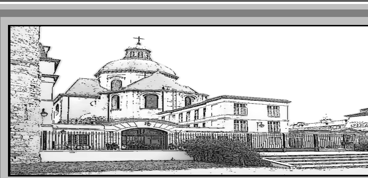
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 15 septembre
M.P.S.I.2



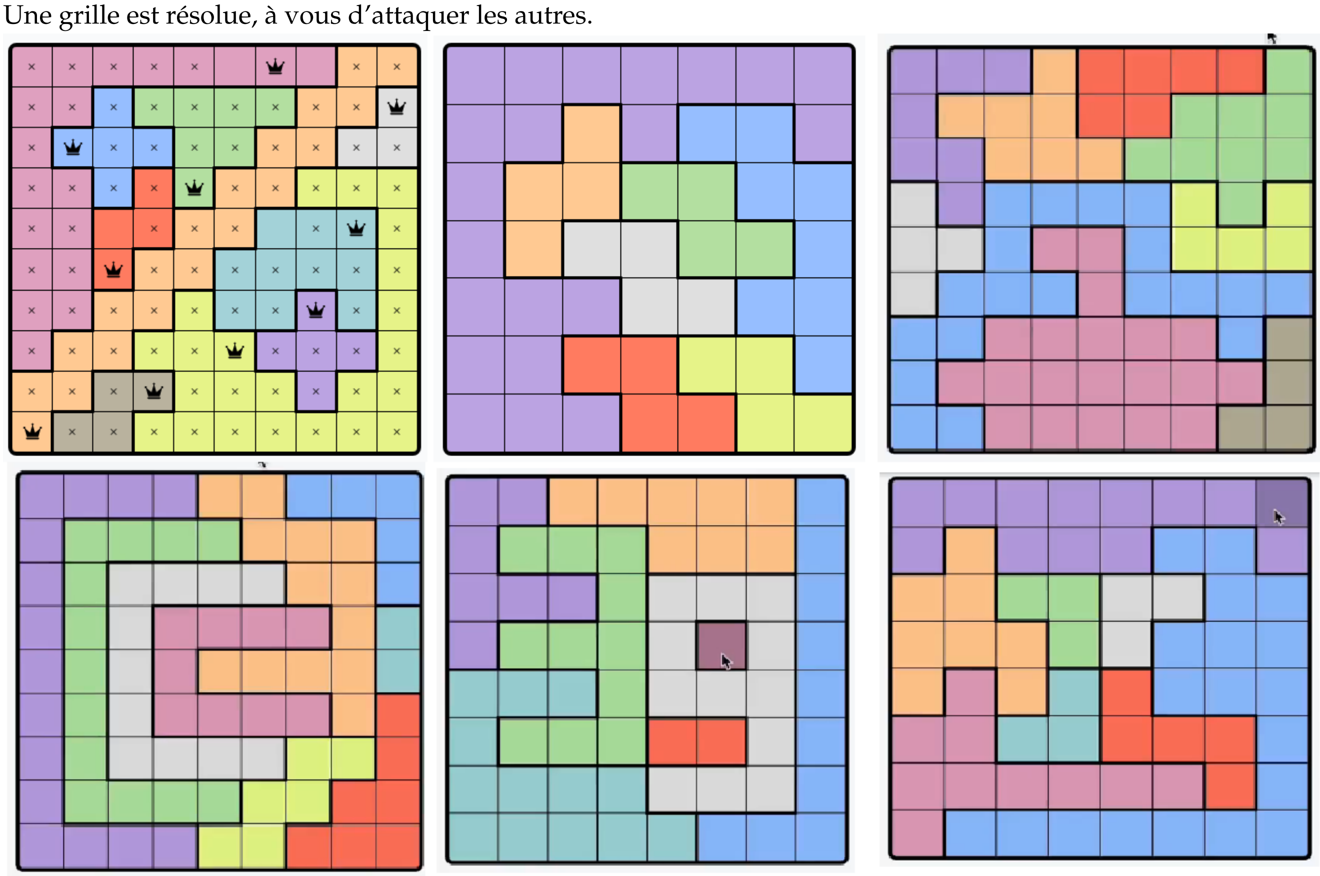
2024 2025

TD01

◁0▷ Sleon une édtue de l'Uvinertisé de Cmabrigde, l'odrre des ltteers dans un mtos n'a pas d'ipmrotncae, la suele coshe ipmrotnate est que la pmeirère et la drenèire soit à la bnnoe pclae. Le rsete peut êrte dans un dsérorde ttoal et vuos puoevz tujoruos lrie snas porlblème. C'est prace que le creaveu hmauin ne lit pas chuaqe ltetre elle-mmêe mias le mot comme un tuot.

eucalyptus	enchanté	circulaire	CREVASSE	DOUCE	IMAGINER
écharpe	cramoisi	minimiser	MIMOSAS	CAPABLE	VAUTOUR
fougère	dentelle	confondu	CHEMIN	HAUTEUR	CENDRE
médecine	isochrone	grandeur	TOURNI	VOITURE	FLEUVE
internet	satisfait	handicap	RENARD	POLITESSE	HAUTEUR
délicat	terrasse	grandeur	PARACHUTE	RETOUR	MATERNEL

◁1▷ Queens est un jeu diffusé sur LinkedIn. Il faut remplir une grille, avec une reine par ligne, une reine par colonne et une reine par « maison ». De plus, deux reines ne peuvent pas être sur deux cases contigües (même en diagonale). Une grille est résolue, à vous d'attaquer les autres.



◁2▷ Un élève dit « comme f est croissante, alors la suite « $u_{n+1} = f(u_n)$ » est croissante.
Que pensez vous de $f = x \longmapsto x - 1$?

◁3▷ Un élève dit $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > x + 2$ par croissances comparées en $+\infty$.

Qu'en pensez vous ?

◁4▷ On rappelle : $\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)}$. On déduit $\sin(\pi/6) = \sqrt{3}$ et $\cos(\pi/6) = 3$.
Vrai ou faux : $(1 = 2\ et\ 4 = 3) \Rightarrow (5 = 5)$, en additionnant.
Vrai ou faux : $(1 + 4 = 2 + 3) \Rightarrow (1 = 2\ et\ 4 = 3)$, en identifiant.
Vrai ou faux :$(a\ et\ \overline{a}) \Rightarrow a$.
Vrai ou faux :$(a\ ou\ \overline{a}) \Rightarrow a$.
Vrai ou faux : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1 \Rightarrow (x^2 > -1)$.
« Il avala le poison et mourut sur le champ » = « il mourut sur le champ et avala le poison ».

◁5▷ ♡ Voici un « raisonnement » ; en quoi est il faux ?

on sait	$\forall(a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ (a < b \text{ et } b < c) \Rightarrow (a < c)$
et aussi	$\forall(a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ (a > b \text{ et } b > c) \Rightarrow (a > c)$
de plus	$a \neq b$ signifie $a < b$ *ou* $a > b$
on a donc	$\forall(a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ (a \neq b \text{ et } b \neq c) \Rightarrow (a \neq c)$

◁6▷ Vrai ou faux :

a	$\forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant 2) \Rightarrow (x^2 \geqslant 4)$
b	$(\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 2) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 4)$

◁7▷ ♡ (a) Résolvez l'équation $\cos(x) + \sin(x) = 1$ d'inconnue réelle x (pensez à $A.\cos(x - \varphi)$ avec A et φ bien choisis).
(b) Résolvez $\cos(x) + \sin^2(x) = 1$ d'inconnue réelle x (pensez à tout ramener en $\cos(x)$).
(c) Résolvez $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ d'inconnue réelle x.
(d) Résolvez $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1$ d'inconnue réelle x (pensez à comparer $\cos^3(x)$ et $\cos^2(x)$ puis $\sin^3(x)$ et $\sin^2(x)$ puis sommez).
(e) Résolvez $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1$ d'inconnue réelle x.

◁8▷ « Un ministre, ça ferme sa gueule ou ça démissionne ».
Mettez sous forme d'implication (du type $p \Rightarrow q$ mais aussi $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$).

◁9▷ ♡ Montrez : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(2.\theta) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(\theta) \notin \mathbb{Q}$.

◁10▷ Résolvez $x^2 + \sqrt{2} \leqslant (1 + \sqrt{2}).x$ d'inconnue réelle x.

◁11▷ Montrez $\left(e^{\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)} - 1\right)^2 = 2$.

◁12▷ Montrez que si la moyenne de vos notes vaut 10, alors au moins une de vos notes dépasse 10 (au sens large).

◁13▷ `Retrouvez les stations de métro (et R.E.R.) dont voici les anagrammes` *(Ouest)* :
Pendu atrophié. Facho en vue. Parle du poème. Humain à réinventer. Joli canard éventré.

◁13▷ ♣ On demande de calculer $\int_0^1 \frac{dt}{i + t}$.
L'élève Herth-Etpamur écrit $\ln(1 + i) - \ln(i) = \ln\left(\frac{1 + i}{i}\right) = \ln(\sqrt{2}.e^{-i.\pi/4})$ et trouve $\frac{\ln(2)}{2} - i.\frac{\pi}{4}$. Montrez que sa réponse est bonne *(même si sa méthode est fumeuse)* en pensant à la quantité conjuguée.

◁14▷ Vrai ou faux :
a - si $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont irrationnels, alors $\cos(2.\alpha)$ est irrationnel.
b - si $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont rationnels, alors $\cos(2.\alpha)$ est rationnel.
c - si $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont irrationnels, alors $\cos(2.\alpha)$ ou $\sin(2.\alpha)$ est irrationnel.
d - si $\cos(2.\alpha)$ est irrationnel, alors $\cos(\alpha)$ est irrationnel.
e - si $\cos(2.\alpha)$ ou $\sin(2.\alpha)$ est irrationnels, alors $\cos(\alpha)$ ou $\sin(\alpha)$ est irrationnel.

◁15▷ Montrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x \notin \mathbb{Q}) \Leftrightarrow \left(\forall(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4,\ (a + b.x = c + d.x) \Leftrightarrow \big((a = c)\ et\ (b = d)\big)\right)$.

◁16▷ ♣ Le loir et le chapelier fou mentent certains jours et sont sincères d'autres jours *(c'est encore plus stupide que mes* *boulangers jumeaux).*

jour	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
loir	menteur	sincère	menteur	sincère	sincère	sincère	menteur
chapelier fou	sincère	sincère	sincère	sincère	menteur	menteur	menteur

Si les deux disent “*on est lundi*”, pouvez vous déduire quel jour on est ?
Si les ai entendu dire “*hier je mentais*”, pouvez vous déduire qui ment ?
Le loir dit “*si on demandait au chapelier si on est mercredi, il dirait oui*”, pouvez vous déduire le jour.
Le loir dit “*hier je mentais*”. Le chapelier peut il ajouter “*tiens, moi c'est après-demain que je mens*” ?

◁17▷ ♡ Résolvez $x^2 + (7.i - 2).x = 11 + 7.i$ d'inconnue complexe x.

◁18▷ ♡ Montrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ \Big((\cos(x) \in \mathbb{Q})\ \Rightarrow\ (\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n.x) \in \mathbb{Q})\Big)$.

A-t-on $\forall x \in \mathbb{R},\ \Big((\cos(x) \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n.x) \in \mathbb{Z})\Big)$.

A-t-on $\forall x \in \mathbb{R},\ \Big((\cos(x) \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n.x) \in \mathbb{Q})\Big)$.

Six personnes sur cinq ne comprennent rien aux nombres rationnels.

◁19▷ On veut résoudre $216.x^3 - 432.x^2 + 270.x = 52 + \sqrt{2}$ d'inconnue réelle x. Calculez la somme des racines, la somme de leurs carrés, la somme de leurs inverses *(inutile d'utiliser les quantités conjuguées, gardez les dénominateurs laids...)*.

En ajustant α et β dans le changement de variable $c = \alpha.x + \beta$, mettez l'équation sous la forme $4.c^3 - 3.c = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Démontrez : $4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta) = \cos(3.\theta)$ pour tout réel θ.

Calculez $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$ (indication : $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = ?$).

Résolvez l'équation initiale.

Le professeur pose cette fois l'équation d'inconnue réelle x $48.x^3 - 72.x^2 + 27.x - 4 = 0$. L'élève Tonku de Tachaiz applique la méthode précédente et dit qu'il arrive à $\cos(3.\theta) = \dfrac{5}{3}$. Prouvez qu'il a raison *(en expliquant le changement de variable)*.

Vous vous seriez sans doute arrêté là, perplexe. Mais Tonku de Tachaiz ne connaît pas ses formules de Moivre et Euler et cherche à résoudre $\dfrac{e^{3.\theta} + e^{-3.\theta}}{2} = \dfrac{5}{3}$ (quelle est son erreur ?). Résolvez son équation en l'inconnue $e^{3.\theta}$. Déduisez la valeur de θ.

Trouvez la racine réelle de l'équation initiale.

◁20▷ On rappelle la notation : $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times a_3 \ldots \times a_n$ (par exemple : $\prod_{k=1}^{n} k = n!$).

Simplifiez : $\prod_{k=1}^{n} k^2$ et $\prod_{k=1}^{n} 2^k$ et $\prod_{k=1}^{n} 2^n$.

Simplifiez pour tout n $\prod_{k=-n}^{n} k$.

Montrez que $\dfrac{27!}{(9!)^3}$ est entier ; est il multiple de 3 ?

◁21▷ Quarante élèves attendent d'aller en TD d'informatique, répartis en trois groupes A, B et C.
Quelques élève passent du groupe A au groupe B. Et le nombre d'élèves du groupe C double car quelques élèves qu'on attendait encore reviennent de la cantine.
Il y a maintenant autant d'élèves dans chacun des trois groupes ? Combien d'élèves au total ? (ne comptez pas dans la salle, il ne s'agit pas forcément de notre classe).

◁22▷ ♡ L'équation $x^2 + b.x + c = 0$ d'inconnue réelle x admet pour racines $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$. Calculez $\tan(\alpha + \beta)$ *(si elle existe...)*.

Rappel : $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *pour x hors de* $\left\{\dfrac{2.k+1}{2}.\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, *et* $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}$ *tant que tout ceci existe.*

L'équation $x^3+b.x^2+c.x+d=0$ d'inconnue réelle x admet pour racines $\tan(\alpha)$, $\tan(\beta)$ et $\tan(\gamma)$. Calculez $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$.

◁23▷ Associez les propriétés à leur nom

propriété				nom
$a\neq b$	$\Rightarrow$	$f(a)\neq f(b)$		f est croissante
a tend vers b	$\Rightarrow$	$f(a)$ tend vers $f(b)$		f est continue
$a<b$	$\Rightarrow$	$f(a)<f(b)$		f est continue pour le physicien
$a=b$	$\Rightarrow$	$f(a)=f(b)$		f est une application
$a\simeq b$	$\Rightarrow$	$f(a)\simeq f(b)$		f est injective
$a\leqslant b$	$\Rightarrow$	$f(a)\leqslant f(b)$		f est strictement croissante

◁24▷ ♡ On pose $f=a.\cos+b.\sin$.
Ajustez a et b pour avoir $f(\pi/3)=f(2.\pi/3)=0$.
Ajustez a et b pour que f atteigne son maximum égal à 5 en $\pi/3$.
Pouvez vous ajuster a et b pour que le maximum de f soit 3 et son minimum -4.
Ajustez a et b pour avoir $f(0)=1$ et $Sup\{|f(t)|\ \ t\in\mathbb{R}\}=2$ (combien de possibilités ?).

◁25▷ ♡ L'équation $x^2+(1+i).x+$  $=0$ d'inconnue complexe x admet pour racine $1-i$. Trouvez la valeur sous la tache et la valeur de l'autre racine.

◁26▷ Résolvez l'équation $\log_2(x)+\log_x(2)=4$ d'inconnue réelle x.
On rappelle que pour a strictement positif $\log_a(x)$ est le réel y vérifiant $a^y=x$.

◁27▷ ♡ Calculez les dérivées premières des applications suivantes :

$x\longmapsto\dfrac{1}{(\ln(x))^2}$	$x\longmapsto e^{\cos(x)}$	$x\longmapsto x.\cos(\ln(x))+x.\sin(\ln(x))$	$x\longmapsto\dfrac{x}{e^x}$

◁28▷ Résolvez $\cos^{(n)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$ d'inconnue entière n. (début déjà posé).
On pose $f=x\longmapsto\cos(2.x)$. Résolvez $f^{(n)}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=0$ d'inconnue entière n.
Résolvez $f^{(n)}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\in\mathbb{Z}$ d'inconnue entière n.
Résolvez $f^{(n)}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\in\mathbb{N}$ d'inconnue entière n.

◁29▷ ♡♣ Calculez ce produit factoriel $\displaystyle\prod_{k=0}^{30}(k!)^{((-1)^k)}$.

◁30▷ Donnez les racines quatrièmes de $721+5280.i$.

◁31▷ ♡ Calculez $(1+i)^2$. Résolvez $z^2+2.i.z+2.i=1$ d'inconnue complexe z.

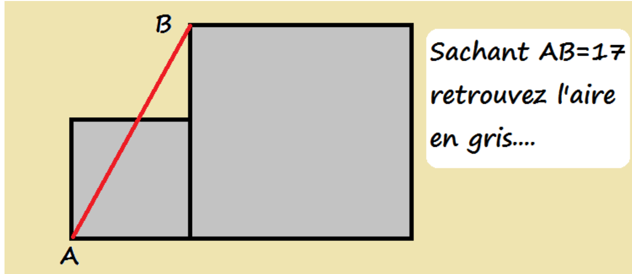
◁32▷ On veut résoudre l'équation $z^2+(i-3).z+(32+4.i)=0$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$. Calculez le discriminant Δ de ce trinôme.
On cherche alors un complexe δ de la forme $\alpha+i.\beta$ avec αet β réels vérifiant $\delta^2=\Delta$ (qu'on ne peut pas noter $\delta=\sqrt{\Delta}$ car on est dans $\mathbb{C}$ [1]). Calculez $\alpha^2-\beta^2$, $2.\alpha.\beta$ et aussi $\alpha^2+\beta^2$ (pensez au module...).
Déduisez les valeurs possibles pour le couple $(\alpha,\ \beta)$.
Trouvez les solutions de l'équation.

◁33▷ Montrez par récurrence sur n plus grand que 5 : $3^n\leqslant\dfrac{(2.n)!}{(n!)^2}\leqslant 4^n$.

◁34▷ ♡ Calculez $\displaystyle\int_0^1 4^x.dx$.

1. dans $\mathbb{R}$,on choisit de prendre comme racine carrée le réel positif, mais dans $\mathbb{C}$, poseriez vous $\sqrt{-2.i}=1-i$ ou $\sqrt{-2.i}=i-1$

Sachant $x = 45678^3 - 45676^3$,
calculez $\sqrt{\dfrac{x-2}{6}}$.



◃35▹ Les deux figures en gris sont des carrés.

◃36▹ Comparez pour l'ordre usuel : $3.\log_2(1000)$ et $10.\log_{10}(1024)$.

◃37▹ Calculez $\int_0^1 2^x.3^{-x}.4^x.5^{-x}.dx$.

◃38▹ ♡ Qui est le plus grand : 3^e ou e^3 ? *(calculatrice interdite, étude de $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ judicieuse).*

◃39▹ ♡ On définit $f = (x,y) \longmapsto (3.x+2.y,\ 4.x+5.y)$. Montrez qu'elle n'est pas une bijection de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ dans lui même.
On pose $E = \{0,1,2,\dots 18\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 19. Montrez que f est une bijection de $E\times E$ dans lui même.
On pose $E = \{0,1,2,\dots 20\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 21. Montrez que f n'est pas une bijection de $E\times E$ dans lui même.
On pose $E = \{0,1,2,\dots 19\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 20. f est elle une bijection de $E\times E$ dans lui même.
(pour la bijectivité, la bonne démarche sera de trouver la bijection réciproque).

◃40▹ ♣ On imagine qu'on définit une généralisation de la fonction factorielle de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ en lui demandant d'être affine sur chaque segment $[n,\ n+1]$ pour n dans $\mathbb{N}$ *(par exemple $(3,4)! = 13,2$ car $3! = 6$ et $4! = 24$)*. Est elle alors injective ? Est elle surjective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$? Si non, de $\mathbb{R}^+$ dans quoi ?
Calculez $(5,2)!$ et $(52/7)!$.
Calculez $\int_0^4 (x)!.dx$.
Résolvez l'équation $(x)! = 2017$ d'inconnue réelle x.

◃41▹ ♡ Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrez (par deux implications) que f est injective si et seulement si $f\circ f$ est injective.
Montrez (par deux implications) que f est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f\circ f$ est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

◃42▹ On pose $f(\alpha) = 1$, $f(\beta) = 2$, $f(\gamma) = 1$, $f(\delta) = 2$ et $f(\varepsilon) = 3$. Combien existe-t-il d'applications g de $\{1,2,3\}$ (noté N) dans $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ (noté Γ) vérifiant $f\circ g = Id_{\{1,2,3\}}$? Combien existe-t-il d'applications h de $\{1,2,3\}$ dans $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ vérifiant $h\circ f = Id_{\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}}$?

◃43▹ ♡ Montrez que l'application tan est injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (indication : π est irrationnel).
Est elle bijective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$?
Montrez que l'application sin est injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$?
Montrez que l'application cos n'est pas injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$
Qu'en est il de $x \longmapsto \cos(2.x+1)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
Qu'en est il de $x \longmapsto \cos(3.x+1)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

◃44▹ ♡ Montrez que $(a,\ b) \longmapsto (2.a+3.b,\ 3.a+4.b+1)$ (notée g) est bijective de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$ par exemple en donnant sa réciproque g vérifiant $g\circ g^{-1} = g^{-1}\circ g = Id$.
(au fait, qui a oublié de vérifier avant la bijectivité que l'on a bien une application de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$?)
Montrez que pour $(a,\ b) \longmapsto (2.a+3.b,\ 2.a+4.b+1)$ (notée h), il existe une application h de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$ vérifiant $h^{-1}\circ h = Id_{Z^2}$.

◃45▹ Pour écrire en une seule ligne que trois éléments a, b et c sont distincts, on écrit

$$a \neq b \neq c \neq a$$

car la seule relation $a \neq b \neq c$ ne suffit pas.
Pour quatre éléments, en une seule ligne, montrez qu'il n'y a pas plus court que

$$a \neq b \neq c \neq d \neq a \neq c \neq b \neq d$$

Quelle sera la formule en une seule ligne la plus courte pour cinq éléments ? Même question pour six.

◁46▷

◁47▷ Montrez que si f et g sont injectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $g \circ f$ l'est aussi.
Donnez un exemple où f et $g \circ f$ sont injectives mais où f ne l'est pas.

◁48▷ ♡ Résolvez $\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 7 \\ x^2 & + & y^2 & = & 29 \end{array} \right|$ d'inconnues réelles x et y.

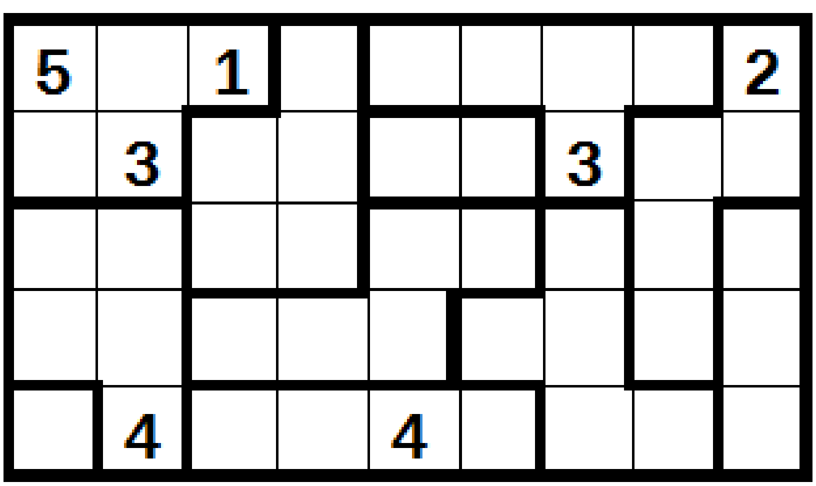
Résolvez $\left\{ \begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 7 \\ a^3 & + & b^3 & = & 973 \end{array} \right|$ d'inconnues réelles a et b.

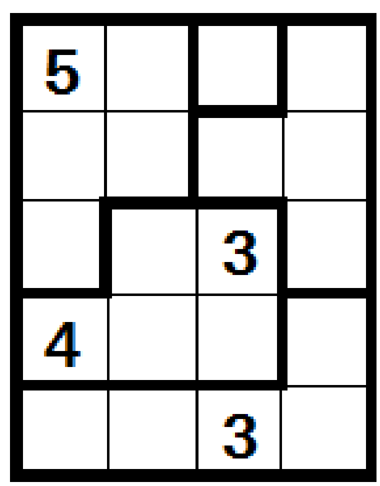
Lu dans une thèse de médecine : C'est avec de la peine qu'ils ont eu leur fils. La jeune femme, pendant 1'accouchement, haussait le ton. - L'obstétricien s'occupe mensuellement de quelques sottes. - Les obstétriciens de Pretoria préfèrent mettre les blanches au monde. - Les bébés de la Tartare sont splendides. - Conçu rue de la Paix. A la maternité, j 'ai vu une femme qui accouchait en riant. - Avant qu'il les berce ou qu'il les pèse, le gynécologue tient à embrasser le papa des bébés. Le gynécologue lui a tâté l'humérus. - Le gynécologue va monter pour examiner votre cas. - La gynécologue admet que les histoires d'ovules excitent sa verve car elle dit à son époux : « votre pull me chatouille jusqu'aux ovaires ! ».

Lu dans une thèse de médecine : C'est avec de la peine qu'ils ont eu leur fils. La jeune femme, pendant 1'accouchement, haussait le ton. - L'obstétricien s'occupe mensuellement de quelques sottes. - Les obstétriciens de Pretoria préfèrent mettre les blanches au monde. - Les bébés de la Tartare sont splendides. - Conçu rue de la Paix. A la maternité, j 'ai vu une femme qui accouchait en riant. - Avant qu'il les berce ou qu'il les pèse, le gynécologue tient à embrasser le papa des bébés. Le gynécologue lui a tâté l'humérus. - Le gynécologue va monter pour examiner votre cas. - La gynécologue admet que les histoires d'ovules excitent sa verve car elle dit à son époux : « votre pull me chatouille jusqu'aux ovaires ! ».

◁49▷ On écrit $a\mathbb{V}b$ pour dire que l'élève a a voté pour l'élève b aux élections de délégués de $MPSI2$. Quantifiez les propositions suivantes :
* tous les élèves ont voté / * l'élève e a été élu à l'unanimité / * l'élève e a été élu à la majorité / * certains élèves ont voté pour eux même / * personne n'a voté pour b / * aucun élève ayant voté pour e n'a voté pour ε.

◁50▷ Résolvez $|a + i.b|^2 = a^2 + b^2$ d'inconnues a et b dans $\mathbb{C}$ (indication : factorisez par $(a + i.b)$).





◁51▷

◁52▷ ♡ Pour quelle valeur du paramètre a le signal $t \longmapsto a.\cos(t) + (2 - a).\sin(t)$ a-t-il la plus petite amplitude.

◁53▷ Comparez l'action de ces quatre scripts pour $n = 5$:

```
def Scooby(n) :
....a, b = 1, 1
....for k in range(n) :
........a, b = b, a+b
........return (a, b)
```

```
def ScoobyDoo(n) :
....a, b = 1, 1
....for k in range(n) :
........a, b = b, a+b
....return(a, b)
```

```
def ScoobyDooBi(n) :
....a, b = 1, 1
....for k in range(n) :
........a, b = b, a+b
....return a
....return b
```

```
def ScoobyDooBiDoo(n) :
....a, b = 1, 1
....for k in range(n) :
........a = b
........b = a+b
.....return(a, b)
```

◁54▷ ♣ Sachant qu'on a posé $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i.\theta} + e^{-i.\theta}}{2}$, montrez qu'il est quand même possible d'avoir $\cos(\theta) = 2$, mais à condition d'aller chercher θ dans $\mathbb{C}$.

◁55▷ ♡ Voici un lexique de mots anglais du vocabulaire mathématique. Retrouvez leur signification en français :

whole number	countable set	significant figure	right hand side
slope	floor	join of sets	rhombus
cuboïd	nondecreasing function	sequence	by induction on n
one to one correspondance	x raised to the power of y	thus	w.l.o.g.
law of cosines	assume that	hence	intermediate mean value
squeeze theorem	proof by contradiction	therefore	brackets

◁56▷ On définit sur $\mathbb{Z}$ la loi $*$ par $a * b = a.(-1)^b + b.(-1)^a$. Montrez que c'est une loi interne, commutative, associative *(on pourra montrer que $a * b$ a la même parité que $a + b$)*. Trouvez son neutre, le symétrique de chaque élément a.
n est un entier naturel donné. Calculez $1 * 1 * 1 * \ldots 1$ (n termes). Calculez $1 * 2 * 3 * \ldots * 2018$.
Résolvez $6 * a = 2018$ d'inconnue entière a.
Peut on, rien qu'en additi*nnant des 1 obtenir 2018 ? Peut on, rien qu'en additi*nnant des 2 obtenir 2018 ?
On veut alors définir la "multiplication qui va avec" au moins sur $\mathbb{N}$ par $a \otimes b = a * a * a \ldots * a$ *(b fois, comme pour $a.b = a + a + \ldots + a$ b fois)*. Cette multiplication est elle commutative sur $\mathbb{N}$?

loi interne sur A	$\forall (a,\ b) \in A^2,\ a * b \in A$ (A est stable par $*$)
	toutes, sauf par exemple le produit scalaire de vecteurs (il donne un réel, pas un vecteur)
associaitive	$\forall (a,\ b,\ c) \in A^3,\ (a * b) * c = a * (b * c)$
	addition, multiplication dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $M_n(\mathbb{R})$ mais pas soustraction ni division
commutative	$\forall (a,\ b) \in A^2,\ a * b = b * a$
	multiplication dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ mais pas dans $M_n(\mathbb{R})$
avec un neutre	$\exists e \in A,\ \forall a \in A,\ a * a = e * a = a$ (à vous de le deviner)
	1 pour la multiplication, 0 pour l'addition, I_2 pour le produit matriciel
et des symétriques	$\forall a \in A,\ \exists \alpha \in A,\ a * \alpha = \alpha * a = e$ (le neutre)

◁57▷ ♡ Trouvez les coefficients b et c (complexes) pour que l'équation $z^2 + b.z + c = 0$ admette pour racine $2 + 3.i$ et pour discriminant $2.i$.

◁58▷ ♣♡ Calculez $(-1)^{\sum_{k=1}^{20} (-k)^k}$.

◁59▷ ♡ Expliquez pourquoi les non mathématiciens acceptent sans difficulté les deux premières lignes, mais pas la troisième.

1/7	= 0,142857 142857142857142857142857...
6/7	= 0,857142 857142857142857142857142...
1	= 0,999999 999999999999999999999999...

◁60▷ ♡ Dérivez cette différence $\theta \longmapsto \ln(\sin(\theta)) - \ln(\cos(\theta))$ sur $]0,\ \pi/2[$.
Dérivez et simplifiez $\theta \longmapsto \ln(\sin(\theta/2)) - \ln(\cos(\theta/2))$

◁61▷ ♡ Dérivez $x \longmapsto x^{\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right)}$ (simplifiez la d'abord ?).

◁62▷ Pour tout réel a, $\sin(2.a)$ est positif. La preuve : on se donne a, on calcule $\cos(a)$ et $\sin(a)$. on sait alors $\cos(a) = \varepsilon.\sqrt{1 - \sin^2(a)}$ avec $\varepsilon \in \{-1,\ 1\}$ et $\sin(a) = \varepsilon.\sqrt{1 - \cos^2(a)}$ avec $\varepsilon \in \{-1,\ 1\}$. On a alors $\sin(2.a) = 2.\sin(a).\cos(a) = 2.\sqrt{1 - \cos^2(a)}.\sqrt{1 - \sin^2(a)}$ puisque $\varepsilon^2 = 1$.
Où est l'erreur ?

◁63▷ ♣0♣ Votre calculatrice fonctionne mal. En tout cas, elle a une drôle de touche qui calcule des produits ou des sommes suivant son humeur. Pour être précise : pour a et b entiers relatifs, on a $a * b = \left\{ \begin{array}{lll} a+b & si & a \text{ pair} \\ a \times b & si & a \text{ impair} \end{array} \right|$.
Montrez que c'est une loi interne, non commutative, non associative.

♣1♣ A-t-on toujours $a * (a * a) = (a * a) * a$.

♣2♣ On sait que pour tout triplet d'entiers $(a,\ b,\ c)$ on peut créer douze nombres comme $(a * b) * c$ ou $b * (a * c)$. Choisissez a, b et c pour que ces nombres prennent tous la même valeur. Est il possible de choisir a, b et c pour que ces nombres prennent douze valeurs différentes. Choisissez a, b et c pour que ces seize nombres prennent le maximum de valeurs différentes.

♣3♣ Complétez pour que ce script Python se charge de calculer noter loi :

```
def etoile(x, y) :
....if....
....|....
....return(...)
```

♣4♣ La loi $*$ est elle interne sur chacun des ensembles suivants : $\mathbb{N}$, P, I, $I \cup \{0\}$, $P \cup \{1\}$ où P désigne l'ensemble des nombres pairs et I l'ensemble des nombres impairs.

♣5♣ Combien l'équation $a * a = n$ d'inconnue a peut elle avoir de solutions *(discuter suivant n)* ?

◁64▷ ♡ Un parallélépipède rectangle pour volume $180cm^3$. Sa surface latérale vaut $192cm^2$. La somme des longueurs de ses arêtes vaut $68cm$. Calculez ses dimensions.

◁65▷ Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t).dt$. Prouvez : $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}.W_{n-1}$.

Il faudra intégrer par parties, avec une partie égale à $\cos^n$ et l'autre à ce que vous voulez, et il faudra ensuite remplacer $\sin^2$ par $1 - \cos^2$.

Calculez $W_{2.n}$ pour tout entier naturel n.

Vous allez deviner avec les premiers termes une formule contenant le produit des entiers impairs. Pensez à remplacer ensuite par un quotient de factorielles et de puissances de 2 comme dans le premier T.D.

Montrez : $W_{2.n+1} \leqslant W_{2.n} \leqslant W_{2.n+1}$ pour tout n.

Inutile d'aller chercher la formule pour $W_{2.n}$ avec des factorielles, calculez juste $W_{P+1} - W_p$.

Déduisez : $W_{2.n} \sim_{n \to +\infty} W_{2.n+1}$.

Il faudra peut être appeler les gendarmes.

Prouvez $(2.n+1).W_{2.n}.W_{2.n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout n.

Commencez par prouver $(2.n-1).W_{2.n-2}.W_{2.n-1} = (2.n+1).W_{2.n}.W_{2.n+1}$.

Déduisez $W_{2.n} \sim_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{4.n}}$.

La notation $a_n \sim_{n \to +\infty} b_n$ signifie $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$.

Donnez la décomposition en produit de facteurs premiers (exposants positifs et négatifs) de W_{21}.