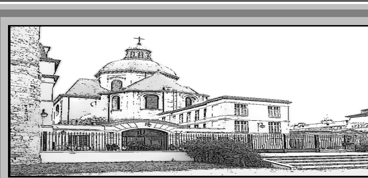
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 15 septembre
M.P.S.I.2



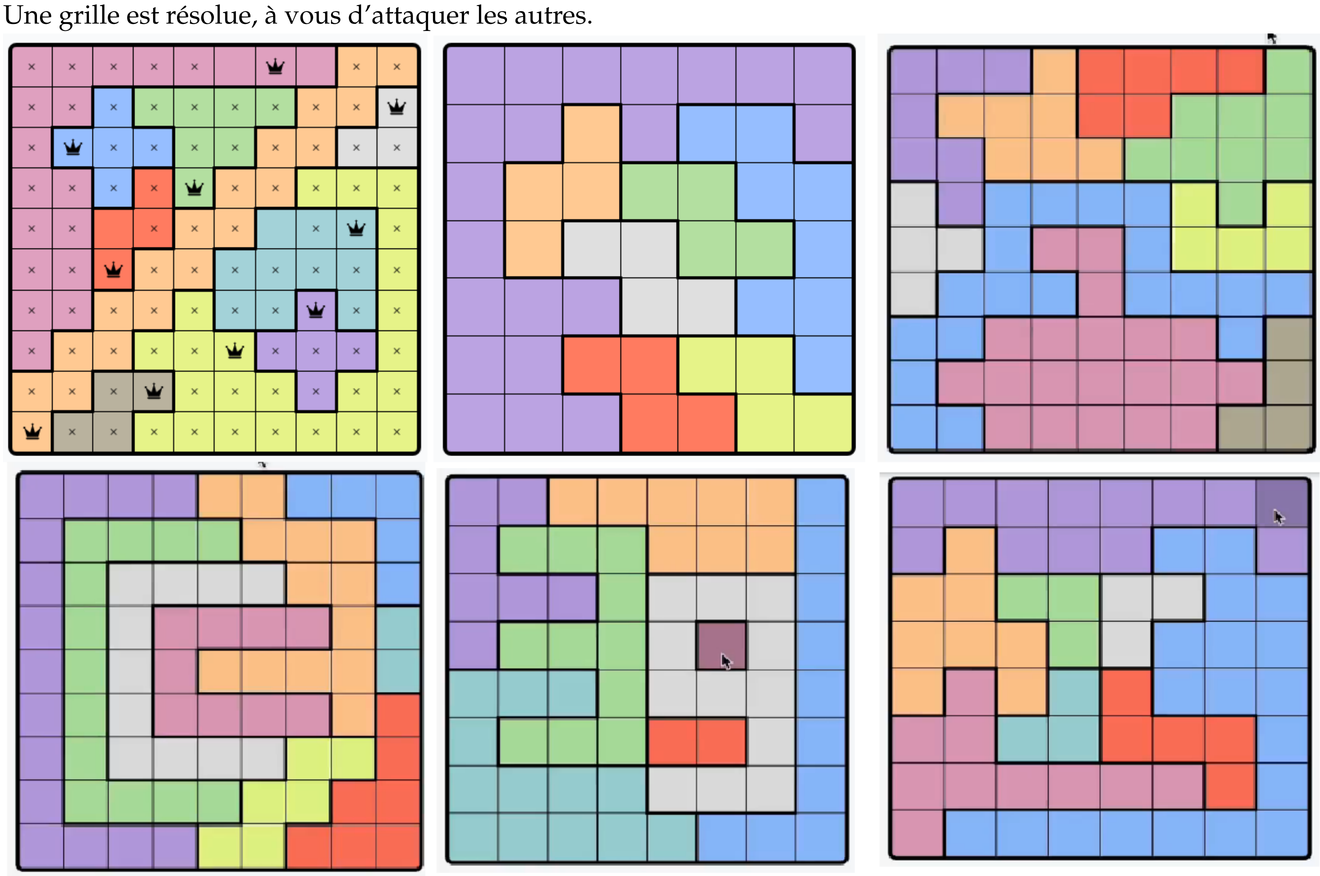
2024 2025

TD01

◁0▷ Sleon une édtue de l'Uvinertisé de Cmabrigde, l'odrre des ltteers dans un mtos n'a pas d'ipmrotncae, la suele coshe ipmrotnate est que la pmeirère et la drenèire soit à la bnnoe pclae. Le rsete peut êrte dans un dsérorde ttoal et vuos puoevz tujoruos lrie snas porlblème. C'est prace que le creaveu hmauin ne lit pas chuaqe ltetre elle-mmêe mias le mot comme un tuot.

eucalyptus	enchanté	circulaire	CREVASSE	DOUCE	IMAGINER
écharpe	cramoisi	minimiser	MIMOSAS	CAPABLE	VAUTOUR
fougère	dentelle	confondu	CHEMIN	HAUTEUR	CENDRE
médecine	isochrone	grandeur	TOURNI	VOITURE	FLEUVE
internet	satisfait	handicap	RENARD	POLITESSE	HAUTEUR
délicat	terrasse	grandeur	PARACHUTE	RETOUR	MATERNEL

◁1▷ Queens est un jeu diffusé sur LinkedIn. Il faut remplir une grille, avec une reine par ligne, une reine par colonne et une reine par « maison ». De plus, deux reines ne peuvent pas être sur deux cases contigües (même en diagonale). Une grille est résolue, à vous d'attaquer les autres.



◁2▷ Un élève dit « comme f est croissante, alors la suite « $u_{n+1} = f(u_n)$ » est croissante.
Que pensez vous de $f = x \longmapsto x - 1$?

◁3▷ Un élève dit $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > x + 2$ par croissances comparées en $+\infty$.

Qu'en pensez vous ?

◃4▹

On rappelle : $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)}$. On déduit $\sin(\pi/6) = \sqrt{3}$ et $\cos(\pi/6) = 3$.
Vrai ou faux : $(1 = 2 \textit{ et } 4 = 3) \Rightarrow (5 = 5)$, en additionnant.
Vrai ou faux : $(1 + 4 = 2 + 3) \Rightarrow (1 = 2 \textit{ et } 4 = 3)$, en identifiant.
Vrai ou faux :$(a \textit{ et } \overline{a}) \Rightarrow a$.
Vrai ou faux :$(a \textit{ ou } \overline{a}) \Rightarrow a$.
Vrai ou faux : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1 \Rightarrow (x^2 > -1)$.
« Il avala le poison et mourut sur le champ » = « il mourut sur le champ et avala le poison ».

L'identification de la première ligne est une ânerie, comme toute identification. On a en fait $\sin(\pi/6) = \dfrac{\sqrt{3}}{2.\sqrt{3}}$ et $\cos(\pi/6) = \dfrac{3}{2.\sqrt{3}}$.

$(1 = 2 \textit{ et } 4 = 3) \Rightarrow (5 = 5)$ est du type « Faux implique vrai ». C'est Vrai.

L'identification $(1 + 4 = 2 + 3) \Rightarrow (1 = 2 \textit{ et } 4 = 3)$ est une ânerie.

$(a \textit{ et } \overline{a}) \Rightarrow a$ est du type Faux implique quelquechose. C'est Vrai.

$(a \textit{ ou } \overline{a}) \Rightarrow a$ est du type « Vrai implique a ». Tout dépend de la valeur de a.

$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1 \Rightarrow (x^2 > -1)$ est en « Faux implique Vrai ». On accepte encore.

Enfin, le « et » de la langue française n'est pas si commutatif que ça.

◃5▹

♡ Voici un « raisonnement » ; en quoi est il faux ?

on sait	$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ (a < b \textit{ et } b < c) \Rightarrow (a < c)$
et aussi	$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ (a > b \textit{ et } b > c) \Rightarrow (a > c)$
de plus	$a \neq b$ signifie $a < b \textit{ ou } a > b$
on a donc	$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ (a \neq b \textit{ et } b \neq c) \Rightarrow (a \neq c)$

on sait	$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ (a < b \textit{ et } b < c) \Rightarrow (a < c)$	oui
et aussi	$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ (a > b \textit{ et } b > c) \Rightarrow (a > c)$	oui
de plus	$a \neq b$ signifie $a < b \textit{ ou } a > b$	oui
on a donc	$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ (a \neq b \textit{ et } b \neq c) \Rightarrow (a \neq c)$	non

On a bien les trois premières lignes.

Mais regardons l'implication $\begin{array}{ccc} a & \neq & b \\ & et & \\ b & \neq & c \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccccccc} a & < & b & ou & a & > & b \\ & & & et & & & \\ b & < & c & ou & b & > & c \end{array}$

Ceci conduit à quatre possibilités par distributivité :

$\begin{array}{ccc} a & < & b \\ & et & \\ b & < & c \end{array}$	$\begin{array}{ccc} a & < & b \\ & et & \\ b & > & c \end{array}$	$\begin{array}{ccc} a & > & b \\ & et & \\ b & < & c \end{array}$	$\begin{array}{ccc} a & > & b \\ & et & \\ b & > & c \end{array}$

La dernière ligne de notre « raisonnement » n'étudie que deux de ces quatre cases.

On rappelle $1 \neq 2 \textit{ et } 2 \neq 1$ et on ne peut pas déduire $1 \neq 1$. Le $\neq$ n'est pas transitif.

◃6▹

Vrai ou faux :

a	$\forall x \in \mathbb{R},\ (x \geqslant 2) \Rightarrow (x^2 \geqslant 4)$
b	$(\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 2) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 4)$

Les deux sont vraies. mais pas pour les mêmes raisons.
La première est une belle implication. On se donne x quelconque, et si il est plus grand que 2, alors son carré dépasse 2.

La seconde est vraie car du type « Faux implique ce qu'on veut ».

On a donc le droit d'écrire $(\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 4)$.

C'est tout aussi logique. Au sens pur du terme.

◁7▷ ♡ (a) Résolvez l'équation $\cos(x) + \sin(x) = 1$ d'inconnue réelle x (pensez à $A.\cos(x - \varphi)$ avec A et φ bien choisis).
(b) Résolvez $\cos(x) + \sin^2(x) = 1$ d'inconnue réelle x (pensez à tout ramener en $\cos(x)$).
(c) Résolvez $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ d'inconnue réelle x.
(d) Résolvez $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1$ d'inconnue réelle x (pensez à comparer $\cos^3(x)$ et $\cos^2(x)$ puis $\sin^3(x)$ et $\sin^2(x)$ puis sommez).
(e) Résolvez $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1$ d'inconnue réelle x.

(a) $\cos(x) + \sin(x = 1$. On rappelle :

$$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}.\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}.\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}.\sin(x)\Big) = \sqrt{2}.\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

On résout donc $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ c'est à dire

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

On a deux équations possibles : $x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{2} + 2.k.\pi$ avec k dans $\mathbb{Z}$.

On trouve deux familles de solutions m $\boxed{\begin{array}{lll} S = & \left\{\frac{\pi}{2} + 2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} & \text{c'est} \quad 0+1=1 \\ & \bigcup \ \left\{2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} & \text{c'est} \quad 1+0=1 \end{array}}$

(b) $\cos(x) + \sin^2(x) = 1$. On remplace : $\cos(x) + \sin^2(x) = \cos(x) + 1 - \cos^2(x)$. L'équation devient $\cos(x) - \cos^2(x) = 0$

On a deux solutions venant de $\cos(x) = 0$ et de $\cos(x) = 1$.

$$\boxed{\begin{array}{lll} S = & \left\{\frac{\pi}{2} + k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} & \text{c'est} \quad 0+(\pm 1)^2=1 \\ & \bigcup \ \left\{2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} & \text{c'est} \quad 1+0^2=1 \end{array}}$$

(c) Résolvez $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ vaut toujours 1. L'équation a pour ensemble de solution $\mathbb{R}$.

(d) $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1$. On a des solutions évidentes

$$\boxed{\begin{array}{lll} S \supset & \left\{\frac{\pi}{2} + 2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} & \text{c'est} \quad 0+1^3=1 \\ & \bigcup \ \left\{2.k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} & \text{c'est} \quad 1^3+0^2=1 \end{array}}$$

Mais peut on en avoir d'autres ?
L'astuce (après avoir représenté la fonction), c'est de comprendre : $\cos^3(x) \leqslant \cos^2(x)$ (on a multiplié par $\cos(x)$ plus petit que 1).
De même, avec $\sin(x) \leqslant 1$ on a $\sin^3(x) \leqslant \sin^2(x)$.
En sommant, on a donc $\cos^3(x) + \sin^3(x) \leqslant \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
Ceci ne nous dit pas que la valeur 1 ne sera jamais atteinte.
Mais pour l'atteindre, il faut avoir des égalités : $\cos^3(x) = \cos^2(x)$ et en même temps $\sin^3(x = \sin^2(x)$.

Les solutions sont bien les nombres trouvés : quand le cosinus et le sinus valent 0 ou 1.

Sinon, quitte à poser $s = \sin(x)$ et $c = \cos(x)$, l'équation devient $c^3 + s^2 = c^2 + s^2$.
On transforme en $c^3 - c^2 + s^3 - s^2 = 0$.
On factorise en $c^2.(c-1) + s^2.(s-1) = 0$.
On poursuit avec l'aide de Pythagore : $(1-s^2).(c-1) + (1-c^2).(s-1) = 0$.
On factorise : $(1-s).(1+s).(c-1) + (1-c).(1+c).(s-1) = 0$.
On factorise encore : $(1-s).(1-c).(-1-s-1-c) = 0$.
Par intégrité, on a trois pistes : $\cos(x) = 1$, $\sin(x) = 1$ ou $\cos(x) + \sin(x) = -2$.
La dernière équation n'a pas de solution.
Et on a bien la liste pour les deux premières.

Déjà pour que $\sqrt{\cos(x)}$ et $\sqrt{\sin(x)}$ existent, on doit rester dans le premier quadrant : $]0,\ \pi/2[$ (en tout cas modulo $2.\pi$).
Le domaine de définition de l'équation est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[2.k.\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2.k.\pi\right]$.

Et on trouve encore des solutions avec les extrémités de ces intervalles.

Mais il faut prouver qu'il n'y a qu'elles.

Une solution est de dire cette fois $\sqrt{\sin(x)} > \sin(x) > \sin^2(x)$ si x n'est pas un $k.\pi/2$ avec k dans $\mathbb{Z}$
$\sqrt{\cos(x)} > \cos(x) > \cos^2(x)$ si x n'est pas un $k.\pi/2$ avec k dans $\mathbb{Z}$
En sommant, on a $\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)} > 1$ si x n'est pas un multiple de $\frac{\pi}{2}$.
Les solutions sont donc nécessairement des multiples de $\frac{\pi}{2}$.
Et pas tous, à cause du domaine de définition.

Autre approche par conditions nécessaires :
$\left(\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1\right) \Rightarrow \left((\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)})^2 = 1\right)$
$\left(\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1\right) \Rightarrow \left(\cos(x) + \sin(x) + 2.\sqrt{\cos(x).\sin(x)} = 1\right)$
$\left(\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1\right) \Rightarrow \left(2.\sqrt{\cos(x).\sin(x)} = 1 - \cos(x) - \sin(x)\right)$
$\left(\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1\right) \Rightarrow \left(4.\cos(x).\sin(x) = (1 - \cos(x) - \sin(x))^2\right)$
$\left(\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1\right) \Rightarrow \left(4.c.s = 1 + c^2 + s^2 - 2.c - 2.s + 2.s.c\right)$
$\left(\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1\right) \Rightarrow \left(4.c.s - 2.s.c = 1 + 1 + 2.c + 2.s\right)$
$\left(\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1\right) \Rightarrow \left(c.s = 1 + c + s\right)$
$\left(\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1\right) \Rightarrow \left(c.s - 1 = c + s\right)$
$\left(\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1\right) \Rightarrow \left((c.s - 1)^2 = (c + s^2)\right)$
$\left(\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1\right) \Rightarrow \left(c^2.s^2 + 1 - 2.s.c = c^2 + s^2 + 2.s.c\right)$
$\left(\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1\right) \Rightarrow \left(c^2.s^2 = 4.s.c\right)$
On trouve : $c = 0$ ou $s = 0$ ou $c.s = 2$ ce qui n'est pas possible.
Et comme on a raisonné par implications (élévations au carré), il faut vérifier car on a trop de solutions.

◃8▹

« Un ministre, ça ferme sa gueule ou ça démissionne ».
Mettez sous forme d'implication (du type $p \Rightarrow q$ mais aussi $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$).

On en a deux	si un ministre refuse de fermer sa gueule	alors il démissionne
	si un ministre ne veut pas démissionner	alors qu'il se taise

◃9▹

♡ Montrez : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(2.\theta) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(\theta) \notin \mathbb{Q}$.

Au lieu de $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(2.\theta) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(\theta) \notin \mathbb{Q}$, on prouve sa contraposée :
$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(2.\theta) \in \mathbb{Q}$

Il suffit d'écrire $\cos(\theta) = \frac{p}{q}$ et d'utiliser la formule « $2.c^2 - 1$ » : $\cos(2.\theta) = \frac{2.p^2 - q^2}{q^2}$.

◃10▹

Résolvez $x^2 + \sqrt{2} \leqslant (1 + \sqrt{2}).x$ d'inconnue réelle x.

On résout $x^2 + \sqrt{2} \leqslant (1 + \sqrt{2}).x$ en étudiant le signe du trinôme $x^2 - (1 + \sqrt{2}).x + \sqrt{2}$.
Pas besoin de calculer Δ ! On voit la somme et le produit, comme dans tout exercice de maths qui se respecte. [1]

$$x^2 - (1 + \sqrt{2}).x + \sqrt{2} = (x - 1).(x - \sqrt{2})$$

Le signe ne se retient pas par des formules par cœur « du signe de $-a$ entre les racines », mais par un tableau de signes et surtout par la vision de la parabole...

Ici, $\boxed{S = [1,\ \sqrt{2}]}$

◃11▹

Montrez $\left(e^{\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)} - 1\right)^2 = 2$.

Remarque : *Si la calculatrice était autorisée, vous calculeriez* $\left(e^{\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)} - 1\right)^2$ *mais ça ne prouverait rien. Enfin, si, ça prouverait que vous placez une confiance aveugle en votre calculatrice et que donc les cours de maths, d'informatique, de physique et de S.I.I. n'ont servi à rien...*

1. dans un exercice de maths, les racines sont issues d'un choix de l'esprit d'un humain, donc les racines sont « simples » ; dans les exercices de physique, c'est la prétendue réalité qui dicte les valeurs, et les racines sont... des trucs à calculer

Attaquons à partir du plus profond : $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}$ par conjugaison

$$\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = 2.\ln(\sqrt{2}+1)$$
$$\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \ln(\sqrt{2}+1)$$
$$e^{\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)} = \sqrt{2}+1$$

On soustrait 1 et on élève au carré et c'est fini.

Remarque : | *Votre tort aura peut être été de développer* $(\sqrt{2}+1)^2$ *et de rester ensuite gêné devant* $\frac{1}{2}.\ln(3+2.\sqrt{2})$ *....*

◃12▹ Montrez que si la moyenne de vos notes vaut 10, alors au moins une de vos notes dépasse 10 (au sens large).

Au lieu de prouver $moyenne = 10 \Rightarrow (au\ moins\ un\ dépasse\ 10)$,
on montre la contraposée $\overline{(au\ moins\ un\ dépasse\ 10)} \Rightarrow (\mu \neq 10)$.
Et c'est « si toutes les notes sont plus petites que 10 alors la moyenne ne peut pas valoir 10 » (négation de $\exists$).
Et en effet, si chaque x_i est strictement plus petit que 10, alors on a $\sum_{i=1}^{n} x_i < \sum_{i=1}^{n} 10 = 10.n$ puis en divisant $\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} x_i <= 10$.

◃13▹ `Retrouvez les stations de métro (et R.E.R.) dont voici les anagrammes` *`(Ouest)`* `:`
Pendu atrophié. Facho en vue. Parle du poème. Humain à réinventer. Joli canard éventré.

Porte Dauphine.
Avenue Foch.
Rue de la Pompe.
Avenue Henri-Martin.
Javel - André Citroën.

◃13▹ ♣ On demande de calculer $\int_0^1 \frac{dt}{i+t}$.
L'élève Herth-Etpamur écrit $\ln(1+i)-\ln(i) = \ln\left(\frac{1+i}{i}\right) = \ln(\sqrt{2}.e^{-i.\pi/4})$ et trouve $\frac{\ln(2)}{2} - i.\frac{\pi}{4}$. Montrez que sa réponse est bonne *(même si sa méthode est fumeuse)* en pensant à la quantité conjuguée.

Intégrer avec un logarithme complexe est une arnaque. Même si le résultat semble joli.
Mais sinon,

$$\int_0^1 \frac{dt}{i+t} = \int_0^1 \frac{t-i}{1+t^2}.dt = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}.dt - i.\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

et on trouve

$$\int_0^1 \frac{dt}{i+t} = \left[\frac{\ln(1+t^2)}{2}\right]_{t=0}^{t=1} - i.\left[Arctan(t)\right]_{t=0}^{t=1}$$

Le plus fort est qu'on a le même résultat !

◃14▹ Vrai ou faux :
a - si $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont irrationnels, alors $\cos(2.\alpha)$ est irrationnel.
b - si $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont rationnels, alors $\cos(2.\alpha)$ est rationnel.
c - si $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont irrationnels, alors $\cos(2.\alpha)$ ou $\sin(2.\alpha)$ est irrationnel.
d - si $\cos(2.\alpha)$ est irrationnel, alors $\cos(\alpha)$ est irrationnel.
e - si $\cos(2.\alpha)$ ou $\sin(2.\alpha)$ est irrationnels, alors $\cos(\alpha)$ ou $\sin(\alpha)$ est irrationnel.

Si c'est vrai, on le prouve. Si c'est faux, un contre-exemple suffit.

---

a - si $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont irrationnels, alors $\cos(2.\alpha)$ est irrationnel.
Faux. $a = \frac{\pi}{4}$. Cosinus et sinus sont irrationnels (avec du $\sqrt{2}$) mais le cosinus du double est entier, et rationnel.

---

b - si $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont rationnels, alors $\cos(2.\alpha)$ est rationnel.
Vrai, puisque $\cos(2.\alpha) = 2.\cos^2(\alpha) - 1$. Si $\cos(\alpha)$ est rationnel, alors $\cos(2.\alpha)$ reste dans le corps $(\mathbb{Q}, +, .)$.

---

c - si $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont irrationnels, alors $\cos(2.\alpha)$ ou $\sin(2.\alpha)$ est irrationnel.
Faux. $a = \dfrac{\pi}{4}$. Cosinus et sinus sont irrationnels mais le cosinus et le sinus du double sont rationnels (négation de cos ou sinirrationnel).

---

d - si $\cos(2.\alpha)$ est irrationnel, alors $\cos(\alpha)$ est irrationnel.
Vrai. Contraposée de $\cos(\alpha) \in \mathbb{Q} \Rightarrow (2.\cos^2(\alpha) - 1 \in \mathbb{Q})$.

---

e - si $\cos(2.\alpha)$ ou $\sin(2.\alpha)$ est irrationnels, alors $\cos(\alpha)$ ou $\sin(\alpha)$ est irrationnel.
Vrai. Il suffit de contraposer.
Si c et s sont rationnels, alors $c^2 - s^2$ et $2.c.s$ sont rationnels.

◁15▷ Montrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x \notin \mathbb{Q}) \Leftrightarrow \Big(\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4,\ (a + b.x = c + d.x) \Leftrightarrow \big((a = c)\ et\ (b = d)\big)\Big)$.

On se donne x dans $\mathbb{R}$.On doit montrer une équivalence. On sépare en deux.

- On suppose x irrationnel. On doit montrer une double implication.
  - On se donne un quadruplet $(a,\ b,\ c,\ d)$.
    On suppose $a + b.x = c + d.x$. On doit montrer $a = c$ et $b = d$.
    On regroupe d'un côté : $(a - c) = x.(d - b)$.
    Si $d - b$ est non nul, on a $x = \dfrac{a - c}{d - b}$. C'est un rationnel. Contradiction.
    Par élimination, $d - b$ est nul.
    On reporte : $a - c = x.0$. On a enfin $a = c$.
  - Réciproquement, si on a $a = c$ et $b = d$, on a évidemment $a + b.x = c + d.x$.

Peut-on montrer facilement que si on a la formule $\Big(\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4,\ (a + b.x = c + d.x) \Leftrightarrow \big((a = c)\ et\ (b = d)\big)\Big)$ alors x est irrationnel ?
Je propose plutôt de raisonner par contraposée :
$(x \in \mathbb{Q}) \Rightarrow \Big(\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4,\ \overline{(a + b.x = c + d.x) \Leftrightarrow \big((a = c)\ et\ (b = d)\big)}\Big)$.

- On suppose x rationnel. On l'écrit $\dfrac{p}{q}$.
  On a alors $(p + (-q).x = 0 + 0.x)\ et\ pourtant\ \big((p \neq 0)\ ou\ (-q \neq 0)\big)$.
  C'est la négation de $(a + b.x = c + d.x) \Rightarrow \big((a = c)\ et\ (b = d)\big)$ par « contre-argument ».

Cet exercice, c'est l'idée de « si on a $a + b.\sqrt{2} = c + d.\sqrt{2}$ avec a, b, c et d entiers, alors on identifie $a = c$ et $b = d$ ».
En revanche, avec $a + b.\dfrac{2}{3} = c + d.\dfrac{2}{3}$ on ne peut pas identifier.

◁16▷ ♣ Le loir et le chapelier fou mentent certains jours et sont sincères d'autres jours *(c'est encore plus stupide que mes boulangers jumeaux)*.

jour	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
loir	menteur	sincère	menteur	sincère	sincère	sincère	menteur
chapelier fou	sincère	sincère	sincère	sincère	menteur	menteur	menteur

Si les deux disent "*on est lundi*", pouvez vous déduire quel jour on est ?
Si les ai entendu dire "*hier je mentais*", pouvez vous déduire qui ment ?
Le loir dit "*si on demandait au chapelier si on est mercredi, il dirait oui*", pouvez vous déduire le jour.
Le loir dit "*hier je mentais*". Le chapelier peut il ajouter "*tiens, moi c'est après-demain que je mens*" ?

	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
Loir dit « on est lundi »	non	non	oui	non	non	non	oui
Chapelier dit « on est lundi »	oui	non	non	non	oui	oui	oui
question 1							oui
Loir dit « hier je mentais »	non	oui	oui	oui	non	non	oui
Chapelier dit « hier je mentais »	oui	non	non	non	oui	non	non
question 2	impossible						
Chapelier dit « oui, mercredi »	non	non	oui	non	oui	oui	oui
Loir dit « Chapelier dit... »	oui	non	non	non	oui	oui	non
question 3	oui				oui	oui	
Loir dit « hier je mentais »	non	oui	oui	oui	non	non	oui
Chapelier « je mens après demain »	non	non	oui	oui	non	oui	oui
question 4			oui	oui			oui

A la question 4, on ne peut pas déduire le jour.
Pour la première question, il y a plus court.
On ne peut pas être lundi, car lundi, le loir doit mentir (il ne peut donc pas donner le bon jour). Comme on est un autre jour, il faut donc que les deux mentent.

A suivre.

◁ 17 ▷

♡ Résolvez $x^2 + (7.i - 2).x = 11 + 7.i$ d'inconnue complexe x.

Le discriminant vaut -1. Ses racines sont i et $-i$ (qui va m'écrire des $i.\sqrt{|-1|}$, aussi lourd qu'un livre de physique de six cent trente neuf pages ?).
On trouve $1 - 4.i$ et $1 - 3.i$. Et on vérifie somme et produit.

◁ 18 ▷

♡ Montrez : $\forall x \in \mathbb{R},\ \Big((\cos(x) \in \mathbb{Q}) \ \Rightarrow\ (\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n.x) \in \mathbb{Q})\Big)$.

A-t-on $\forall x \in \mathbb{R},\ \Big((\cos(x) \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n.x) \in \mathbb{Z})\Big)$.

A-t-on $\forall x \in \mathbb{R},\ \Big((\cos(x) \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n.x) \in \mathbb{Q})\Big)$.

Six personnes sur cinq ne comprennent rien aux nombres rationnels.

On se donne x quelconque dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\cos(x)$ est rationnel.
On fait alors une récurrence pour prouver que chaque $\cos(n.x)$ est rationnel.
Par récurrence à doublé hérédité.
On initialise : $\cos(0.x)$ et $\cos(x)$ sont rationnels (l'un est entier, l'autre est l'hypothèse).

Pour un n donné, on suppose $\cos(n.x)$ et $\cos((n-1).x)$ rationnels.
On écrit alors $\cos((n+1).x) = 2.\cos(x).\cos(n.x) - \cos((n-1).x)$.
Le membre de droite est une somme et produit de rationnels, c'est un rationnel.

Plus simple. Pour x donné, on suppose $\cos(x)$ entier.
C'est donc qu'il vaut 1, -1 ou 1.
Mais alors x est de la forme $k.\dfrac{\pi}{2}$ avec k entier bien choisi.
Et pour tout n, $\cos(n.x)$ vaut 1, -1 ou 0 aussi. Sans double hérédité.

Le dernier contient une équivalence. Un sens vient d'être traité.

Dans l'autre, pour x donné, si l'on suppose $(\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n.x) \in \mathbb{Q})$ alors en particulier pour n égal à 1, on a $\cos(x) \in \mathbb{Q}$.

◁ 19 ▷

On veut résoudre $216.x^3 - 432.x^2 + 270.x = 52 + \sqrt{2}$ d'inconnue réelle x. Calculez la somme des racines, la somme de leurs carrés, la somme de leurs inverses *(inutile d'utiliser les quantités conjuguées, gardez les dénominateurs laids...)*.

En ajustant α et β dans le changement de variable $c = \alpha.x + \beta$, mettez l'équation sous la forme $4.c^3 - 3.c = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Démontrez : $4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta) = \cos(3.\theta)$ pour tout réel θ.
Calculez $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.
Résolvez l'équation initiale.

L'équation n'est pas sous forme unitaire. Pour pouvoir identifier avec $(X-\alpha).(X-\beta).(X-\gamma)$, il faut écrire en fait $x^3-\dfrac{432}{216}.x^2+\dfrac{270}{216}.x-\dfrac{52+\sqrt{2}}{216}=0$.

Les formules du cours donnent

$\alpha+\beta+\gamma$	$\alpha.\beta+\beta.\gamma+\gamma.\alpha$	$\alpha.\beta.\gamma$
$\dfrac{432}{216}$	$\dfrac{270}{216}$	$\dfrac{52+\sqrt{2}}{216}$

On applique *(avec $S^2-2.D$ pour la somme des carrés et $\dfrac{D}{P}$ pour la somme des inverses)*

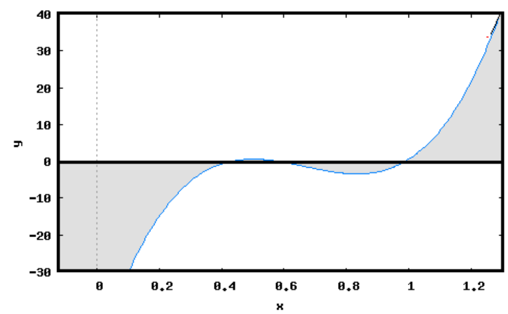
$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{432}{216}$	$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{270}{52+\sqrt{2}}$

On part de $216.x^3-432.x^2+270.x=52+\sqrt{2}$ et on pose $x=\dfrac{c-\beta}{\alpha}$.

On obtient $216.\dfrac{c^3-3.c^2.\beta+3.c.\beta^2+\beta^3}{\alpha^3}-432.\dfrac{c^2-2.c.\beta+\beta^2}{\alpha^2}+270.\dfrac{c-\beta}{\alpha}=52+\sqrt{3}$.

On calcule le coefficient de c^2 : $-\dfrac{3.216.\beta}{\alpha^3}-\dfrac{432}{\alpha^2}$. On le veut nul :

$\boxed{\beta=-\dfrac{2}{3}.a}$



On calcule le coefficient de c^3 et celui de c :

$\dfrac{216}{\alpha^3}$ et $\dfrac{3.216.\beta^2}{\alpha^3}+\dfrac{2.432.\beta}{\alpha^2}+\dfrac{270}{\alpha}$

On les veut dans un rapport 4 à 3. On en déduit la valeur de α : 2.

Le changement est finalement $\boxed{c=3.x-2}$

On aboutit à l'équation $8.c^3-6.c=\sqrt{2}$.

Il faut encore la diviser par 2. *L'erreur consistait à imposer d'arriver à tout prix à $4.c^3-3.c=\sqrt{2}/2$.*

La formule $\cos(3.\theta)=4.\cos^3(\theta)-3.\cos(\theta)$ se démontre de plusieurs manières :

- $\cos(3.\theta)+\cos(\theta)=2.\cos\left(\dfrac{3.\theta+\theta}{2}\right).\cos\left(\dfrac{3.\theta-\theta}{2}\right)=2.\Big(2.\cos^2(\theta)-1\Big).\cos(\theta)$
- $\cos(3.\theta)=\dfrac{e^{3.i.\theta}+e^{-3.i.\theta}}{2}=\dfrac{(c+i.s)^3+(c-i.s)^3}{2}=\dfrac{(c^3+3.i.c^2.s-3.c.s^2-i.c^3)+(c^3-3.i.c^2.s-3.c.s^2+i.c^3)}{2}$
  $\cos(3.\theta)=c^3-3.c.s^2=c^3-3.c.(1-c^2)$
- $4.\cos^3(\theta)-3.\cos(\theta)=4.\Big(\dfrac{e^{i.\theta}+e^{-i.\theta}}{2}\Big)^3-3.\dfrac{e^{i.\theta}+e^{-i.\theta}}{2}=\dfrac{(e^{i.\theta})^3+(e^{-i.\theta})^3}{2}=\cos(3.\theta)$

L'équation devient, en posant $c=\cos(\theta)$: $\cos(3.\theta)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On en déduit les valeurs possibles pour θ : $\varepsilon.\Big(\dfrac{\pi}{6}+2.k.\pi\Big)$ avec k dans $\mathbb{Z}$ et ε dans $\{-1,\ 1\}$ *(pour le signe)*.

On divise par 3 : $\theta\in\Big\{\varepsilon.\Big(\frac{\pi}{12}+\frac{2.k.\pi}{3}\Big)\mid k\in\mathbb{Z},\ \varepsilon\in\{-1,\ 1\}\Big\}$

On revient à c : $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2.k.\pi}{3}\right)\text{ avec } k \text{ décrivant } \mathbb{Z}}$

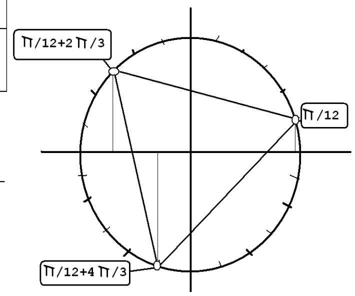
On doit calculer $\cos(\pi/12)$. On dispose de deux méthodes :

- $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1+\cos(\pi/6)}{2}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ et $\cos(\pi/12)>0$: $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$
- $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

On préfèrera la méthode encadrée. De même, $\boxed{\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

On peut donc calculer les trois valeurs utiles :

k	0	1	2
$\cos\left(\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2.k.\pi}{3}\right)\right.$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
racine x $\left(=\frac{c+2}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+4}{12}$	$\frac{4-\sqrt{2}}{6}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+4}{12}$



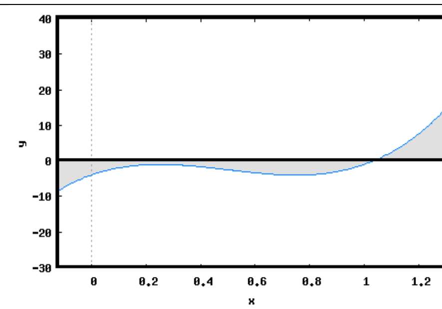
On a de la chance : $\frac{\pi}{12}+\frac{2.\pi}{3}=\frac{3.\pi}{4}$ dont le cosinus est simple.
En revanche, pour $\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4.\pi}{3}\right)$, on passe par $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right).\cos\left(\frac{4.\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right).\sin\left(\frac{4.\pi}{3}\right)$.
On peut vérifier la somme des racines...

Le professeur pose cette fois l'équation d'inconnue réelle x $48.x^3-72.x^2+27.x-4=0$. L'élève Tonku de Tachaiz applique la méthode précédente et dit qu'il arrive à $\cos(3.\theta)=\frac{5}{3}$. Prouvez qu'il a raison *(en expliquant le changement de variable)*.
Vous vous seriez sans doute arrêté là, perplexe. Mais Tonku de Tachaiz ne connaît pas ses formules de Moivre et Euler et cherche à résoudre $\frac{e^{3.\theta}+e^{-3.\theta}}{2}=\frac{5}{3}$ (quelle est son erreur ?). Résolvez son équation en l'inconnue $e^{3.\theta}$.
Déduisez la valeur de θ.
Trouvez la racine réelle de l'équation initiale.

On trouve une translation pour effacer le terme de degré 2 :
$48.x^3-72.x^2+27.x-4=0$ avec $x=y+\frac{1}{2}$:

$$48.\left(y^3+3.\frac{y^2}{2}+3.\frac{y}{4}+\frac{1}{8}\right)-72.\left(y^2+y+\frac{1}{4}\right)+27.\left(y+\frac{1}{2}\right)-4=0$$

équivaut à $48.y^3-9.y-\frac{5}{2}=0$.
On dilate : $y=a.c$: $48.a^3.c^3-9.a.c=\frac{5}{2}$. On ajuste $a=\frac{1}{2}$ pour avoir $\frac{48.a^3}{9.a}=\frac{4}{3}$. L'équation devient $6.c^3-\frac{9}{2}.c=\frac{5}{2}$.
On multiplie par $\frac{2}{3}$ on arrive à $4.c^3-3.c=\frac{5}{3}$ comme Tonku de Tachaiz.



Le problème est que si on pose $c=\cos(\theta)$, on aboutit à $\cos(3.\theta)=\frac{5}{3}>1$. C'est problématique pour un cosinus. La méthode "du cours" n'est donc pas valable.

On applique la fausse formule *(la vraie, c'est* $\cos(t)=\frac{e^{i.t}+e^{-i.t}}{2}$ *et pas* $\frac{e^t+e^{-t}}{2}$*)*. L'équation devient $\frac{e^{3.t}+\frac{1}{e^{3.t}}}{2}=\frac{5}{3}$ soit encore $3.e^{3.t}-10+3.e^{-3.t}=0$.
On pose $\varepsilon=e^{3.t}$ comme proposé. L'équation devient $3.\varepsilon-10+=0$ ou encore $3.\varepsilon^2-10.\varepsilon+3=0$. C'est une équation du second degré qui admet deux racines réelles : $\varepsilon_1=3$ et $\varepsilon_2=\frac{1}{3}$.
Ayant posé $\varepsilon=e^{3.t}$, on trouve $t=\frac{\ln(3)}{3}$ ou $t=-\frac{\ln(3)}{3}$.
On reporte dans $c=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$ puisque l'élève Tonku de Lachaiz a oublié les i. On trouve $c=\frac{e^{\ln(3)/3}+e^{-\ln(3)/3}}{2}=\frac{\sqrt[3]{3}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}{2}$.
Mais au fait, c'est légitime ? Si on pose $c=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$*, a-t-on bien* $4.c^3-3.c=\frac{e^{3.t}+e^{-3.t}}{2}$ *? La réponse est oui.*

Ayant c, on remonte à $y = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}{4}$. On termine par translation : $\boxed{x = y + \frac{1}{2} = \frac{2 + \sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}}{4}}$

On a utilisé ici non pas le cosinus, mais le cosinus hyperbolique : $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Il existe aussi le sinus hyperbolique et la tangente de la même famille.

◁20▷ On rappelle la notation : $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times a_3 \ldots \times a_n$ (par exemple : $\prod_{k=1}^{n} k = n!$).

Simplifiez : $\prod_{k=1}^{n} k^2$ et $\prod_{k=1}^{n} 2^k$ et $\prod_{k=1}^{n} 2^n$.

Simplifiez pour tout n $\prod_{k=-n}^{n} k$.

Montrez que $\frac{27!}{(9!)^3}$ est entier ; est il multiple de 3 ?

Le produit $\prod_{k=1}^{n} k^2$ est un produit de carrés. C'est le carré d'un produit. Quel produit ? $\prod_{k=1}^{n} k = n!$. On a donc $\prod_{k=1}^{n} k^2 = (n!)^2$.

Le produit $\prod_{k=1}^{n} 2^k$ s'écrit $2^1.2^2.2^2 \ldots 2^n$. On réunit avec la règle $x^a.x^b = x^{a+b}$ et il reste $\prod_{k=1}^{n} 2^k = 2^s$ avec s égal à la somme des exposants : $s = 1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n.(n+1)}{2}$. On a donc et $\prod_{k=1}^{n} 2^k = 2^{\frac{n.(n+1)}{2}}$ ou même $\prod_{k=1}^{n} 2^k = \sqrt{2}^{n.(n+1)}$.

Dans le produit $\prod_{k=1}^{n} 2^n$, tous les termes sont égaux. C'est $2^n.2^n.2^n \ldots 2^n$. Il y a n termes. On trouve donc $(2^n)^n$. On compacte en $2^{(n^2)}$.

$\prod_{k=1}^{n} k^2 = (n!)^2$	$\prod_{k=1}^{n} 2^k = \sqrt{2}^{n.(n+1)}$	$\prod_{k=1}^{n} 2^n = 2^{(n^2)}$

Le produit $\prod_{k=-n}^{n} k$ est simple comme pas permis. Il vaut 0. Puisque au milieu il y a 0 parmi les facteurs.

Si l'on n'avait pas mis le facteur 0, on aurait eu $(-n).(-n+1) \ldots (-3).(-2).(-1).1.2 \ldots n$ et ceci aurait donné $(n!)^2.(-1)^n$.

Le nombre $\frac{27!}{(9!)^2}$ est-il déjà un entier ? Rien n'est évident.

On l'écrit explicitement :

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27}{(1.2.3.4.5.6.7.8.9)^3}$$

On arrange en

$$\frac{10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27}{2.3.4.5.6.7.8.9.2.3.4.5.6.7.8.9}$$

On simplifie ce qu'on peut : 10 et 2.5 ; 12 et 3.4 :

$$\frac{11.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27}{6.7.8.9.2.3.4.5.6.7.8.9}$$

On simplifie encore : 24 et 6.4 ; 21 et 7.3 :

$$\frac{11.13.14.15.16.17.18.19.20.22.23.25.26.27}{8.9.2.5.6.7.8.9}$$

On continue avec 18 et 2.9 ; 16.27 avec 8.6.9 :

$$\frac{11.13.14.15.17.19.20.22.23.25.26}{5.7.8}$$

On termine avec 20.14 contre 5.8.7 : $\dfrac{11.13.15.17.19.22.23.25.26}{1}$

C'est un entier, et il est multiple de 3 : $2^2.3.5^3.11^2.13^2.17.19.23$.

◃21▹

Quarante élèves attendent d'aller en TD d'informatique, répartis en trois groupes A, B et C.
Quelques élève passent du groupe A au groupe B. Et le nombre d'élèves du groupe C double car quelques élèves qu'on attendait encore reviennent de la cantine.
Il y a maintenant autant d'élèves dans chacun des trois groupes ? Combien d'élèves au total ? (ne comptez pas dans la salle, il ne s'agit pas forcément de notre classe).

On part des effectifs des trois groupes : a, b et c. On sait $a+b+c=40$.

On regarde ce qu'il se passe

	groupe A	groupe B	groupe C
début	a	b	c
certains passent de A à B	$a-k$	$b+k$	c
certains reviennent de la cantine	$a-k$	$b+k$	$2\times c$
ils sont autant dans chaque groupe	$a-k=b+k=2\times c$		

On somme les effectifs

On extrait des deux premières : $k=\dfrac{a-b}{2}$. On reporte dans la troisième : $b+\dfrac{a-b}{2}=2.c$. On obtient $a+b=4.c$.
Mais $a+b$ est égal à $40-c$ (nombre initial d'élèves).
On trouve $40-c=4.c$. On trouve $c=8$.
Il y a 48 élèves dans la classe, trois groupes de 16. C'est réaliste.

	groupe A	groupe B	groupe C
début	32	0	8
certains passent de A à B	16	16	8
certains reviennent de la cantine	16	16	16

ou

	groupe A	groupe B	groupe C
début	21	11	8
5 passent de A à B	16	16	8
certains reviennent de la cantine	16	16	16

Ou encore

	groupe A	groupe B	groupe C
début	23	9	8
7 passent de A à B	16	16	8
certains reviennent de la cantine	16	16	16

	groupe A	groupe B	groupe C
début	43	-11	8
17 passent de A à B	16	16	8
certains reviennent de la cantine	16	16	16

Il y a beaucoup de possibilités. Mais 48 élèves !

◃22▹

♡ L'équation $x^2+b.x+c=0$ d'inconnue réelle x admet pour racines $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$. Calculez $\tan(\alpha+\beta)$ *(si elle existe...)*.

Rappel : $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *pour x hors de* $\left\{\dfrac{2.k+1}{2}.\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, *et* $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}$ *tant que tout ceci existe.*

Inutile de résoudre l'équation. On connaît la somme des racines : $\tan(\alpha)+\tan(\beta)=-b$
le produit des racines : $\tan(\alpha).\tan(\beta)=c$

On effectue : $\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha).\tan(\beta)}=\dfrac{-b}{1-c}=\dfrac{b}{c-1}}$

L'équation $x^3+b.x^2+c.x+d=0$ d'inconnue réelle x admet pour racines $\tan(\alpha)$, $\tan(\beta)$ et $\tan(\gamma)$. Calculez $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$.

On applique deux fois la formule : $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\gamma)}{1-\tan(\alpha+\beta).\tan(\gamma)}=\dfrac{\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}+\tan(\gamma)}{1-\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}.\tan(\gamma)}$.

On simplifie : $\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)+\tan(\gamma)-\tan(\alpha)\times\tan(\beta)\times\tan(\gamma)}{1-\tan(\alpha)\times\tan(\beta)+\tan(\beta)\times\tan(\gamma)-\tan(\beta)\times\tan(\gamma)}$.

Cette fois, on développe $(X-\tan(\alpha)).(X-\tan(\beta)).(X-\tan(\gamma))$ et on identifie avec $X^3+b.X^2+c.X+d$.

On identifie (relations coefficients racines) : $\begin{array}{llllllll} \tan(\alpha) & +\tan(\beta) & +\tan(\gamma) & = & -b \\ \tan(\alpha) & \times\tan(\beta) & \times\tan(\gamma) & = & -d \\ \tan(\alpha) & \times\tan(\beta) & +\tan(\alpha) & \times\tan(\gamma) & +\tan(\beta) & \times\tan(\gamma) & = & c \end{array}$

Tous calculs faits : $\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{-b-d}{1-c}$.

◁23▷ Associez les propriétés à leur nom

propriété				nom
$a \neq b$	$\Rightarrow$	$f(a) \neq f(b)$		f est croissante
a tend vers b	$\Rightarrow$	$f(a)$ tend vers $f(b)$		f est continue
$a < b$	$\Rightarrow$	$f(a) < f(b)$		f est continue pour le physicien
$a = b$	$\Rightarrow$	$f(a) = f(b)$		f est une application
$a \simeq b$	$\Rightarrow$	$f(a) \simeq f(b)$		f est injective
$a \leqslant b$	$\Rightarrow$	$f(a) \leqslant f(b)$		f est strictement croissante

Ce tableau ne figure dans aucun livre ? il devrait.

propriété			nom
$a \neq b$	$\Rightarrow$	$f(a) \neq f(b)$	f est injective
a tend vers b	$\Rightarrow$	$f(a)$ tend vers $f(b)$	f est continue
$a < b$	$\Rightarrow$	$f(a) < f(b)$	f est strictement croissante
$a = b$	$\Rightarrow$	$f(a) = f(b)$	f est une application
$a \simeq b$	$\Rightarrow$	$f(a) \simeq f(b)$	f est continue pour le physicien
$a \leqslant b$	$\Rightarrow$	$f(a) \leqslant f(b)$	f est croissante

L'implication $(a = b \Rightarrow f(a) = f(b))$ est la moindre des choses pour une application.
Un élément ne peut pas avoir plusieurs images.
Que feriez vous si vous deviez avoir $f(3) \neq f(1+2)$?

Les seuls cas de correspondance qui ne soient pas des applications sont :
à un complexe vous associez une de ses racines cubiques, mais vous ne savez pas laquelle choisir
à un complexe vous associez ses arguments (avec des modulo $2.\pi$ dans la réponse finalement.

◁24▷ ♡ On pose $f = a.\cos + b.\sin$.
Ajustez a et b pour avoir $f(\pi/3) = f(2.\pi/3) = 0$.
Ajustez a et b pour que f atteigne son maximum égal à 5 en $\pi/3$.
Pouvez vous ajuster a et b pour que le maximum de f soit 3 et son minimum -4.
Ajustez a et b pour avoir $f(0) = 1$ et $Sup\{|f(t)| \ \ t \in \mathbb{R}\} = 2$ (combien de possibilités ?).

La première question demande la résolution d'un système.

Et la seule solution est 0 (le déterminant du système $\left\{\begin{array}{rcrcl} \frac{1}{2}.a & + & \frac{\sqrt{3}}{2}.b & = & 0 \\ -\frac{1}{2}.a & + & \frac{\sqrt{3}}{2}.b & = & 0 \end{array}\right|$ est non nul, et de toutes façons, par addition...).

La seconde question donne .$\left\{\begin{array}{rcrcl} \frac{1}{2}.a & + & \frac{\sqrt{3}}{2}.b & = & 5 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}.a & + & \frac{1}{2}.b & = & 0 \end{array}\right|$ (valeur de la fonction, et dérivée nulle).

On trouve $t \longmapsto 5.\dfrac{\cos(t)+\sqrt{3}.\sin(t)}{2}$.

Et c'est même $t \longmapsto 5..\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$ et là on comprend tout !

Le maximum de $a.\cos + b.\sin$est $\sqrt{a^2+b^2}$ et son minimum $-\sqrt{a^2+b^2}$. Impossible donc que l'on passe de 3 à -4.

Pour avoir $f(0) = 1$, on n'a pas le choix : $a = 1$.
Ensuite, $\sqrt{a^2+b^2}$ vaut 2.
On a deux fonctions : $t \longmapsto \cos(t) + \sqrt{3}.\sin(t)$ et $t \longmapsto \cos(t) - \sqrt{3}.\sin(t)$.

◁25▷ ♡ L'équation $x^2+(1+i).x+$  $=0$ d'inconnue complexe x admet pour racine $1-i$. Trouvez la valeur sous la tache et la valeur de l'autre racine.

On note a la tache, on sait alors $(1-i)^2+(1+i).(1-i)+a=0$.
On trouve $a=-2+2.i$.
Il reste l'autre racine, sachant que la somme des deux racines vaut $-1-i$. C'est donc -2.

On pouvait aussi utiliser les relations coefficients racines directement :
somme $-1-i$, donc l'autre racine vaut -2
produit « la tache », donc elle vaut $-2+2.i$.

◁26▷ Résolvez l'équation $\log_2(x)+\log_x(2)=4$ d'inconnue réelle x.
On rappelle que pour a strictement positif $\log_a(x)$ est le réel y vérifiant $a^y=x$.

On résout donc l'équation $\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}+\dfrac{\ln(2)}{\ln(x)}=4$ sur $]0,\ +\infty[$ car x se doit d'être strictement positif pour que tout ceci ait un sens.
En posant $X=\ln(x)$ on aboutit à $X^2-4.\ln(2).\ln(x)+(\ln(2))^2=0$.
On trouve $X=(2-\sqrt{3}).\ln(2)$ ou $X=(2+\sqrt{3}).\ln(2)$.
Les solutions en X sont $2^{2+\sqrt{3}}$ et $2^{2-\sqrt{3}}$.

◁27▷ ♡ Calculez les dérivées premières des applications suivantes :

$x\longmapsto \dfrac{1}{(\ln(x))^2}$	$x\longmapsto e^{\cos(x)}$	$x\longmapsto x.\cos(\ln(x))+x.\sin(\ln(x))$	$x\longmapsto \dfrac{x}{e^x}$

$x\longmapsto \dfrac{1}{(\ln(x))^2}$	$x\longmapsto e^{\cos(x)}$	$x\longmapsto x.\cos(\ln(x))+x.\sin(\ln(x))$	$x\longmapsto \dfrac{x}{e^x}$
$x\longmapsto \dfrac{-2}{x.(\ln(x))^3}$	$x\longmapsto -\sin(x).e^{\cos(x)}$	$x\longmapsto 2.\cos(\ln(x))$	$x\longmapsto e^{-x}-x.e^{-x}$

◁28▷ * Résolvez $\cos^{(n)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$ d'inconnue entière n. (début déjà posé).
On pose $f=x\longmapsto\cos(2.x)$. Résolvez $f^{(n)}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=0$ d'inconnue entière n.
Résolvez $f^{(n)}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\in\mathbb{Z}$ d'inconnue entière n.
Résolvez $f^{(n)}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\in\mathbb{N}$ d'inconnue entière n.

Les dérivées successives du cosinus sont connues : | cos | − sin | − cos | sin | et on recommence.
On a donc

$\cos^{(0)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$	$\cos^{(1)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos^{(2)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$	$\cos^{(4)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
non	non	oui	non

et plus généralement

$\cos^{(4.k)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$	$\cos^{(4.k+1)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos^{(4.k+2)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$	$\cos^{(4.k+2)}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
non	non	oui	non

On a donc $\boxed{S=\{4.k+2\mid k\in\mathbb{N}\}}$

Rappel : les réponses | $S=\{4.k+2\}$ | *ou* | $S=\{4.k+2\}\ k\in\mathbb{N}$ | *sont erronées, et montrent qu'il vous reste un peu de chemin à faire pour maîtriser les notations mathématiques.*
C'est normal, et ce n'est pas grave.
Ce qui est grave, c'est de croire que vous les maitrisez, ou pire encore, de dire « bah, $S=\{4.k+2\mid k\in\mathbb{N}\}$ *et* $S=\{4.k+2\}\mid k\in\mathbb{N}$ *c'est pareil ».*

Plus rigoureusement, le cours contient la formule $\cos^{(n)}=t\longmapsto\cos\left(t+\dfrac{n.\pi}{2}\right)$ (qui se démontre par récurrence sur n).
On résout donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{n.\pi}{2}\right)=\dfrac{-1}{2}=\cos\left(\dfrac{2.\pi}{3}\right)$.

Les deux cas d'égalité des cosinus donnent $\frac{\pi}{3}+\frac{n.\pi}{2}=\frac{2.\pi}{3}+2.k.\pi$ ou $\frac{\pi}{3}+\frac{n.\pi}{2}=-\frac{2.\pi}{3}+2.k.\pi$

L'inconnue est n et k décrit $\mathbb{Z}$ pour avoir les solutions.

On simplifie par π et on multiplie par 2 : $n=\frac{2}{3}+4.k.$ et $n=-2.+4.k$

Comme n doit être entier (et même entier naturel), on élimine.

Méfiez vous de $f=x\longmapsto\cos(2.x)$, on a alors $f'=x\longmapsto -2.\sin(2.x)$, $f''=x\longmapsto -4.\cos(2.x)$, $f^{(3)}=x\longmapsto 8.\sin(2.x)$, $f^{(4)}=x\longmapsto 16.\cos(2.x)$ et ainsi de suite.
A chaque dérivation, il sort un 2 à cause de la composition $t\longmapsto 2.t\longmapsto\cos(2.t)$.

On va dériver et calculer en $\frac{\pi}{12}$, on va donc avoir des $2^n.truc\left(\frac{\pi}{6}\right)$ avec $truc$ égal à sin ou cos (au signe près).
Jamais ceci ne pourra être nul.

$\cos(\pi/6)$ donne d'intempestives $\sqrt{3}$ qu'on ne pourra effacer. Impossible de revenir dans $\mathbb{Z}$.

$\sin(\pi/6)$ vaut $\frac{1}{2}$, et avec le 2^n devant, on peut espérer retomber dans $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$.

$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{12}\right)=0$	$S=\emptyset$
$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{12}\right)\in\mathbb{Z}$	$S=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ldots\}=\{2.k+1\mid k\in\mathbb{Z}\}$
$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{12}\right)\in\mathbb{N}$	$S=\{3,\ 7,\ 11\ldots\}=\{4.k+3\mid k\in\mathbb{Z}\}$

◃29▹ * ♡♣ Calculez ce produit factoriel $\prod_{k=0}^{30}(k!)^{((-1)^k)}$.

Dans ce produit, il y a des factorielles au numérateur, et d'autres au dénominateur. Suivant la parité de k.

2! 4! 6! 8! ... 30!
1! 3! 5! 7! 9! ... 29!

On regroupe presque deux à deux :

$$\frac{2!}{3!}.\frac{4!}{5!}.\frac{6!}{7!}.\frac{8!}{9!}.\frac{10!}{11!}.\frac{12!}{13!}.\frac{14!}{15!}.\frac{16!}{17!}.\frac{18!}{19!}.\frac{20!}{21!}.\frac{22!}{23!}.\frac{24!}{25!}.\frac{26!}{27!}.\frac{28!}{29!}.30!$$

On simplifie par $\frac{k!(k+1)!}{}=\frac{1}{k+1}$:

$$\frac{1}{3}.\frac{1}{5}.\frac{1}{7}.\frac{1}{9}.\frac{1}{11}.\frac{1}{13}.\frac{1}{15}.\frac{1}{17}.\frac{1}{19}.\frac{1}{21}.\frac{1}{23}.\frac{1}{25}.\frac{1}{27}.\frac{1}{29}.30!$$

Mais, 30! est le produit de tous les entiers de 1 à 30 (pairs comme impairs).
Les impairs sautent avec le dénominateur. Il reste

$$2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.26.28.30$$

Et en sortant les 15 facteurs 2, ceci vaut in fine $2^{15}.15!$.

Proprement, on note A le rationnel à calculer :

$$A=\prod_{k=0}^{30}(k!)^{((-1)^k)}=\Big(\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant 30\\ k\ pair}}(k!)\Big).\Big(\prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant 30\\ k\ pair}}\frac{1}{k!}\Big)$$

$$A=\Big(\prod_{0\leqslant p\leqslant 15}(2.p)!\Big).\Big(\prod_{0\leqslant p\leqslant 14}\frac{1}{(2.p+1)!}\Big)=30!.\Big(\prod_{0\leqslant p\leqslant 14}(2.p)!\Big).\Big(\prod_{0\leqslant p\leqslant 14}\frac{1}{(2.p+1)!}\Big)$$

$$A=30!.\Big(\prod_{0\leqslant p\leqslant 14}\frac{(2.p)}{(2.p+1)!}\Big)=\Big(\prod_{k=1}^{30}k\Big).\Big(\prod_{0\leqslant p\leqslant 14}\frac{1}{2.p+1}\Big)$$

$$A=\Big(\prod_{p=1}^{15}(2.p)\Big).\Big(\prod_{p=0}^{14}(2.p+1)\Big).\Big(\prod_{0\leqslant p\leqslant 14}\frac{1}{2.p+1}\Big)=\Big(\prod_{p=1}^{15}(2.p)\Big)$$

$$A=\Big(\prod_{p=1}^{15}(2)\Big).\Big(\prod_{p=1}^{15}(p)\Big)=2^{15}.15!$$

◁30▷ **Donnez les racines quatrièmes de $721+5280.i$.**

On cherche déjà ses racines carrées, puis on cherchera les racines carrées de ces racines.
On résout donc $(a+i.b)^2=721+5280.i$ avec a et b réels.

On identifie
la partie réelle	$a^2-b^2=721$	
la partie imaginaire	$2.a.b=5280$	
le module	$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=5329$	de $\sqrt{721^2+5280^2}$

La première et la dernière $\begin{matrix}a^2-b^2=721\\ a^2+b^2=5329\end{matrix}$ donnent par addition et soustraction : $\begin{matrix}a^2=3025\\ b^2=2034\end{matrix}$ puis $\begin{matrix}|a|=55\\ |b|=48\end{matrix}$ (gare aux signes).
L'équation $2.a.b=5280$ valide ceci et donne l'ultime information « a et b sont de même signe ».

En effet, avec $\begin{matrix}a^2=3025\\ b^2=2034\end{matrix}$ on ouvrait sur quatre possibilités :

$a=55$	et	$b=48$
$a=55$	et	$b=-48$
$a=-55$	et	$b=48$
$a=-55$	et	$b=-48$

Il ne reste que

$a=55$	et	$b=48$	$55+48.i$
$a=-55$	et	$b=-48$	$-55-48.i$

et avec logique, on constate qu'on a deux complexes opposés.

Les deux racines carrées de $721+5280.i$ sont $55+48.i$ et $-55-48.i$.

On recommence avec
la partie réelle	$\alpha^2-\beta^2=55$
la partie imaginaire	$2.\alpha.\beta=48$
le module	$\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^2=73$

.

On a cette fois

nombre	racines carrées	racines quatrièmes
$721+5280.i$	$55+48.i$	$8+3.i$
		$-8-3..i$
	$-55-48.i$	$3-8.i$
		$-3+8.i$

On note que ces quatre racines quatrièmes sont réparties sur un cercle « trigonométrique » de rayon $\sqrt{73}$.

◁31▷ **♡ Calculez $(1+i)^2$. Résolvez $z^2+2.i.z+2.i=1$ d'inconnue complexe z.**

Facile : $(1+i)^2=2.i$.
Ce calcul est juste là pour penser ensuite à $(2.(1+i))^2=4.2.i=8.i$ puis $(2.i.(1+i))^2=4.(-1).2.i=-8.i$.

Pour $z^2+2.i.z+2.i-1=0$, on a une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.

On la résout classiquement :

$a=1$	$b=2.i$	$c=-1+2.i$
$\Delta=b^2-4.a.c=-8.i$		
$\delta=2.i.(1+i)$		
$z_1=\dfrac{-2.i+2.(i-1)}{2}$	$S=\{-1,\ 1-2.i\}$	$z_2=\dfrac{-2.i-2.(i-1)}{2}$

Et même encore plus classiquement : $z^2+2.i-1+2.i=0 \Leftrightarrow (z+i)^2+2.i=0$
$z^2+2.i-1+2.i=0 \Leftrightarrow (z+i)^2=-2.i$
$z^2+2.i-1+2.i=0 \Leftrightarrow (z+i)^2=(i.(1+i))^2$
$z^2+2.i-1+2.i=0 \Leftrightarrow (z+i)^2=(i-1)^2$
$z^2+2.i-1+2.i=0 \Leftrightarrow (z+i)^2-(i-1)^2=0$
$z^2+2.i-1+2.i=0 \Leftrightarrow \big((z+i)-(i-1)\big).\big((z+i)+(i-1)\big)=0$
$z^2+2.i-1+2.i=0 \Leftrightarrow (z+1).(z-1+2.i)=0$
par intégrité, on a les deux solutions : -1 et $1-2.i$.

Plus rapide : on devine une solution évidente : -1 puisque $(-1)^2+2.i.-1)+2.i-1=0$.
On trouve l'autre en factorisant ou par la somme ou le produit des racines.

Encore plus rapide : on propose les deux solutions, et on vérifie, puisqu'on sait qu'il y en a deux, et seulement deux.

◁32▷ * On veut résoudre l'équation $z^2 + (i-3).z + (32+4.i) = 0$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$. Calculez le discriminant Δ de ce trinôme.
On cherche alors un complexe δ de la forme $\alpha + i.\beta$ avec αet β réels vérifiant $\delta^2 = \Delta$ (qu'on ne peut pas noter $\delta = \sqrt{\Delta}$ car on est dans $\mathbb{C}$ [a]). Calculez $\alpha^2 - \beta^2$, $2.\alpha.\beta$ et aussi $\alpha^2 + \beta^2$ (pensez au module...).
Déduisez les valeurs possibles pour le couple $(\alpha,\ \beta)$.
Trouvez les solutions de l'équation.

a. dans $\mathbb{R}$,on choisit de prendre comme racine carrée le réel positif, mais dans $\mathbb{C}$, poseriez vous $\sqrt{-2.i} = 1-i$ ou $\sqrt{-2.i} = i-1$

On pose donc $a = 1$, $b = (i-3)$ et $c = 32+4.i$.
On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4.a.c = (i-3)^2 - 4.(32+4.i) = i^2 + 3^2 - 6.i - 128 - 16.i$.
Le discriminant vaut $\boxed{-120-22.i}$

Une question de simple calcul sur les complexes. Tout le monde pouvait la traiter, même ceux qui auront jugé que c'était se dévaloriser d'aller chercher un point si facilement acquis.
Rappelons qu'à vaincre sans péril, on triomphe sans gloire... mais ce qui est important c'est qu'on triomphe...

Ensuite, il ne faut pas parler du signe de $-120-22.i$, ça n'a aucun sens.

On cherche un couple de réels vérifiant $(a+i.b)^2 = -120-22.i$.
On développe et identifie : $\boxed{a^2 - b^2 = -120 \quad 2.a.b = -22}$
On passe aussi au module : $|(a+i.b)^2| = |-120-22.i|$.*
Or, le module du carré est le carré du module. On se ramène à $|a+i.b|^2 = \sqrt{120^2+22^2}$.
On a comme suggéré alors : $a^2+b^2 = \sqrt{14400+484}$. C'est cadeau, c'est $a^2+b^2 = 122$.

On résume $\boxed{a^2 - b^2 = -120 \quad a^2 + b^2 = 122}$.
On somme : $2.a^2 = 2$, donc $|a| = 1$.
On soustrait : $b^2 = 121$ donc $|b| = 11$.
On choisit alors le signe de chacun en sachant que $2.a.b$ vaut -22.
On fixe par exemple $a = 1$ et $b = -11$.

On peut vérifier : $\boxed{(1-11.i)^2 = 1^2 + 11^2.i^2 - 2.11.i = -120-22.i}$

On utilise alors la formule pour l'équation du second degré, issue de calculs algébriques valables tout autant dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{-b+\delta}{2.a}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2.a}$.
On trouve $\boxed{2-6.i \text{ et } 1+5.i}$

Même si ça ne sert ici à rien, on place les deux points dans le plan complexe et on interprète géométriquement le vecteur δ qui les sépare...

◁33▷ Montrez par récurrence sur n plus grand que 5 : $3^n \leqslant \dfrac{(2.n)!}{(n!)^2} \leqslant 4^n$.

Initialisation pour $n = 5$ puisqu'il y a un début à tout :

$$3^5 \leqslant \frac{10!}{(5!)^2} = \frac{6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5} = 2^2.3^2.7 \leqslant 4^5$$

C'est vrai car $3^3 = 27 \leqslant 2^2.7 = 28$ et $3^2.7 = 63 \leqslant 256 = 4^4$. De justesse d'un côté.

> *Si vous avez calculé* $3^5 = 243$, $\dfrac{10!}{(5)^2} = 252$ *et* $4^5 = 1024$, *vous avez raison, mais vous me décevez de ne pas avoir un peu simplifié.*

On se donne un entier naturel n et on suppose $3^n \leqslant \dfrac{(2.n)!}{(n!)^2} \leqslant 4^n$.

L'objectif étant $3^{n+1} \leqslant \dfrac{(2.n+2)!}{((n+1)!)^2} \leqslant 4^{n+1}$, intéressons nous au terme du milieu :

$$\frac{(2.n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2.n)!}{(n!)^2}.\frac{(2.n+1).(2.n+2)}{(n+1)^2} = \frac{(2.n)!}{(n!)^2}.\frac{4.n+2}{n+1}$$

On raisonne en deux temps :

• droite : $\frac{4.n+2}{n+1} \leqslant 4$ (produit en croix) donc $\frac{(2.n)!}{(n!)^2}.\frac{4.n+2}{n+1} \leqslant 4^n.4 = 4^{n+1}$

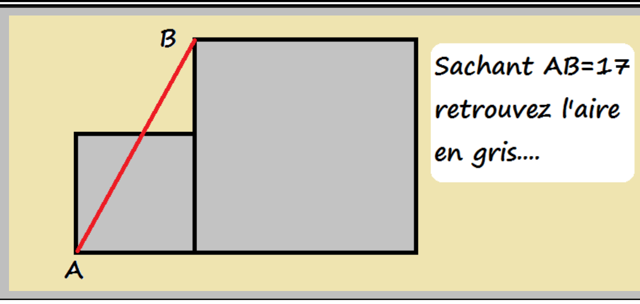
• gauche : $\frac{4.n+2}{n+1} \geqslant 4$ (produit en croix et $n \geqslant 5$) donc $\frac{(2.n)!}{(n!)^2}.\frac{4.n+2}{n+1} \geqslant 3^n.3 = 3^{n+1}$.

Le principe de récurrence permet de conclure.

◁34▷ ♡ Calculez $\int_0^1 4^x.dx$.

$$\int_0^1 4^x.dx = \int_0^1 e^{\ln(4).x}.dx = \left[\frac{e^{\ln(4).x}}{\ln(4)}\right]_0^1 = \frac{4}{\ln(4)} - \frac{1}{\ln(4)} = \frac{3}{\ln(4)}$$

◁35▷ Sachant $x = 45678^3 - 45676^3$, calculez $\sqrt{\frac{x-2}{6}}$.



Les deux figures en gris sont des carrés.

Posons $a = 45677$ pour centrer les choses.
On a alors $x = 45678^3 - 45676^3 = (a+1)^3 - (a-1)^3 = (a^3 + 3.a^2 + 3.a + 1) - (a^3 - 3.a^2 + 3.a - 1)$.
On simplifie : $x = 6.a^2 + 2$.
On soustrait, on divise par 6 : $\frac{x-2}{6} = a^2$.
La racine cherchée vaut donc $\boxed{45\,677}$

Le problème de géométrie utilise simplement le théorème de Pythagore.
On note a et b les côtés des deux carrés. Dans le triangle rectangle d'hypoténuse AB, on a $B^2 = a^2 + b^2$.
Mais les aires des deux carrés sont justement a^2 et b^2. La somme des aires est donc $\boxed{17^2}$

◁36▷ Comparez pour l'ordre usuel : $3.\log_2(1000)$ et $10.\log_{10}(1024)$.

On a $\log_2(1024) = 10$ car $2^{10} = 1024$ *(principe bien connu en informatique)*.
On a $\log_{10}(1000) = 3$ car $10^3 = 1000$ *(principe bien connu en physique et appris par cœur en chimie)*.

On met bout à bout par croissance du logarithme de base plus grand que 1 :
$\boxed{3.\log_2(1000) < 3.\log_2(1024) = 3.10 = 10.3 = 10.\log_{10}(1000) < 10.\log_{10}(1024)}$

◁37▷ Calculez $\int_0^1 2^x.3^{-x}.4^x.5^{-x}.dx$.

On écrit

$$\int_0^1 e^{(\ln(8/15)).x}.dx$$

et on intègre en $\frac{e^{(\ln(8/15)).x}}{\ln(8/15)}$ et on trouve $\boxed{\frac{-7}{15.\ln(8/15)}}$ (positif quand même).

◁38▷ ♡ Qui est le plus grand : 3^e ou e^3 ? *(calculatrice interdite, étude de $t \longmapsto \frac{\ln(t)}{t}$ judicieuse)*.

L'application $t \longmapsto \frac{\ln(t)}{t}$ a pour dérivée $t \longmapsto \frac{1-\ln(t)}{t^2}$.
Elle est donc croissante puis décroissante, avec un maximum en e.
Son image en 3 est donc plus petite que son image en e : $\frac{\ln(3)}{3} < \frac{\ln(e)}{e}$.

Comme tout est positif, on multiplie en croix : $e.\ln(3) < 3$.
On passe à l'exponentielle (croissante) : $e^{\ln(3).e} < e^3$: on simplifie $\boxed{3^e < e^3}$
Pour l'ami physicien qui sommeille en vous : $3^e \simeq 19,813$ à 10^{-3} près et $3^e \simeq 20,085$ à 10^{-3} près.
Et attention, l'écriture « $3^e \simeq 19,813$ » n'a aucun sens en mathématiques (ni même en sciences)
c'est « $3^e \simeq 19,813$ à 10^{-3} » près qui en a un.

◁ 39 ▷ ♡ On définit $f = (x, y) \longmapsto (3.x + 2.y,\ 4.x + 5.y)$. Montrez qu'elle n'est pas une bijection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans lui même.
On pose $E = \{0, 1, 2, \dots 18\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 19. Montrez que f est une bijection de $E \times E$ dans lui même.
On pose $E = \{0, 1, 2, \dots 20\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 21. Montrez que f n'est pas une bijection de $E \times E$ dans lui même.
On pose $E = \{0, 1, 2, \dots 19\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 20. f est elle une bijection de $E \times E$ dans lui même.
(pour la bijectivité, la bonne démarche sera de trouver la bijection réciproque).

On vérifie déjà que f va bien de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans lui même : si a et b sont deux entiers relatifs, alors $3.a + 2.b$ et $4.a + 5.b$ sont bien deux entiers aussi.

Le défaut serait il un défaut d'injectivité ?
Est il possible que deux couples différents $(x,\ y)$ et $(a,\ b)$aient la même image ?
On suppose $\begin{array}{rrcrr} 3.a & +2.b & = & 3.x & +2.y \\ 4.a & +5.b & = & 4.x & +5.y \end{array}$. On combine $\begin{array}{rrcrr} 12.a & +8.b & = & 12.x & +8.y \\ 12.a & +15.b & = & 12.x & +15.y \end{array}$
on soustrait : $\begin{array}{rrcrr} 12.a & +8.b & = & 12.x & +8.y \\ & 7.b & = & & 7.y \end{array}$.
On aboutit à $b = y$ puis $x = a$, d'où $(a,\ b) = (x,\ y)$.
L'application est injective.

C'est donc un défaut de surjectivité qu'on doit détecter.
Existe-t-il des éléments de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui n'ont pas d'antécédent ?
Par exemple $(0,\ 0)$ en a un et c'est $(0,\ 0)$.
$(5,\ 9)$ a un antécédent et c'est $(1,\ 1)$
Mais $(1,\ 0)$ a-t-il un antécédent ? Pourquoi lui, pourquoi pas...
On doit résoudre $\begin{array}{rrcr} 3.a & +2.b & = & 1 \\ 4.a & +5.b & = & 0 \end{array}$. On trouve $a = \dfrac{5}{7}$ et $b = \dfrac{-4}{7}$ (unique antécédent possible d'ailleurs).
Mais cet antécédent n'est pas dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, c'est donc foutu.

Plus généralement, $(\alpha,\ \beta)$ a pour unique antécédent $\left(\dfrac{5.\alpha - 2.\beta}{7},\ \dfrac{3.\beta - 4.\alpha}{7}\right)$ (résolution de système).
Et il y a bien des cas où ce seul antécédent possible n'est pas dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Remarque	de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ elle était bijective, avec pour bijection réciproque $(\alpha,\ \beta) \longmapsto \left(\dfrac{5.\alpha - 2.\beta}{7},\ \dfrac{3.\beta - 4.\alpha}{7}\right)$.

A traiter pour les opérations modulo 19, en trouvant l'expression de la bijection réciproque.

Si on calcule bien :

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix} 3.x + 2.y \\ 4.x + 5.y \end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix} 17.(3.x + 2.y) + 16.(4.x + 5.y) \\ 13.(3.x + 2.y) + 14.(4.x + 5.y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
	f		f^{-1}	

dans les deux sens :

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix} 17.a + 16.b \\ 13.x + 14.y \end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix} 3.(17.a + 16.b) + 2.(13.x + 14.y) \\ 4.(17.a + 16.b) + 5.(13.x + 14.y) \end{pmatrix}$
	f^{-1}		f	

En revanche, modulo 21, on détecte un défaut d'injectivité : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ par exemple ont la même image (c'est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).
Et par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'a pas d'antécédent.

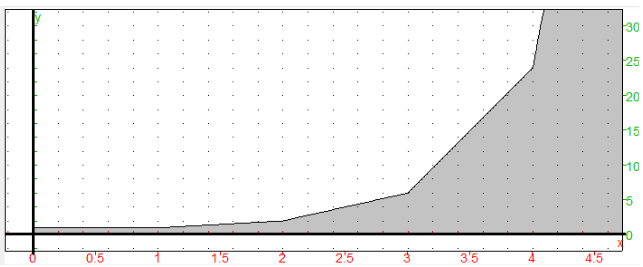
◁ 40 ▷ ♣ On imagine qu'on définit une généralisation de la fonction factorielle de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ en lui demandant d'être affine sur chaque segment $[n,\ n+1]$ pour n dans $\mathbb{N}$ *(par exemple* $(3,4)! = 13,2$ *car* $3! = 6$ *et* $4! = 24$*)*. Est elle alors injective ? Est elle surjective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$? Si non, de $\mathbb{R}^+$ dans quoi ?
Calculez $(5,2)!$ et $(52/7)!$.
Calculez $\int_0^4 (x)!.dx$.
Résolvez l'équation $(x)! = 2017$ d'inconnue réelle x.

Sur le segment $[n,\ n+1]$, on veut une application affine qui vérifie $f(n) = n!$ et $f(n+1) = (n+1)!$.
Son coefficient directeur vaut $\dfrac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n}$ ce qui ait ici $(n+1)! - n!$. On peut le factoriser en $n.n!$.
On ajuste pour avoir $f(n) = n!$: $f(x) = n.n!.(x-n) + n!$.
La formule est donc $x \longmapsto n.n!.x + (1-n^2).n!$ sur l'intervalle $[n,\ n+1]$.

$[0,\ 1]$	$[1,\ 2]$	$[2,\ 3]$	$[3,\ 4]$	$[4,\ 5]$	$[5,\ 6]$
1	x	$4.x-6$	$18.x-48$	$96.x-360$	$600.x-2880$

Elle est constante sur $[0,\ 1]$ et donc pas injective.

Aucun réel négatif n'est atteint. Son minimum vaut d'ailleurs 1.



Son intervalle image est $[1,\ +\infty[$.

En $5,2$ l'image est 240.

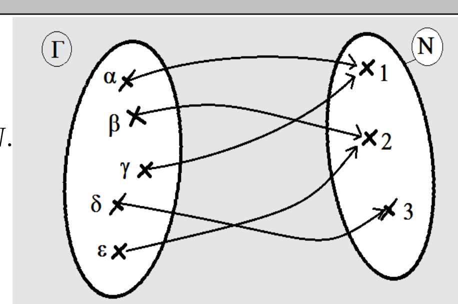
En $52/7$ (qui est entre 7 et 8) : 20160.

Pour atteindre la valeur 2017 (compris entre 6! et 7!), il faut utiliser la formule $x \longmapsto 4320.x - 25200$.
On résout donc $4320.x - 25200 = 2017$.
On trouve $x = 27217/4320$.

Pour l'intégrale, on découpe par relation de Chasles $\int_0^1 1.dt + \int_1^2 (t).dt + \int_2^3 (4.t-6).dt + \int_3^4 (96.t-360).dt$.
Sauf erreur : $43/2$.

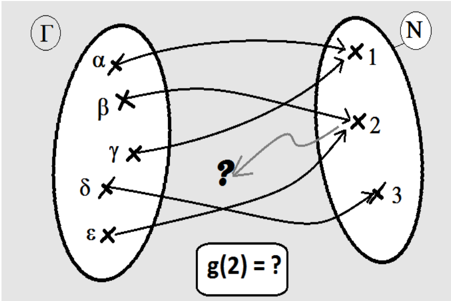
◁ 41 ▷ ♡ Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrez (par deux implications) que f est injective si et seulement si $f \circ f$ est injective.
Montrez (par deux implications) que f est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f \circ f$ est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

◁ 42 ▷ On pose $f(\alpha) = 1$, $f(\beta) = 2$, $f(\gamma) = 1$, $f(\delta) = 2$ et $f(\varepsilon) = 3$. Combien existe-t-il d'applications g de $\{1,2,3\}$ (noté N) dans $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ (noté Γ) vérifiant $f \circ g = Id_{\{1,2,3\}}$? Combien existe-t-il d'applications h de $\{1,2,3\}$ dans $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ vérifiant $h \circ f = Id_{\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}}$?

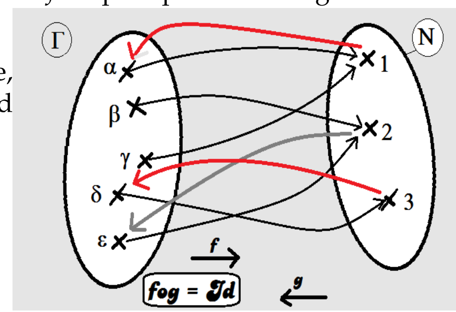


On a défini une application f que l'on peut représenter de G dans N.
Elle n'est pas injective puisque α et γ ont la même image.
Elle est surjective, car chaque nombre a au moins un antécédent.

1 a pour antécédents	α et γ
2 a pour antécédents	β et ε
3 a pour antécédent	δ



Il y a une question à laquelle on peut répondre tout de suite. Il ne peut existe h vérifiant $h \circ f = Id_N$. Non pas parce qu'on ne pourrait pas composer. Mais parce que si une telle application existant, $h \circ f$ serait injective, et f le serait aussi.
Mais on peut aussi se poser la question de la valeur de $h(2)$. On aurait $h(2) = h(f(\beta)) = \beta$ et en même temps $h(2) = h(f(\varepsilon)) = \varepsilon$.
On ne peut pas définir $h(2)$, h n'existe pas.
Le défaut d'injectivité de f ne peut pas être corrigé.



On cherche g vérifiant $f \circ g = Id_N$ (on prend un élément numérique, de N, on le monte dans Γ sur une lettre grecque, puis on redescend par f. On s'interroge sur les images par g :
$g(1)$ vérifie $f(g(1)) = 1$
$g(1)$ est un antécédent de 1 par f : α ou γ.
$g(2)$ vérifie $f(g(2)) = 2$
$g(2)$ est un antécédent de 2 par f : β ou ε.
$g(3)$ vérifie $f(g(3)) = 3$.

$g(3)$ est l'antécédent de 3 par f : δ. On a donc les valeurs possibles

$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$
α ou γ	β ou ε	δ

.

On peut raisonner avec un arbre de possibilités. On a $\boxed{2 \times 2 \text{ applications possibles}}$

$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$
α	β	δ

$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$
α	ε	δ

Représentée plus haut.

$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$
γ	β	δ

$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$
γ	ε	δ

◃43▹

♡ Montrez que l'application tan est injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (indication : π est irrationnel).
Est elle bijective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$?
Montrez que l'application sin est injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$?
Montrez que l'application cos n'est pas injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Si on part de $\tan(a) = \tan(b)$ avec a et b rationnels (donc différents des irrationnels $\frac{\pi}{2} + k.\pi$), on aboutit à l'existence de k dans $\mathbb{Z}$ vérifiant $a - b = k.\pi$.
Si k est non nul, le membre de droite est irrationnel et celui de gauche rationnel. C'est impossible.
Il ne reste que $k = 0$ et donc $a = b$.

Elle n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ puisque la valeur 1 n'est pas atteinte *(il faudrait qu'un rationnel $\frac{p}{q}$ soit égal à un irrationnel $\frac{\pi + 4.k.\pi}{4}$ avec k entier)*.

Pour le sinus, on part de $\sin(a) = \sin(b)$.
Ceci conduit à deux possibilités : $a = b + 2.k.\pi$ ou $a = \pi - b + 2.k.\pi$ avec k entier.
La première donne ($a = b$ et $k = 0$) ou alors $\pi = \frac{a - b}{2.k}$ qui est impossible.
La deuxième donne $\pi = \frac{a + b}{2.k + 1}$ qui est impossible *(irrationnel à gauche, rationnel à droite)*.
Éliminez l'impossible, il ne reste que $a = b$.

Pour le cosinus, un contre-exemple suffit : 1 et -1 ont la même image *(parité)*.

Qu'en est il de $x \longmapsto \cos(2.x + 1)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
Qu'en est il de $x \longmapsto \cos(3.x + 1)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

A faire.

◃ 44 ▹ ♡ Montrez que $(a,\ b) \longmapsto (2.a+3.b,\ 3.a+4.b+1)$ (notée g) est bijective de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$ par exemple en donnant sa réciproque g vérifiant $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = Id$.
(au fait, qui a oublié de vérifier avant la bijectivité que l'on a bien une application de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$?)
Montrez que pour $(a,\ b) \longmapsto (2.a+3.b,\ 2.a+4.b+1)$ (notée h), il existe une application h de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$ vérifiant $h^{-1} \circ h = Id_{Z^2}$.

Ce qu'on oublie à tous les coups : cette application va-t-elle bien de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$?
Si a et b sont entiers (relatifs), alors $2.a+3.b$ et $3.a+4.b+1$ sont aussi entiers.

Injectivité, parce que c'est le plus simple à faire, juste en calculant.
On se donne a, b, c et d.
On suppose $(2.a+3.b,\ 3.a+4.b+1) = (2.c+3.d,\ 3.c+4.d+1)$.
On égalise : $\begin{array}{llll} 2.a & +3.b & = & 2.c & +3.d \\ 3.a & +4.b & = & 3.c & +4.d \end{array}$
On effectue des combinaisons : $3.L1 - 2.L2$ et aussi $4.L1 - 3.L2$.
On aboutit à $a = c$ et $b = d$.

Surjectivité. On se donne un couple $(x,\ y)$, il faut lui trouver un antécédent.
On résout donc $\begin{array}{lllll} 2.a & +3.b & = & a & \\ 3.a & +4.b & = & b & -1 \end{array}$ d'inconnues a et b.
On trouve une unique solution (après calculs) : $a = 3.b - 4.a - 3$ et $b = 3.a - 2.b + 2$.

le fait d'avoir trouvé une solution DANS $\mathbb{Z}^2$ (pas de dénominateur) prouve la surjectivité vers $\mathbb{Z}^2$.
Et le fait de n'avoir qu'une solution re-donne l'injectivité.

Pour la surjectivité seule, on peut proposer/vérifier.

Tiens, on a trouvé l'application réciproque : $(x,\ y) \longmapsto (-4.a+3.b-3,\ 3.a-2.b+2)$.

Petite subtilité en passant.
L'application de l'énoncé peut aussi être regardée de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^2$.
Elle va bien de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^2$ (que des signes plus).
Elle reste injective.
Mais elle n'est plus surjective. l'antécédent de $(1,\ 0)$ est dans $\mathbb{Z}^2$ mais pas dans $\mathbb{N}^2$.

◃ 45 ▹ Pour écrire en une seule ligne que trois éléments a, b et c sont distincts, on écrit

$$a \neq b \neq c \neq a$$

car la seule relation $a \neq b \neq c$ ne suffit pas.
Pour quatre éléments, en une seule ligne, montrez qu'il n'y a pas plus court que

$$a \neq b \neq c \neq d \neq a \neq c \neq b \neq d$$

Quelle sera la formule en une seule ligne la plus courte pour cinq éléments ? Même question pour six.

◃ 46 ▹ Montrez que si f et g sont injectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors $g \circ f$ l'est aussi.
Donnez un exemple où f et $g \circ f$ sont injectives mais où f ne l'est pas.

◃ 47 ▹ ♡ Résolvez $\left\{ \begin{array}{lllll} x & + & y & = & 7 \\ x^2 & + & y^2 & = & 29 \end{array} \right|$ d'inconnues réelles x et y.

Résolvez $\left\{ \begin{array}{lllll} a & + & b & = & 7 \\ a^3 & + & b^3 & = & 973 \end{array} \right|$ d'inconnues réelles a et b.

En raisonnant par équivalences et en ambitionnant à chaque fois d'avoir deux nombres dont on connait la somme et le produit :

$$\left\{ \begin{array}{lllll} x & + & y & = & 7 \\ x^2 & + & y^2 & = & 29 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llllll} x & + & y & & = & 7 \\ x^2 & + & y^2 & +2.x.y & = & 49 \\ x^2 & + & y^2 & & = & 29 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llllll} x & + & y & & = & 7 \\ & & & x.y & = & 10 \\ x^2 & + & y^2 & & = & 29 \end{array} \right|$$

x et y sont les deux racines de $X^2 - 7.X + 10$ de racines évidentes 2 et 5. $S_{(x,y)} = \{(2,5),\ (5,2)\}$.

Pour l'autre système, on exploite $a^3+b^3=(a+b).(a^2-a.b+b^2)$:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 7 \\ a^3 & + & b^3 & = & 973 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 7 \\ a^{é} & +2.a.b & +b^2 & = & 49 \\ a^3 & + & b^3 & = & 973 \\ a^2 & -a.b & +b^2 & = & 139 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 7 \\ a^{é} & +2.a.b & +b^2 & = & 49 \\ a^3 & + & b^3 & = & 973 \\ a^2 & -a.b & +b^2 & = & 139 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 7 \\ a^{é} & +2.a.b & +b^2 & = & 49 \\ a^3 & + & b^3 & = & 973 \\ & 3.a.b & & = & -90 \end{array}\right|$$

a et b sont les racines de $X^2-7.X-30$, on trouve 10 et -3.
On vérifie pour être sûr de ne pas avoir perdu d'information en route. $\boxed{S_{(a,b)}=\{(-3,10),\ (10,-3)\}}$

Lu dans une thèse de médecine : C'est avec de la peine qu'ils ont eu leur fils. La jeune femme, pendant 1'accouchement, haussait le ton. - L'obstétricien s'occupe mensuellement de quelques sottes. - Les obstétriciens de Pretoria préfèrent mettre les blanches au monde. - Les bébés de la Tartare sont splendides. - Conçu rue de la Paix. A la maternité, j 'ai vu une femme qui accouchait en riant. - Avant qu'il les berce ou qu'il les pèse, le gynécologue tient à embrasser le papa des bébés. Le gynécologue lui a tâté l'humérus. - Le gynécologue va monter pour examiner votre cas. - La gynécologue admet que les histoires d'ovules excitent sa verve car elle dit à son époux : « votre pull me chatouille jusqu'aux ovaires ! ».

Lu dans une thèse de médecine : C'est avec de la peine qu'ils ont eu leur fils. La jeune femme, pendant 1'accouchement, haussait le ton. - L'obstétricien s'occupe mensuellement de quelques sottes. - Les obstétriciens de Pretoria préfèrent mettre les blanches au monde. - Les bébés de la Tartare sont splendides. - Conçu rue de la Paix. A la maternité, j 'ai vu une femme qui accouchait en riant. - Avant qu'il les berce ou qu'il les pèse, le gynécologue tient à embrasser le papa des bébés. Le gynécologue lui a tâté l'humérus. - Le gynécologue va monter pour examiner votre cas. - La gynécologue admet que les histoires d'ovules excitent sa verve car elle dit à son époux : « votre pull me chatouille jusqu'aux ovaires ! ».

◃ 48 ▹ On écrit $a\mathbb{V}b$ pour dire que l'élève a a voté pour l'élève b aux élections de délégués de $MPSI2$. Quantifiez les propositions suivantes :
* tous les élèves ont voté / * l'élève e a été élu à l'unanimité / * l'élève e a été élu à la majorité / * certains élèves ont voté pour eux même / * personne n'a voté pour b / * aucun élève ayant voté pour e n'a voté pour ε.

tous les élèves ont voté	$\forall a\in MPSI2,\ \exists b\in MPSI2,\ a\mathbb{V}b.$
	$\forall a\in MPSI2,\ \exists b\in MPSI2\cup\{\varnothing\},\ a\mathbb{V}b.$ si le vote blanc existe
l'élève e a été élu à l'unanimité	$\forall a\in MPSI2,\ a\mathbb{V}e$; ne pas quantifier e, c'est une donnée
certains élèves ont voté pour eux même	$\exists a\in MPSI2,\ a\mathbb{V}a$
	$\exists(a,\ b)\in MPSI2^2,\ (a\mathbb{V}a)\ et\ (b\mathbb{V}b)\ et\ (a\neq b)$ pour le pluriel
personne n'a voté pour b	$\forall a\in MPSI2,\ not(a\mathbb{V}b)$
aucun élève ayant voté pour e n'a voté pour ε	$\forall a\in MPSI2,\ (a\mathbb{V}e)\Rightarrow not(a\mathbb{V}\varepsilon)$

◃ 49 ▹ Résolvez $|a+i.b|^2=a^2+b^2$ d'inconnues a et b dans $\mathbb{C}$ (indication : factorisez par $(a+i.b)$).

Dans $\mathbb{R}$, on a toujours $|a+i.b|^2=a^2+b^2$ ($\mathbb{R}\times\mathbb{R}\subset S$).
Sinon, revenons à la définition : $|z|^2=z.\overline{z}$ donc l'équation est $(a+i.b).\overline{(a+i.b)}=a^2+b^2$.
Mais c'est aussi $(a+i.b).\overline{(a+i.b)}=(a+i.b).(a-i.b)$ (identité remarquable).
On a donc deux possibilités : $a+i.b=0$ ou $\overline{a}-i.\overline{b}=a-i.b$.
La première donne $b=i.a$ par exemple $a=1+3.i$ et $b=-3+i$,
on vérifie $|a+i.b|=|1+3.i-3.i-1|^2=0$
$a^2+b^2=(1+3.i)^2+(-3+i)^2=(1-9+6.i)+(9-1-6.i)=0$
La seconde donne $a-\overline{a}=i.(b-\overline{b})$. Mais le premier membre est imaginaire pur et le second réel. C'est donc qu'ils sont nuls.
a et b sont réels. Comme prévu.

Rappel : Dans une résolution d'équation, quand vous arrivez à $a.X=a.Y$, ne concluez pas $X=Y$, intéressez vous aussi à $a=0$.

En fait, écrivez $a.(X-Y)=0$ et concluez par intégrité : $\begin{array}{ccc} a & = & 0 \\ & ou & \\ X & = & Y \end{array}$.

C'est tellement plus simple ainsi.

5		1						2
	3					3		
	4			4				

5			
		3	
4			
		3	

◁50▷

5	4	1	3	4	5	2	1	2
2	3	2	5	2	1	3	4	3
1	5	1	4	3	4	2	1	2
2	3	2	5	1	5	3	5	3
1	4	1	3	4	2	1	4	1

5	3	1	3
1	4	2	4
2	5	3	1
4	1	2	4
2	5	3	1

◁51▷ Pour quelle valeur du paramètre a le signal $t \longmapsto a.\cos(t) + (2-a).\sin(t)$ a-t-il la plus petite amplitude.

Cette somme de lignes trigonométriques est à son tour une ligne trigonométrique.
On peut l'écrire $A.\cos(t-\varphi)$ en ayant pris $A.\cos(\varphi) = a$ et $A.\sin(\varphi) = 2-a$.

C'est toujours faisable, il suffit d'imposer $A = \sqrt{a^2+(2-a)^2}$ et $\varphi = Arctan\left(\dfrac{2-a}{a}\right)$ si $a > 0$

$$\varphi = Arctan\left(\frac{2-a}{a}\right) + \pi \text{ si } a < 0$$

Il suffit maintenant de minimiser $a^2 + (2-a)^2$ pour gagner. C'est avec $a = 1$ qu'on réalise ce minimum [2].

◁52▷ Comparez l'action de ces quatre scripts pour $n = 5$:

```
def Scooby(n) :
....a, b = 1, 1
....for k in range(n) :
........a, b = b, a+b
........return (a, b)
```

```
def ScoobyDoo(n) :
....a, b = 1, 1
....for k in range(n) :
........a, b = b, a+b
....return(a, b)
```

```
def ScoobyDooBi(n) :
....a, b = 1, 1
....for k in range(n) :
........a, b = b, a+b
....return a
....return b
```

```
def ScoobyDooBiDoo(n) :
....a, b = 1, 1
....for k in range(n) :
........a = b
........b = a+b
.....return(a, b)
```

`Scooby(n)` a un défaut : la position du **`return`**.
Il est dans la boucle.
`n=5` ne se sert à rien.
Dès `k=0`, on sort.
`0` et `b` valent `1` et `1` avant d'entrer dans la boucle, ils sont modifiés (`1` et `2`).

2. dérivez si vous voulez, ou étudiez comme en seconde $2.a^2 - 4.a + 4$ avec des notations à apprendre par cœur pour le sommet, la forme canonique, l'âge du concepteur du sujet et autres bêtises

On sort alors tout de suite, et on retourne le couple $(1,\ 2)$.

On notera que `Scooby(0)` *ne retournera rien.*

`ScoobyDo(n)` est une vraie procédure qui a deux variables `a` et `b` qu'elle modifie au fil de la boucle, et finit par retourner une foisclose la boucle `for`.

	avant l'instruction `a, b = b, a+b`		après l'instruction `a, b = b, a+b`	
k	a	b	a	b
0	1	1	1	2
1	1	2	2	3
2	2	3	3	5
3	3	5	5	8
4	5	8	8	13

`k` s'arrête avant d'atteindre `n=5`.
On retourne le couple $(8,\ 13)$ (oui, c'est la suite de Fibonacci).

`ScoobyDoBi(5)` fait les mêmes calculs que `Scoobydo(5)`.
Mais il ne retourne que `a`.
L'instruction `return(b)` est après le premier `return(a)`.
Elle ne sera jamais exécutée.
Le programme retourne donc juste 8.

D'ailleurs, mon éditeur interactif Python refuse ScoobyDooBi.
Il valide la fonction dès le premier return.

`ScoobyDoBiDoo(n)` commet une erreur en ne faisant pas une affectation simulatanée. Suivons son exécution pas à pas.

	avant l'instruction `a = b`		avant l'instruction `b = a+b`		après l'instruction `b = a+b`	
k	a	b	a	b	a	b
0	1	1	1	1	1	2
1	1	2	2	2	2	4
2	2	4	4	4	4	8
3	4	8	8	8	8	16
4	8	16	16	16	16	32

Ce n'est plus Fibonacci.
C'est une suite de puissances de 2.

◁53▷ ♣ Sachant qu'on a posé $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i.\theta} + e^{-i.\theta}}{2}$, montrez qu'il est quand même possible d'avoir $\cos(\theta) = 2$, mais à condition d'aller chercher θ dans $\mathbb{C}$.

On résout donc $e^{i.\theta} + e^{-i.\theta} = 4$ d'inconnue θ.
Quitte à changer de variable, résolvons $X + \dfrac{1}{X} = 4$ avec $X = e^{i.\theta}$.
On résout même $X^2 + 1 = 4.X$ de discriminant 12 : X peut valoir $2 + \sqrt{3}$ ou $2 - \sqrt{3}$.

On commence par $e^{i.\theta} = 2 + \sqrt{3}$.
On écrit $\theta = a + i.b$ avec a et b réels. On obtient $e^{i.a}.e^{-b} = 2 + \sqrt{3}$.
En identifiant module et argument : $e^b = (2 + \sqrt{3})^{-1}$ et $a = 0[2.\pi]$.

Allez, au final : $\boxed{S_\theta = \{2.k.\pi - i.\ln(2 + \sqrt{3}) + \mid k \in \mathbb{Z}\} \bigcup \{2.k.\pi - i.\ln(2 - \sqrt{3}) + \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

◁54▷ ♡ Voici un lexique de mots anglais du vocabulaire mathématique. Retrouvez leur signification en français :

whole number	countable set	significant figure	right hand side
slope	floor	join of sets	rhombus
cuboïd	nondecreasing function	sequence	by induction on n
one to one correspondance	x raised to the power of y	thus	w.l.o.g.
law of cosines	assume that	hence	intermediate mean value
squeeze theorem	proof by contradiction	therefore	brackets

nombre entier	ensemble dénombrable	chiffre significatif	membre de droite
taux	partie entière	réunion d'ensembles	losange
parallélépipède rectangle	fonction croissante	suite	par récurrence sur n
bijection	x puissance y	donc	sans perte de généralité
formule d'Al kashi	supposons que	donc	T.V.I.
théorème d'encadrement	preuve par l'absurde	donc	crochets

◁55▷ On définit sur $\mathbb{Z}$ la loi $*$ par $a*b = a.(-1)^b + b.(-1)^a$. Montrez que c'est une loi interne, commutative, associative *(on pourra montrer que $a*b$ a la même parité que $a+b$)*. Trouvez son neutre, le symétrique de chaque élément a.
n est un entier naturel donné. Calculez $1*1*1*\ldots 1$ (n termes). Calculez $1*2*3*\ldots*2018$.
Résolvez $6*a = 2018$ d'inconnue entière a.
Peut on, rien qu'en additi*nnant des 1 obtenir 2018 ? Peut on, rien qu'en additi*nnant des 2 obtenir 2018 ?
On veut alors définir la "multiplication qui va avec" au moins sur $\mathbb{N}$ par $a\otimes b = a*a*a\ldots*a$ *(b fois, comme pour $a.b = a+a+\ldots+a$ b fois)*. Cette multiplication est elle commutative sur $\mathbb{N}$?

Interne. On prend deux entiers quelconques a et b. Que le résultat soit $-a+b$, $a-b$, $a+b$ ou $-a-b$, on a un entier.

Commutative. pas besoin d'aller chercher loin : $a*b = b*a$.

On se donne trois entiers a, b et c. On a huit cas pour les parités respectives, qu'il faudra tous étudier avant de pouvoir conclure ?
Déjà $(a*b)*c = (a*b).(-1)^c + c.(-1)^{a*b}$
$(a*b)*c = (a.(-1)^b + b.(-1)^a).(-1)^c + c.(-1)^{a*b}$
$(a*b)*c = a.(-1)^{b+c} + b.(-1)^{a+c} + c.(-1)^{a*b}$ pas laid...
Ensuite : $a*(b*c) = a.(-1)^{b*c} + (b*c).(-1)^a$
$a*(b*c) = a.(-1)^{b*c} + (b.(-1)^c + c.(-1)^b).(-1)^a$
$a*(b*c) = a.(-1)^{b*c} + b.(-1)^{a+c} + c.(-1)^{a+b}$
Le terme $b.(-1)^{a+c}$est déjà commun aux deux sommes.
On aimerait se convaincre de $a.(-1)^{b*c} = a.(-1)^{b+c}$ ce qui serait parfait (et aussi $c.(-1)^{a+b} = c.(-1)^{a*b}$).

Or, $b*c$ est égal à	$b+c$	ou $b-c$	ou $-b+c$	ou $-b-c$
mais dans tous les cas	$(-1)^{b+c}$	$(-1)^{b-c}$	$(-1)^{-b+c}$	$(-1)^{-b-c}$ vaut toujours $(-1)^{b+c}$

En effet, par exemple
$$(-1)^{b-c} = (-1)^{b+c-2.c} = (-1)^{b+c}.(-1)^{-2.c} = (-1)^{b+c}.1$$
C'est gagné : $(a*b)*c = a*(b*c)$ pour tout triplet d'entiers.

Comme neutre, on propose 0 car c'est ce qui semble le plus naturel. Pour tout a, on a $a*0 = a.(-1)^0 + (-1)^a.0 = a.1+0 = a$.

On veut le symétrique de a. Pourquoi ne pas penser à $-a$?
Et surtout, autant vérifier :
$$a*(-a) = (-1)^a.(-a) + (-1)^{-a}.a = (-1)^a.(-a) + (-1)^a.a = (-1)^a.(-a+a) = (-1)^a.0 = 0..$$
On a trouvé le neutre, c'est ce qu'on voulait.
On pouvait distinguer suivant la parité de a, mais la clef est dans $(-1)^{-a} = (-1)^a$.

$1*1$	$= (-1)^1.1 + (-1)^1.1$	$= -2$
$(1*1)*1$	$= (-1)^{-2}.1 + (-1)^1.(-2)$	$= 3$
$((1*1)*1)*1$	$= (-1)^{-3}.1 + (-1)^1.3$	$= -4$
$(((1*1)*1)*1)*1$	$= (-1)^{-4}.1 + (-1)^1.(-4)$	$= 5$

On émet très vite une belle conjecture : $1*1*\ldots 1 = (-1)^{n+1}.n$ (ou on sépare suivant la parité de n, mais ça va...).
La récurrence est initialisée par l'étape de recherche (ce sera souvent le cas dans nos travaux, quand le résultat ne sera pas balancé/offert).

On se donne n et on suppose $1*1*\ldots*1 = (-1)^{n+1}.n$ et on met un 1 de plus :
$$(1*1*\ldots*1)*1 = (-1)^1.(-1)^{n+1}.n + (-1)^{(-1)^{n+1}.n}.1 = (-1)^{n+2}.n + (-1)^n$$
On rappelle en effet que $(-1)^p = (-1)^{-p}$ pour tout entier p.
On remplace aussi $(-1)^n$ par $(-1)^{n+2}$.

On réunit :

$$(1*1*\ldots*1)*1 = (-1)^{n+2}.n + (-1)^{n+2} = (-1)^{n+2}.(n+1)$$

Et c'est la formule attendue.

Plus rapide : $1*1 = 2$, donc dans $1*1*\ldots*1$, il suffit de regrouper les termes deux à deux par associaitivité.
On a alors $(1*1)*(1*1)*\ldots*(1*1)$ si n est pair.
On calcule $2*2*\ldots*2$ ($n/2$ termes si n est pair) facilement. A chaque fois, on a des nombres pairs, donc on ne fait que des additions. Total $\frac{n}{2}.2$.
Pour n impair, il reste un terme de plus au bout, c'est tout.

On fait un travail similaire pour $1*2*3*\ldots*n$ en toute généralité.

$1*2$	$= (-1)^1.2 + (-1)^2.1$	$= -1$
$1*2*3$	$= (-1)^{-1}.3 + (-1)^3.(-1)$	$= -2$
$1*2*3*4$	$= (-1)^{-2}.4 + (-1)^4.(-2)$	$= 2$
$1*2*3*4*5$	$= (-1)^{-2}.5 + (-1)^5.2$	$= 3$
$1*2*3*4*5*6$		$= -3$
$1*2*3*4*5*6*7$		$= -4$

La formule de la conjecture va dépendre de la parité de n et de $n//2$.
On ne fera pas la récurrence ici, et on trouvera -1009.

L'équation $6*a = 2018$ s'écrit $a + (-1)^a.6 = 2018$.
On trouve $a = 2018 - (-1)^a.6$.
a est forcément pair ($2018 + 6$ ou $2018 - 6$ c'est pair !).
L'équation devient $a = 2018 - 6$. On a une unique solution : 2012.

Peut on proposer et vérifier ?
On trouvera alors une solution.
Les a-t-on toutes ?

Mais, il y a tellement mieux. On régait comme dans un groupe : $a*6 = 2018$ équivaut à $(a*6)*(-6) = 2018*(-6)$ puis $a*0 = 2018*(-6)$ et on a la solution indiquée.

loi interne sur A	$\forall(a,\ b) \in A^2,\ a*b \in A$ (A est stable par $*$)
	toutes, sauf par exemple le produit scalaire de vecteurs (il donne un réel, pas un vecteur)
associaitive	$\forall(a,\ b,\ c) \in A^3,\ (a*b)*c = a*(b*c)$
	addition, multiplication dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $M_n(\mathbb{R})$ mais pas soustraction ni division
commutative	$\forall(a,\ b) \in A^2,\ a*b = b*a$
	multiplication dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ mais pas dans $M_n(\mathbb{R})$
avec un neutre	$\exists e \in A,\ \forall a \in A,\ a*a = e*a = a$ (à vous de le deviner)
	1 pour la multiplication, 0 pour l'addition, I_2 pour le produit matriciel
et des symétriques	$\forall a \in A,\ \exists \alpha \in A,\ a*\alpha = \alpha*a = e$ (le neutre)

◃56▹ ♡ Trouvez les coefficients b et c (complexes) pour que l'équation $z^2 + b.z + c = 0$ admette pour racine $2+3.i$ et pour discriminant $2.i$.

Déjà $b^2 - 4.c$ vaut $2.i$.
Ensuite, $(2+3.i)^2 + b.(2+3.i) + c$ est nul.
Ceci donne $c = 5 - 12.i - (2+3.i).b$.

Attention, on n'identifie pas bêtement « partie réelle et partie imaginaire ». b et c ne sont pas forcément réels...

On a juste, en reportant : $b^2 + (8+12.i).b - 20 + 46.i = 0$.

On résout en passant par le discriminant : $\Delta = (8+12.i)^2 - 4.(-20+46.i) = 8.i = (2.e^{i.\pi/4})^2$.
b peut valoir $-5-7.i$ ou $-3-5.i$.

On reporte et on trouve c. Et on a deux équations.

D'autres approches sont possibles.

◃57▹ ♣♡ Calculez $(-1)^{\sum_{k=1}^{20}(-k)^k}$.

Le nombre $\sum_{k=1}^{20}(-k)^k$ est très laid. Pour info c'est 10291771753182105207669986 4.

Mais tout ce qui compte c'est « est il pair ou impair ».
Il suffit donc de regarder si les termes $(-k)^k$ sont pairs ou impairs.
Pour k pair, ils sont pairs, on les met de côté.
Pour k impair, $-k$ l'est aussi, et $(-k)^k$ aussi (produit d'entiers impairs).
On a donc dix entiers en $(-2.p-1)^{2.p+1}$. Dix entiers impairs. La somme est paire.

Bilan : $\sum_{k=1}^{20}(-k)^k$ est pair. Et $(-1)^{\sum_{k=1}^{20}(-k)^k}$ vaut 1.

Rappel : on rédige « a et b sont pairs donc $a+b$ est pair ». Directement, car c'est une évidence.
Et surtout, on ne passe pas pour un lourdingue en écrivant des $a+b=2.k+2.p$. L'évidence est là, on fait ça dans sa tête.
Mais on n'emmerde pas le lecteur avec des $2.k$ et $2.p+1$ tout juste dignes d'un livre de seconde.
Bref : les deux tableaux qui suivent sont acquis et considérés comme du cours :

somm	pair	impair
pair	pair	impair
impair	impair	pair

produit	pair	impair
pair	pair	pair
impair	pair	impair

Et si pour vous ce ne sont pas des évidences, mais qu'est ce qu'on va faire de vous ?

◃58▹ ♡ Expliquez pourquoi les non mathématiciens acceptent sans difficulté les deux premières lignes, mais pas la troisième.

1/7	= 0,142857 142857142857142857142857...
6/7	= 0,857142 857142857142857142857142...
1	= 0,999999 999999999999999999999999...

Pour moi, c'est la preuve la plus limpide de $0,999\ldots=1$.
Sinon, il y a sur internet l'article complet de Jean-Paul Delahaye sur $0,999\ldots=1$.

◃59▹ ♡ Dérivez cette différence $\theta \longmapsto \ln(\sin(\theta))-\ln(\cos(\theta))$ sur $]0,\ \pi/2[$.
Dérivez et simplifiez $\theta \longmapsto \ln(\sin(\theta/2))-\ln(\cos(\theta/2))$

On trouve $\theta \longmapsto \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}-\dfrac{-\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ *et en réduisant au dénominateur commun* $\theta \longmapsto \dfrac{1}{\sin(\theta).\cos(\theta)}$.

Vous préférez $\boxed{\theta \longmapsto \dfrac{2}{\sin(2.\theta)}}$ *?*

◃60▹ ♡ Dérivez $x \longmapsto x^{\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right)}$ (simplifiez la d'abord ?).

On simplifie : $x^{\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right)}=e^{\ln(x).\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right)}=e^{\ln(\ln(x))}=\ln(x)$.

On peut dériver : $\left(x \longmapsto x^{\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right)}\right)'=\left(x\longmapsto \dfrac{1}{x}\right)$.

Mais on précise le domaine : $]1,\ +\infty[$.

◃61▹ Pour tout réel a, $\sin(2.a)$ est positif. La preuve : on se donne a, on calcule $\cos(a)$ et $\sin(a)$. on sait alors $\cos(a)=\varepsilon.\sqrt{1-\sin^2(a)}$ avec $\varepsilon\in\{-1,\ 1\}$ et $\sin(a)=\varepsilon.\sqrt{1-\cos^2(a)}$ avec $\varepsilon\in\{-1,\ 1\}$. On a alors $\sin(2.a)=2.\sin(a).\cos(a)=2.\sqrt{1-\cos^2(a)}.\sqrt{1-\sin^2(a)}$ puisque $\varepsilon^2=1$.
Où est l'erreur ?

$\cos(a)=\varepsilon_1.\sqrt{1-\sin^2(a)}$ avec $\varepsilon_1\in\{-1,\ 1\}$ et $\sin(a)=\varepsilon_2.\sqrt{1-\cos^2(a)}$ avec $\varepsilon_2\in\{-1,\ 1\}$
Quand on multiplie, le facteur $\varepsilon_1.\varepsilon_2$ vaut 1 ou -1. Mais il y a deux εdistincts.

◃62▹ ♣0♣ Votre calculatrice fonctionne mal. En tout cas, elle a une drôle de touche qui calcule des produits ou des sommes suivant son humeur. Pour être précise : pour a et b entiers relatifs, on a $a * b = \left\{ \begin{array}{ccc} a+b & si & a\ pair \\ a \times b & si & a\ impair \end{array} \right|$.
Montrez que c'est une loi interne, non commutative, non associative.

♣1♣ A-t-on toujours $a * (a * a) = (a * a) * a$.

♣2♣ On sait que pour tout triplet d'entiers $(a,\ b,\ c)$ on peut créer douze nombres comme $(a * b) * c$ ou $b * (a * c)$. Choisissez a, b et c pour que ces nombres prennent tous la même valeur. Est il possible de choisir a, b et c pour que ces nombres prennent douze valeurs différentes. Choisissez a, b et c pour que ces seize nombres prennent le maximum de valeurs différentes.

Si a et b sont deux entiers, alors $a+b$ et $a \times b$ sont entiers. Que la parité de a nous fasse tomber sur l'un ou sur l'autre, on a un entier. la loi est interne.

On calcule $1 * 2 = 1.2 = 2$ car 1 est impair | $2 * 1 = 2 + 1 = 3$ car 2 est pair.
On a notre contre-exemple : $2 * 1 \neq 1 * 2$.

On poursuit au hasard

$(1*2)*3 = (1.2)*3$	car 1 impair	$(1*2)*3 = 2+3 = 5$	car 2 pair	raté !
$1*(2*3) = 1*(2+3)$	car 2 pair	$1*(2*3) = 1.5 = 5$	car 2 pair	

On recommence :

$(2*1)*2 = (2+1)*2$	car 2 pair	$(1*2)*2 = 3*2 = 3.2 = 6$	car 3 impair
$2*(1*2) = 2*(1.2)$	car 1 impair	$2*(1*2) = 2*2 = 2+2$	car 2 pair

Cette fois, c'est bon : $(2*1)*2 \neq 2*(1*2)$

On prend a et on calcule $(a*a)*a$ et $a*(a*a)$ en étudiant les deux cas sur la parité de a *(rappel : pour a impair, a^2 l'est aussi)* :

a impair	$(a*a)*a = (a.a)*a$	car a impair	$(a*a)*a = a^3 * a = a^3$	car a^2 impair
	$a*(a*a) = a*(a.a)$	car a impair	$a*(a*a) = a*a^2 = a^3$	car a impair
a pair	$(a*a)*a = (a+a)*a$	car a pair	$(a*a)*a = (2.a)*a = 3.a$	car $2.a$ pair
	$a*(a*a) = a*(a+a)$	car a pair	$a*(a*a) = a*(2.a) = 3.a$	car a pair

On a toujours $(a*a)*a = a*(a*a)$

Quelques questions de plus.

Les douze objets en $a*b*c$.

Les douze nombres sont

a*(b*c)	(a*b)*c	a*(c*b)	(a*c)*b
b*(c*a)	(b*c)*a	b*(a*c)	(b*a)*c
c*(a*b)	(c*a)*b	c*(b*a)	(c*b)*a

• Si a, b et c sont tous pairs, ces douze nombres valent tous $a+b+c$.
• Si a, b et c sont tous impairs, ces douze nombres sont égaux à $a.b.c$.
• Si a et b sont pairs et c impair :

a*(b*c)=a+b+c	(a*b)*c=a+b+c	a*(c*b)=a+c.b	(a*c)*b=(a+c).b
b*(c*a)=b+c.a	(b*c)*a=(b+c).a	b*(a*c)=b+c.a	(b*a)*c=b+a+c
c*(a*b)=c.(a+b)	(c*a)*b=(c.a)+b	c*(b*a)=c.(b+a)	(c*b)*a=(c.b)+a

On trouve quand même six valeurs différentes. On donne un exemple :

2*(6*5)=2+6+5=13	(2*6)*5=2+6+5=13	2*(5*6)=2+5.6=32	(2*5)*6=(2+5).6=42
6*(5*2)=6+5.2=16	(6*5)*2=(6+5).2=22	6*(2*5)=6+5.2=16	(6*2)*5=6+2+5=13
5*(2*6)=5.(2+6)=40	(5*2)*6=(5.2)+6=16	5*(6*2)=5.(6+2)=40	(5*6)*2=(5.6)+2=32

Avec deux pairs et un impair, par symétrie des rôles, on retrouve les mêmes cas.
• Si a et b sont impairs et c pair :

a*(b*c)=a.b.c	(a*b)*c=a.b.c	a*(c*b)=a.(c+b)	(a*c)*b=(a.c)+b
b*(c*a)=b.(c+a)	(b*c)*a=b.c+a	b*(a*c)=b.a.c	(b*a)*c=b.a.c
c*(a*b)=c+a.b	(c*a)*b=(c+a).b	c*(b*a)=c+a.b	(c*b)*a=(c+b).a

Ici, six valeurs différentes encore. Un exemple.

3*(7*2)=3*(14)=42	(3*7)*2=21*2=42	3*(2*7)=3*9=27	(3*2)*7=6*7=13
7*(2*3)=7*5=35	(7*2)*3=14*3=17	7*(3*2)=7*6=42	(7*3)*2=21*2=42
2*(3*7)=2*21=23	(2*3)*7=5*7=35	2*(7*3)=2*21=23	(2*7)*3=9*3=27

Au maximum, six valeurs différentes. Trouvé et prouvé.

♣0♣ Combien l'équation $a * a = n$ d'inconnue a peut elle avoir de solutions *(discuter suivant n)* ?

♣1♣ Complétez pour que ce script Python se charge de calculer noter loi :

```
def etoile(x, y) :
....if....
....|....
....return(...)
```

♣2♣ La loi $*$ est elle interne sur chacun des ensembles suivants : $\mathbb{N}$, P, I, $I \cup \{0\}$, $P \cup \{1\}$ où P désigne l'ensemble des nombres pairs et I l'ensemble des nombres impairs.

Pour $2 * a = a * 2$ d'inconnue entière a, on étudie sa forme suivant la parité de a :

cas étudié	équation	solutions	cohérence
a pair	$2 + a = a + 2$	valable pour tout a	a pair
a impair	$2 + a = a.2$	$a = 2$	non, 2 est pair

L'ensemble des solutions se réduit aux nombres pairs : $\boxed{S = \{2.n \mid n \in \mathbb{Z}\}}$

On fait de même pour $3 * a = a * 3$ d'inconnue entière a.

cas étudié	équation	solutions	cohérence
a pair	$3.a = a + 3$	$a = 3/2$	non, a non entier
a impair	$3.a = a.3$	valable pour tout a	a impair

$\boxed{S = \{2.n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}}$

On continue avec $3 * a = a * 2$ d'inconnue entière a.

cas étudié	équation	solutions	cohérence
a pair	$3.a = a + 2$	$a = 1$	non, a non pair
a impair	$3.a = a.2$	$a = 0$	non, a non impair

$\boxed{S = \emptyset}$

On continue avec $2 * a = a * 3$ d'inconnue entière a.

cas étudié	équation	solutions	cohérence
a pair	$2 + a = a + 3$	aucune	non, a non pair
a impair	$2 + a = a.3$	$a = 1$	oui

$\boxed{S = \{1\}}$

♣0♣ Combien l'équation $a * a = n$ d'inconnue a peut elle avoir de solutions *(discuter suivant n)* ?

On regarde l'équation $x * x = n$ d'inconnue x et de paramètre n.

On regarde la forme de cette équation suivant la parité de x :

cas	x pair	x impair
équation	$2.x = n$	$x^2 = n$
condition sur n	n pair	n impair

• Si n est pair, il ne peut y avoir que des solutions à x pair, égal à $n/2$. Mais alors il faut que $n/2$ soit lui même pair. Par exemple, l'équation $x * x = 2$ n'a pas de solution *(pour x impair, $x * x$ est impair, et pour x pair, on aboutit à $2.x = 2$ soit $x = 1$ qui n'est pas pair...)*.

On discute donc suivant n modulo 4 :

n *mod* 4	0	1	2	4
	$n/2$		rien	
exemple	$x * x = 12$: solution $6 * 6 = 12$		$x * x = 14$ impossible $2.x = 14$ et x pair ?	

Si n est impair, il ne peut y avoir des solutions qu'à x impair, sous la forme de $\sqrt{n}$ ou $-\sqrt{n}$. Encore faut il que $\sqrt{n}$ soit entier. Et même entier impair.

Par exemple, l'équation $x * x = 7$ n'a pas de solution *(il faudrait résoudre $x^2 = 7$ dans $\mathbb{Z}$)*, l'équation $x * x = 9$ a des solutions : 3 et -3.

n multiple de 4	$S = \{n/2\}$
n pair non multiple de 4	$S = \emptyset$
n de la forme $(2.k + 1)^2$	$S = \{-2.k - 1,\ 2.k + 1\}$
n impair mais pas en $(2.k + 1)^2$	$S = \emptyset$

♣ 0 ♣ Complétez pour que ce script Python se charge de calculer noter loi :

```
def etoile(x, y) :
....if....
....|....
....return(...)
```

On crée une procédure qui prend deux variables `x` et `y` et retourner quelquechose à la fin *(c'est $x * y$)*. On va devoir faire un test de parité.

Surtout, on évite le test de calculette du type `int(x/2)==x/2` *qui passe par un chemin bien compliqué qui nécessite des calculs numériques alors qu'il suffit de lire le dernier chiffre du nombre* `x` *(*surtout qu'il est codé en binaire par l'ordinateur*).*

Pour tester si `x` est pair, on regarde si `x%2` vaut `0` ou `1` *(on rappelle que* `a%b` *est* `a` *modulo* `b`*)*.

```
def etoile(x, y) :
....if x%2 == 0 :
........etoi = x+y
....else :
........etoi = x*y
....return(etoi)
```

On pourra, si on est plus évolué dans l'art de la programmation, commencer par tester si `x` *et* `y` *sont des entiers.*

♣ 0 ♣ La loi $*$ est elle interne sur chacun des ensembles suivants : $\mathbb{N}$, P, I, $I \cup \{0\}$, $P \cup \{1\}$ où P désigne l'ensemble des nombres pairs et I l'ensemble des nombres impairs.

On commence par l'ensemble des nombres pairs. Si a et b sont pairs, alors $a * b$ est égal à $a + b$ car a est pair, et $a + b$ est bien pair.

On poursuit avec l'ensemble des nombres impairs. Si a et b sont impairs, alors $a * b$ est égal à $a.b$ car a est impair, et $a.b$ est bien resté pair.

On prend $P \cup \{1\}$. On prend a et b dans cet ensemble et on calcule $a * b$ en étudiant les différents cas

	a pair	$a = 1$
b pair	$a + b$	$1.b$
$b = 1$	$a + 1$	1

. La case $b + 1$ pose problème. On construit un contre-exemple 2 et 1 sont dans $P \cup \{1\}$, mais $2 * 1$ n'y est plus.

On termine avec $I \cup \{0\}$ et on dresse encore un tableau

	a impair	$a = 0$
b impair	$a.b$	$0 + b$
$b = 0$	$a.0$	$0 + 0$

Dans tous les cas, on est encore dans notre ensemble.

J'ai oublié l'ensemble des entiers naturels ? Si a et b le sont, alors $a + b$ et $a.b$ le sont. La loi $*$ est interne sur $\mathbb{N}$.

◃63▹ ♡ Un parallélépipède rectangle pour volume $180cm^3$. Sa surface latérale vaut $192cm^2$. La somme des longueurs de ses arêtes vaut $68cm$. Calculez ses dimensions.

On note a, b et c les trois côtés.

On traduit les hypothèses :

volume	surface	arêtes
$a.b.c = 180$	$2.(a.b + a.c + b.c) = 192$	$4.a + 4.b + 4.c = 68$

On arrive à l'équation $X^3 - 17.X^2 + 96.X - 180$.A la calculatrice on trouve une racine évidente : 5 puis après factorisation : 5, 6 et 6.

Rappel : La clef des relations coefficients racines, c'est de dire que a, b et c sont les racines du polynôme $(X - a).(X - b).(X - c)$.
On se contente de développer en $(X^2 - (a + b).X + a.b).(X - c)$

$$X^3 - (a + b + c).X + (a.b + a.c + b.c).X - a.b.c$$

◁64▷ Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t).dt$. Prouvez : $W_{n+1} = \frac{n}{n+1}.W_{n-1}$. Calculez $W_{2.n}$ pour tout entier naturel n.
Montrez : $W_{2.n+1} \leqslant W_{2.n} \leqslant W_{2.n+1}$ pour tout n. Déduisez : $W_{2.n} \sim_{n\to+\infty} W_{2.n+1}$.
Prouvez $(2.n+1).W_{2.n}.W_{2.n+1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout n. Déduisez $W_{2.n} \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4.n}}$.
La notation $a_n \sim_{n\to+\infty} b_n$ signifie $\frac{a_n}{b_n} \to 1$.
Donnez la décomposition en produit de facteurs premiers (exposants positifs et négatifs) de W_{21}.

Ah, les célèbres intégrales de Wallis.
Il faut mettre en place tout ce qui suit pour les calculer, car on n'a pas de primitive explicite de $\cos^n$.
Non, ce n'est pas $\pm\frac{\cos^{n+1}}{n+1}$ qui se dérive en $\mp\frac{(n+1).\cos^n.\sin}{n+1}$. Un sinus en trop.
Pire encore à qui propose $\frac{\sin^{n+1}}{n+1}$.
Et même $\frac{\cos^{n+1}}{\sin.(n+1)}$ avec l'espoir de simplifier sinpar $\frac{1}{\sin}$.Mais il faut aussi dériver $\frac{1}{\sin}$et c'est l'horreur.

Intégrons W_{n+1} par parties :
$W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t).dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t).dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t).\cos(t).dt$.

$\cos^n$	$\hookrightarrow$	$-n.\cos^{n-1}.\sin$
$\cos$	$\hookleftarrow$	$\sin$

$W_{n+1} = \Big[\cos^{n+1}(t).\sin(t)\Big]_0^{\pi/2} + n.\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}(t).\sin^2(t).dt$
A ce stade, le terme rectangle est nul (le sinus en 0, le cosinus en $\frac{\pi}{2}$).
Mais il reste l'autre terme : $W_{n+1} = n.\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}(t).\sin^2(t).dt$. La piste était elle mauvaise ?
Non, car le « trigonomètre » nous dit $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$ pour tout t.
On a donc $W_{n+1} = n.\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}(t).(1-\cos^2(t)).dt$
On distribue et sépare en deux intégrales (exposants $n-1$ et $n+1$) : $W_{n+1} = n.(W_{n-1} - W_{n+1})$.
On distribue et fait passer de l'autre côté : $(n+1).W_{n+1} = n.W_{n-1}$.
C'est la formule demandée.

Elle permet de calculer de proche en proche ces intégrales.

Enfin, disons qu'on a

$$\begin{array}{cc} W_2 \text{ à l'aide de } W_0 & W_3 \text{ à l'aide de } W_1 \\ W_4 \text{ à l'aide de } W_2 & W_5 \text{ à l'aide de } W_3 \\ W_6 \text{ à l'aide de } W_4 & W_7 \text{ à l'aide de } W_5 \\ \vdots & \vdots \\ W_{2.n} \text{ à l'aide de } W_{2.n-2} & W_{2.n+1} \text{ à l'aide de } W_{2.n-1} \\ \multicolumn{2}{c}{\text{et en moulinant}} \\ W_{2.n} \text{ à l'aide de } W_0 & W_{2.n+1} \text{ à l'aide de } W_1 \end{array}$$

La suite est classique.
On la refera en cours.