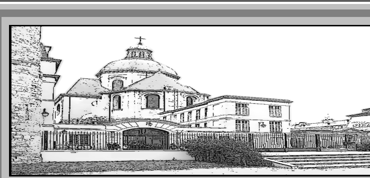
LYCEE CHARLEMAGNE

Mercredi 18 septembre

M.P.S.I.2



2024 2025

IS01

♡ 0 ♡ Montrez que f (application de E dans E) est injective si et seulement si $f \circ f$ est injective. 3 pt.

♡ 1 ♡ Sachant $\cos(\theta) = \sqrt{2}/3$ et $\theta \in [3.\pi,\ 4.\pi]$, calculez $\cos(2.\theta)$, $\sin(\theta)$. 2 pt.

♡ 2 ♡ Calculez $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}\right)^2$ à 10^{-2} près, sans calculatrice. 2 pt.

♡ 3 ♡ Montrez que 3 et 9 sont solutions de l'équation $\log_2(x) + \log_x(9) = \log_2(x+9)$ d'inconnue réelle x. 2 pt.

♣ 0 ♣ Donnez le nombre de solutions du système $\left\{\begin{array}{ccccc} \sqrt{x} & + & y & = & 7 \\ x & + & \sqrt{y} & = & 11 \end{array}\right|$ d'inconnues réelles x et y (sachant qu'il y a une solution avec $x = 9$). 4 pt.

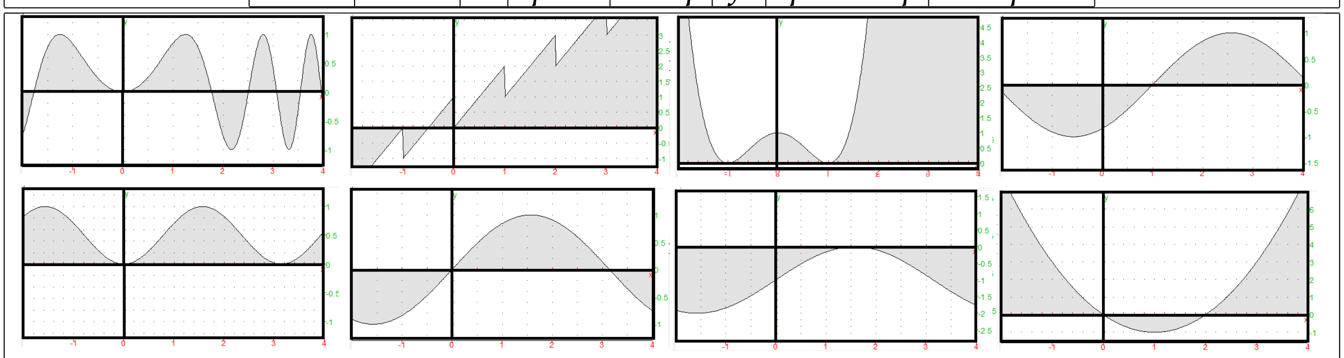
♢ 0 ♢ Montrez que l'équation $\int_0^a t.e^t.dt = \frac{1}{2}$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$. Montrez que l'équation $\int_0^a t.e^t.dt = 2$ a une solution dans $\mathbb{R}$. 3 pt.

♢ 1 ♢ Calculez l'amplitude du signal $t \longmapsto \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$. 1 pt.
Montrez que $t \longmapsto \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) + 2.\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$ a pour amplitude $\sqrt{2.\sqrt{3}+5}$. 2 pt.

♣ 1 ♣ Ayant mal lu la formule $z^{-1} = \overline{z}$ pour les complexes de module 1, l'élève a écrit $z - 1 = \overline{z}$. Quels sont les complexes pour lesquels sa formule est valable. Et celui qui copie sur lui écrit $z - 1 = \frac{1}{z}$. Quels sont les complexes pour lesquels sa formule est valable. 2 pt.

♠ 0 ♠ Voici quelques fonction : $s = \sin$, $q = x \longmapsto x^2$, $\tau = x \longmapsto x - 1$, $f = x \longmapsto 2.x - [x]$ (les crochets désignent la partie entière).
Recopiez sommairement les différents graphes et indiquez à quelle fonction chacun correspond. 4 pt.

	$s \circ \tau$	$\tau \circ s$	s	$q \circ s$	$s \circ q$	f	$q \circ \tau \circ q$	$\tau \circ q \circ \tau$

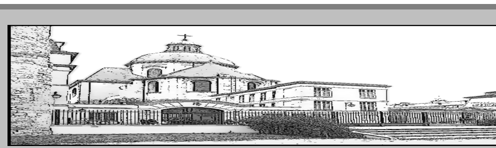


Dites quelles propriétés sont vérifiées par chacune : 5 pt.

p_0	$\forall x,\ \exists y,\ f(y) = f(x)$		p_4	$\forall x,\ \exists y,\ (y \neq x \text{ et } f(y) = f(x))$
p_1	$\exists x,\ \forall y,\ f(y) = f(x)$		p_5	$\forall x,\ \exists! y,\ (y \neq x \text{ et } f(y) = f(x))$
p_2	$\forall x,\ \exists y,\ f(y) \neq f(x)$		p_6	$\exists p > 0,\ \forall x,\ f(x+p) = f(x)$
p_3	$\forall x,\ \exists y,\ (y > x \text{ et } f(y) = f(x))$		p_7	$\forall x,\ \exists p > 0,\ f(x+p) = f(x)$

♯ 0 ♯ L est une liste de nombres. Ecrivez une procédure qui teste si le produit des nombres strictement positifs de L dépasse 100. 3 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 18 septembre
M.P.S.I.2



2024 2025
IS01
CORRECTION

IS01 Injectivité.

On a deux sens à prouver.

Premier sens. On suppose f injective. Il faut montrer que $f \circ f$ l'est aussi.
On se donne b et a et on suppose $f \circ f(a) = f \circ f(b)$ (objectif : $a = b$).
On commence par écrire cette hypothèse $f(f(a)) = f(f(b))$. Par injectivité de f (appliquée à $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$), on aboutit à $f(a) = f(b)$.
On recommence avec l'injectivité de f et on trouve $a = b$.

Deuxième sens. Cette fois, on suppose $f \circ f$ injective. Il faut remonter à f.
On se donne donc a et b et on suppose $f(a) = f(b)$ (objectif : $a = b$).
On compose par f de chaque côté, on arrive à $f(f(a)) = f(f(b))$.
Et là, on passe à $a = b$ par injectivité de $f \circ f$.

IS01 Trigonométrie.

L'information $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ autorise θ à exister (on n'est pas dans l'exercice étrange $\cos(\theta = 2$ dans $\mathbb{C}$).
L'information $3.\pi \leqslant \theta \leqslant 4.\pi$ impose $\sin(\theta) < 0$. La formule $\cos^2 + \sin^2 = 1$ nous donne $\sin(\theta)$ au signe près. On compacte le tout

$$\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{7}}{3},\ \cos(2.\theta) = -\frac{5}{9}$$

(la seconde formule vient de $\cos(2.\theta) = 2.\cos^2(\theta) - 1$).

IS01 Une approximation.

On élève au carré après s'être assuré que les quantités sous les signes racines sont positives

$$\Big(\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}\Big)^2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} + \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + 2.\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}.\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}$$

La racine au bout vaut 1. Et la somme $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} + \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ donne $\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}+1).(\sqrt{3}-1)}$ ce qui fait

$$\frac{(3+1-2.\sqrt{3}) + (3+1+2.\sqrt{3})}{3-1}$$

Bref : $\boxed{\Big(\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}\Big)^2 = 6}$ et si le physicien regarde par dessus notre épaule, on écrit $6,00$ à 10^{-2} près.

IS01 Logarithmes.

L'équation $\log_2(x) + \log_x(9) = \log_2(x+9)$ (d'inconnue x dans $]0,\ +\infty[$ est équivalente à

$$\frac{\ln(x)}{\ln(2)} + \frac{\ln(9)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x+9)}{\ln(2)}$$

c'est à dire

$$(\ln(x))^2 + \ln(2).\ln(9) = \ln(x+9).\ln(x)$$

On propose donc $x = 3$ et on vérifie

$$(\ln(3))^2 + \ln(2).2.\ln(3) = \ln(12).\ln(3)$$

et il suffit de remplacer $\ln(12)$ par $2.\ln(2) + \ln(3)$ et distribuer pour valider.
On recommence avec $x = 9$

$$(2.\ln(3))^2 + \ln(2).2.\ln(3) = \ln(18).\ln(3) et$$

cette fois, le membre de droite est bien $(\ln(2) + 2.\ln(3)).\ln(3)$.

IS01 Système.

On cherche déjà la solution avec $x = 9$, on trouve $y = 4$ dans la première équation et on vérifie dans la seconde $\left\{\begin{array}{ccccc} \sqrt{9} & + & 4 & = & 7 \\ 9 & + & \sqrt{4} & = & 11 \end{array}\right|$.
Mais peut il y avoir d'autres solutions ?
On raisonne en extrayant $\sqrt{x}$ de la première et en reportant dans la seconde $\left\{\begin{array}{ccccc} \sqrt{x} & = & 7 & - & y \\ (7-y)^2 & + & \sqrt{y} & = & 11 \end{array}\right|$
La seconde équation d'inconnue y donne $y^2 - 14.y + \sqrt{y} + 38 = 0$.
Elle n'est pas polynomiale, mais si on pose $y = Y^2$ (avec Y positif) elle devient $Y^4 - 14.Y^2 + Y + 38 = 0$.

On trouve une solution proposée avec $y = 4$ c'est à dire $Y = 2$ (on vérifie $16 - 14.4 + 2 + 38 = 0$).
On sait alors factoriser si on a eu des cours de maths très expertes en terminale : $(Y-2).(Y^3 + 2.Y^2 - 10.Y + 19)$.

Mais le trinôme $Y^3 + 2.Y^2 - 10.Y + 19$ a bien des racines réelles !
Et si on trace son tableau de variations, on en trouve une entre 0 et 7 (ibnterdit de chercher plus bas que 0).
Le système a donc une autre solution.

J'ai une autre approche en commençant par soustraire les deux équations et en factorisant par $\sqrt{x} - \sqrt{y}$).

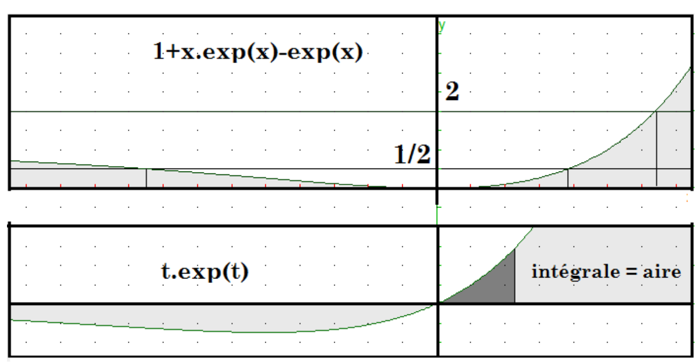
IS01 Intégration par parties.

On calcule $\int_0^a t.e^t.dt = 1 + a.e^a - e^a$ après une intégration par parties assez simple.
Mais pour résoudre l'équation, $1 + a.e^a - e^a = 2$ ou $1 + a.e^a - e^a = 1/2$ ne semble pas se faire facilement.

Mais la question ne demande pas de résoudre mais de compter les solutions.
On va donc se contenter du théorème des valeurs intermédiaires et de son corolaire. Bref, on va tracer un tableau de variations de $x \longmapsto 1 + x.e^x - e^x$ qu'on va noter F.

On la dérive ? mais c'est connu. Cette application vient d'une intégration. On a donc $F' = x \longmapsto x.e^x$.
F' est négative puis positive.
F est décroissante, nulle en 0 puis croissante.
Il nous manque les limites aux bornes. Quand x tend vers $-\infty$, l'exponentielle tend vers 0, et même $x.x^x$ tend vers 0. Bref, f tend vers 1 en $-\infty$.

Et vers $+\infty$, la forme $(x-1).e^x + 1$ nous donne une limite égae à $+\infty$.



Pour l'équation $F(x) = 2$ on n'a donc pas de solution négative, et une seule solution sur $[0, +\infty[$.
Pour l'équation $F(x) = 1/2$ on a cette fois une solution négative, et une solution sur $[0, +\infty[$.

IS01 Amplitude d'applications trigonométriques.

Avec les formules $\cos(a+b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$ et $\sin(a+b) = \sin(a).\cos(b) - \cos(a).\sin(b)$, on trouve $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right) = 0$(explication différente : $\cos(\theta+\pi/2) = -\sin(\theta)$ appliqué à $\theta = t - \dfrac{\pi}{6}$). Bref, l'application est nulle, et son amplitude l'est aussi.

On développe ensuite

$$\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right) + 2.\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cos(t).1 - \sqrt{3}.\sin(t)}{2} + 2.\frac{\sin(t).\sqrt{3} - \cos(t).1}{2} = \left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right).\cos(t) - \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\sin(t)$$

Or, le cours nous assure que tout signal de la forme $t \longmapsto a.\cos(t) + b.\sin(t)$ s'écrit $t \longmapsto A.\cos(t-\varphi)$ avec φ bien choisi, et surtout $A = \sqrt{a^2+b^2}$(amplitude).
Le calcul explicite donne ici

$$A = \sqrt{\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(3+\frac{1}{4}+\sqrt{3}\right) + \left(1+\frac{3}{4}+\sqrt{3}\right)} = \sqrt{5+2.\sqrt{3}}$$

Y'a pas d'erreur dans l'énoncé.

IS01 Complexes.

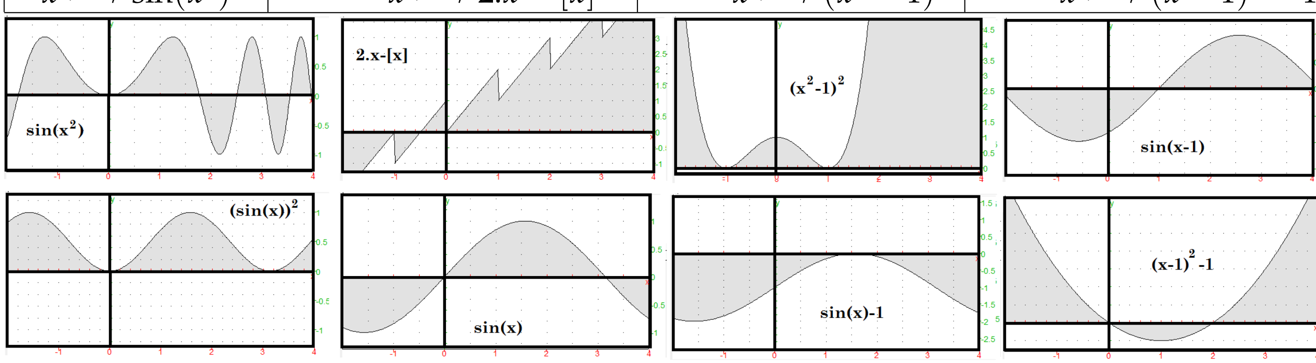
On résout $z - 1 = \overline{z}$ en prenant z sous forme cartésienne : $z = x + i.y$ avec x et y réels.
L'équation devient $x - 1 + i.y = x - i.y$. On identifie, il n'y a pas de solution.

En revanche $z - 1 = \dfrac{1}{z}$ est un second degré ($z^2 - z = 1$) de domaine $\mathbb{C}^*$ qui se résout même avec le discriminant $\Delta = 5$ et de racine $\delta = \sqrt{5}$.
Les deux solutions (réelles donc complexes) sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

IS01 Fonctions.

On donne les formules pour les fonctions de l'énoncé

$s \circ \tau$	$\tau \circ s$	s	$q \circ s$
$x \longmapsto \sin(x-1)$	$x \longmapsto (\sin(x)) - 1$	$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto (\sin(x))^2$
$s \circ q$	f	$q \circ \tau \circ q$	$\tau \circ q \circ \tau$
$x \longmapsto \sin(x^2)$	$x \longmapsto 2.x - [x]$	$x \longmapsto (x^2-1)^2$	$x \longmapsto (x-1)^2 - 1$



On met tout de suite de côté celle qui a des points de discontinuité.
On prend celles qui sont des sinus assez simples, éventuellement déphasé comme $x \longmapsto \sin(x-1)$. Celle là, c'est $x \longmapsto x - 1 \longmapsto \sin(x-1)$. C'est donc τ qui s'applique en premier.
La valeur en 0 nous aide aussi.
Et $s \circ q$ n'est plus une sinusoïde puisque le x^2 dans $\sin(x^2)$ agite de plus en plus vite.

Les propriétés doivent ensuite être interprétées. Et on refusera tout de suite celles qui sont incohérentes.

p_0	$\forall x,\ \exists y,\ f(y) = f(x)$
	comme on peut prendre $y = x$, toute application vérifie ceci
p_1	$\exists x,\ \forall y,\ f(y) = f(x)$
	L'application est constante égale à $f(x)$ pour ce x présenté
p_2	$\forall x,\ \exists y,\ f(y) \neq f(x)$
	L'application n'est pas constante. Négation de la précédente.
p_3	$\forall x,\ \exists y,\ (y > x \ et\ f(y) = f(x))$
	Toute valeur $f(x)$ est atteinte à nouveau plus tard en y.
p_4	$\forall x,\ \exists y,\ (y \neq x \ et\ f(y) = f(x))$
	Toute valeur $f(x)$ est atteinte au moins une autre fois.
p_5	$\forall x,\ \exists! y,\ (y \neq x \ et\ f(y) = f(x))$
	Toute valeur $f(x)$ est atteinte exactement deux fois (en x et en y)
p_6	$\exists p > 0,\ \forall x,\ f(x+p) = f(x)$
	Il existe une période notée p.
p_7	$\forall x,\ \exists p > 0,\ f(x+p) = f(x)$
	On retrouve la même valeur plus tard, c'est p_3.

On reprend fonction par fonction.

$\forall x,\ \exists y,\ (y > x \ et\ f(y) = f(x))$							
Toute valeur $f(x)$ est atteinte à nouveau plus tard en y.							
et elle le sera de nouveau (en prenant y dans le rôle de x)							
$\sin(x-1)$	$\sin(x)-1$	$\sin(x)$	$\sin^2(x)$	$\sin(x^2)$	$2.x-[x]$	$(x^2-1)^2$	$(x-1)^2-1$
oui	oui	oui	oui	oui	x	x	x

Les fonctions périodiques sont parfaites ici.
Mais l'application $x \longmapsto \sin(x^2)$ l'est aussi alors que non périodique.

Avec juste $y \neq x$, on est moins exigeant.

$\forall x,\ \exists y,\ (y \neq x \ et\ f(y) = f(x))$							
Toute valeur $f(x)$ est atteinte au moins une autre fois.							
$\sin(x-1)$	$\sin(x)-1$	$\sin(x)$	$\sin^2(x)$	$\sin(x^2)$	$2.x-[x]$	$(x^2-1)^2$	$(x-1)^2-1$
oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui

Notons que l'application $x \longmapsto x^2$ ne vérifiait pas cette propriété. En effet, la valeur 0 n'est atteinte qu'une fois.

$\forall x,\ \exists! y,\ (y \neq x \ et\ f(y) = f(x))$							
Toute valeur $f(x)$ est atteinte exactement deux fois.							
$\sin(x-1)$	$\sin(x)-1$	$\sin(x)$	$\sin^2(x)$	$\sin(x^2)$	$2.x-[x]$	$(x^2-1)^2$	$(x-1)^2-1$
x	x	x	x	x	oui	x	x

Il faut refuser les applications périodiques qui atteignent la même valeur une infinité de fois.
De même celles où une valeur n'est atteinte qu'une fois. Ou même quatre fois.
Mais que penser de $x \longmapsto 2.x - [x]$? Est il vrai que chaque valeur est attente exactement deux fois ?

$\exists p > 0,\ \forall x,\ f(x+p) = f(x))$							
Toute valeur $f(x)$ est atteinte exactement deux fois.							
$\sin(x-1)$	$\sin(x)-1$	$\sin(x)$	$\sin^2(x)$	$\sin(x^2)$	$2.x-[x]$	$(x^2-1)^2$	$(x-1)^2-1$
$p = 2.\pi$	$p = 2.\pi$	$p = 2.\pi$	$p = \pi$	non	non	non	non

IS01 Liste et Python.

```
def test(L) :
....p = 1
....for x in L :
........if x > 0 :
............p = p*x
....return p >= 100
```

On crée un accumulateur pour le produit produit, appelé p, d'abord égal à 1.
On prend un par un les éléments de la liste, en les nommant x (par exemple).
Si x est strictement positif, on multiplie p pa x.
A la fin, on teste si p est plus grand que 100.

J'accepterai aussi

```
def test(L) :
....p = 1
....for k in range(len(L)) :
........if L[k] > 0 :
............p = p*L[k]
....return p >= 100
```

Et même

```
def test(L) :
....p = 1
....for x in L :
........if x > 0 :
............p = p*x
....if p >= 100 :
........return True
....else :
........return False
```

qui est pourtant d'une laideur incroyable pour l'informaticien.