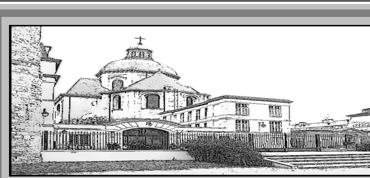
LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 11 septembre
M.P.S.I.2



2024 2025

IS00

♡ 0 ♡ Pour x et a positifs (a différent de 1), on définit $\log_a(x) = y$ par $a^y = x$. Exprimez $\log_a(x)$ à l'aide du logarithme naturel. 1 pt.

◇ 0 ◇ Montrez : $\log_4(x^2) = \log_2(x)$. 1 pt.

♠ 0 ♠ Résolvez $(\log_2(x)+3).(\log_3(x)+2) > 0$ d'inconnue réelle x. 3 pt.

♣ 0 ♣ A la calculatrice, $\log_{10}(2) \simeq 0.3010$ à 10^{-4}près. et $\dfrac{28}{93} \simeq 0.3010$ à 10^{-4}près. Le prof Dephi Zack déduit : $\log_{10}(2) = \dfrac{28}{93}$. Montrez qu'il a tort. 2 pt.

◇ 1 ◇ Si a est une suite réelle, on définit la suite $\Delta(a)$ par $\forall n,\ (\Delta(a))_n = a_{n+1} - a_n$.
Retrouvez les coefficients : $\forall n,\ (\Delta(\Delta(\Delta(\Delta(a)))))_n = \dots a_{n+1} + \dots a_{n+3} + \dots a_{n+2} + \dots a_{n+1} + \dots a_n$. 2 pt.
On pose $a = n \longmapsto 3^n$. Calculez $\Delta(\Delta(\Delta(\Delta(\Delta(\Delta(\Delta(\Delta(\Delta(a)))))))))$. 2 pt.

♡ 1 ♡ Résolvez l'équation $x^4 - 2.x^2.\cos(\theta) + 1 = 0$ d'inconnue complexe x (et de paramètre θ). 2 pt.

♡ 2 ♡ Montrez que si x est différent de -1 et 1, l'équation $x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1 = 0$ d'inconnue réelle θ n'a pas de solution. 2 pt.

◇ 2 ◇ Pour calculer $\int_{t=a}^{b} e^t.(t+1).\ln(t).dt$ (notée I), l'élève propose d'intégrer par parties en posant $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = (t+1).e^t$. Et je crois que c'est une bonne idée. Alors faites le. Mais comment allez vous trouver v ? 3 pt.

◇ 3 ◇ Calculez $\int_0^x e^{x-t}.(2.t+3).dt$ pour tout réel x. 2 pt.

Montrez par récurrence sur n que si P_n est un polynôme de degré n alors $x \longmapsto \int_0^{x-t}.P(t).dt$ est combinaison d'une exponentielle et d'un polynôme en x de degré n.[1] 2 pt.

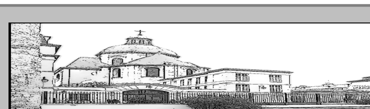
♣ 1 ♣ Consider the following 203 sets of 10 elements each : {1, 2, 3, $\cdots$, 10}, {11, 12, 13, $\cdots$, 20}, {21, 22, 23, $\cdots$, 30}, ... {1991, 1992, 1993, $\cdots$, 2000}, {2001, 2002, 2003, $\cdots$, 2010}, {2011, 2012, 2003, $\cdots$, 2020}, {2021, 2022, 2023, $\cdots$, 2030},
How many of these sets contain exactly two multiples of 6 ? 3 pt. (answer or programm)

♣ 2 ♣ Le trinôme de colles est formé de Alexandre, Bilel, Clara et Dounia (on a ajouté une PCSI pour avoir A, B, C et D et pour que le nombre de parties soit plus grand). Indiquez les 16 sous-ensembles qu'on peut voir arriver en colle suivant le nombre d'absents (de $\{A, B, C, D\}$ à $\emptyset$ en passant par $\{B, D\}$ et autres $\{C, B, D\}$). 2 pt.

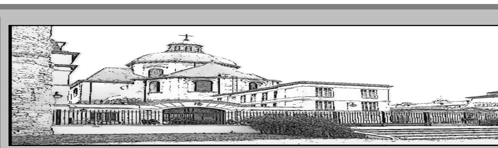
♣ 3 ♣ Résolvez $X \cap \{A, B, C\} = \{A, C\}$ d'inconnue X dans l'ensemble P des seize parties ci dessus. 2 pt.

♣ 4 ♣ Résolvez $X \cup \{B, C\} = \{A, B, C\}$ d'inconnue X dans l'ensemble P des seize parties ci dessus. 2 pt.

♣ 5 ♣ Résolvez $X \cap \{A, B, C\} = X \cup \{A, C\}$ d'inconnue X dans l'ensemble P des seize parties ci dessus. 2 pt.



1. c'est à dire de la forme $x \longmapsto \beta.e^x + Q_n(x)$ où β est un réel et Q_n un polynôme

LYCEE CHARLEMAGNE Mercredi 11 septembre M.P.S.I.2		2024 2025 IS00 CORRECTION

IS00 — Logarithme de base a.

Pour a,x et y donnés, on part de $a^y = x$, on passe au logarithme (équivalence) : $\ln(a^y) = \ln(x)$.
On sort y devant : $y.\ln(a) = \ln(x)$ et on divise par $\ln(a)$ qui est justement non nul. On a la formule demandée.

On commence par la question gentille

$$\log_4(x) = \frac{\ln(x^2)}{\ln(4)} = \frac{2.\ln(x)}{\ln(2^2)} = \frac{2.\ln(x)}{2.\ln(2)} = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = \log_2(x)$$

On continue avec l'inéquation dans laquelle on réduit au dénominateur commun

$$E \Leftrightarrow (\log_2(x)+3).(\log_3(x)+2) > 0$$

$$E \Leftrightarrow \Big(\frac{\ln(x)+3.\ln(2)}{\ln(2)}\Big).\Big(\frac{\ln(x)+2.\ln(3)}{\ln(3)}\Big) > 0$$

Comme les deux dénominateurs sont de même signe, tout se réduit à $\ln(x)+3.\ln(2)$ et $\ln(x)+2.\ln(3)$ sont de même signe.

On regarde quand chacun change de signe : $\ln(x)+3.\ln(2) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -3.\ln(2) = \ln(2^{-3})$. C'est en $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{9}$ que tout va se passer.

On fait un grand classique du cours du lycée : un tableau de signes :

x	$\left]0, \frac{1}{9}\right[$	$\frac{1}{9}$	$\left]\frac{1}{9}, \frac{1}{8}\right[$	$\frac{1}{8}$	$\left]\frac{1}{8}, +\infty\right[$
$\ln(x)+3.\ln(2)$	négatif		négatif	0	positif
$\ln(x)+2.\ln(3)$	négatif	0	positif		positif
produit	positif	0	négatif	0	positif

$$\boxed{S_x = \left]0, \frac{1}{9}\right[\bigcup\left]\frac{1}{8}, +\infty\right[}$$

On termine avec l'affirmation idiote. En effet, supposons à tort : $\frac{\ln(2)}{\ln(10)} = \frac{28}{93}$; on va chercher une contradiction.

On effectue un produit en croix : $93.\ln(2) = 28.\ln(10)$ qui donne même $\ln(2^{93}) = \ln(10^{28})$.
On efface les logarithmes par un passage aux exponentielles

$$2^{93} = 10^{28}$$

On simplifie par 2^{28} : $2^{65} = 5^{28}$.
Mais le membre de droite est un entier impair. Et le membre de gauche est un entier pair. C'est contradictoire.

On a quand même
$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc} 2^{65} & = & 3 & 6 & 8 & 9 & 3 & 4 & 8 & 8 & 1 & 4 & 7 & 4 & 1 & 9 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 5^{28} & = & 3 & 7 & 2 & 5 & 2 & 9 & 0 & 2 & 9 & 8 & 4 & 6 & 1 & 9 & 1 & 4 & 0 & 6 & 2 & 5 \end{array}$$
En erreur relative, c'est très très satisfaisant : un pour cent.

IS00 — Opérateur sur les suites.

On applique Δ autant de fois qu'il faut. Et on nomme les suites construites pas à pas pour simplifier la recherche :

a		a_n	
$b = \Delta(a)$	a_{n+1}	$-$	a_n
	$a_{n+1} - a_n$		
$c = \Delta(\Delta(a)) = \Delta(b)$	$(a_{n+2} - a_{n+1})$	$-$	$(a_{n+1} - a_n)$
	$a_{n+2} - 2.a_{n+1} + a_n$		
$d = \Delta(\Delta(\Delta(a))) = \Delta(c)$	$a_{n+3} - 2.a_{n++2} + a_{n+1}$	$-$	$a_{n+2} - 2.a_{n+1} + a_n$
	$a_{n+3} - 3.a_{n+2} + 3.a_{n+1} - a_n$		
$e = \Delta(\Delta(\Delta(\Delta(a)))) = \Delta(d)$	$a_{n+4} - 3.a_{n+3} + 3.a_{n+2} - a_{n+1}$	$-$	$a_{n+3} - 3.a_{n+2} + 3.a_{n+1} - a_n$
	$a_{n+4} - 4.a_{n+3} + 6.a_{n+2} - 4.a_{n+1} + a_n$		

On peut donc compléter ce qui nous est demandé, avec des coefficients binomiaux.

Pour la suite $n \longmapsto 3^n$, on peut constater qu'l'opérateur Δ ne fait pas grand chose.

En effet, pour tout n, on a
$$(\Delta(a))_n = 3^{n+1} - 3^n = (3-1).3^n = 2.3^n$$
Et si on recommence ?
$$(\Delta(\Delta(a)))_n = 2.3^{n+1} - 2.3^n = 2.(3-1).3^n = 4.3^n$$
En fait, à chaque fois qu'on applique Δ, on multiplie juste par 2. On a donc juste à les compter, et à se placer au bon étage
$$\Delta(\Delta(\Delta(\Delta(\Delta(\Delta(\Delta(\Delta(\Delta(a))))))))) = (n \longmapsto 2^9.3^n)$$

IS00 Second degré et cosinus.

On connaît par le cours les racines de l'équation $c^2 - 2.c.\cos(\theta) + 1 = 0$ d'inconnue complexe c (c'est du cours)
$$S_c = \{e^{i.\theta},\ e^{-i.\theta}\}$$

Pour l'équation $x^4 - 2.x^2.\cos(\theta) + 1 = 0$ d'inconnue complexe x, le changement de variable nous donne $x^2 = e^{i.\theta}$ ou $x^2 = e^{-i.\theta}$.
L'équation $x^2 = e^{i.\theta}$admet une solution évidente : $x = e^{i.\theta/2}$.
Mais il en faut une autre. Laquelle ? Mais $x = -e^{i.\theta/2}$.

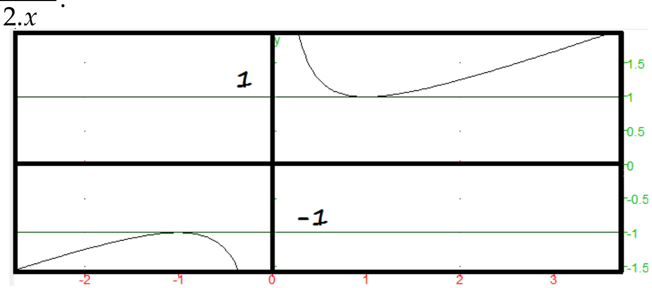
$$argument\ :\ x = e^{i.\theta} \Leftrightarrow (x^2 - (e^{i.\theta/2})^2 = 0) \Leftrightarrow (x - e^{i.\theta/2}).(x + e^{i.\theta/2}) = 0$$
Finalement, on a nos quatre solutions, puis un ensemble
$$\{e^{i.\theta/2},\ -e^{i.\theta/2},\ e^{-i.\theta/2},\ -e^{-i.\theta/2}\}$$

Et dans l'autre sens ? On a deux approches possibles.

> Déjà, c'est vrai que pour x égal à 1, l'équation devient $1 - 2.\cos(\theta) + 1 = 0$ et tous les θ multiples de $2.\pi$ sont solutions.
> C'est vrai aussi que pour x égal à -1, l'équation devient $1 + 2.\cos(\theta) + 1 = 0$ et tous les θ multiples impairs de π sont solutions.
> Mais ce n'est pas la question posée.

On se donne un réel x et on veut résoudre $x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1 = 0$.
On se dit que si on a une solution θ alors l'égalité donne justement $x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1 = 0$ puis $x = e^{i.\theta}$.Et x est complexe mais non réel.

Sinon, on peut aussi résoudre explicitement $\cos(\theta) = \dfrac{x^2+1}{2.x}$.



Et le réel $\dfrac{x^2+1}{2.x}$ est plus grand que 1 ou plus petit que -1 .
Ce ne peut donc pas être un cosinus.
Il suffit de tracer le tableau de variations de $x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{2.x}$ (de dérivée $x \longmapsto \dfrac{x^2-1}{2.x^2}$).

Jamais le réel $\dfrac{x^2+1}{x}$ ne pourra être entre -1 et 1 . Il ne peut donc pas être le cosinus d'un quelconque θ.

IS00 Intégration par parties et polynômes.

On se fixe x et on a des fonctions continues de t qui sont de classe suffisante pour intégrer par parties.

$\displaystyle\int_0^x e^{x-t}.(2.t+3).dt$	$t \longmapsto e^{x-t}$	$\hookleftarrow$	$t \longmapsto -e^{x-t}$	$\Big[-e^{x-t}.(2.t+3)\Big]_{t=0}^{t=x} + \displaystyle\int_{t=0}^x e^{x-t}.2.dt$
	$t \longmapsto 2.t+3$	$\hookrightarrow$	$t \longmapsto 2$	

Le terme crochet donne $-e^0.(2.x+3)+e^x.(2..0+3)$ et l'autre terme se calcule en $\Big[-2.e^{x-t}\Big]_{t=0}^{x}$.

On compacte : $\boxed{\int_0^x e^{x-t}.(2.t+3).dt = 5.e^x - 2.x - 5}$

Pour tout n, on note P_n la propriété « pour tout polynôme de degré n l'intégrale $x \longmapsto \int_0^x P_n(t).e^{x-t}.dt$ est la somme d'un polynôme et d'une exponentielle.

Au rang 0, un polynôme de degré 0, c'est une constante.
On explicite $x \longmapsto \int_0^x e^{x-t}.a.dt$ et on trouve $x \longmapsto a.e^x - a$.
On a une exponentielle : $x \longmapsto a.e^x$ et un polynôme : $x \longmapsto a$.

Dans notre exemple, on avait aussi une exponentielle $x \longmapsto 5.e^x$ et un polynôme $x \longmapsto -2.x-5$.

On se donne un entier naturel n et on suppose la propriété vraie au rang n (sans savoir expliciter le polynôme et l'exponentielle).
On veut l'établir au rang $n+1$. On se donne donc un polynôme de degré $n+1$ qu'on va noter naturellement P_{n+1}.
On calcule alors par parties car tout est C^1

$\int_0^x e^{x-t}.P_{n+1}(t).dt$	$t \longmapsto e^{x-t}$	$\hookleftarrow$	$t \longmapsto -e^{x-t}$	$\Big[-e^{x-t}.P_{n+1}(t)\Big]_{t=0}^{t=x} + \int_{t=0}^{x} e^{x-t}.P'_{n+1}(t).dt$
	$t \longmapsto P_{n+1}(t)$	$\hookrightarrow$	$t \longmapsto P'_{n+1}(t)$	

Le crochet donne $e^0.P_{n+1}(x) + e^x.P_{n+1}(0)$.
On a bien un polynôme en x. Et une exponentielle car $P_{n+1}(0)$ est juste un réel.

D'autre part, P'_{n+1} est un polynôme de degré n en tant que dérivée d'un polynôme de degré $n+1$.
On peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence et trouver une forme $x \longmapsto \beta.e^x + Q_n(x)$ avec β un réel et Q_n un polynôme.
On somme et on a bien $x \longmapsto \lambda.e^x + R_n(x)$ avec $\lambda = \beta + P_{n+1}(x)$ et $R_n = P_{n+1} + Q_n$.

La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout n.

> Le résultat n'explicite pas totalement le réel et le polynôme en fonction de P_n, mais l'énoncé ne le demandait pas.

IS00 L'autre intégration par parties.

Une fois les bornes fixées l'intégrale existe. Mais comme il y a trois termes, comment découper ?

$\int_{t=a}^{b} e^t.(t+1).\ln(t).dt$	$t \longmapsto (t+1).e^t$	$\hookleftarrow$	$t \longmapsto t.e^t$	$\Big[t.e^t.\ln(t)\Big]_{t=0}^{t=x} + \int_a^b t.e^t.\frac{1}{t}.dt$
	$t \longmapsto \ln(t)$	$\hookrightarrow$	$t \longmapsto \frac{1}{t}$	

Le crochet s'évalue bien, et l'intégrale de compensation vaut exactement $[e^t]_{t=a}^{b}$.

Mais au fait, comment a-t-on trouvé une primitive de $t \longmapsto (t+1).e^t$?

> Moi je peux dire « on a essayé $t \longmapsto t.e^t$ et ça a marché ».
> Mais ce n'est pas satisfaisant. Il faut pouvoir la trouver sans illumination.
>
> Et en fait, il suffit d'intégrer par parties :
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | $t+1$ | $\hookrightarrow$ | 1 |
> | e^t | $\hookleftarrow$ | e^t |
>
> $$\int (t+1).e^t.dt = [(t+1).e^t] - \int e^t.dt = [(t+1).e^t] - [e^t] = [t.e^t]$$

On a donc prouvé $\boxed{\int_a^b (t+1).\ln(t).e^t.dt = [t.\ln(t).e^t - e^t]_a^b}$

IS00 Trinome de quatre élèves.

On a effectivement seize sous-ensembles possibles, qu'on peut classer de différentes façons :

$\emptyset$					
$\{A\}$	$\{B\}$	$\{C\}$	$\{D\}$		
$\{A,B\}$	$\{A,C\}$	$\{A,D\}$	$\{B,C\}$	$\{B,D\}$	$\{C,D\}$
$\{B,C,D\}$	$\{A,C,D\}$	$\{A,B,D\}$	$\{A,B,C\}$		
$\{A,B,C,D\}$					

Avez vous vu le rôle de $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=16$?

Pour les équations, on peut tester les seize ensembles à chaque fois et ne garder que ceux qui conviennent.
On peut aussi raisonner un peu avec des dessins.

$X\cap\{A,B,C\}=\{A,C\}$		$S=\{$	$\{A,C\}$,	$\{A,C,D\}$	$\}$			
X doit contenir A et C, mais pas B. Pour D, qu'importe.								
$X\cup\{B,C\}=\{A,B,C\}$		$S=\{$	$\{A\}$,	$\{A,B\}$	$\{A,C\}$	$\{A,B,C\}$	$\}$	
X doit apporter A, mais pas D. Et pour B et C on s'en moque.								
$X\cap\{A,B,C\}=X\cup\{A,C\}$		$S=\{$	$\{A,C\}$,	$\{A,B,C\}$	$\}$			
X ne peut pas contenir D. X doit contenir A et C.								

Pour la dernière équation, on teste un par un les seize ensembles.
Mais sinon, $X\cap\{A,B,C\}$ a au maximum trois éléments, tandis que $X\cup\{A,B\}$ en a au moins deux.

IS00

Deux cent trois ensembles de longueur 10.

La réponse : il y en a 135.

L'argument : on regarde les premiers. Et on regarde la périodicité du phénomène.
Et avec un programme ?