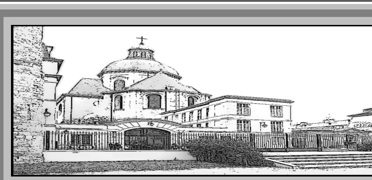
LYCEE CHARLEMAGNE

Lundi 22 septembre

M.P.S.I.2



2024 2025

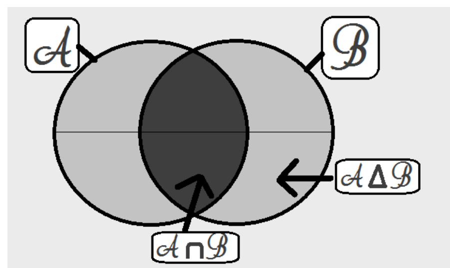
TD02

◃0▹ L'équation $4^x + 4^x + 2^x = 1$ admet une solution assez évidente : c'est -1. Montrez que c'est la seule sur $\mathbb{R}$. Mais quelle est la solution réelle de l'équation $4^x + 4^x + 2^x = 5$?

◃1▹ ♡ On pose pour tout n : $a_n = 2^n + 2.(-1)^n$ et $b_n = 2^{n+1} + (-1)^n$. Trouvez M vérifiant $\forall n$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

◃2▹

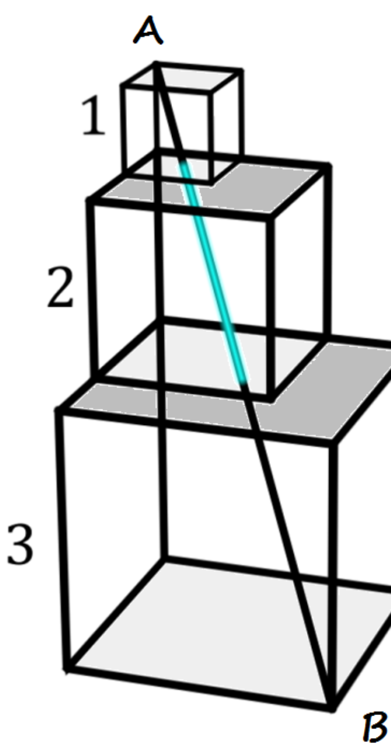
Pour représenter deux ensembles et leur intersection, j'ai tracé deux cercles de même rayon, chacun passant par le centre de l'autre. J'ai noirci l'intersection. J'ai grisé ce qu'on appelle la différence symétrique (celle du *ou exclusif*). Quel est le rapport $\dfrac{aire\ en\ gris}{aire\ en\ noir}$.



◃3▹ Un élève a écrit sur sa copie « pour k dans $\mathbb{N}^*$: $\dfrac{2.k+1}{2.k-1} \geqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{2.k+1}{2.k-1} \geqslant \dfrac{2.k}{2.k} \Leftrightarrow \dfrac{2.k+1}{2.k} \leqslant \dfrac{2.k}{2.k-1}$ ».

Que doit-on en penser ?

◃4▹



Quelle est la longueur de la grande diagonale $[A,\ B]$. Quelle est la longueur de sa partie « en bleu » dans le cube du milieu ?

Calculez $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}.dx$ et $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-2^x}.dx$.

L'une vaudra $2.\dfrac{\ln(2+\sqrt{3}) - \ln(2-\sqrt{3}) - \sqrt{3}}{\ln(2)}$ *et l'autre* π.

Résolvez le système $\log_x(y) + \log_y(x) = \dfrac{50}{7}$ et $x.y = 256$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$ *(rappel* $y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$*).*

Donnez moi un entier ayant exactement 15 diviseurs.

On est dans $rang(53)$ pour l'addition et la multiplication modulo 53. L'équation $x^2 + 2.x + 2 = 0$ a pour discriminant -4. L'élève dit « Δ est négatif, elle n'a donc pas de solution ». Il n'a rien compris ! Δ a une racine carrée assez évidente ! Résolvez l'équation.

◃5▹ Combien des racines sixièmes de $1+i$ ont une partie réelle positive ?

Extraits de « How to solve it »
de George Pólya (1887 - 1985)

Comprendre le problème

— En premier lieu, il faut comprendre le problème et son énoncé.
— Quelle est l'inconnue ?
— Quelles sont les données ?
— Quelle est la condition ?
— Est-il possible de satisfaire à la condition ?
— La condition est-elle suffisante pour déterminer l'inconnue.
Est-elle insuffisante ?
Redondante ?
Contradictoire ?
— Dessinez une figure.
— Introduisez la notation appropriée.
— Distinguez les diverses parties de la condition.
— Pouvez-vous les formuler ?

Concevoir un plan

— Avez-vous déjà rencontré ce problème ?
— Ou bien avez-vous rencontré le même problème sous une forme légèrement différente ?
— Connaissez-vous un problème qui s'y rattache ?
— Connaissez-vous un théorème qui puisse être utile ?
— Regardez bien l'inconnue et essayez de penser à un problème qui vous soit familier et qui ait la même inconnue ou une inconnue similaire.
— Voici un problème qui se rattache au vôtre et que vous avez déjà résolu.
— Pourriez-vous vous en servir ?
— Pourriez-vous vous servir de son résultat ?
— Pourriez-vous vous servir de sa méthode ?
— Pourriez-vous énoncer le problème différemment ?
— Reportez-vous aux définitions.
— Pourriez-vous imaginer un problème qui s'y rattache et qui soit plus accessible ?
Un problème plus général ?
Un problème plus particulier ?
Un problème analogue ?
— Pourriez-vous résoudre une partie du problème ?
Ne gardez qu'une partie de la condition, négligez l'autre partie ; dans quelle mesure l'inconnue est-elle alors déterminée, comment peut-elle varier ?
— Pourriez-vous tirer des données un élément utile ?
— Pourriez-vous penser à d'autres données qui pourraient vous permettre de déterminer l'inconnue ?
— Vous êtes-vous servi de toutes les données ?
— Vous êtes-vous servi de la condition toute entière ?
— Avez-vous tenu compte de toutes les notions essentielles que comportait le problème ?

Mettre le plan à exécution

— Il faut donc savoir faire preuve de patience, ne pas se décourager et si vraiment cela est nécessaire, changer de méthode.
— En mettant votre plan à exécution, vérifiez-en chaque détail l'un après l'autre.
— Pouvez-vous voir clairement si ce détail est correct ?
— Pouvez-vous démontrer qu'il est correct ?
— N'oubliez pas d'écrire clairement la réponse à la question posée !
— Mettez-la bien en évidence.
— Revenir sur sa solution
Pouvez-vous vérifier le résultat ?

Pouvez-vous vérifier le raisonnement ?
Pouvez-vous obtenir le résultat différemment ?
Pouvez-vous le voir d'un coup d'œil ?
Pouvez-vous vous servir du résultat ou de la méthode pour quelque autre problème ?

◁6▷ ♡ Retrouvez a et b sachant que la maximum de $x \longmapsto a.\cos(x) + b.\sin(x)$ vaut 6, atteint en $\dfrac{\pi}{6}$.

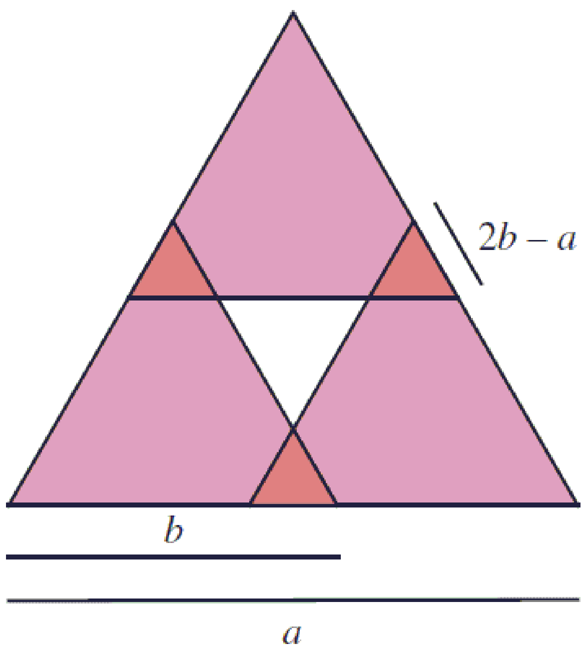
◁7▷ On constate : $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$, $371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$, $370 = 3^3 + 7^0 + 0^3$. Écrivez un programme Python qui cherche les nombres à trois chiffres égaux à la somme des cubes de leurs chiffres.

◁8▷ Calculez ces variations sur le binôme

$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.a^k$	$B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.a^n$
$C = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} \binom{k}{i}.a^i$	$D = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k}.a^i$

Attention aux variables de sommation, et surveillez les sommes doubles.

◁9▷ J'ai croisé la preuve suivante de l'irrationalité de $\sqrt{3}$; hélas, elle est en anglais. Help me.

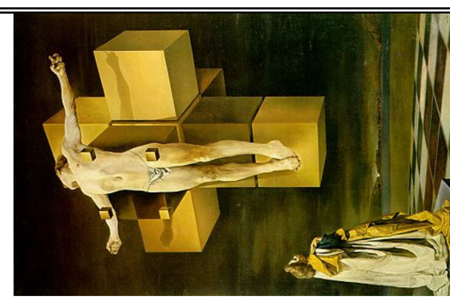


Assuming $a^2 = 3.b^2$ and that the sides of the triangles are as shown in the diagram, that of the triangle in the center equals $2a - 3b$ so that Carpets Theorem implies $(2.a - 3.b)^2 = 3.(2.b - a)^2$, implying the possibility of the infinite descent.

Ah, le théorème des tapis (you may use it or not, as you like), c'est "If two carpets of equal area overlap, then, the overlap aside, their remaining parts have equal areas".

Mettez tout ça en forme et en français. Bref, rédigez la preuve.

Soit $*$ une loi associative sur un ensemble E
$(\forall (a, b, c),\ (a * b) * c = a * (b * c))$.
Passez de $((a * b) * c) * (d * e)$ à $(a * (b * (c * d))) * e$
(combien d'étapes ?).
Soit $*$ une loi associative et commutative.
Passez de $((a * b) * c) * d$ à $(d * (c * (b * a)))$.
◁10▷ Passez de $((a * b) * c) * d$ à $((d * c) * b) * a$.



Corpus hypercubus (Salvador Dali 1954)

◁11▷ ♣ Le polynôme $X^3 + *.X^2 + \sharp.X - 1$ a pour racines $\cos(a)$, $\cos(b)$ et $\cos(c)$. Calculez $\sin(a + b + c)$.

◁12▷ Résolvez $x^2 - x + 1 = 7$ dans $\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}}$ (entiers de 0 à 6 pour les lois modulo 7).

◁13▷ La relation "*avoir une voyelle en commun avec*" sur l'ensemble des noms de la MPSI2 est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?
Définissez une relation d'équivalence sur les entiers de 1 à 10 dont les classes d'équivalence sont $\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $\{9,\ 10\}$.

◁ 14 ▷ `Retrouvez les stations de métro dont voici les anagrammes` *`(Nord-Est)`* `:`
Léger aphte. Cul albinos. Trique. Cet urinoir à con. Un livre s'inscrira alphabétiquement. Pacte des elfes.

◁ 14 ▷ Montrez que $\log_{10}(5)+\log_{10}(3)$ est irrationnel.

◁ 15 ▷ ♡ On définit $f = x \longmapsto x^{-1/2}$. Calculez $f^{(n)}$ pour tout n. Montrez : $\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!} = (-1)^n.\dfrac{\binom{2.n}{n}}{4^n}$.

◁ 16 ▷ Vrai ou faux :

a	$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 1 \Rightarrow x = 0\ [\pi]$
b	$\forall(\alpha,\theta) \in \mathbb{R}^2,\ (\lvert\theta\rvert = \lvert\alpha\rvert\ [2.\pi]) \Rightarrow (\cos(\theta) = \cos(\alpha)\ [2.\pi])$
c	$\forall(\alpha,\theta) \in \mathbb{R}^2,\ (\lvert\theta\rvert = \lvert\alpha\rvert\ [2.\pi]) \Leftrightarrow (\cos(\theta) = \cos(\alpha)\ [2.\pi])$
d	$\forall(\alpha,\theta) \in (\mathbb{R} - \{\frac{2.k+1}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})^2,\ (\theta = \alpha\ [\pi]) \Leftrightarrow (\tan(\theta) = \tan(\alpha)\ [2.\pi])$

◁ 17 ▷ Résolvez le système $\log_x(y)+\log_y(x) = \dfrac{50}{7}$ et $x.y = 256$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$ *(rappel $y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$).*

◁ 18 ▷ Résolvez l'équation $x^2 + (1-5.i).\sqrt{2}.x = 24$ d'inconnue complexe x.
Résolvez l'équation $e^z + (1-5.i).\sqrt{2} = 24.e^{-z}$ d'inconnue complexe z.

◁ 19 ▷ Résolvez $2.z^2 + (3.i-7).z + 5 - 5.i = 0$ d'inconnue complexe z.

◁ 20 ▷ a et b sont les racines de $X^2 - S.X + P$ (P non nul). Calculez $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a}$.

◁ 21 ▷

I∼0) Exprimez $\cos(4.\pi/5)$, $\cos(6.\pi/5)$ et $\cos(9.\pi/5)$ en fonction de $\cos(\pi/5)$ *(noté c).*
I∼1) Exprimez $\cos(2.\pi/5)$, $\cos(7.\pi/5)$ et $\cos(8.\pi/5)$ en fonction de $\cos(3.\pi/5)$ *(noté γ).*

I∼2) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 + 1 = 0$. Calculez la somme des racines, puis déduisez : $c + \gamma = \dfrac{1}{2}$.

I∼3) Déduisez que c et γ sont les racines de $4.X^2 - 2.X - 1$, et explicitez c et γ.

I∼4) Démontrez que $\sqrt{5}$, c et γ sont irrationnels.

I∼5) Montrez pour k dans $\mathbb{N} - 5.\mathbb{N}$: $\cos(k.\pi/5) \notin \mathbb{Q}$.

II∼0) On considère la suite $U_0(X) = 1$, $U_1(X) = 2.X$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+2}(X) = 2.X.U_{n+1}(X) - U_n(X)$.
Calculez $U_n(X)$ pour n dans $range(6)$ *(tableau).*

II∼1) Montrez que pour tout n, U_n est un polynôme, à coefficients entiers, de degré n, dont vous donnerez le coefficient dominant.

II∼2) Montrez pour tout n : $U_n(-X) = (-1)^n.U_n(X)$, exprimez ce résultat en termes de « fonction pair/impaire ».

II∼3) Calculez $U_n(1)$ et $U_n(-1)$ pour tout n.

II∼4) Rappelez la forme factorisée de $\sin(a) + \sin(b)$ et simplifiez $\cos(\theta).\sin((n+2).\theta) - \sin((n+1).\theta)$.

II∼5) Déduisez pour tout n et pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sin(\theta).U_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1).\theta)$.

II∼6) Déduisez que U_n admet n racines réelles distinctes que vous préciserez et donnez l'expression factorisée de $U_n(X)$ *(vous pourrez changer de variable en $\theta = Arccos(x)$, mais gare au domaine, et attention pour la forme factorisée).*

III∼0) Pour tout n, on définit : $V_n(X) = U_n\left(\dfrac{X}{2}\right)$. Calculez $V_n(X)$ pour n de 0 à 5 *(tableau).*

III$\sim$1) On pose $V_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \mu_{n,k}.X^k$. Montrez que tous les $\mu_{n,k}$ sont dans $\mathbb{Z}$; que vaut $\mu_{n,n}$?

III$\sim$2) On considère que x est une racine rationnelles de V_n d'écriture irréductible $x = \dfrac{p}{q}$ *(p dans $\mathbb{Z}$, q dans $\mathbb{N}^*$, sans facteur commun avec p)*. En considérant $q^n.V_n\left(\dfrac{p}{q}\right)$ et $q.\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mu_{n,k}.p^k.q^{n-1-k}\right)$, montrez : $q = 1$.

III$\sim$3) Montrez que les seules racines rationnelles de U_n sont dans $\left\{ -\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2} \right\}$.

IV$\sim$0) Pour quelles valeurs de n le réel $\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ est il rationnel ?

IV$\sim$1) Montrez que $\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ est irrationnel pour n strictement plus grand que 2, k dans $range(1, n+1)$ et $\dfrac{k}{n+1}$ irréductible. Montrez que $\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ est irrationnel pour n strictement plus grand que 2, k entier et $\dfrac{k}{n+1}$ irréductible.

V$\sim$0) Montrez $\forall x \in]-1,\ 1[,\ \sqrt{1-x^2}.U_n(x) = \sin((n+1).Arccos(x))$.

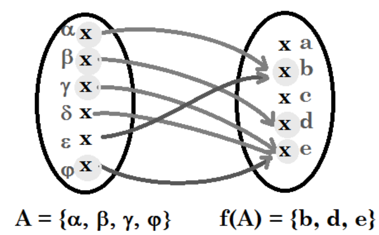
V$\sim$1) Déduisez $\forall x \in]-1,\ 1[,\ (1-x^2).U_n'(x) - x.U_n(x) = -(n+1).\cos((n+1).Arccos(x))$.
$(1-x^2).U_n''(x) - 3.x.U_n'(x) + n.(n+2).U_n(x) = 0$

V$\sim$2) On pose $U_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}.X^k$,

montrez : $\sum_{k=0}^{n} k.(k-1).\lambda_{n,k}.x^{k-2} + \sum_{k=0}^{n} (k.(1-k) + n.(n+2)).\lambda_{n,k}.x^k = 3.\sum_{k=0}^{n} k.\lambda_{n,k}.x^k$.

V$\sim$3) Déduisez $\lambda_{n,n-2.k} = \dfrac{(-1)^k}{2^{2.k}}.\binom{n-k}{k}.\lambda_{n,0}$. Explicitez U_{10}.

V$\sim$4) Écrivez une procédure Python qui pour n donné retourne la liste des coefficients de U_n (int -> list of int).



◁22▷ Soit f une application de E dans F.
Montrez que f est injective si et seulement si $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour tout couple de parties A et B incluses dans E.
Rappel $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$

◁23▷ ♡ On définit $f = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} x & si & x \text{ rationnel} \\ \sqrt{2} - x & si & x \text{ irrationnel} \end{array} \right\updownarrow$. Un élève affirme après calcul : $f \circ f = Id$ (pour$x$ rationnel, c'est évident, et pour x irrationnel, c'est $\sqrt{2} - (\sqrt{2} - x)$). Il en déduit que f est bijective *(de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)*.
Montrez que f n'est pas injective, ni surjective, pourtant.

◁24▷ ♡ Soit f de E dans E. Montrez que f est injective si et seulement si $f \circ f$ est injective.

◁25▷ Montrez que l'application $n \longmapsto \cos(n + \sqrt{2})$ est injective sur $\mathbb{Q}$. Montrez que $\theta \longmapsto \cos(\theta)$ n'est pas injective sur $\mathbb{Q}$.

◁26▷ L'application $trinome \longmapsto (nombre\ de\ filles,\ nombre\ de\ lunettes)$ est elle injective de l'ensemble des trinômes de MPSI2 vers $\mathbb{N}^2$? Et l'application $trinome \longmapsto (nombre\ de\ filles,\ nombre\ d'eleves\ dont\ le\ nom\ commence\ par\ B)$?

◁27▷ Le produit de deux applications injectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est injective : la preuve

$$\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \neq b) \Rightarrow \begin{pmatrix} f(a) & \neq & f(b) \\ & et & \\ g(a) & \neq & g(b) \end{pmatrix} \Rightarrow \big(f(a).g(a) \neq f(b).g(b)\big).$$

Le produit de deux applications surjectives de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ est surjective. La preuve :
je prends b dans $\mathbb{R}^+$, alors par surjectivité de f : $\exists a \in \mathbb{R},\ f(a) = \sqrt{b}$ et par surjectivité de g : $\exists a \in \mathbb{R},\ g(a) = \sqrt{b}$.

On multiplie : $f(a).g(a) = \sqrt{b}.\sqrt{b} = b$.
Où sont les erreurs ?

◁28▷ ♡ - a - Combien existe-t-il d'applications surjectives de MPSI2 dans $\mathbb{N}$?
- b - Combien existe-t-il d'applications surjectives de MPSI2 dans $\{MPSI2\}$?
- c - Combien existe-t-il d'applications surjectives de MPSI2 dans $\emptyset$?
- d - Combien existe-t-il d'applications surjectives de MPSI2 dans MPSI2 ?
- e - Combien existe-t-il d'applications surjectives de $MPSI2 \cup \{Sucri\}$ dans $MPSI2$?
- f - Combien existe-t-il d'applications surjectives de $\emptyset$ dans $\emptyset$?

◁29▷ L'application f associe à un entier naturel n la somme des carrés de ses chiffres en base 10.
f est elle injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? f est elle surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? f est elle croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$?

◁30▷ Débrouillez vous pour que l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ne soit pas injective de $\mathbb{R}^2$ dans lui même.
Est elle alors surjective ? Si non, déterminez son ensemble image (droite d'équation à préciser).

Débrouillez vous pour que l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aille de $\mathbb{Z}^2$ dans lui même (combien de choix possibles ?).

Débrouillez vous pour que l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aille de $\mathbb{Z}^2$ dans lui même et soit bijective.

◁31▷ Soient a et b deux réels positifs ; qui est le plus grand : la moyenne arithmétique de leurs inverses ou l'inverse de leur moyenne arithmétique ?

◁32▷ Calculez $Arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2.Arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ (et sa tangente pour commencer ?).

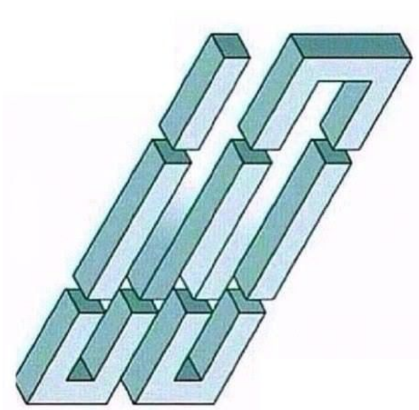
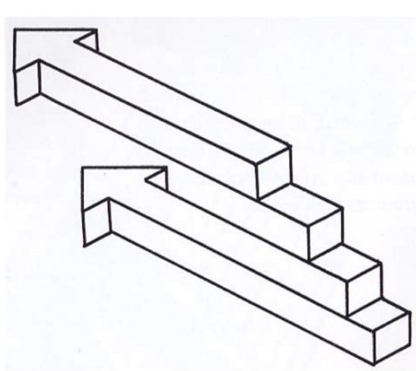
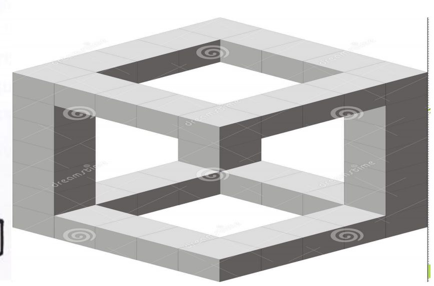
◁33▷ ♡ t est un réel fixé, θ est un réel de $]-\pi/2,\ \pi/2[$. Montrez : $\frac{1+i.\tan(\theta)}{1-i.\tan(\theta)} = e^{2.i.\theta}$.

Déterminez partie réelle et partie imaginaire de $\frac{1+i.t}{1-i.t}$ en utilisant la quantité conjuguée. Retrouvez les formules en arc moitié.

◁34▷ ♣ Un parallélépipède rectangle pour volume . Sa surface latérale vaut $96cm^2$. La somme des longueurs de ses arêtes vaut $48cm$. Calculez ses dimensions.

◁35▷ Résolvez $X^4 + 12.X = 5$ d'inconnue X sachant qu'il y a deux solutions dont le produit vaut -1.

◁36▷ Sachant $a+b+c = 1$, $a^2+b^2+c^2 = 2$ et $a^3+b^3+c^3 = 3$ calculez $a^4+b^4+c^4$ (mais déjà aussi$a.b+a.c+b.c$ et $a.b.c$).

◁37▷ ♡ L'équation $x^2 + b.x + c = 0$ d'inconnue x admet pour racines α et β. Donnez *(sous forme développée)* l'équation polynomiale de racines α^2 et β^2.

L'équation $x^3+b.x^2+c.x+d=0$ d'inconnue x admet pour racines α, β et γ. Donnez l'équation polynomiale de racines α^2 et β^2 et γ^2.
Donnez l'équation polynomiale de racines $\alpha.\beta$, $\alpha.\gamma$ et $\beta.\gamma$.

◁38▷ ♡ Sachant $a+b+c=4$, $a^2+b^2+c^2=20$ et $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{6}$ calculez $a.b+a.c+b.c$ et $a.b.c$.
Donnez le polynôme de racines a, b et c. Calculez a, b et c.

◁39▷ ♣ On va prouver que i (de carré -1) est en fait un réel. Considérons l'équation $x=e^{x.\pi/2}$.
le complexe i en est évidemment racine.

Mais si x est racine de $x=e^{x.\pi/2}$, on a donc $x=e^{e^{x.\pi.2}.\pi/2}$ puis $x=e^{e^{e^{x.\pi/2}.\pi.2}.\pi/2}$ et recommencer.

On va donc poser $a=e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\cdots}}}}}$ avec une infinité de termes. Sachant $\infty=\infty+1$, a est solution de l'équation.
On identifie : $a=i$. Et i se construit donc avec uniquement des réels...

◁40▷ Résolvez : $\left\{\begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & 3 \\ a & + & b & = & 2 \end{array}\right.$ d'inconnues a et b dans $\mathbb{R}$.

Résolvez : $\left\{\begin{array}{ccccc} 2^a & + & 2^b & = & 2^3 \\ a & + & b & = & 2 \end{array}\right.$ d'inconnues a et b dans $\mathbb{R}$.

◁41▷ On raisonne avec les entiers modulo 13. Donnez la liste des opposés et des inverses, et des carrés.

entier	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
opposé													
inverse													
carré													

Résolvez les équations et systèmes suivants :

$2.x+1=4$	$x^2+6.x=0$	$x^2+6.x=7$	$\begin{cases} x+7.y=0 \\ 3.x+5.y=0 \end{cases}$
$\begin{cases} x+2.y=5 \\ 3.x+5.y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x+7.y=5 \\ 3.x+5.y=3 \end{cases}$	$\begin{cases} 4.x+7.y=5 \\ x+5.y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$

L'équation $x^2+7.x=$ a une racine double. Retrouvez la ainsi que la tache.

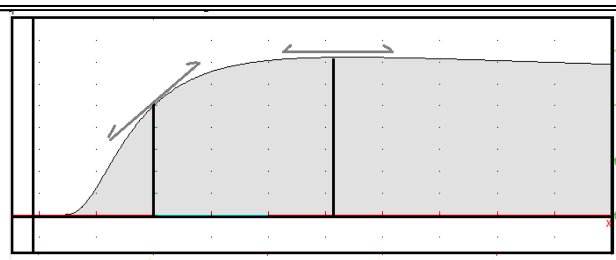
Montrez que le système $\left\{\begin{array}{cccc} 6.x & +2.y & = & 5 \\ 5.x & +6.y & = & 2 \end{array}\right.$ a plusieurs solutions (combien ?).

Ajustez l'étoile pour que $\left\{\begin{array}{cccc} 5.x & +y & = & \star \\ x & +8.y & = & 2 \end{array}\right.$ ait plusieurs solutions.

$x^3+10.x^2+4.x+11=0$ a pour racines a, b et c. Calculez $a^2+b^2+c^2$ puis $a^3+b^3+c^3$.
Qui est alors l'équation (à coefficients entiers) dont les racines sont a^{-1}, b^{-1} et c^{-1}.

◁42▷ ♡♣ Le polynôme $X^n-n.X^{n-1}+\ldots+(-1)^n$ admet n racines réelles positives. Trouvez les.
A priori, il manque plein de coefficients, donc on ne peut pas conclure. Mais rappelez l'inégalité de convexité $\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\leqslant\dfrac{a_1+\ldots a_n}{n}$ et indiquez quand il y a égalité.

Pouvez vous confirmer que $x\longmapsto x^{1/x}$ admet bien un maximum en $x=e$?



En utilisant le module `random`, simulez un dé dont les six faces ont pour valeur [1, 1, 3, 5, 5, 10].
Simulez l'expérience : lancer ce dé jusqu'à ce que la
◁43▷ somme des valeurs obtenues dépasse 100.

◁44▷ ♡ Sachant que 4 et -3 sont solutions, résolvez : $x^4-8.x^3-3.x^2+82.x-24=0$ d'inconnue complexe x.

◁45▷ ♡ Sachant $\cos(a)=\dfrac{3}{5}$, $\cos(b)=\dfrac{20}{29}$ et $\cos(c)=\dfrac{7}{25}$, combien de valeurs différentes peut avoir $\cos(a+b+c)$?

◁46▷ A partir de quelle valeur de n l'entier $n!$ est il divisible par 2021 ?
Pour quelles valeur de n l'entier $\dfrac{(2.n)!}{n!}$ est il divisible par 2021 ?

◁47▷ Posez ces opérations, sachant qu'on travaille en base 8 :
$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 5 \\ + & 4 & 3 & 7 \\ + & 1 & 2 & 1 \\ + & 6 & 5 & 0 \\ \hline = & & ? & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccccc} & & & 1 & 2 & 5 \\ \times & & & 7 & 2 & 1 \\ \hline + & & & & & * \\ + & & & & * & * \\ \hline = & & & ? & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} & 7 & 4 & 6 & 5 \\ - & 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline = & & & ? & \end{array}$$

◁48▷ α est un réel fixé. Résolvez l'équation $x^2 - (e^{\alpha} + e^{-\alpha}).x + 1 = 0$ d'inconnue complexe x.

◁49▷ ♣ Ce jeu s'appelle Jump. Vous pouvez en deviner par vous même la règle si je vous dis « démarche du cavalier aux échecs » :

	.	1	.	
.	11	⊠	7	.
5	⊠	15	⊠	13
.	17	⊠	3	.
	.	9	.	

		5	20		
	1	.	13	.	
17	.	⊠	⊠	19	.
.	9	⊠	⊠	.	7
	.	3	.	11	
		.	15		

		17	12		
		.	.		
1	.	.	.	.	6
14	.	.	.	.	19
		.	20		
		8	3		

			7	14
1		11	⊠	3
	⊠		13	
5		9		

		1		11
14	5		⊠	
9	⊠	3		7
	13			

1	10		36	7	
22					
				13	
34				28	19
	16	25			
	31	4			

◁50▷ On sait : $\cos(\theta) = \dfrac{2}{5}$. Calculez $\cos(2.\theta)$ et $\cos(4.\theta)$.
On sait aussi $\cos(\varphi) = \dfrac{1}{5}$. Quelles sont les valeurs possibles de $\sin(\theta + \varphi)$?

◁51▷ ♡ On note a le réel d'écriture $0,12340123401234...$ *(le motif* 01234 *se répète indéfiniment)*. Simplifiez $100000.a - a$. Déduisez a sous forme rationnelle p/q.

◁52▷ Calculez $\displaystyle\int_0^1 \frac{2.t + 2}{4.t^2 + 6.t + 2}.dt$.

◁53▷ ♡ Simplifiez $\dfrac{\cos(a) + \cos(b)}{\sin(a) + \sin(b)}$ et $\dfrac{\cos(a) - \cos(b)}{\sin(a) - \sin(b)}$ puis $\dfrac{\cos(a) + \cos(b)}{\sin(a) - \sin(b)}$ (sans préciser les domaines).

◁54▷ L'opérateur $\pm$ est il « distributif ? » : $a \pm (b + c)$ est il égal à $a \pm b \pm c$?

◁55▷ Exprimez $\cos(3.x)$ à l'aide de $\cos(x)$. Donnez un polynôme non nul à coefficients entiers de degré le plus petit possible dont $\cos(\pi/9)$ soit racine.

Un mathématicien va faire les courses.
Sa femme lui dit : "tu prendras un litre de lait et si il y a des œufs, alors tu en prends six".
Le mathématicien revient avec six litres de lait. Sa femme en déduit qu'il y avait des œufs.

◁56▷ ♡ Montrez : $\cos(2.\pi/5) + \cos(3.\pi/5) = 0$.
Montrez : $\forall \theta,\ \cos(3.\theta) + \cos(\theta) = 2.\cos(\theta).\cos(2.\theta)$ puis $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$.
Déduisez que $\cos(\pi/5)$ est racine de l'équation $4.X^3 + 2.X^2 - 3.X - 1 = 0$ d'inconnue réelle X.
Résolvez l'équation ci dessus. Déduisez la valeur de $\cos(\pi/5)$.

◁57▷ Comparez les propositions suivantes :

α	$\forall (a,b) \in E,\ a \times b = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ } ou \text{ } b = 0)$	$\forall (a,b) \in E,\ (a \neq 0 \text{ } et \text{ } b \neq 0) \Rightarrow a \times b = 0$	γ
β	$\forall (a,b) \in E,\ (a \neq 0 \text{ } ou \text{ } b \neq 0) \Rightarrow a \times b = 0$	$\forall (a,b) \in E,\ (a \neq 0 \text{ } et \text{ } a \times b = 0) \Rightarrow b = 0$	δ

Sont elles vraies ?

◃58▹ ♡ Quel est le coefficient de $a^2.b.c$ dans $(a.b + a.c + b.c)^2$?
Quel est le coefficient de $a^2.b.c$ dans $(a + b + c + d)^4$?
Quel est le coefficient de $a^2.b.c$ dans $(a + b + c)^4$?