \frac{6}{7 + \frac{\dots}{2.n + 1 + \frac{0.t + 2.n + 2}{1.t + 2.n + 3}}}}}$$

Mais selon moi, tout dépend du sens qu'on donne au premier membre avec ses points de suspension.

VI~1) On appelle homographie toute application de la forme $h = t \mapsto \frac{a.t + b}{c.t + d}$. Montrez que la composée de deux homographies est encore une homographie. On pourra poser $\gamma = t \mapsto \frac{\alpha.t + \beta}{\gamma.t + \delta}$ et expliciter $h \circ \gamma = (t \mapsto h(\gamma(t)))$.

On se donne deux homographies, avec des notations naturelles, et on compose :

$$h \circ \gamma = t \mapsto h(\gamma(t)) = t \mapsto \frac{a.\gamma(t) + b}{c.\gamma(t) + d} = t \mapsto \frac{a.\frac{\alpha.t + \beta}{\gamma.t + \delta} + b}{c.\frac{\alpha.t + \beta}{\gamma.t + \delta} + d}$$

On réduit au dénominateur commun et on l'efface car il est présent en haut et en bas : $\frac{\frac{A}{C}}{\frac{D}{C}} = \frac{A}{D} \cdot \frac{1}{C} = \frac{A}{C}$

$$h \circ \gamma = t \mapsto \frac{\frac{a.(\alpha.t + \beta) + b.(\gamma.t + \delta)}{\gamma.t + \delta}}{\frac{c.(\alpha.t + \beta) + d.(\gamma.t + \delta)}{\gamma.t + \delta}} = t \mapsto \frac{a.(\alpha.t + \beta) + b.(\gamma.t + \delta)}{c.(\alpha.t + \beta) + d.(\gamma.t + \delta)}$$

On regroupe et on reconnaît une homographie

$$h \circ \gamma = t \mapsto \frac{(a.\alpha + b.\gamma).t + (a.\beta + b.\delta)}{(c.\alpha + d.\gamma).t + (c.\beta + d.\delta)}$$

Si on la lit matriciellement, c'est $\begin{pmatrix} a.\alpha + b.\gamma & a.\beta + b.\delta \\ c.\alpha + d.\gamma & c.\beta + d.\delta \end{pmatrix}$. Et on reconnaît le produit matriciel avec ses règles usuelles :

	$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$	$\frac{\alpha.t + \beta}{\gamma.t + \delta}$
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a.\alpha + b.\gamma & a.\beta + b.\delta \\ c.\alpha + d.\gamma & c.\beta + d.\delta \end{pmatrix}$	$\frac{a.t + b}{c.t + d} \quad \frac{(a.\alpha + b.\gamma).t + (a.\beta + b.\delta)}{(c.\alpha + d.\gamma).t + (c.\beta + d.\delta)}$

Composer les homographies, c'est multiplier des matrices. Ceci nous servira souvent. Soit pour composer des homographies sans en emplir des pages (comme on le fera ici), juste en calculant des produits matriciels. Soit dans l'autre sens, en disant que comme la loi de composition des homographies est associative, il s'ensuit que la multiplication matricielle sera aussi associative.

VI~2) Justifiez alors $h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_n = t \mapsto \frac{p_{n-1}.t + p_n}{q_{n-1}.t + q_n}$.

Allez, c'est dans la suite.

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24
Allez, on termine.		

VII~0) Mettez bout à bout tous les résultats de ce devoir pour arriver à

$$1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{5 + \frac{6}{7 + \frac{\dots}{2.n}}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{e} - 1}$$

Démonstration mise en forme par René Adad, prof de MPSI à Marseille, site Maths-OS.

On va mettre bout à bout tous nos résultats.

La $n^{\text{ième}}$ fraction que l'on étudie est $1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{5 + \frac{6}{7 + \frac{\dots}{2.n}}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{e} - 1}$ c'est à dire $1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{5 + \frac{6}{7 + \frac{\dots}{2.n + 1}}}}$.

On reconnaît donc $1 + h_1(h_2(h_3(\dots h_n(0)) \dots))$.

Mais $t \mapsto h_1(h_2(h_3(\dots h_n(t)) \dots))$ est une homographie, en tant que composée d'homographies.

On trouve sa matrice en multipliant les matrices des n homographies.

Bref, $h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_n$ a pour matrice $H_1 \times H_2 \times H_3 \times \dots \times H_n$.

Comme le calcul a déjà été effectué, c'est P_n avec ses p_{n-1} , q_{n-1} , p_n et q_n :

$$h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots \circ h_n = t \mapsto \frac{p_{n-1}.t + p_n}{q_{n-1}.t + q_n}$$

Comme seule la valeur en 0 nous intéresse, il reste $h_1(h_2(h_3(\dots h_n(0)) \dots)) = \frac{0 + p_n}{0 + q_n}$.

On ajoute 1 et on fait tendre n vers l'infini.

On a trouvé une forme explicite pour p_n et q_n puis pour le quotient avec des L_n .

Et on a trouvé la limite de L_n .

En mettant bout à bout :

$$1 + \frac{p_n}{q_n} = 1 + \frac{1 - 2.L_n}{L_n - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\frac{2}{\sqrt{e}} - 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{e}}}$$

On vérifie qu'il n'y a plus de n dans la limite, c'est un nombre.

Et si on simplifie, on trouve $\frac{1}{\sqrt{e} \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{e}})}$. Et on dit bravo Euler.

On dit aussi bravo René Addad.



Même si ça n'a pas de rapport direct avec notre problème, on définit $r = t \mapsto \frac{t \cdot \cos(\pi/7) - \sin(\pi/7)}{t \cdot \sin(\pi/7) + \cos(\pi/7)}$. Montrez $r \circ r \circ r \circ r \circ r \circ r \circ r = Id$ (application identité $t \mapsto t$). Votre démonstration pourra utiliser certains éléments démontrés ci-dessus.

On définit une homographie : $r = t \mapsto \frac{t \cdot \cos(\pi/7) - \sin(\pi/7)}{t \cdot \sin(\pi/7) + \cos(\pi/7)}$.

Nous, on va définir une matrice : $R = \begin{pmatrix} \cos(\pi/7) & -\sin(\pi/7) \\ \sin(\pi/7) & \cos(\pi/7) \end{pmatrix}$.

On nous demande de composer $r \circ r \circ \dots \circ r$. On va multiplier

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/7) & -\sin(\pi/7) \\ \sin(\pi/7) & \cos(\pi/7) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\pi/7) & -\sin(\pi/7) \\ \sin(\pi/7) & \cos(\pi/7) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\pi/7) & -\sin(\pi/7) \\ \sin(\pi/7) & \cos(\pi/7) \end{pmatrix} \times \dots$$

Au premier produit (avec des notations naturelles)

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/7) & -\sin(\pi/7) \\ \sin(\pi/7) & \cos(\pi/7) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\pi/7) & -\sin(\pi/7) \\ \sin(\pi/7) & \cos(\pi/7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 - s^2 & -2.s.c \\ 2.s.c & c^2 - s^2 \end{pmatrix}$$

Pas besoin de connaître plus que son cours pour identifier

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/7) & -\sin(\pi/7) \\ \sin(\pi/7) & \cos(\pi/7) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\pi/7) & -\sin(\pi/7) \\ \sin(\pi/7) & \cos(\pi/7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2.\pi/7) & -\sin(2.\pi/7) \\ \sin(2.\pi/7) & \cos(2.\pi/7) \end{pmatrix}$$

Et on recommence avec

$$R^3 = R^2 \cdot R = \begin{pmatrix} \cos(2.\pi/7) & -\sin(2.\pi/7) \\ \sin(2.\pi/7) & \cos(2.\pi/7) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\pi/7) & -\sin(\pi/7) \\ \sin(\pi/7) & \cos(\pi/7) \end{pmatrix}$$

On a cette fois des $\cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$ sur la diagonale et des $\cos(a) \cdot \sin(b) + \sin(a) \cdot \cos(b)$ ailleurs.

On trouve $\begin{pmatrix} \cos(\pi/7) & -\sin(\pi/7) \\ \sin(\pi/7) & \cos(\pi/7) \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \cos(3.\pi/7) & -\sin(3.\pi/7) \\ \sin(3.\pi/7) & \cos(3.\pi/7) \end{pmatrix}$.

Au produit suivant $R^4 = R^3 \cdot R = \begin{pmatrix} \cos(3.\pi/7) & -\sin(3.\pi/7) \\ \sin(3.\pi/7) & \cos(3.\pi/7) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\pi/7) & -\sin(\pi/7) \\ \sin(\pi/7) & \cos(\pi/7) \end{pmatrix}$, on a encore « cosinus et sinus d'une somme ». Cette fois, la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec θ égal à $4.\pi/7$.

On recommence jusqu'à arriver à R^7 (c'est à dire $h \circ h \circ \dots \circ h$) et on a $\begin{pmatrix} \cos(7.\pi/7) & -\sin(7.\pi/7) \\ \sin(7.\pi/7) & \cos(7.\pi/7) \end{pmatrix}$.

On a la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. C'est l'homographie $t \mapsto \frac{-1.t + 0}{0.t - 1}$. Et c'est bien $t \mapsto t$ (oui, c'est une homographie !).

Un résultat général va donner

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}$$

et $\begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n.a) & -\sin(n.a) \\ \sin(n.a) & \cos(n.a) \end{pmatrix}$

Rappel $\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ et plus généralement $\sum_{i=p}^q b_i = b_p + b_{p+1} + b_{p+2} + \dots + b_q$ (avec $q - p + 1$ termes).

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.\alpha + b.\gamma & a.\beta + b.\delta \\ c.\alpha + d.\gamma & c.\beta + d.\delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \circ \\ \gamma & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.\alpha + b.\gamma & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ c.\alpha + d.\gamma & \circ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \circ & \beta \\ \circ & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ & a.\beta + b.\delta \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & c.\beta + d.\delta \end{pmatrix}$$

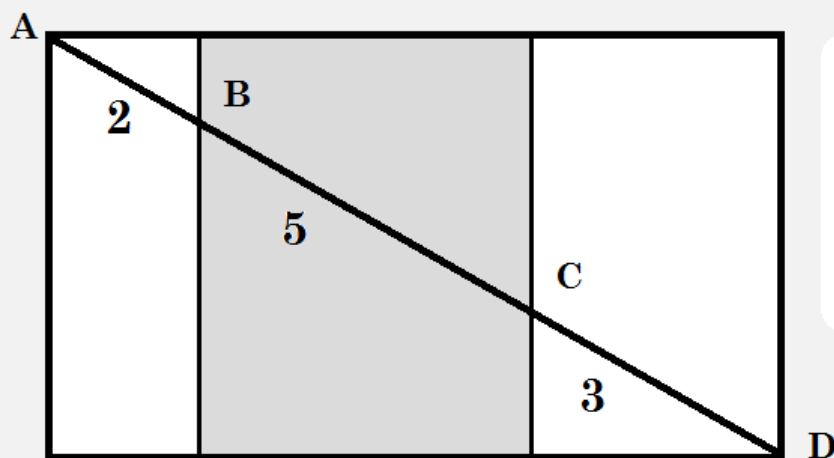
Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 21 & 33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 1 \\ 14 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \text{ (et on s'en fout),}$$

$\cos(\pi/7) \simeq 0,901$ à 10^{-3} près (mais évidemment, ça ne sert à rien, on est en maths).



**Sachant $AB = 2$
 $BC = 5$
 $CD = 3$
 calculez l'aire du
 rectangle gris.**

◀33▶

◀34▶

La relation \parallel définie sur \mathbb{Z} par $\forall(a, b) \in \mathbb{Z}^2, (a \parallel b) \Leftrightarrow (a|b \text{ ou } b|a)$ est elle une relation d'ordre ? d'équivalence ?
 La relation \parallel définie sur \mathbb{Z} par $\forall(a, b) \in \mathbb{Z}^2, (a \parallel b) \Leftrightarrow (a|b \text{ et } b|a)$ est elle une relation d'ordre ? d'équivalence ?

On commence par celle en *ou* et on teste quatre propriétés.

Quand le résultat est « évidemment vrai », je ne détaille pas.

Et quand il est évidemment faux, je donne un contre-exemple.

Réflexive	oui	$(a a \text{ ou } a a)$
Symétrique	oui	$(a b \text{ ou } b a) \Rightarrow (b a \text{ ou } a b)$
Transitive	non	$(2 \parallel 6)$ et $(6 \parallel 3)$ mais rien entre 2 et 3
Antisymétrique	non	$(2 \parallel 6)$ et $(6 \parallel 3)$ mais $2 \neq 6$
ni ordre ni équivalence		

La négation d'antisymétrique n'est pas « symétrique », c'est juste « il existe a et b vérifiant $(a \parallel b)$ et $(b \parallel a)$ et $a \neq b$ ».

Réflexive	oui	$(a a \text{ et } a a)$
Symétrique	oui	$(a b \text{ et } b a) \Rightarrow (b a \text{ et } a b)$
Transitive	oui	$(a b \text{ et } b a \text{ et } a c \text{ et } c a) \Rightarrow (a c \text{ et } c a)$
Antisymétrique	non	$(2 \parallel (-2))$ et $((-2) \parallel 2)$ mais $2 \neq -2$
équivalence et pas ordre		

En fait, si on a à la fois $a|b$ et $b|a$, alors on a $a = b$ (au signe près).

C'est une relation d'équivalence qui regroupe les éléments deux à deux : chaque entier et son opposé.

On ne confondra pas les lois (calcul) et les relations (affirmation).

Lois	Relations
$+, \times, \cup, \cap, \Delta, \wedge, \text{et, ou, o,}$	$=, \leq, \subset, \neq, \text{divise, } \sim, \equiv, >, \not\subset$

Avec une loi $*$, on peut calculer $(a * b) * c$.

Avec une relation \mathcal{R} , peut on écrire $(a \mathcal{R} b) \mathcal{R} c$? Essayez avec \neq ou avec « divise ».

.	Une relation \mathcal{R} sur un ensemble est "formellement" une application de $E \times E$ dans $\{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$. Pratiquement, on prend deux éléments a et b , et on dit $(a\mathcal{R}b)$ si a est ou non en relation avec b .
Réflexive	Tout élément est en relation avec lui même $\forall a \in E, a\mathcal{R}a$
Transitive	Les flèches se mettent bout à bout. $\forall (a, b, c) \in E^3, (a\mathcal{R}b \text{ et } b\mathcal{R}c) \Rightarrow (a\mathcal{R}c)$
Antisymétrique	Il ne peut pas y avoir de flèches dans les deux sens $\forall (a, b) \in E^2, (a\mathcal{R}b \text{ et } b\mathcal{R}a) \Rightarrow (a = b)$ Ce n'est pas la négation de "symétrique".
Symétrique	Il y a une flèche à l'aller il y a une flèche au retour $\forall (a, b) \in E^2, (a\mathcal{R}b) \Rightarrow (b\mathcal{R}a)$
Ordre	Relation réflexive, antisymétrique et transitive un ordre peut être total ($\forall (a, b), a \ll b$ ou $b \ll a$) ou partiel ($\exists (a, b), a \not\ll b$ et $b \not\ll a$)
Équivalence	Relation réflexive, symétrique et transitive la classe d'équivalence d'un élément a est l'ensemble des éléments en relation avec a : $Cl(a) = \{\alpha \in E \mid \alpha\mathcal{R}a\}$
l'égalité =	est à la fois relation d'ordre et d'équivalence.

<35>

Ces relations sur la MPSI sont elles réflexives, symétriques, anti-symétriques, transitives ?

a	avoir eu une fois la même note en colle de maths que
b	avoir le même prénom que
c	avoir les mêmes initiales que
d	ne pas avoir le même prénom que
e	être amoureux de
f	avoir voté (lors des élections de délégués) pour
g	venir du même département que

a	avoir eu une fois la même note en colle de maths que												
	Réflexivité												
Oui	(sauf s'il existe un élève n'ayant eu aucune note)												
	Symétrie												
Oui	Si a a eu la même note que b (en semaine n) alors b a eu la même note que a (en semaine n justement)												
	Antisymétrie												
Non	On donne deux élèves a et b ayant eu au moins une fois un 15 (par exemple) on a alors $a\mathcal{R}b$ et aussi $b\mathcal{R}a$ mais a n'est pas égal à b . Remarque : Dans une classe de vingt et un élèves où l'élève a n'a eu que des 0, l'élève b que des 1 jusqu'à l'élève t qui n'a eu que des 20, la relation serait anti-symétrique !												
	Transitivité												
Non	On doit bien pouvoir trouver une situation de ce type : <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>a</td> <td>12</td> <td>14</td> <td>16</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>12</td> <td>15</td> <td>17</td> </tr> <tr> <td>c</td> <td>13</td> <td>15</td> <td>17</td> </tr> </table> Alors on a $a\mathcal{R}b$ et aussi $b\mathcal{R}c$ mais on n'a pas $a\mathcal{R}c$	a	12	14	16	b	12	15	17	c	13	15	17
a	12	14	16										
b	12	15	17										
c	13	15	17										

Chaque fois que la réponse est oui, il faut une preuve solide avec des variables introduites. Par exemple pour la transitivité.

Rappelons la définition

$$\forall (a, b, c) \in E, (a\mathcal{R}b \text{ et } b\mathcal{R}c) \Rightarrow (a\mathcal{R}c)$$

et indiquons comment on rédige en maths (c'est à dire sans massacrer les symboles mais en rédigeant avec des mots)

Quantification	Rédaction	Remarque
$\forall(a, b, c) \in E^3$	On se donne a, b et c dans E	Ils sont quantifiés
$(a\mathcal{R}b \text{ et } b\mathcal{R}c) \Rightarrow$	On suppose $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$	Hypothèses
	On traduit « a a eu une même note que b »	
\Rightarrow	...	Raisonnement avec des mots
	« a a eu une même note que c »	
$\Rightarrow (a\mathcal{R}c)$	On reconnaît $a\mathcal{R}c$.	Conclusion

Si en revanche le résultat est faux, il suffit de donner un contre-exemple.

Par exemple pour la réflexivité :

$$\left(\overline{\forall a, a\mathcal{R}a}\right) = \left(\exists a \in E, a \not\mathcal{R}a\right)$$

On donne donc un vrai contre-exemple avec de vraies valeurs pour dire « lui ça ne marche pas ».

b	avoir le même prénom que
	Réflexivité
Oui	Évidemment
	Symétrie
Oui	Aussi
	Antisymétrie
Non	Ines a le même prénom que Ines, mais ce n'est pas la même Ines.
	Transitivité
Oui	Évidemment

Pour « avoir les mêmes initiales que », on a encore réflexivité, symétrie et transitivité.

On a encore « non antisymétrie », avec nos deux Ines B.

Une autre année, il se pourra que tous les élèves aient leurs propres initiales, et elle sera alors antisymétrique.

d	ne pas avoir le même prénom que
	Réflexivité
Non	Évidemment. Sauf dans une société où personne n'a de prénom, peut être ?
	Symétrie
Oui	Aussi
	Antisymétrie
Non	Si Enis n'a pas le même prénom que Ines et que Ines n'a pas le même prénom que Enis, allez vous prétendre que Ines et Enis sont une seule et même personne ?
	Transitivité
Non	Agathe n'a pas le même prénom que Aurore. Aurore n'a pas le même prénom que Agathe. Et pourtant Agathe a le même prénom que Agathe (mais elle ne le sait peut être pas).
e	être amoureux de
	Réflexivité
Oui	En tout bien tout honneur, le mariage entre vous même et vous même a-t-il été consommé ?
	Symétrie
Non	Vous avez dû vous rendre compte que a s'est pris un râteau auprès de b . Non, je ne donnerai pas de noms.
	Antisymétrie
Non	Je pense pouvoir trouver deux élèves a et b (distincts) qui sont amoureux mutuellement. En l'absence de couples formés, avec donc des flèches toutes à sens unique, le relation sera anti-symétrique.
	Transitivité
Non	Enfin, là je n'ai aucun élément de preuve.

f	avoir voté (aux élections) pour
	Réflexivité
Non	Tiphaine n'a pas voté pour elle même, puisque personne n'a voté pour Tiphaine.
	Symétrie
Non	Je connais un élève qui a voté pour Joseph, et pour qui Joseph n'a pas voté. Car Joseph a reçu plus de voix qu'il ne pouvait lui même en donner.
	Antisymétrie
Oui ? Non ?	Non. Peut être a-t-on eu Émilie qui a voté pour Josh et dans le même temps Josh qui a voté pour Émilie (liste commune !). Oui. On ne connaît aucun cas où a a voté pour b et en même temps b aurait voté pour a .
	Transitivité
Oui ? Non ?	J'essaie d'imaginer le contre-exemple. Émilie vote pour Josh (et Quentin). Josh vote pour Émilie. Mais Emilie n'a pas voté pour elle même.

Pour « venir du même département que », la relation est évidemment réflexive, symétrique, transitive, mais pas antisymétrique (je suis sûr que Mahmoud et Maryem viennent du même département).

Il reste un doute pour « réflexive ». Naïma vient du lycée Louis Pasteur à Lagos qui n'est dans aucun département.

A moins que le Nigeria ne soit subdivisé en départements (sur Wikipedia, j'ai trouvé 36 états plus Abuja et 774 « zones de gouvernement local », mais pas de département).

◀36▶

♡ Vrai ou faux :	- 1 -	$(a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)) \Rightarrow (a_n + b_n = o\left(\frac{1}{n}\right))$
	- 2 -	$(a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)) \Rightarrow (a_n + b_n = O\left(\frac{1}{n}\right))$
	- 3 -	$(a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)) \Rightarrow (a_n + b_n = o\left(\frac{1}{n}\right))$
	- 4 -	$(a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)) \Rightarrow (a_n \cdot b_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right))$
	- 5 -	$(a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)) \Rightarrow (a_n \cdot b_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right))$
	- 6 -	$(a_n = o(n^2) \text{ et } b_n = o(n)) \Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} = o(n)\right)$

Rappel : $a_n = o(e_n)$ signifie $\frac{a_n}{e_n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

En particulier, $a_n = o(1)$ signifie que a_n tend vers 0.

$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ signifie que « même $n \cdot a_n$ tend vers 0, et donc à plus forte raison, a_n tend vers 0 ».

$a_n = O(e_n)$ signifie $\frac{a_n}{e_n}$ est bornée.

- 1 -	$(a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)) \Rightarrow (a_n + b_n = o\left(\frac{1}{n}\right))$
	VRAI

En effet $\frac{a_n + b_n}{1/n} = \frac{a_n}{1/n} + \frac{b_n}{1/n}$ tend vers 0.

- 2 -	$(a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)) \Rightarrow (a_n + b_n = O\left(\frac{1}{n}\right))$
	VRAI

En effet $\frac{a_n + b_n}{1/n} = \frac{a_n}{1/n} + \frac{b_n}{1/n}$ est la somme d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle (donc bornée).

- 3 -	$(a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)) \Rightarrow (a_n + b_n = o\left(\frac{1}{n}\right))$
	VRAI

En effet $\frac{a_n + b_n}{1/n} = \frac{a_n}{1/n} + \frac{b_n}{1/n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{a_n}{1/n^2} + \frac{b_n}{1/n}$.

On dira aussi que tout $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est un $o\left(\frac{1}{n}\right)$ (les *borne* tendent vers 0 plus vite que $\frac{1}{n}$).

- 4 -	$(a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)) \Rightarrow (a_n \cdot b_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right))$
	VRAI

En effet, dans $\frac{a_n \cdot b_n}{1/n^3} = \frac{a_n}{1/n^2} \cdot \frac{b_n}{1/n}$ on a un terme borné et un terme de limite nulle. C'est « limite nulle » qui l'emporte.

- 5 -	$(a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)) \Rightarrow (a_n \cdot b_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right))$
	VRAI

Si le terme est un $o(c_n)$ (le quotient tend vers 0), alors c'est a fortiori un $O(c_n)$ (le quotient est borné).

On peut écrire $o(c_n) \Rightarrow O(c_n)$. Ou même $o(c_n) \subset O(c_n)$. On évitera $o(c_n) = O(c_n)$ car « une seul sens d'implication est vrai ».

- 6 -	$(a_n = o(n^2) \text{ et } b_n = o(n)) \Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} = o(n)\right)$
	FAUX

Par (contre)-exemple $a_n = b_n = \sqrt{n}$. On a bien $\sqrt{n} = o(n^2)$ et $\sqrt{n} = o(n)$ ⁹. Et le quotient $\frac{a_n}{b_n}$ vaut 1.

Et on peut faire encore pire avec des choses sans limite à la fin.

◀ 37 ▶ On prend l'ensemble des suites réelles jamais nulles. On définit la relation (a_n) est équivalente à (b_n) notation $a_n \sim b_n$ si le rapport $\frac{a_n}{b_n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Montrez que c'est une relation d'équivalence.

Réflexivité. On se donne une suite (a_n) , on constate que le rapport $\frac{a_n}{a_n}$ vaut toujours 1. Il tend donc vers 1 quand n tend vers l'infini.

Symétrie. On se donne (a_n) et (b_n) . On suppose $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

On traduit que $\frac{a_n}{b_n}$ converge vers 1.

Il s'ensuit que $\frac{b_n}{a_n}$ converge vers $\frac{1}{1}$.

On reconnaît $b_n \sim a_n$.

Attention :

Transitivité. On se donne (a_n) , (b_n) et (c_n) . On suppose $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ et $b_n \sim_{n \rightarrow +\infty} c_n$.

On traduit que $\frac{a_n}{b_n}$ et $\frac{b_n}{c_n}$ convergent vers 1.

On multiplie : $\frac{a_n}{b_n} \times \frac{b_n}{c_n}$ converge vers 1×1 .

On reconnaît $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} c_n$.

◀ 38 ▶ En notant Ω l'univers des humains, et $\tau(a, t)$ la proposition « tromper a à l'instant t », que signifie

$\forall a \in \Omega, \exists (t_0, \dots, t_{999}) \in \mathbb{R}^{1000}, \forall i \in \text{range}(999), t_i < t_{i+1}, \forall i \in \text{range}(1000), \tau(a, t_i)$	
$\forall A \subset \Omega, (\text{Card}(A) = 1000) \Rightarrow (\forall a \in A, \exists t_a \in \mathbb{R}, \tau(a, t_a))$	
$\forall A \subset \Omega, (\text{Card}(A) = 1000) \Rightarrow (\forall a \in A, \forall T \subset \mathbb{R}, ((\text{Card}(T) \geq 1000) \Rightarrow (\exists t_a \in T, \tau(a, t_a))))$	

Prenez un chewing-gum, Émile !

9. on note au passage que l'égalité utilisée ici n'est pas transitive... étonnant, un peu comme ces « +C^{te} » avec la constante C qui peut changer de ligne en ligne

◀39▶

Démontrez le théorème de Pythagore, par la méthode de Bhaskara.

Preuve du théorème de Pythagore par Bhaskara de Bijjada Bida (12eme siècle)

1

Nommons déjà les trois côtés classiquement a , b et c .
Le carré central (car c'en est un) a pour côté $b-a$.

2

Le puzzle sous sa forme initiale a pour aire c^2 .

3

Assemblons les pièces autrement.

4

Isolons le carré de côté a .

5

Sous la forme finale, son aire est $a^2 + b^2$.

◀39▶

Calculez $\int_0^1 t^2 \cdot 2^t \cdot dt$.

L'application est continue, l'intégrale existe. On écrit en fait $t^2 \cdot e^{t \cdot \ln(2)}$, et on intègre deux fois par parties.

t^2	\leftrightarrow	$2 \cdot t$
$2^t = e^{t \cdot \ln(2)}$	\leftrightarrow	$\frac{e^{t \cdot \ln(2)}}{\ln(2)}$

et on refait de même.

Ou alors par méthode a priori ¹⁰

10. là où elle vous dérouté par rapport à la terminale, c'est que ce n'est pas « résoudre » ou « calculer », mais « prendre l'initiative de tenter une primitive de cette forme »... putain, que c'est nouveau et original...

on pose une primitive sous la forme prévisible : $t \mapsto (a.t^2 + b.t + c).e^{t.\ln(2)}$

on la dérive : $t \mapsto (2.a.t + b).2^t + (a.t^2 + b.t + c).\ln(2).2^t$.

on lui demande de valoir $t \mapsto t^2.2^t : a.\ln(2) = 1$

$$2.a + \ln(2).b = 0$$

$$b + c.\ln(2) = 0$$

on trouve a, b et c ,

pour être rigoureux, on propose/on vérifie $t \mapsto \left(\frac{t^2}{\ln(t)} - \frac{2.t}{(\ln(2))^2} + \right.$

$$\left. \frac{2}{(\ln(2))^3} \right).2^t$$

mais tout a été fait pour ça

On trouve $\frac{2}{\ln(2)} - \frac{4}{(\ln(2))^2} + \frac{2}{(\ln(2))^3}$

◀40▶

Simplifiez $(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (-a + b + c)^2$.

Simplifiez $(a + b + c)^4 + (a + b - c)^4 + (a - b + c)^4 + (-a + b + c)^4$.

Simplifiez $\sum_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{-1, 1\}^n} (\epsilon_1.\alpha_1 + \dots + \epsilon_n.\alpha_n)^3$ où les α_k sont des réels donnés.

$(a + b + c)^2 =$	$a^2 + b^2 + c^2 + 2.a.b + 2.a.c + 2.b.c$
$(a + b - c)^2 =$	$a^2 + b^2 + c^2 + 2.a.b - 2.a.c - 2.b.c$
$(a - b + c)^2 =$	$a^2 + b^2 + c^2 - 2.a.b + 2.a.c - 2.b.c$
$(-a + b + c)^2 =$	$a^2 + b^2 + c^2 - 2.a.b - 2.a.c + 2.b.c$

La somme vaut $4.(a^2 + b^2 + c^2)$. Tous les double-produits se sont effacés.

En partant de $(a + b + c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 4.(a.b^3 + a^3.b + a.c^3 + a^3.c + b.c^3 + b^3.c) + 6.(a^2.b^2 + a^2.c^2 + b^2.c^2) + 12.(a.b.c^2 + a.c.b^2 + b.c.a^2)$ et en changeant des signes, on aboutit à :

$$(a + b + c)^4 + (a + b - c)^4 + (a - b + c)^4 + (-a + b + c)^4 = 4.(a^4 + b^4 + c^4) + 24.(a^2.b^2 + a^2.c^2 + b^2.c^2)$$

Il n'y a pas de belle généralisation.

En revanche, en attaquant par récurrence, on peut montrer :

$$(a)^2 + (-a)^2 = 2.a^2$$

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 + (-a - b)^2 + (-a + b)^2 = 4.(a^2 + b^2)$$

$$(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (-a + b + c)^2 + (-a + b - c)^2 + (-a - b + c)^2 + (-a - b - c)^2 + (a - b - c)^2 = 8.(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\sum_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{-1, 1\}^n} (\epsilon_1.\alpha_1 + \dots + \epsilon_n.\alpha_n)^3 = 2^n . ((a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_n)^2)$$

avec 2^n termes dans la première somme.

◀41▶

♥ Qui est le plus grand ? $3^{\ln(2)}$ ou $2^{\ln(3)}$?

Ils sont égaux. Calculez leur logarithme.

◀42▶

♥ Calculez $(x \mapsto x^a)'$ (a positif fixé) et $(a \mapsto x^a)'$ (x positif fixé).

♥ Donnez le maximum de $x \mapsto x^{1/x}$ sur \mathbb{R}^{+*} .

$(x \mapsto x^a)'$ = $(x \mapsto a.x^{a-1})$ classiquement .

$(a \mapsto x^a)'$ = $(a \mapsto e^{a.\ln(x)})'$ = $(a \mapsto \ln(x).x^a)$ ne pas oublier le logarithme.

On écrit $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$.

Comme l'exponentielle est croissante, le maximum de $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ est atteint quand $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ atteint son maximum. On dérive, on dresse un tableau de variations. le maximum est en e . Et il vaut $\sqrt[e]{e}$ dont on n'a pas grand chose à dire.

◀43▶

On m'a dit : « $2^{x/3} = 3^{2/x}$ ». Mais que vaut alors $x^{2/3}$?

Si, je sais calculer ! C'est juste que ce calcul n'est pas en base 10.
Alors, il est en base combien ?

$$\begin{array}{r} 4 \ 5 \ 0 \\ + \ 3 \ 4 \ 6 \\ + \ 6 \ 5 \ 1 \\ = \ 1 \ 1 \ 1 \ 7 \end{array}$$

L'équation $2^{x/3} = 3^{2/x}$ donne, en passant au logarithme : $\frac{x}{3} \cdot \ln(2) = \frac{2}{x} \cdot \ln(3)$.

On récupère par produit en croix : $x^2 = \frac{6 \cdot \ln(3)}{\ln(2)}$ (deux solutions pour x).

On termine : $x^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot \ln(3)}{\ln(2)}}$

Posons l'addition en notant b la base

$$\begin{array}{r} 4 \ 5 \ 0 \\ + \ 3 \ 4 \ 6 \\ + \ 6 \ 5 \ 1 \\ \hline 1 \ 1 \ 1 \ 7 \end{array} :$$

$$(4n^2 + 5n) + (3n^2 + 4n + 6) + (6n^2 + 5n + 1) = (n^4 + n^3 + n + 7)$$

On simplifie $n^3 = 12n^2 + 13n$.

On élimine la solution $n = 0$ (c'est quoi la base 0 ? riens).

On élimine aussi -1 et il ne reste que **la base 13**

On vérifie : • unités : six plus un égalent sept

• b-aines : cinq plus quatre plus cinq égalent quatorze, je pose un et je retiens une treizaine,

• b^2 -aines quatre plus trois plus six plus une retenue égalent quatorze : je pose un et je retiens un.

◀44▶

#1- Que donne ce script en Python :

```
a, b = '15', '5'
print(a+b)
```

2- Que donne ce script en Python :

```
a, b = '15', '5'
print(a-b)
```

3- Que donne ce script en Python :

```
a, b = '15', 5
print(a*b)
```

L'exécution de #1 donne 155, car ici a et b sont des chaînes de caractères.

L'exécution de #2 donne une erreur, car ici a et b sont des chaînes de caractères.

L'exécution de #3 donne 1515151515, car ici a est une chaîne de caractères et b un multiplicateur.

Multiplier une chaîne de caractères par 2 c'est la dupliquer.

Ici, on la multiplie par 5.

La prof de maths veut qu'on s'intéresse aux cubes de son cours. Son collègue lui présente "Leçons" de Darboux, après avoir montré Bézout (Thalès reste à faire), mais il préférerait changer les maths (il aime les maths bien choisies). Les étudiantes réclament des chambres pour leurs maths ; elles trottent dans les facs et ne trouvent pas les maths débiles. Des étudiants s'entraînent à calculer en cent leçons.

Un dernier calcul et on s'en va, même si personne n'est jamais assez fort pour ce calcul.

La prof de maths veut qu'on s'intéresse aux cubes de son cours. Son collègue lui présente "Leçons" de Darboux, après avoir montré Bézout (Thalès reste à faire), mais il préférerait changer les maths (il aime les maths bien choisies). Les étudiantes réclament des chambres pour leurs maths ; elles trottent dans les facs et ne trouvent pas les maths débiles. Des étudiants s'entraînent à calculer en cent leçons.

Un dernier calcul et on s'en va, même si personne n'est jamais assez fort pour ce calcul.

◀45▶

Un cadeau des frères Deslandes^a : tous les jours de la semaine, un garçon sort de l'école à 16 heures, et sa mère vient le chercher en voiture (elle arrive à seize heures pile et le ramène à la maison). Un jour, le garçon finit à 15 heures et n'a pas envie d'attendre. Il avance sur le chemin du retour. Sa mère qui n'était pas au courant part normalement en voiture (vitesse constante), le croise et le ramène alors immédiatement à la maison. Ils arrivent dix minutes plus tôt que d'habitude. Combien de temps le garçon a-t-il marché ?

a. il y a eu trois frères Deslandes, venant de Blomet, passés par la MPSI2, ayant intégré ENS, Mines de Nancy et ENS encore ; l'ainé ayant collé en MPSI2, exercé dans les banques puis devenu prof, et les deux extrêmes ayant publié un livre d'exercices de mathématiques originaux chez Ellipses avec préface de Cédric Villani

Solution telle que rédigée justement par Guillaume ou Clément :

La bonne question à se poser : à quelle heure le petit garçon a-t-il rencontré sa maman sur la route ?

Sa maman a fait un trajet de dix minutes plus court que d'habitude.

Elle a donc fait demi-tour cinq minutes plus tôt que d'habitude, c'est à dire non plus à 16h00 mais à 15h55.
Le petit garçon a donc marché 55 minutes.

◀46▶ * Résolvez $\cos^{(n)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ d'inconnue entière n .

Les dérivées successives du cosinus sont connues : \cos $-\sin$ $-\cos$ \sin et on recommence.

On a donc

$\cos^{(0)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos^{(2)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$	$\cos^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
non	non	oui	non

et plus généralement

$\cos^{(4.k)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos^{(4.k+1)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos^{(4.k+2)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$	$\cos^{(4.k+3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
non	non	oui	non

On a donc $S = \{4.k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$

Rappel : les réponses $S = \{4.k + 2\}$ ou $S = \{4.k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ sont erronées, et montrent qu'il vous reste un peu de chemin à faire pour maîtriser les notations mathématiques.

C'est normal, et ce n'est pas grave.

Ce qui est grave, c'est de croire que vous les maîtrisez, ou pire encore, de dire « bah, $S = \{4.k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ et $S = \{4.k + 2\} \mid k \in \mathbb{N}$ c'est pareil ».