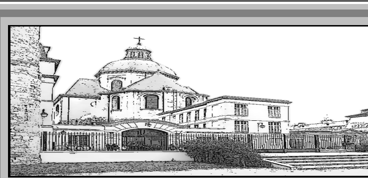
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 22 septembre
$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025
TD02

◁0▷ L'équation $4^x+4^x+2^x=1$ admet une solution assez évidente : c'est -1. Montrez que c'est la seule sur $\mathbb{R}$.
Mais quelle est la solution réelle de l'équation $4^x+4^x+2^x=5$?

On a effectivement
$$4^{-1}+4^{-1}+2^{-1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$$
Ensuite, l'application $x\longmapsto 4^x+4^x+2^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Elle passera donc une seule fois par la valeur 1.

Pour la croissance, inutile de dériver. Chaque application $x\longmapsto a^x$ est ici croissante.

Et pour l'équation $4^x+4^x+2^x=5$? On va avoir une solution pour le même type de raison qu'au dessus (avec une étude de variations plus poussée pour savoir si 3 est bien atteint).
Mais pour la valeur exacte ? Cette équation ne semble pas d'un type classique. Sauf si on l'écrit $2.4^x+2^x=3$ et même $2.(2^x)^2+2^x=3$.
On pose donc $X=2^x$ et l'équation devient un système $\left\{\begin{array}{ccc|} 2.X^2 & +X & = & 5 \\ & X & = & 2^x \end{array}\right.$.

Je garde les deux informations, comme ça je vois tout de suite que X doit être positif.

On résout la première qui donne $X=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}>0$ ou $X=\dfrac{-1-\sqrt{41}}{4}<0$.
Avec la seconde, il ne reste que X positif et on passe au logarithme :
$$S_x=\left\{\ln\left(\frac{\sqrt{41}-1}{4}\right)\right\}$$

◁1▷ ♡ On pose pour tout n : $a_n=2^n+2.(-1)^n$ et $b_n=2^{n+1}+(-1)^n$. Trouvez M vérifiant $\forall n$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1}\end{pmatrix}=M.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n\end{pmatrix}$.

La matrice M ne peut pas dépendre de n, c'est l'ordre des quantificateurs qui le dit.

On veut donc pour tout n : $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2^n & +2.(-1)^n \\ 2^{n+1} & +(-1)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{n+1} & +2.(-1)^{n+1} \\ 2^{n+2} & +(-1)^{n+1}\end{pmatrix}$.
Première ligne : $2^{n+1}+2.(-1)^{n+1}=\alpha.2^n+\beta.2^{n+1}+2.\alpha.(-1)^n+\beta.(-1)^n$
$2.2^n-2.(-1)^n=(\alpha.+2.\beta).2^n+(2.\alpha.+\beta).(-1)^n$
Exigeons simplement : $\alpha+2.\beta=2$ et $2.\alpha+\beta=-2$ [1]
Deuxième ligne : $2^{n+2}+(-1)^{n+1}=\gamma.2^n+\delta.2^{n+1}+2.\gamma.(-1)^n+\delta.(-1)^n$
$4.2^n-1.(-1)^n=(\alpha.+2.\beta).2^n+(2.\alpha.+\beta).(-1)^n$
Exigeons simplement : $\gamma+2.\delta=4$ et $2.\gamma+\delta=-1$

On trouve après résolution : $\boxed{\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}}$

Mais j'ai un chemin plus judicieux, et si vous le comprenez, vous avez tout compris de la diagonalisation en un exemple.
Posons donc $U_n=\begin{pmatrix} a_n \\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^n & +2.(-1)^n \\ 2^{n+1} & +(-1)^n\end{pmatrix}$.
On a immédiatement $U_n=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2^n \\ (-1)^n\end{pmatrix}$.
Mais aussi $U_{n+1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2^n \\ (-1)^n\end{pmatrix}$.

1. ce n'est pas une identification, c'est une condition suffisante, sachez raisonner dans le bon sens et ne pas sortir des réflexes de rédaction issus de cours de lycée mal assimilés

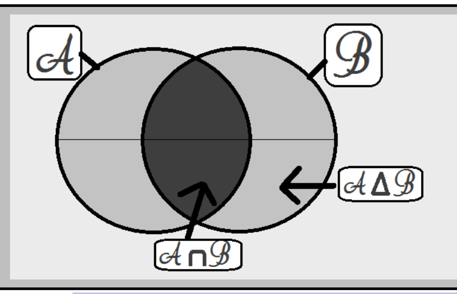
Et donc sans effort : $U_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} .U_n$.

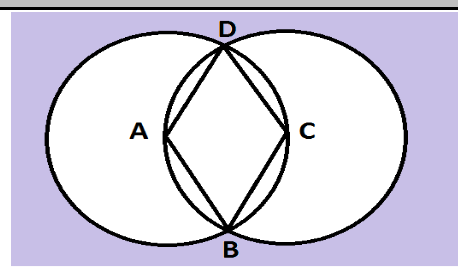
La matrice cherchée est donc $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}$ C'est la même, mais c'est plus intelligent et éclairant.

L'attitude à ne pas avoir, à ne plus avoir
« j'ai trouvé une méthode, je la garde, elle me conduit de toutes façons au résultat » (ça marche encore un peu en Terminale, et encore...)
Il faut profiter de tout ce que vous découvrez de nouveau, et ne pas vous en tenir au premier truc croisé dans le cours.
Certes, au « lycée facile », c'était un savoir vertical « apprend ça par cœur,
on le démontrera après
on fera trente exos là dessus
tu auras une évaluation dessus
puis on passera au chapitre suivant.
Quelle pédagogie déplorable pour faire des ingénieurs... on apprend et comprend par couches successives.

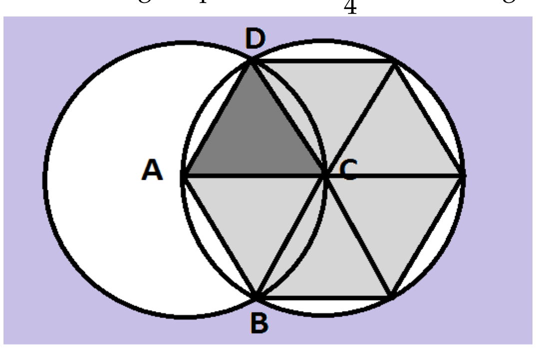
◁2▷

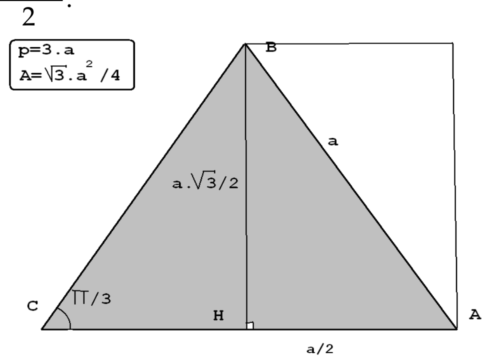
Pour représenter deux ensembles et leur intersection, j'ai tracé deux cercles de même rayon, chacun passant par le centre de l'autre. J'ai noirci l'intersection. J'ai grisé ce qu'on appelle la différence symétrique (celle du *ou exclusif*). Quel est le rapport $\dfrac{\textit{aire en gris}}{\textit{aire en noir}}$.





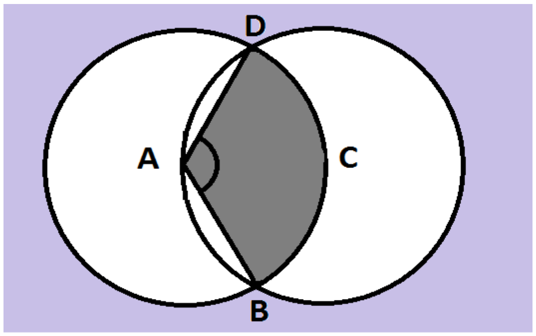
Comme il s'agit d'un rapport de mesures d'aires, on va prendre un rayon commun pour les deux cercles noté a.
Chacun des deux disques a pour aire $\pi.a^2$. Et il faut mesurer au moins la partie commune $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.
Cette partie est faite d'un losange (A, B, C, D) et de "quatre rognures d'ongles".
Pour le losange, c'est facile, il est fait de deux triangles équilatéraux de côté R.
Un tel triangle a pour aire $\dfrac{\sqrt{3}.a^2}{4}$; le losange a pour aire $\dfrac{\sqrt{3}.a^2}{2}$.

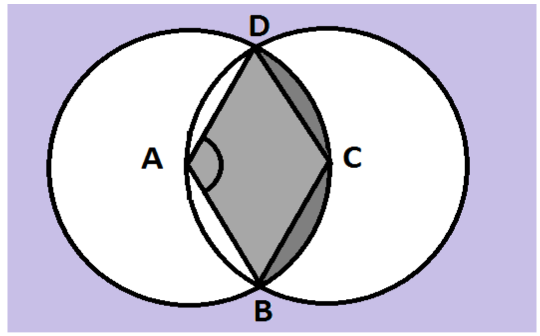




Mais on pouvait aussi mesurer l'aire d'une "part de tarte" autour de A. C'est un tiers de disque : $\dfrac{\pi.a^2}{3}$.

Par soustraction entre losange et section de disque, on a l'aire de deux petites lunes : $\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).a^2$.





Avec une part de tarte et deux lunes, on a l'aire de ce qui est appelé $\boxed{\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}\ :\ \left(\frac{2.\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).a^2}$

Par soustraction à l'aire de $\mathfrak{A}$ on a l'aire de $\boxed{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\ :\ \pi.a^2-\left(\frac{2.\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).a^2}$

On fait de même du côté de $\mathfrak{B}$, et on somme. On a l'aire de $\boxed{\mathfrak{A}\Delta\mathfrak{B}\ :2.\pi.a^2-\left(\frac{4.\pi}{3}-\sqrt{3}\right).a^2}$

Le rapport des aires est alors $\dfrac{2.\pi-\frac{4.\pi}{3}+\sqrt{3}}{\frac{2.\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ de l'ordre de $3,1$.

◁3▷ Un élève a écrit sur sa copie « pour k dans $\mathbb{N}^*$: $\begin{array}{rl} \dfrac{2.k+1}{2.k-1}\geqslant 1 & \Leftrightarrow \quad \dfrac{2.k+1}{2.k-1}\geqslant\dfrac{2.k}{2.k} \\ & \Leftrightarrow \quad \dfrac{2.k+1}{2.k}\leqslant\dfrac{2.k}{2.k-1}\end{array}$ ».

Que doit-on en penser ?

$\dfrac{2.k+1}{2.k-1}\geqslant 1$ est vrai pour tout k *(le numérateur est plus grand que le dénominateur, avec des entiers positifs)*.

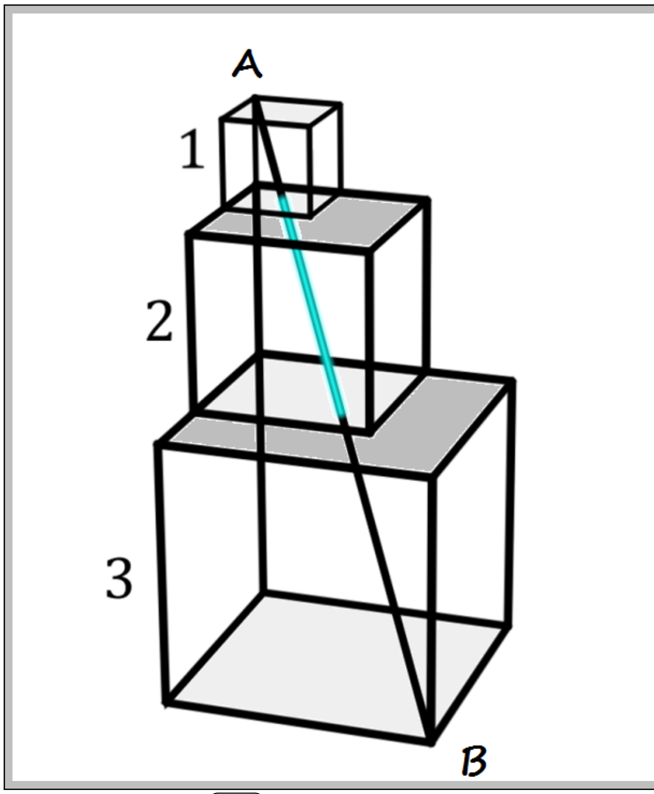
$\dfrac{2.k+1}{2.k-1}\geqslant\dfrac{2.k}{2.k}$ est vrai aussi *(c'est la même)*.

$\dfrac{2.k+1}{2.k}\leqslant\dfrac{2.k}{2.k-1}$ est vrai aussi *(par produit en croix)*.

On a donc un schéma $\begin{array}{rcl} Vrai & \Leftrightarrow & Vrai \\ & \Leftrightarrow & Vrai\end{array}$. C'est parfait. Et vrai.

En revanche, on ne voit pas de rapport entre $\dfrac{2.k+1}{2.k-1}\geqslant\dfrac{2.k}{2.k}$ et $\dfrac{2.k+1}{2.k}\leqslant\dfrac{2.k}{2.k-1}$ *(produit en croix raté ?)*.
Mais en termes de pure logique, pas de problème...

◁4▷



Quelle est la longueur de la grande diagonale $[A,\ B]$. Quelle est la longueur de sa partie « en bleu » dans le cube du milieu ?

Calculez $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}.dx$ et $\int_0^2 \sqrt{4-2^x}.dx$.

L'une vaudra $2.\dfrac{\ln(2+\sqrt{3})-\ln(2-\sqrt{3})-\sqrt{3}}{\ln(2)}$ *et l'autre* π.

Résolvez le système $\log_x(y)+\log_y(x) = \dfrac{50}{7}$ et $x.y = 256$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$ *(rappel* $y=\log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$*).*

Donnez moi un entier ayant exactement 15 diviseurs.

On est dans $rang(53)$ pour l'addition et la multiplication modulo 53. L'équation $x^2+2.x+2=0$ a pour discriminant -4. L'élève dit « Δ est négatif, elle n'a donc pas de solution ». Il n'a rien compris ! Δ a une racine carrée assez évidente ! Résolvez l'équation.

Un entier tel que $\boxed{2^{14}}$ a quinze diviseurs : les 2^p pour p allant de 0 à 14 lui même.
[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384]

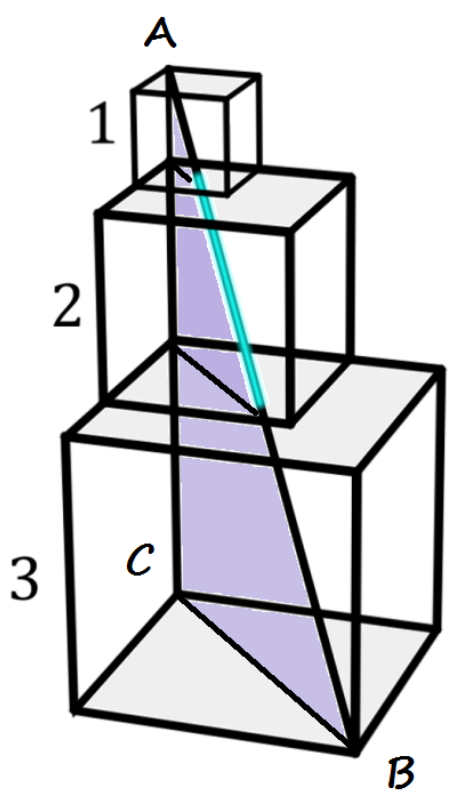
Sinon, il y a 144. [1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144] .

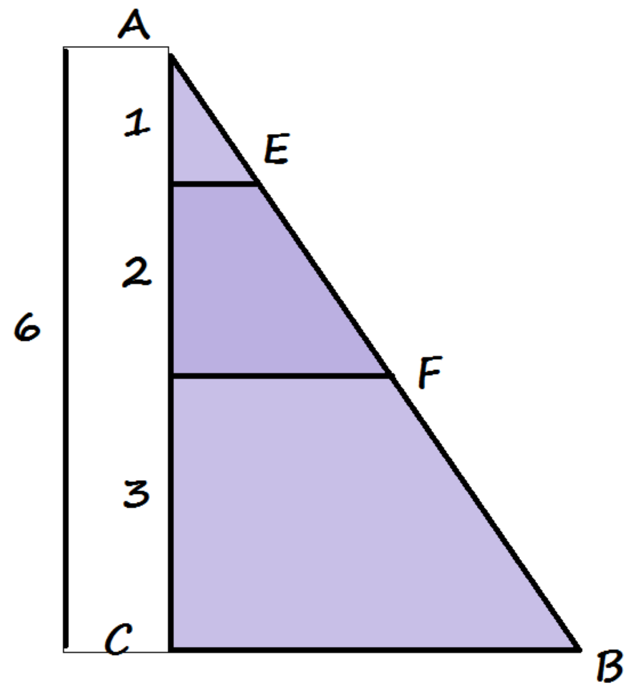
On explique : $\boxed{144 = 2^4.3^2}$
Des diviseurs sont les $2^a.3^b$ avec $a \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ et $b \in \{0,\ 1,\ 2\}$.
Cinq choix pour l'un, et trois pour l'autre. Total (ou produit) : 15.

Le carré qui supporte l'ensemble a pour côté 3 et donc pour diagonale $3.\sqrt{2}$.
On coupe l'empilement de cubes suivant le plan de coupe matérialisé.
On obtient un triangle. Rectangle en un point qu'on va appeler C.

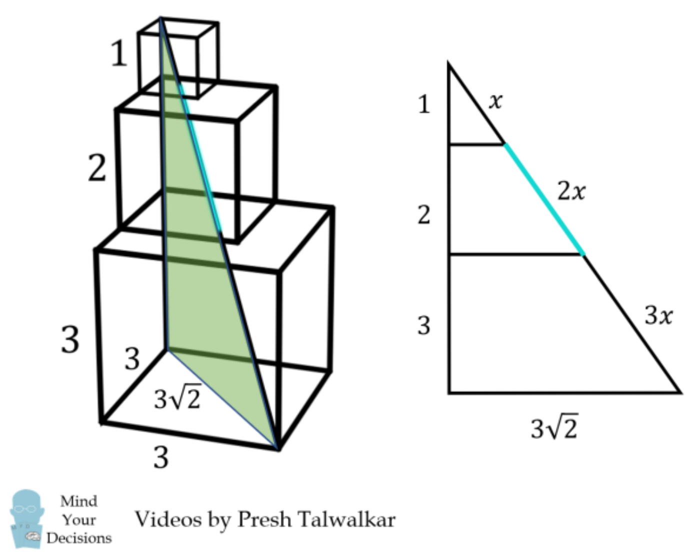
La hauteur totale des trois cubes est 6. On a donc $AC = 6$.
On l'a dit au début : $BC = 3.\sqrt{2}$.

Par théorème de Pythagore : $AB = \sqrt{6^2+(3.\sqrt{2})^2} = \sqrt{54}$. Simplifiable si on veut.





On va conclure par théorème de Thalès. La section que l'on cherche est à 2 (hauteur du cube du milieu)
ce que $\sqrt{54}$ (grande diagonale)
est à 6 (hauteur totale).



On a donc $\dfrac{EF}{2} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{54}}{6}$.

La longueur cherchée vaut $\dfrac{\sqrt{54}}{3}$ ce qui fait $\sqrt{6}$.

Sinon, il y a aussi ça (source : Mind Your Decisions) :

On rappelle
$$\begin{array}{rcl} y = \log_a(x) & \Leftrightarrow & a^y = x \\ & \Leftrightarrow & e^{y.\ln(a)} = x \\ & \Leftrightarrow & y.\ln(a) = \ln(x) \\ & \Leftrightarrow & y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}$$
(et pour $a = e$, on a le logarithme naturel).

L'équation $\log_x(y) + \log_y(x) = \dfrac{50}{7}$ donne $\dfrac{(\ln(x))^2 + (\ln(y))^2}{\ln(x).\ln(y)} = \dfrac{50}{7}$.

et $x.y = 256$ donne $\ln(x) + \ln(y) = 8\ln(2)$.

On note a et b les deux « vraies inconnues » : $a = \ln(x)$ et $b = \ln(y)$: $7.(a^2 + b^2) = 50.a.b$
$a + b = 8.\ln(2)$

La première équation dit $7.(a+b)^2 = 64.a.b$. En y reportant la seconde (et en divisant par 64) : $a.b = 7.(\ln(2))^2$.

a et b sont les deux racines de $X^2 - 8.\ln(2).X + 7.(\ln(2))^2$ de discriminant $25.(\ln(2))^2$ et de racines $7.\ln(2)$ et $\ln(2)$.
On a donc $\{a,\ b\} = \{\ln(2),\ 7.\ln(2)\}$ puis $\{x,\ y\} = \{2,\ 128\}$.
On encadre $\boxed{S_{x,y} = \{(2,\ 128),\ (128,\ 2)\}}$ et on vérifie : $\log_2(128) + \log_{128}(2) = 7 + \dfrac{1}{7}$.

Résolvons $x^2 + 2.x + 2 = 0$ (et c'est $(x+1)^2 + 1 = 0$).
Son discriminant vaut -4. Mais ne dites pas que ce nombre est négatif et n'a donc pas de racine carrée...
La notion de signe n'a pas de sens dans $(\mathbb{F}_{53}, +, .)$. Rappelons que -1 c'est aussi 52. Alors...

La vraie question, dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$ et partout n'est pas « quel est le signe de Δ
elle est Δ est il le carré de quelqu'un.

Et ici, $7^2 = 49 = -4$.
On a de la chance, on n'a pas eu à chercher trop loin...
Sinon, il fallait étudier $d^2 = -4 + p.53$ avec p et d dans $\mathbb{Z}$.
On pose donc $\delta = 7$ (et on fout à la poubelle les cours de Terminale avec $\sqrt{\Delta}$,on est d'accord !).
On a donc deux racines : $(-2+\delta).2^{-1}$ et $(-2-\delta).2^{-1}$.
Mais qui est -2 ? C'est 51.
Et qui est 2^{-1} ? C'est 27 car $2 \times 27 = 54$.

Plein de vos réflexes acquis au collège et lycée sont à étendre.
$-x$ est l'opposé de x. Et ici, c'est modulo 53.
Une division par 2, c'est une multiplication par l'inverse de 2.
Une extraction de racine, c'est une question « de qui est ce le carré ? ».

On trouve $\boxed{S = \{22,\ 29\}}$
Et on vérifie : somme = $22 + 29 = 51 = -2$
produit : $22 \times 29 = 638 = 2$ car 636 est multiple de 53

Les deux intégrales existent par continuité des fonctions sous le signe somme (tant 2^x que x^2 restent plus petits que 4).
Dans $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}.dx$ on reconnaît une portion de disque. En effet, $y = \sqrt{4-x^2}$ est l'équation de la moitié supérieure du disque de centre $(0,\ 0)$ et de rayon 2 ($x^2 + y^2 = 4$). Le grand disque a pour aire $4.\pi$. Son quart de disque donne π.
Sinon, on pouvait poser $x = 2.\sin(t)$ (et en fait $t = Arcsin(x/2)$ pour faire un choix), avec élément différentiel $dx = 2.\cos(t).dt$.
L'intégrale devenait $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}.2.\cos(t).dt$. De par l'intervalle choisi pas de valeur absolue $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2.\cos^2(t).dt$.
On linéarise $2.\cos^2(t) = 1 + \cos(2.t)$.
On intègre et on (re)trouve $\displaystyle\Big[t + \frac{\sin(2.t)}{2}\Big]_0^{\pi/2}$.

Pour $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-2^x}.dx$, on va déjà poser $2^x = t$ et donc $t = \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$ et $dt = \dfrac{dx}{x.\ln(2)}$.
L'intégrale devient $\displaystyle\frac{1}{\ln(2)}.\int_1^4 \frac{\sqrt{4-t}}{t}.dt$ (t au dénominateur, mais on ne passe pas par 0).
On pose cette fois $u = \sqrt{4-t}$ (et donc $t = 4 - u^2$ et $dt = -2.u.du$) : $\displaystyle\frac{1}{\ln(2)}.\int_{\sqrt{3}}^0 \frac{-2.u^2.du}{4-u^2}$.

On est sur la bonne piste, on a $\sqrt{3}$.

On remet les bornes dans l'ordre et on décompose en éléments simples :

$$\frac{u^2}{4-u^2} = \frac{u^2-4+4}{4-u^2} = -1 + \frac{4}{4-u^2} = -1 + \frac{1}{2+u} + \frac{1}{2-u}$$

On en est à $\displaystyle\frac{-2}{\ln(2)}.\int_{\sqrt{3}}^0 \Big(-1 + \frac{1}{2+u} + \frac{1}{2-u}\Big).du$.

Remarque : | C'est bon signe, on voir venir les logarithmes.

On intègre en logarithmes : $\dfrac{1}{\ln(2)}.\Big[-t+\ln(2+u)-\ln(2-u)\Big]_0^{\sqrt{3}}$.

On trouve bien $\boxed{2.\dfrac{\ln(2+\sqrt{3})-\ln(2-\sqrt{3})-\sqrt{3}}{\ln(2)}}$

◃5▹ **Combien des racines sixièmes de $1+i$ ont une partie réelle positive ?**

Ce complexe s écrit $\sqrt{2}.e^{i.\pi/4}$.

Une de ses racines sixièmes est $2^{1/12}.e^{i.\pi/24}$. Elle a une partie réelle positive.

Les autres sont les $2^{1/12}.e^{\frac{i.\pi}{24}+i.\frac{k.\pi}{3}}$. Il y en a six.

On doit regarder les parties réelles :

$\cos(\pi/24)$	$\cos(3.\pi/8)$	$\cos(17.\pi/24)$	$\cos(25.\pi/24)$	$\cos(11.\pi/8)$	$\cos(41.\pi/24)$
oui	oui				oui

Un dessin sur le cercle trigonométrique devrait suffire.

Extraits de « How to solve it »
de George Pólya (1887 - 1985)

Comprendre le problème

— En premier lieu, il faut comprendre le problème et son énoncé.

— Quelle est l'inconnue ?

— Quelles sont les données ?

— Quelle est la condition ?

— Est-il possible de satisfaire à la condition ?

— La condition est-elle suffisante pour déterminer l'inconnue.
Est-elle insuffisante ?
Redondante ?
Contradictoire ?

— Dessinez une figure.

— Introduisez la notation appropriée.

— Distinguez les diverses parties de la condition.

— Pouvez-vous les formuler ?

Concevoir un plan

— Avez-vous déjà rencontré ce problème ?

— Ou bien avez-vous rencontré le même problème sous une forme légèrement différente ?

— Connaissez-vous un problème qui s'y rattache ?

— Connaissez-vous un théorème qui puisse être utile ?

— Regardez bien l'inconnue et essayez de penser à un problème qui vous soit familier et qui ait la même inconnue ou une inconnue similaire.

— Voici un problème qui se rattache au vôtre et que vous avez déjà résolu.

— Pourriez-vous vous en servir ?

— Pourriez-vous vous servir de son résultat ?

— Pourriez-vous vous servir de sa méthode ?

— Pourriez-vous énoncer le problème différemment ?

— Reportez-vous aux définitions.

— Pourriez-vous imaginer un problème qui s'y rattache et qui soit plus accessible ?
Un problème plus général ?
Un problème plus particulier ?
Un problème analogue ?

— Pourriez-vous résoudre une partie du problème ?
Ne gardez qu'une partie de la condition, négligez l'autre partie ; dans quelle mesure l'inconnue est-elle alors déterminée, comment peut-elle varier ?

— Pourriez-vous tirer des données un élément utile ?

— Pourriez-vous penser à d'autres données qui pourraient vous permettre de déterminer l'inconnue ?

— Vous êtes-vous servi de toutes les données ?

— Vous êtes-vous servi de la condition toute entière ?

— Avez-vous tenu compte de toutes les notions essentielles que comportait le problème ?

Mettre le plan à exécution

— Il faut donc savoir faire preuve de patience, ne pas se décourager et si vraiment cela est nécessaire, changer de méthode.

— En mettant votre plan à exécution, vérifiez-en chaque détail l'un après l'autre.

— Pouvez-vous voir clairement si ce détail est correct ?

— Pouvez-vous démontrer qu'il est correct ?

— N'oubliez pas d'écrire clairement la réponse à la question posée !

— Mettez-la bien en évidence.

— Revenir sur sa solution

— Pouvez-vous vérifier le résultat ?

— Pouvez-vous vérifier le raisonnement ?

— Pouvez-vous obtenir le résultat différemment ?

— Pouvez-vous le voir d'un coup d'œil ?

— Pouvez-vous vous servir du résultat ou de la méthode pour quelque autre problème ?

◁6▷ ♡ Retrouvez a et b sachant que la maximum de $x \longmapsto a.\cos(x)+b.\sin(x)$ vaut 6, atteint en $\dfrac{\pi}{6}$.

On veut qu'en $\pi/6$ la dérivée s'annule et passe du positif au négatif.
On impose aussi la valeur en $\pi/6$.
On a un système $\left\{\begin{array}{rcrcl} a.\frac{\sqrt{3}}{2} & + & b.\frac{1}{2} & = & 6 \\ -a.\frac{1}{2} & + & b.\frac{\sqrt{3}}{2} & = & 0 \end{array}\right|$.
On résout et on obtient la fonction $x \longmapsto 3.\sqrt{3}.\cos(x)+3.\sin(x)$.

On peut aussi dire qu'elle s'écrit $x \longmapsto A.\cos(x-\varphi)$.
Pour que le maximum soit en $\dfrac{\pi}{6}$, on impose $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.
Pour que le maximum vaille 6, on impose $A = 6$.
On a donc $x \longmapsto 6.\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.
On la remet sur la base en cosinus et sinus, et c'est fini.

C'est ici une preuve de physicien. Bien plus esthétique et agréable que la résolution de système au dessus. Et très logique.

◁7▷ On constate : $153 = 1^3+5^3+3^3$, $371 = 3^3+7^3+1^3$, $370 = 3^3+7^0+0^3$. Écrivez un programme Python qui cherche les nombres à trois chiffres égaux à la somme des cubes de leurs chiffres.

Autant prendre des entiers de 0 à 9 a, b et c, construire $\overline{abc}$ et comparer à $a^3+b^3+c^3$.

```
for a in range(10) :
....for b in range(10) :
........for c in range(10) :
............sc = a**3+b**3+c**3
............n = 100*a+10*b+c
............if n == sc :
................print(n)
```

0
1
153
370
371
407

Plus proprement, on créer une liste des solutions, qu'on pourra utiliser ensuite

```
L = [ ]
for a in range(10) :
....for b in range(10) :
........for c in range(10) :
............sc = a**3+b**3+c**3
............n = 100*a+10*b+c
............if n == sc :
................L.append(n)
```

◁8▷ Calculez ces variations sur le binôme

$A = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^k$	$B = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^n$
$C = \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{i}.a^i$	$D = \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}.a^i$

Attention aux variables de sommation, et surveillez les sommes doubles.

$A = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^k$	$A = (1+a)^n$	binôme
$B = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^n$	$B = 2^n.a^n$	binôme mais a^n sort
$C = \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{i}.a^i$	$C = \dfrac{(1+a)^{n+1}-1}{a}$	binome puis géométrique
$D = \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}.a^i$	$D = \dfrac{2^n - a.(1+a)^n}{1-a}$	géométrique qui binome

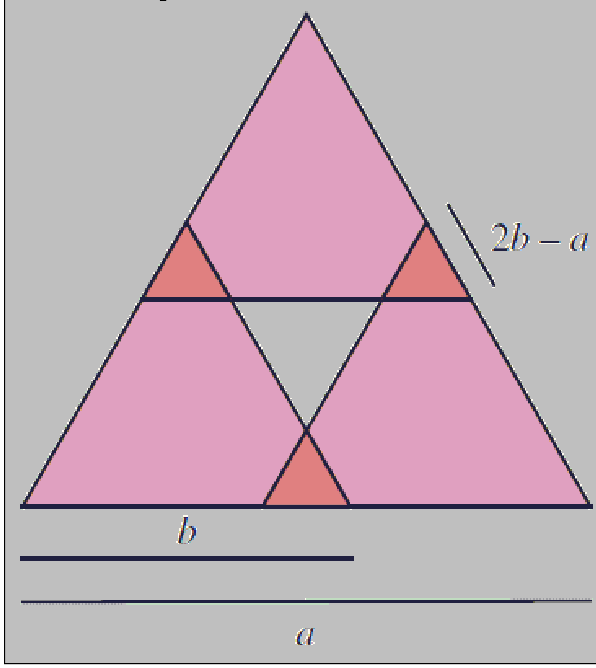
$$C=\sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\binom{k}{i}.a^i=\sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}.a^i\Big)=\sum_{k=0}^{n}(1+a)^k=\frac{1-(1+a)^{n+1}}{1-(1+a)}$$

On traitera à part le cas $a=0$ pour lequel la raison de la suite vaut 1.

$$D=\sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}.a^i=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big(\sum_{i=0}^{k}a^i\Big)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\frac{1-a^{k+1}}{1-a}$$

$$D=\frac{1}{1-a}.\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-a.\sum\binom{n}{k}.a^k\Big)=\frac{2^n-a.(1+a)^n}{1-a}$$

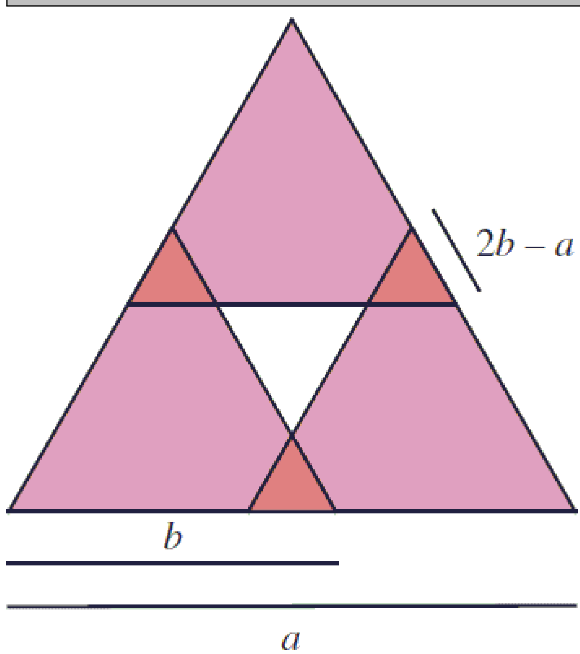
◁ 9 ▷ J'ai croisé la preuve suivante de l'irrationalité de $\sqrt{3}$; hélas, elle est en anglais. Help me.



Assuming $a^2 = 3.b^2$ and that the sides of the triangles are as shown in the diagram, that of the triangle in the center equals $2a-3b$ so that Carpets Theorem implies $(2.a-3.b)^2 = 3.(2.b-a)^2$, implying the possibility of the infinite descent.

Ah, le théorème des tapis (you may use it or not, as you like), c'est "If two carpets of equal area overlap, then, the overlap aside, their remaining parts have equal areas".

Mettez tout ça en forme et en français. Bref, rédigez la preuve.



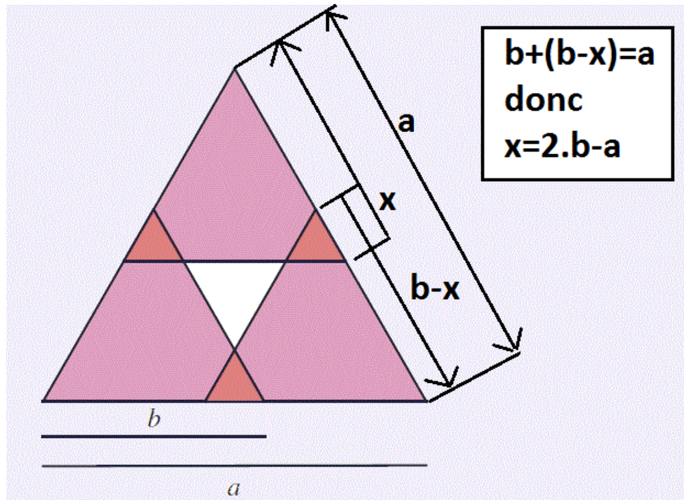
En supposant que $a^2 = 3.b^2$ et que les côtés des triangles sont comme dans le diagramme, celui du triangle au centre est égal à $2.a-3.b$, de sorte que le théorème des tapis implique $(2.a-3.b)^2 = 3.(2.ba)^2$, impliquant la possibilité d'une descente infinie.

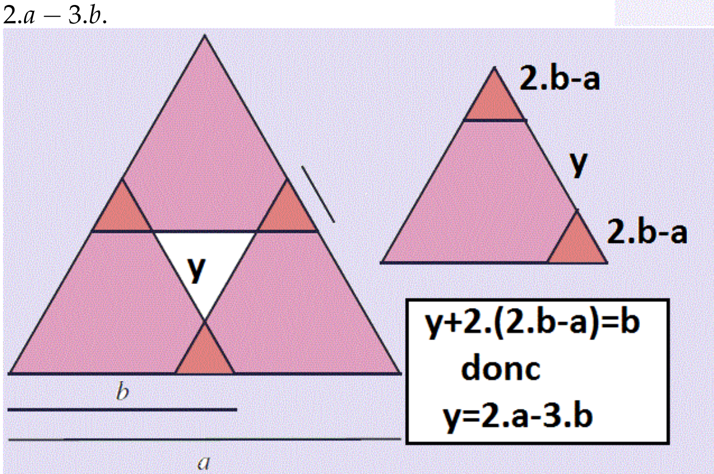
Ah, le théorème des tapis, c'est "Si deux tapis d'égale surface se chevauchent, alors, le chevauchement de côté, leurs parties restantes ont des surfaces égales".

Mettez tout ça en forme et en français.

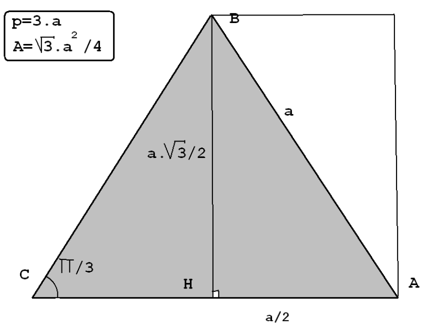
C'est GOOGLE TRADUCTION qui vient de le faire.

On suppose $a^2 = 3.b^2$. On va faire un raisonnement par l'absurde, avec descente infinie de Fermat. ais pour l'instant, rien n'indique que a et b soient entiers.
On note a le grand côté du triangle équilatéral, avec découpage de longueur b. Déjà, comme b est plus petit que a, on peut découper les petits triangles équilatéraux. Comme b est néanmoins plus grand que $a/2$ (sinon $a^2 \geqslant 4.b^2$), alors on a le chevauchement indiqué plus haut en plus foncé. Sachant $2.b > a$, le recouvrement précis de deux côtés de longueur b sur un côté de longueur a est bien $2.b - a$.
Il reste un triangle au centre. On mesure son côté : $2.a - 3.b$.





On note que $2.a - 3.b$ est positif car sinon on aurait $a \leqslant \dfrac{3}{2}.b$ puis $a^2 \leqslant \dfrac{9}{4}.b^2 < 3.b^2$.
On va mesurer ensuite des aires, pour certaines plusieurs fois, car des parties se recouvrent.
On rappelle que l'aire d'un triangle équilatéral est proportionnelle au carré de son côté. Plus précisément, un triangle équilatéral de côté a a pour aire $\sqrt{3}.a^2/2$. Mais même sans connaitre cette constante, il suffit de dire qu'il existe une constante C vérifiant *aire du triangle* $= C.a^2$ pour de simples raisons d'homogénéité ou d'équation aux dimension.



On les appelle

grand triangle	triangle moyen	petit triangle	triangle au centre
côté a	côté b	côté $2.b - a$	côté $2.a - 3.b$
$C.a^2$	$C.b^2$	$C.(2.b - a)^2$	$C.(2.a - 3.b)^2$

et on a aussi trois pentagones irréguliers obtenus en coupant les triangles moyens par les petits :
$C.b^2 - 2.C.(2.b - a)^2$.

On mesure l'aire totale :
un grand est égal à trois moyens, moins trois petits (car comptés deux fois) et un au centre.
On a donc $C.a^2 = 3.b^2 - 3.(2.b - a)^2 + C.(2.a - 3.b)^2$.
On simplifie par C. Et surtout, on rappelle l'hypothèse $a^2 = 3.b^2$.
Il reste bien $3.(2.b - a)^2 = (2.a - 3.b)^2$ comme demandé.

Quel fut le rôle du théorème des tapis : dans le $-3.(2.b - a)^2$. On a compté deux fois chaque petit triangle à cause du chevauchement.
Ce serait donc encore $Card(A \cup B) + Card(A \cap B) = Card(A) + Card(B)$
ou même $Aire(A \cup B) + Aire(A \cap B) = Aire(A) + Aire(B)$.

On résume : on est parti de $a^2 = 3.b^2$ et on a obtenu $3.(2.b - a)^2 = (2.a - 3.b)^2$.

Passons à la phase "par l"absurde". S'il existe un couple d'entiers $(a,\ b)$ vérifiant $a^2 = 3.b^2$, alors il existe un nouveau couple $(2.a - 3.b,\ 2.b - a)$ vérifiant $(2.a - 3.b)^2 = 3.(2.b - a)^2$ (vérifiable aussi sans géométrie : $((4.a^2 - 12.a.b + 9.b^2) = 3.(4.b^2 - 4.a.b + a^2))$.

Les deux nombres $2.a - 3.b$ et $2.b - a$ sont encore entiers, par structure d'anneau $(\mathbb{Z}, +, .)$.

Ils sont positifs par constatation déjà faite.

Ils sont plus petits que a et b par construction géométrique.

On a donc un nouveau couple solution, plus petit que le précédent.

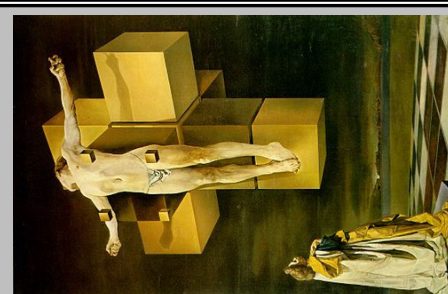
Par mise en boucle, on a une suite strictement décroissante d'entiers (ou ici de couples d'entiers). Ceci vient contredire le principe de Fermat.

Ou alors, on fait un raisonnement plus direct.

On suppose qu'on a une solution $(a,\ b)$ vérifiant $a^2 = 3.b^2$ avec a et b entiers et $a+b$ le plus petit possible (non nul).
Et on a alors une nouvelle solution $(2.a-3.b,\ 2.b-a)$ avec $(2.a-3.b)-(2.b-a)$ qui a diminué. Ceci contredit la minimalité.

Conclusion : il n'existe pas de couple d'entiers non nuls vérifiant $a^2 = 3.b^2$. $\sqrt{3}$ est irrationnel.

◃10▹ Soit $*$ une loi associative sur un ensemble E
$(\forall(a,b,c),\ (a*b)*c = a*(b*c))$.
Passez de $((a*b)*c)*(d*e)$ à $(a*(b*(c*d)))*e$ (combien d'étapes ?).
Soit $*$ une loi associative et commutative.
Passez de $((a*b)*c)*d$ à $(d*(c*(b*a)))$.
Passez de $((a*b)*c)*d$ à $((d*c)*b)*a$.



Corpus hypercubus (Salvador Dali 1954)

$\Big((a*b)*c\Big)*(d*e)$	$\Big((a*b)*c)*d\Big)*(e)$	$\Big((a*b)*\Big(c*d\Big)\Big)*(e)$
$\Big((a)*\Big(b*(c*d)\Big)*(e)$		

◃11▹ ♣ Le polynôme $X^3 + *.X^2 + \sharp.X - 1$ a pour racines $\cos(a)$, $\cos(b)$ et $\cos(c)$. Calculez $\sin(a+b+c)$.

C'est tordu, mais rigolo

Le produit des racines vaut 1.
Et c'est donc le produit de trois cosinus.
Mais quand on multiplie des termes strictement entre -1 et 1, on obtient un produit strictement entre -1 et 1.
La seule possibilité est donc que les trois réels $\cos(a)$, $\cos(b)$ et $\cos(c)$ vaillent 1 ou -1.
En fait, les trois valent 1, ou alors deux valent -1 et le dernier vaut 1.

Les angles sont donc tous trois des multiples de π (pairs ? impairs ? on doit pouvoir être précis mais qu'importe).
Leur somme est un multiple de π et le sinus est nul.

◃12▹ Résolvez $x^2 - x + 1 = 7$ dans $\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}}$ (entiers de 0 à 6 pour les lois modulo 7).

On peut tester les sept nombres.
Sinon $\Delta = 1 - 4 = -3 = 4 = 2^2$.
Les deux racines se calculent $(1+2).2^{-1} = 3.4 = 12 = 5$
$(1-2).2^{-1} = -1.4 = -4 = 3$
On vérifie si nécessaire : $\boxed{S = \{3,\ 5\}}$

◃13▹ La relation "*avoir une voyelle en commun avec*" sur l'ensemble des noms de la MPSI2 est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?
Définissez une relation d'équivalence sur les entiers de 1 à 10 dont les classes d'équivalence sont $\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$, $\{9,\ 10\}$.

Réflexive. Chaque nom d'élève est en relation avec lui même.
En effet, chaque nom d'élève a une voyelle en commun avec lui même.
Remarque : | on a la chance d'éviter les noms tchèques ne contenant que des consonnes.

Symétrique. Prenons deux noms A et B. On suppose que A a une voyelle en commun avec B.
Alors B a une voyelle en commun avec A.
On a bien $(A\Re B) \Rightarrow (B\Re A)$.

Transitivité. Prenons trois noms A, B et C.
Supposons $(A\Re B) et (B\Re C)$.
On traduit : une voyelle en commun entre A et B
une voyelle en commun entre B et C

mais de là à ce que ce soit la même...
On cherche un contre-exemple : (par la voyelle A
(par la voyelle I)
Mais on n'a pas .

Pas besoin d'aller chercher un truc avec des congruences tordues.
La relation est « est dans le même ensemble que » (où on désigne par « ensemble » chacun des trois ensembles $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$, $\{9, 10\}$).

◃ 14 ▹ `Retrouvez les stations de métro dont voici les anagrammes` *(Nord-Est)* :
Léger aphte. Cul albinos. Trique. Cet urinoir à con. Un livre s'inscrira alphabétiquement. Pacte des elfes.

Léger aphte	**Cul albinos**	**Trique**
Télégraphe	Louis Blanc	Riquet
Cet urinoir à con	**Un livre s'inscrira alphabétiquement**	**Pacte des elfes**
Corentin Cariou	Aubervilliers - Pantin - Quatre Chemins	Place des fêtes.

```
#anagrammes des stations de metro
import os #le module pour lire un fichier sur le disque dur
#-*- coding :utf-8 -*- #pour que Python supporte les accents et caractères spéciaux, cherchez pas à comprendre

Alphabet = 'abcdefghijklmnopqrstuvwxyz' #tout ce qui est ponctuation, espace, apostrophe n'est pas dans cette liste

def Nettoyeur(C) : #prend un mot (string) et ne garde que les lettres (liste triée par ordre alphabétique)
....Mot=( ) #liste vide qui va accueillir les lettres
....for lettre in C : #prend les lettres une a une, et il les appelle « lettre »
........if lettre in'eéèê' : #efface les accents des e
............lettre='e'
........if lettre in'àâä' :
............lettre='a'
........if lettre in'ô' :
............lettre='o'
........if lettre in'uù' :
............lettre='u'
........if ord(lettre) in range(65,91) : #détecte les majuscules (code ASCII)
............lettre = chr(ord(lettre)+32) #pour convertir en minuscule, augmenter le code de 32
........if lettre in Alphabet : #si on a bien une lettre (efface les espaces, apostrophes...)
............Mot.append(lettre)
........Mot.sort() #trie la liste obtenue (on peut trier les listes, pas les strings)
....return(Mot)

#lecture du fichier RATP sur disque
Liste = open('StationsMetro.txt','r')
ListeLue=Liste.readlines()
Liste.close()
ListeNoms = ( )
for nom in ListeLue :
....if len(nom)>3 : #car le fichier contient des trucs louches
........ListeNoms.append(nom)
........print(nom) #juste pour reviser la liste des noms de stations
```

for k in range(20) :cv#on va pouvoir en tester 20
....Ana = input('Nom à tester ') #entrée au clavier
....AnaPropre=Nettoyeur(Ana) #nettoyage
....for Station in ListeNoms : #on prend un par un les noms du fichier mis en mémoire
........if Nettoyeur(Station) == AnaPropre : #on compare les deux listes nettoyees et triees
............print(Station) #en cas de concordance, on affiche

◁ 14 ▷ Montrez que $\log_{10}(5)+\log_{10}(3)$ est irrationnel.

Par l'absurde. Supposons que ce nombre s'écrit $\dfrac{p}{q}$.

On a alors $\log_{10}(15)=\dfrac{p}{q}$.

On revient à la définition : $10^{\frac{p}{q}}=15$ puis $10^p=15^q$.
On a une formule dans $\mathbb{N}$. On écrit des décompositions en produit de facteurs premiers : $2^p.5^p=3^q.5^q$.
On écrit même $2^p.3^0.5^p=2^0.3^q.5^q$.
Par unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers : $p=0$, $q=0$.
Et ça c'est incohérent.

◁ 15 ▷ ♡ On définit $f=x\longmapsto x^{-1/2}$. Calculez $f^{(n)}$ pour tout n. Montrez : $\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}=(-1)^n.\dfrac{\binom{2.n}{n}}{4^n}$.

On dérive $x\longmapsto x^n$ en $x\longmapsto x.x^{n-1}$ y compris si n n'est pas entier.
En répétant l'opération, on trouve

n	0	1	2	3	4		
$f^{(n)}(x)$	$x^{-1/2}$	$-\dfrac{x^{-3/2}}{2}$	$(-1).(-3).\dfrac{x^{-5/2}}{2.2}$	$(-1).(-3).(-5).\dfrac{x^{-7/2}}{2.2.2}$	$(-1).(-3).(-5).(-7).\dfrac{x^{-9/2}}{2.2.2.2}$	conjecture	$(-1)^n$

La formule conjecturée serait vraie à partir du rang 0 et I_n désignerait le produit des entiers impairs : $1.3.5\dots(2.n-1)$.
On la démontre par récurrence sur n déjà initialisée (c'est aussi à ça que sert la recherche des premières valeurs).

On se donne n, on suppose la formule vraie, on redérive, et elle est validée au rang suivant.

Ensuite, on écrit $1.3.5\dots.(2.n-1)=\dfrac{1.2.3.4.5\dots(2.n-1).(2.n)}{2.4\dots(2.n)}=\dfrac{(2.n)!}{2^n.n!}$.
Inutile de faire une récurrence pour si peu.

On calcule en 1 et on a le résultat.

Remarque : on ne pouvait pas démontrer $\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}=(-1)^n.\dfrac{\binom{2.n}{n}}{4^n}$ *par récurrence sur* n*. Connaître la dérivée* n^{ieme} *en* 1 *ne permet pas de trouver la dérivée* $(n+1)^{ieme}$*. On ne peut dériver que si la variable bouge un peu, puisque « dériver c'est mesurer des variations ».*
En revanche, on peut démontrer : $f^{(n)}=\left(x\longmapsto(-1)^n.\dfrac{(2.n)!}{4^n.n!}.x^{-(2.n+1)/2}\right)$ *car là, l'hérédité ne pose pas de problème.*
On peut dériver une fonction connue sur tout un intervalle, et on connaît alors sa dérivée sur tout cet intervalle.

◁ 16 ▷ Vrai ou faux :

a	$\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(x)=1\Rightarrow x=0\ [\pi]$
b	$\forall(\alpha,\theta)\in\mathbb{R}^2,\ (\lvert\theta\rvert=\lvert\alpha\rvert\ [2.\pi])\Rightarrow(\cos(\theta)=\cos(\alpha)\ [2.\pi])$
c	$\forall(\alpha,\theta)\in\mathbb{R}^2,\ (\lvert\theta\rvert=\lvert\alpha\rvert\ [2.\pi])\Leftrightarrow(\cos(\theta)=\cos(\alpha)\ [2.\pi])$
d	$\forall(\alpha,\theta)\in(\mathbb{R}-\{\dfrac{2.k+1}{2}.\pi\mid k\in\mathbb{Z}\})^2,\ (\theta=\alpha\ [\pi])\Leftrightarrow(\tan(\theta)=\tan(\alpha)\ [2.\pi])$

a	Vrai
b	Vrai
c	Vrai
d	Faux

a : $\cos(x)=1\Leftrightarrow x=0\ [2\pi]$ mais ceci implique $x=0\ [\pi]$. Donc Vrai.

b : $\lvert\theta\rvert=\lvert\alpha\rvert\ [2.\pi]\Rightarrow(\cos(\theta)=\cos(\alpha)$ par périodicité et parité. Mais $a=b$ implique bien $a=b$ modulo ce qu'on veut.

Donc Vrai.

c : $(|\theta| = |\alpha|\ [2.\pi]) \Leftrightarrow (\cos(\theta) = \cos(\alpha))$ est connu, c'est du cours.
Mais ensuite $(\cos(\theta) = \cos(\alpha)\ [2.\pi]) \Leftrightarrow (\cos(\theta) = \cos(\alpha)\ [2.\pi]$ car deux nombres entre -1 et 1 différant d'un multiple de $2.\pi$ sont forcément égaux car $2.\pi$ dépasse la longueur de l'intervalle.
Donc Vrai.

d : $\forall(\alpha, \theta) \in (\mathbb{R} - \{\dfrac{2.k+1}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})^2,\ (\theta = \alpha\ [\pi]) \Leftrightarrow (\tan(\theta) = \tan(\alpha)\ [2.\pi])$.
C'est Faux. L'équivalence est $(\theta = \alpha\ [\pi]) \Leftrightarrow (\tan(\theta) = \tan(\alpha))$.
L'implication écrite comme un porc $(\theta = \alpha\ [\pi]) \Leftrightarrow (\tan(\theta) = \tan(\alpha)) \Rightarrow (\tan(\theta) = \tan(\alpha)\ [2.\pi])$ est vraie.
Mais $(\tan(\theta) = \tan(\alpha)\ [2.\pi])$ ne permet pas de remonter.
Prenons 0 et $Arctan(2.\pi)$. On a $(\tan(0) = 2.\pi\ [2.\pi])$ et donc $(\tan(0) = \tan(Arctan(2.\pi))\ [2.\pi])$.
Mais on n'a pas $(0 = Arctan(2.\pi)\ [\pi])$ puisque les deux sont entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.
Donc Faux.

◃17▹ Résolvez le système $\log_x(y) + \log_y(x) = \dfrac{50}{7}$ et $x.y = 256$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$ *(rappel $y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$).*

On rappelle
$$\begin{aligned} y = \log_a(x) &\Leftrightarrow a^y = x \\ &\Leftrightarrow e^{y.\ln(a)} = x \\ &\Leftrightarrow y.\ln(a) = \ln(x) \\ &\Leftrightarrow y = \tfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$
(et pour $a = e$, on a le logarithme naturel).

L'équation $\log_x(y) + \log_y(x) = \dfrac{50}{7}$ donne $\dfrac{(\ln(x))^2 + (\ln(y))^2}{\ln(x).\ln(y)} = \dfrac{50}{7}$.
et $x.y = 256$ donne $\ln(x) + \ln(y) = 8\ln(2)$.
On note a et b les deux « vraies inconnues » : $a = \ln(x)$ et $b = \ln(y)$: $\begin{array}{l} 7.(a^2+b^2) = 50.a.b \\ a + b = 8.\ln(2) \end{array}$
La première équation dit $7.(a+b)^2 = 64.a.b$. En y reportant la seconde (et en divisant par 64) : $a.b = 7.(\ln(2))^2$.

a et b sont les deux racines de $X^2 - 8.\ln(2).X + 7.(\ln(2))^2$ de discriminant $25.(\ln(2))^2$ et de racines $7.\ln(2)$ et $\ln(2)$.
On a donc $\{a,\ b\} = \{\ln(2),\ 7.\ln(2)\}$ puis $\{x,\ y\} = \{2,\ 128\}$.
On encadre $\boxed{S_{x,y} = \{(2,\ 128),\ (128,\ 2)\}}$ et on vérifie : $\log_2(128) + \log_{128}(2) = 7 + \dfrac{1}{7}$.

◃18▹ Résolvez l'équation $x^2 + (1-5.i).\sqrt{2}.x = 24$ d'inconnue complexe x.
Résolvez l'équation $e^z + (1-5.i).\sqrt{2} = 24.e^{-z}$ d'inconnue complexe z.

Le discriminant vaut $48 - 20.i$.
Une de ses racines est $\sqrt{2}.(5-i)$.
Les solutions sont $\sqrt{2}.(-2-2.i)$ et $\sqrt{2}.(3-3.i)$.

On résout ensuite $e^x.e^{i.y} = 4.\dfrac{-\sqrt{2} - i.\sqrt{2}}{2}$ et on trouve $x = \ln(4)$ et $y = \dfrac{5.\pi}{4} + 2.k.\pi$ avec k pouvant décrire $\mathbb{Z}$.
On fait à peu près de même avec l'autre racine, où seul le module change, donc la partie réelle x.

◃19▹ Résolvez $2.z^2 + (3.i-7).z + 5 - 5.i = 0$ d'inconnue complexe z.

On calcule le discriminant de $2.X^2 + (3.i-7).X + 5 - 5.i$: $\Delta = (3.i-7)^2 - 8.(5-5.i) = -9 + 49 - 42.i - 40 + 40.i = -2.i$.
On cherche une racine carrée sous la forme $a + i.b$ vérifiant donc $a^2 - b^2 = 0$ et $2.a.b = -2$.

Directement, sans même lire le module : $(1-i)^2 = -2.i$.

Les deux racines cherchées sont $\dfrac{7 - 3.i + (1-i)}{4}$ et $\dfrac{7 - 3.i - (1-i)}{4}$. On en fait un ensemble : $\boxed{\left\{2 - i,\ \dfrac{3-i}{2}\right\}}$

◃20▹ a et b sont les racines de $X^2 - S.X + P$ (P non nul). Calculez $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a}$.

Sachant $a + b = S$ et $a.b = P$, on a $\boxed{\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{a^3+b^3}{a.b} = \dfrac{(a+b)^3 - 3.a^2.b - 3.a.b^2}{a.b} = \dfrac{S^3 - 3.S.P}{P}}$

◁ 21 ▷

I∼0) **Exprimez $\cos(4.\pi/5)$, $\cos(6.\pi/5)$ et $\cos(9.\pi/5)$ en fonction de $\cos(\pi/5)$ *(noté c)*.**

On peut évidement développer $\cos(4.\theta) = 8.\cos^4(\theta) - 8.\cos^2(\theta) + 1$ et autres joyeusetés.

Mais on peut aussi écrire
$$\cos\left(\frac{4.\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -c$$
et c'est quand même plus compact.

Mais l'élève est en droit de protester : on n'a pas à me refuser $8.c^4 - 8.c^2 + 1$.

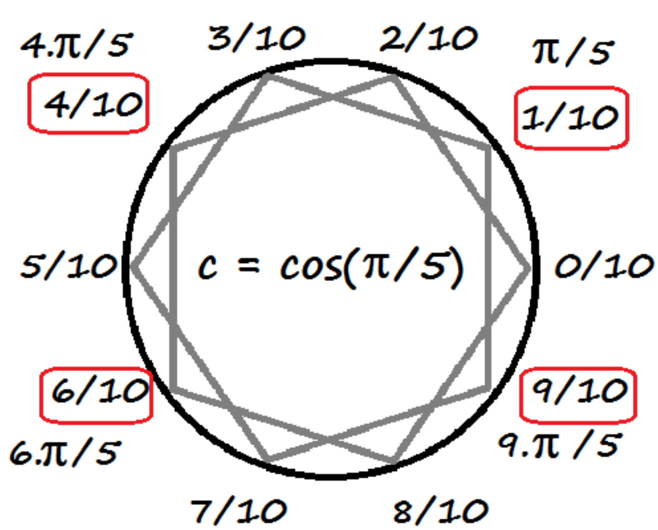
De même
$$\cos\left(\frac{6.\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -c$$
et enfin
$$\cos\left(\frac{9.\pi}{5}\right) = \cos\left(2.\pi - \frac{\pi}{5}\right) = +\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = +c$$

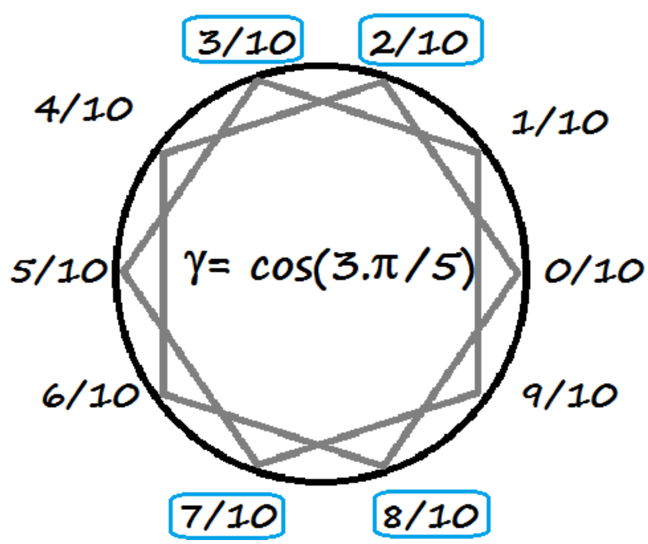
I∼1) **Exprimez $\cos(2.\pi/5)$, $\cos(7.\pi/5)$ et $\cos(8.\pi/5)$ en fonction de $\cos(3.\pi/5)$ *(noté γ)*.**

On trace un cercle trigonométrique pour voir tout de suite qui sont les angles complémentaires, supplémentaires.

Par exemple

$\frac{4.\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$	donc	$\cos\left(\frac{4.\pi}{5}\right)$	$= -\cos\left(\frac{4.\pi}{5}\right)$	$= -c$
$\frac{6.\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$	donc	$\cos\left(\frac{6.\pi}{5}\right)$	$= -\cos\left(\frac{4.\pi}{5}\right)$	$= -c$
$\frac{9.\pi}{5} = 2.\pi - \frac{\pi}{5}$	donc	$\cos\left(\frac{9.\pi}{5}\right)$	$= \cos\left(\frac{4.\pi}{5}\right)$	$= c$
$\frac{2.\pi}{5} = \pi - \frac{3.\pi}{5}$	donc	$\cos\left(\frac{2.\pi}{5}\right)$	$= -\cos\left(\frac{3.\pi}{5}\right)$	$= -\gamma$
$\frac{7.\pi}{5} = 2.\pi - \frac{3.\pi}{5}$	donc	$\cos\left(\frac{7.\pi}{5}\right)$	$= \cos\left(\frac{3.\pi}{5}\right)$	$= \gamma$
$\frac{8.\pi}{5} = \pi + \frac{3.\pi}{5}$	donc	$\cos\left(\frac{2.\pi}{5}\right)$	$= -\cos\left(\frac{3.\pi}{5}\right)$	$= -\gamma$





Remarque : il étaient tentant de partir dans des formules $\cos(2.\theta) = 2.\cos^2(\theta) - 1$ et $\cos(4.\theta) = 8.\cos^4(\theta) - 8.\cos^2(\theta) + 1$ et autres.
J'y suis d'ailleurs parti moi même, jusqu'à ce que je comprenne que c'était bien plus tard que ça allait servir.
L'énoncé était peut être trompeur.

I∼2) **Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 + 1 = 0$. Calculez la somme des racines, puis déduisez : $c + \gamma = \frac{1}{2}$.**

L'équation $z^5 = -1$ se résout en posant $z = \rho.e^{i.\theta}$.

On trouve $\rho^5 = 1$ puis $\rho = 1$.
On trouve surtout $5.\theta = \pi\ [2.\pi]$ d'où θ valant $\dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2.k.\pi}{5}$ avec k dans $range(5)$.

$\exp\left(i.\dfrac{\pi}{5}\right)$	$\exp\left(i.\dfrac{3.\pi}{5}\right)$	$\exp\left(i.\dfrac{5.\pi}{5}\right)$	$\exp\left(i.\dfrac{7.\pi}{5}\right)$	$\exp\left(i.\dfrac{9.\pi}{5}\right)$

La somme vaut 0 , c'est Viète qui le dit.

Mais on peut aussi les regrouper deux à deux *(avec la racine -1 en solitaire)*.

Comme la somme a été calculé de deux façons, on a $0 = (e^{i.\pi/5} + e^{9.\pi/5}) + 1 + (e^{3.i.\pi/5} + e^{i.7.\pi/5})$.
Par conjugaison : $0 = 2.\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + 1 + 2.\cos\left(\dfrac{3.\pi}{5}\right)$.

On comprend pourquoi la valeur γ a été choisie de la sorte *(plutôt que $\cos(2.\pi/5)$)* : $\boxed{2.c + 1 + 2.\gamma = 0}$

I∼3) **Déduisez que c et γ sont les racines de $4.X^2 - 2.X - 1$, et explicitez c et γ.**

On tient la somme : $c + \gamma = -\dfrac{1}{2}$.
Cherchons leur produit. C'est le produit de deux cosinus :

$$c.\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right).\cos\left(\frac{3.\pi}{5}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{5} + \frac{3.\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5} - \frac{3.\pi}{5}\right)}{2} = \frac{\cos\left(\frac{4.\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2.\pi}{5}\right)}{2} = \frac{-c-\gamma}{2} = \frac{-1/2}{2}$$

Le produit des deux cosinus vaut $-\dfrac{1}{4}$.
Avec la somme et le produit, on a l'équation.

On résout l'équation $4.x^2 - 2.x - 1 = 0$ de discriminant 20.
c et γ valent $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.

Comme γ est négatif *(angle entre $\pi/2$ et π)*, on répartit :

c	$= \cos(\pi/5)$	$= \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$
γ	$= \cos(3.\pi/5)$	$= \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

Le sujet est ici conçu pour que, même si vous n'avez pas trouvé le chemin avec c et γ, leur somme, leur produit, vous puissiez continuer en donnant leur valeur.

I∼4) **Démontrez que $\sqrt{5}$, c et γ sont irrationnels.**

$\sqrt{5}$ est irrationnel.
Par l'absurde, on imagine qu'il existe p et q entiers premiers entre eux vérifiant $p^2/q^2 = 5$.
Par produit en croix *($p^2 = 5.q^2$)*, il vient que p^2 est multiple de 5.
Par tableau de congruences, p est forcément multiple de 5

p modulo 5	0	1	2	3	4
p^2 modulo 5	0	1	4	4	1

On l'écrit $p = 5.r$, l'équation devient $25.r^2 = 5.q^2$ puis $q^2 = 5.r^2$.
q est à son tour multiple de 5 *(en transitant par « q^2 est multiple de 5 »)*, et ceci contredit « fraction irréductible ».

Si $\cos(\pi/5)$ était rationnel, alors $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ serait rationnel, puis par addition et multiplication, $\sqrt{5}$ serait rationnel.
C'est la contradiction voulue.

L'argument direct pour passer de $\sqrt{5}$ à $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est certes légitime, mais il vaut mieux contraposer.
En effet, par exemple, $\sqrt{5}$ est irrationnel, donc $\sqrt{5}-1$ et $\sqrt{5}+1$ sont irrationnels, mais leur produit ne l'est plus. Or, la phrase aurait tellement bien sonné « irrationnel comme produit d'irrationnels ».

I∼5) **Montrez pour k dans $\mathbb{N} - 5.\mathbb{N}$: $\cos(k.\pi/5) \notin \mathbb{Q}$.**

Les angles $\dfrac{k.\pi}{5}$ avec k non multiple de 5 se ramènent par congruence modulo $2.\pi$ à la liste

$\pi/5$	$4.\pi/5$	$6.\pi/5$	$9.\pi/5$
$2.\pi/5$	$3.\pi/5$	$7.\pi/5$	$8.\pi/5$

Les cosinus de ces angles valent c ou γ ou leur opposés. Ils sont irrationnels.

II~0) On considère la suite $U_0(X)=1$, $U_1(X)=2.X$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+2}(X)=2.X.U_{n+1}(X)-U_n(X)$.Calculez $U_n(X)$ pour n dans $range(6)$ *(ta*

On les calcule de proche en proche :

$\longrightarrow 2.X.(2.X)-1$		$\longrightarrow 2.X.(8.X^3-4.X)-(4.X^2-1)$			
1	$2.X$	$4.X^2-1$	$8.X^3-4.X$	$16.X^4-12.X^2+1$	$32.X^5-32.X^3+6.X$
	$\longrightarrow 2.X.(4.X^2-1)-2.X$		$\longrightarrow 2.X.(16.X^5-12.X^3+1)-(8.X^4-4.X)$		
$U_0(X)$	$U_1(X)$	$U_2(X)$	$U_3(X)$	$U_4(X)$	$U_5(X)$

II~1) Montrez que pour tout n, U_n est un polynôme, à coefficients entiers, de degré n, dont vous donnerez le coefficient dominant.

Il faut prouver que ce qu'on obtient existe : on construit de proche en proche.
S'agit-il ensuite bien de polynômes ?
On pose P_n : U_n est un polynôme, à coefficients entiers.

On initialise P_0 et P_1 : les deux premiers sont bien des polynômes, à coefficients entiers.

On se donne n et on suppose que $U_n(X)$ et $U_{n+1}(X)$ sont deux polynômes.
On sort la définition : $U_{n+2}(X)=2.X.U_{n+1}(X)-U_n(X)$.
Dans la second membre on a une somme de produits de polynômes à coefficients entiers, c'est un polynôme à coefficients entiers.

La récurrence ne porte pas sur « une égalité à montrer », mais sur l'appartenance à un espace.
On notera qu'on sait que les coefficients de chaque U_n sont entiers.
Mais on ne sait pas combien ils valent.
Si on regarde d'ailleurs le sujet jusqu'au bout, on comprend qu'on va mettre du temps à trouver leur valeur.
Sinon, un mot clef était « $(\mathbb{Z}[X],+,.)$ est un anneau ».

Calculons les valeurs en 1 et -1, le degré et le coefficient dominant (tout en un).

	1	$2.X$	$4.X^2-1$	$8.X^3-4.X$	$16.X^4-12.X^2+1$	$32.X^5-32.X^3+6.X$
	$U_0(X)$	$U_1(X)$	$U_2(X)$	$U_3(X)$	$U_4(X)$	$U_5(X)$
$U_n(1)$	1	1	3	4	5	6
$U_n(-1)$	1	-2	3	-4	5	-6
degré	0	1	2	3	4	5
terme	$1.X^0$	$2.X^1$	$4.X^2$	$8.X^3$	$16.X^4$	$32.X^5$

On conjecture que $U_n(X)$ est de degré n et de terme dominant $2^n.X^n$.

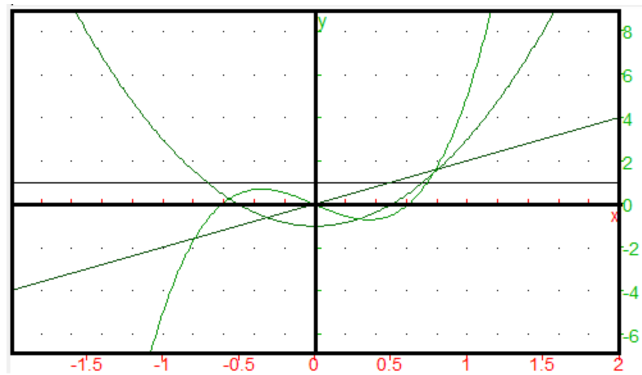
Mais une conjecture n'est pas une preuve. C'est juste une intime conviction confirmée par les premières valeurs.
On va devoir utiliser une récurrence. A double hérédité.
La propriété P_n sera : $U_n(X)=2^n.X^N+Q_n(X)$ avec $Q_n(X)$ de degré inférieur à n strictement.
C'est vrai pour n de 0 à 5.

On se donne un entier n, on suppose que P_n et P_{n+1} sont vraies.
On étudie P_{n+2}. Il s'agit donc de regarder le polynôme $U_{n+1}(X)$ et d'en déterminer le degré.
On applique la définition : $U_{n+2}(X)=2.X.U_{n+1}(X)-U_n(X)$.
Dans $2.X.U_{n+1}(X)$ il y a un terme de degré $n+2$, venant de $2.X.(2^n.X^n)$, et des termes de degré plus petit.
Dans $-U_n(X)$ le terme de plus haut degré est de degré $n-1$. Pas de terme de degré $n+1$.
Le polynôme $U_{n+2}(X)$ a donc un terme de degré $n+2$, c'est $2^{n+2}.X^{n+2}$ et c'est bien le terme de plus haut degré.

Il était bon de mener en parallèle degré et terme dominant.

II~2) Montrez pour tout n : $U_n(-X)=(-1)^n.U_n(X)$, exprimez ce résultat en termes de « fonction pair/impaire ».

On montre $U_n(-X)=(-1)^n.U_n(X)$ encore par récurrence sur n, à double hérédité.



On initialise sans problème.
On se donne n et on suppose la propriété vraie aux rangs n et $n+1$.
On calcule $U_{n+2}(-X) = 2.(-X).U_{n+1}(-X) - U_n(-X)$.

On exploite la double hypothèse :
$U_{n+2}(-X) = 2.(-X).(-1)^{n+1}.U_{n+1}(X) - (-1)^n.U_n(X)$.

On factorise :
$U_{n+2}(-X) = (-1)^n.(2.X.U_{n+1}(X) - U_n(X))$
sachant $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$.

On reconnaît : $U_{n+2}(-X) = (-1)^{n+1}.(2.X.U_{n+1}(X) - U_n(X))$.

La propriété est établie par récurrence.

Elle s'interprète :

n pair	$U_n(-X) = U_n(X)$	U_n paire	graphe de symétrie axiale Oy
n impair	$U_n(-X) = -U_n(X)$	U_n impaire	graphe de symétrie centrale O

J'ai une belle phrase : U_n a la même parité que n.

II∼3) Calculez $U_n(1)$ et $U_n(-1)$ pour tout n.

On écrit ensuite $\boxed{U_n(1) = n+1}$
On va le démontrer par récurrence sur n. La récurrence est initialisée.
On se donne un entier naturel n et on suppose la propriété vraie aux rangs n et $n+1$.
On regarde au rang $n+2$. On calcule $U_{n+1}(1) = 2.1.U_{n+1}(1) - U_n(1)$.
On remplace en tenant compte des deux hypothèses : $U_{n+1}(1) = 2.1.(n+2) - (n+1)$.
On développe et simplifie : $U_{n+2}(1) = (n+2)+1$. Ceci achève la récurrence.

On a enfin $\boxed{U_n(1) = (-1)^n.(n+1)}$ La récurrence est quasiment la même.
L'hérédité s'écrit $U_{n+1}(-1) = 2.(-1).(-1)^{n+1}.(n+2) - (-1)^n.(n+1)$ et donne bien $U_{n+2}(-1) = (-1)^{n+2}.(n+3)$.

On peut aussi utiliser la parité des $U_{2.p}$ et l'imparité des $U_{2.p+1}$ pour passer de $U_n(1)$ à $U_n(-1)$.
C'est même mieux, dans l'esprit des concours.

II∼4) Rappelez la forme factorisée de $\sin(a)+\sin(b)$ et simplifiez $\cos(\theta).\sin((n+2).\theta) - \sin((n+1).\theta)$.

La formule est dans le cours : $\sin(a)+\sin(b) = 2.\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$$\boxed{\sin((n+3).\theta) + \sin((n+1).\theta) = 2.\sin((n+1).\theta).\cos(\theta)}$$

avec $a = (n+3).\theta$ et $b = (n+1).\theta$

II∼5) Déduisez pour tout n et pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sin(\theta).U_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1).\theta)$.

On prouve $\sin(\theta).U_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1).\theta)$ par récurrence sur n (θ fixé).
On a bien $\sin(\theta).1 = \sin((0+1).\theta)$ et $\sin(\theta).2.(\cos(\theta)) = \sin((1+1).\theta)$.

On se donne n et on suppose $\sin(\theta).U_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1).\theta)$ et $\sin(\theta).U_{n+1}(\cos(\theta)) = \sin((n+2).\theta)$.

On calcule $\sin(\theta).U_{n+2}(\cos(\theta)) = \sin(\theta).\Big(2.\cos(\theta).U_{n+1}(\cos(\theta)) - U_n(\cos(\theta)\Big)$

$\sin(\theta).U_{n+2}(\cos(\theta)) = 2.\cos(\theta).\sin(\theta).U_{n+1}(\cos(\theta)) - \sin(\theta).U_n(\cos(\theta)$ (on développe)
$\sin(\theta).U_{n+2}(\cos(\theta)) = 2.\cos(\theta).\sin((n+2).\theta) - \sin((n+1).\theta)$

La formule plus haut identifie bien $\sin((n+3).\theta)$. C'est le résultat au rang $n+2$.

II∼6) cines réelles distinctes que vous préciserez et donnez l'expression factorisée de $U_n(X)$ *(vous pourrez changer de variable en $\theta = Arccos(x)$, mais gare a*

On va résoudre l'équation $U_n(x) = 0$ d'inconnue réelle x dans $]-1,\ 1[$.
On cherche le lien avec la question précédente.
Et si on posait $x = \cos(\theta)$?

Disons qu'on va poser $\theta = Arccos(x)$ même,nouvelle inconnue entre 0 et π.

L'équation devient $U_n(\cos(\theta)) = 0$.
On remplace : $\dfrac{\sin((n+1).\theta)}{\sin(\theta)} = 0$ ($\sin(\theta)$ est non nul puisque l'on a posé θ dans $]0,\ \pi[$).
On résout $\sin((n+1).\theta) = 0$. On trouve $(n+1).\theta = 0\ [\pi]$.
On déduit : $\theta = \dfrac{k.\pi}{n+1}$ avec k entier.
Mais comme θ est entre 0 et π *(strictement)*, k est entre 1 et n *(inclus tous deux, $range(1,\ n+1)$ dira le MPSI2)*.

Attention, l'inconnue est x, on va donc revenir à lui : $x = \cos\left(\dfrac{k}{n+1}.\pi\right)$ *(tiens, on en croise dans la suite de l'énoncé)*.

On pense pourvoir conclure $S_x = \left\{\cos\left(\dfrac{k.\Pi}{n+1}\right) \mid k \in range(1,\ n+1)\right\}$

Mais en fait, non.
On a juste prouvé $\left\{\cos\left(\dfrac{k.\pi}{n+1}\right) \mid k \in range(1,\ n+1)\right\} \subset S_x$

ou $\boxed{S_x \cap [-1,\ 1] = \left\{\cos\left(\dfrac{k.\pi}{n+1}\right) \mid k \in range(1,\ n+1)\right\}}$

En effet, en posant $x = \cos(\theta)$ et $\theta = Arccos(x)$, on n'a cherché que les solutions entre -1 et 1.

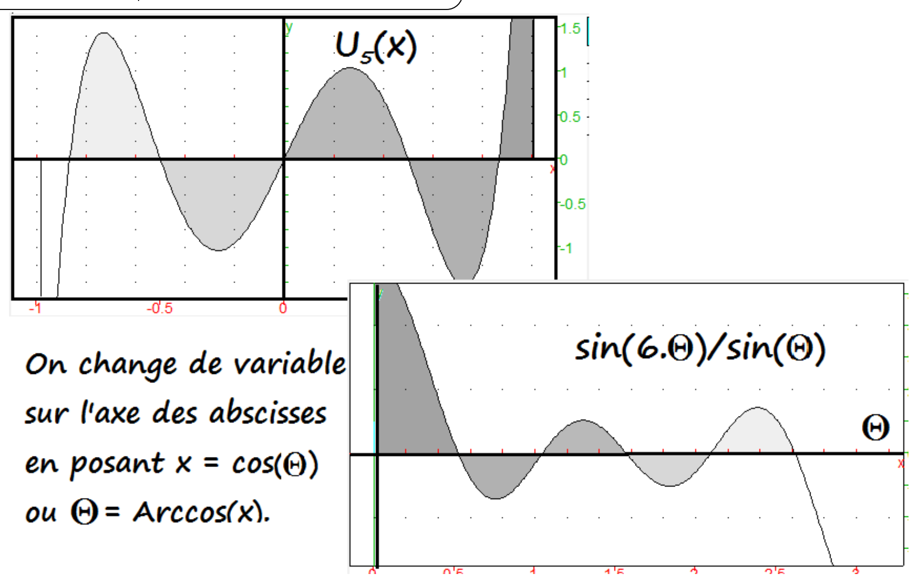
Mais les autres ? Les solutions dans $]-\infty,\ -1]$, et dans $[1,\ +\infty[$, ou même dans $\mathbb{C} - \mathbb{R}$?

C'est là qu'il faut non plus calculer, mais aussi réfléchir.

Le polynôme est de degré n.

On vient de lui trouver n racines entre -1 et 1.

C'est donc qu'on les a toutes !



Finalement, mais seulement après réflexion fine : $\boxed{S_x = \left\{\cos\left(\dfrac{k.\Pi}{n+1}\right) \mid k \in range(1,\ n+1)\right\}}$

Erreur classique : $S_x = \left\{\left(\dfrac{k.\Pi}{n+1}\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ alors qu'à ce stade il s'agit juste de S_θ.

Oubli de non matheux : être heureux d'avoir trouvé les $\cos\left(\dfrac{k.\Pi}{n+1}\right)$ mais avoir oublié de se demander « et celles hors de $]-1,\ 1[$.
Sinon, on ne pouvait pas obtenir $n+1$ racines, comme le feront ceux qui oublient qu'il y a une contrainte : $\sin(x)$ non nul.
De toutes façons, si vous trouvez la racine $x = 1$, il y a un problème puis que $U_n(1) = n+1 \neq 0$.

La forme factorisée est $\boxed{U_n(x) = 2^n.\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\left(\dfrac{k}{n+1}.\pi\right)\right)}$

Attention en effet, il ne faut pas oublier le 2^n devant. Le polynôme a un coefficient dominant qui ne vaut pas 1.

III~0) Pour tout n, on définit : $V_n(X) = U_n\left(\dfrac{X}{2}\right)$. Calculez $V_n(X)$ pour n de 0 à 5 *(tableau)*.

On calcule les premiers :

$U_0(X)$	$U_1(X)$	$U_2(X)$	$U_3(X)$	$U_4(X)$	$U_5(X)$
1	$2.X$	$4.X^2-1$	$8.X^3-4.X$	$16.X^4-12.X^2+1$	$32.X^5-32.X^3+6.X$
$V_0(X)$	$V_1(X)$	$V_2(X)$	$V_3(X)$	$V_4(X)$	$V_5(X)$
1	X	X^2-1	$X^3-2.X$	$X^4-3.X^2+1$	$X^5-8.X^3+3.X$

L'énoncé ne disait pas de mettre les résultats sous forme de tableau.
Mais sincèrement, que pensez vous de la lecture de
$V_0=1$,$V_1(X)=X$, $V_2(X)=X^2-1$, $V_3(X)=X^3-2.X$ avec ensuite un éventuel retour à la ligne (éventuellement au milieu de l'écriture d'un polynôme) ?
Pensez que votre copie est destinées à être lue. Donc, rendez les choses agréables à lire, et aidez le correcteur à trouver tout de suite ce qu'il cherche.

III∼1) On pose $V_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\mu_{n,k}.X^k$. Montrez que tous les $\mu_{n,k}$ sont dans $\mathbb{Z}$; que vaut $\mu_{n,n}$?

Chaque $V_n(X)$ reste un polynôme.
Il est de degré n.
Son terme dominant est $2^n.\left(\frac{X}{2}\right)^n$ ce qui fait X^n.
Ce sont des polynômes unitaires.

Les coefficients sont rationnels : ce sont des entiers divisés par des puissances de 2.

Mais pourquoi des entiers ?

On revient à la définition des U_n par récurrence et on remplace :

$$V_{n+2}(X)=U_{n+2}\left(\frac{X}{2}\right)=2.\left(\frac{X}{2}\right).U_{n+1}\left(\frac{X}{2}\right)-U_n\left(\frac{X}{2}\right)$$

On simplifie et on trouve :

$$V_{n+2}(X)=2.X.V_{n+1}5X)-V_n(X)$$

On peut dire « par récurrence double sur n, les $V_n(X)$ sont à coefficients entiers ».
Et on ne la refait pas.

st une racine ratiIII∼2)onnelles de V_n d'écriture irréductible $x=\frac{p}{q}$ *(p dans $\mathbb{Z}$, q dans $\mathbb{N}^*$, sans facteur commun avec p)*. En considérant $q^n.V_n\left(\frac{p}{q}\right)$ et $q.\Big(\sum_{k=0}^{n-}$

Supposons donc que $\frac{p}{q}$ est racine de V_n. On a donc $\sum_{k=0}^{n}\mu_{n,k}.\left(\frac{p}{q}\right)^k=0$ puis $q^n.\sum_{k=0}^{n}\mu_{n,k}.\left(\frac{p}{q}\right)^k=0$.

On distribue $\sum_{k=0}^{n}\mu_{n,k}.p^k.q^{n-k}=0$.
Le premier membre est une somme d'entiers.
On en met un de côté : $1.p^n+\sum_{k=0}^{n-1}\mu_{n,k}.p^k.q^{n-k}=0$.
On isole, puis on factorise : $q.\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mu_{n,k}.p^k.q^{n-1-k}\right)=-p$.

C'est moi qui ai ajouté à l'énoncé de l'EPITA l'indication $q.\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mu_{n,k}.p^k.q^{n-1-k}\right)$.

Tant que k est plus petit que $n-1$ l'exposant $n-1-k$ est positif.
On a donc $q.entier=-p^n$.
C'est donc que q divise p^n.
Mais q n'a aucun facteur commun avec p *(écriture irréductible)*.
C'est contradictoire.
Sauf si q vaut 1.

Proprement : q divise p^n, donc q divise $p.p^{n-1}$.
Or, q est premier avec p. C'est donc qu'il divise p^{n-1}.

On recommence : q divise $p.p^{n-2}$ et il est premier avec p.
Gauss nous dit que q divise p^{n-2}.
Ainsi de suite jusqu'à q divise $p.1$ et q est premier avec p.
Donc l'entier q divise 1.
Il ne peut que valoir 1.

Les racines rationnelles de V_n sont forcément entières *(et les autres racines sont irrationnelles).*

Mais on a vu que c'étaient des $2.\cos\left(\dfrac{k.\pi}{n+1}\right)$ *(on passe des racines de $U_n(X)$ à celles de $V_n(X)$ en multipliant par 2).*

Ce sont donc des nombres entre -2 et 2 *(strictement).*

Et des entiers entre -2 et 2, il n'y a que -1, 0 et 1.

Les seules racines rationnelles de V_n sont -1, 0 et 1 *(et encore, elles ne le sont pas forcément).*
Les seules racines rationnelles de U_n sont donc $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{0}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$ *(mais elles ne le sont même pas forcément).*

III∼3) **Montrez que les seules racines rationnelles de U_n sont dans $\left\{-\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right\}$.**

Les racines de U_n sont les $\cos\left(\dfrac{k.\pi}{n+1}\right)$. Parmi elles, il y a donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ *(première de liste).*
Les racines de U_n sont réelles, mais irrationnelles, ou rationnelles, mais alors elles ne peuvent valoir que $-1/2$, 0 ou $1/2$.

$\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ est donc irrationnel. Sauf si il vaut $\dfrac{-1}{2}$ ou 0 ou $\dfrac{1}{2}$.

Est il possible que ce cosinus vaille $\dfrac{-1}{2}$, 0 ou $\dfrac{1}{2}$?

Pour 0, c'est oui, mais avec un seul cas.
C'est $n+1=2$.
Le cosinus vaut alors $\cos(\pi/2)$, ce qui fait bien un rationnel.
C'est le seul cas pour avoir 0.

Pour $\dfrac{1}{2}$, on veut $\dfrac{\pi}{n+1}$ égal à $\dfrac{\pi}{3}$. C'est $n=2$.

Pour $\dfrac{-1}{2}$, $\dfrac{\pi}{n+1}$ est trop petit.

Bref, les $\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ rationnels sont uniquement ceux qu'on connait déjà bien : $\cos\left(\dfrac{\pi}{1}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.
Ensuite, on connaissait $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ irrationnels.
Mais ça continue, $\cos\left(\dfrac{\pi}{31}\right)$ est aussi irrationnel, et ainsi de suite.

IV∼0) **Pour quelles valeurs de n le réel $\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ est il rationnel ?**

Les $\cos\left(\dfrac{k.\pi}{n+1}\right)$ sont les racines de U_n.
Les seules racines rationnelles de U_n sont $-\dfrac{1}{2}$, 0 et $\dfrac{1}{2}$.

Peut on avoir $\cos\left(\dfrac{k.\pi}{n+1}\right)=0$ hormis dans le cas $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ croisé plus haut ?
n étant plus grand que 2, il faudrait avoir $n+1$ pair et $k=\dfrac{n+1}{2}$. Comme par exemple $\cos\left(\dfrac{7.\pi}{13+1}\right)$
Fraction réductible. Refusé.

Peut on avoir $\cos\left(\dfrac{k.\pi}{n+1}\right)=\dfrac{1}{2}$ hormis dans le cas $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ croisé plus haut ?
n étant plus grand que 2, il faudrait avoir $n+1$ multiple de 3 et $k=\dfrac{n+1}{3}$. Comme par exemple $\cos\left(\dfrac{5.\pi}{14+1}\right)$

Fraction réductible. Refusé.

De même pour le dernier. Bref, jamais $\cos\left(\frac{k.\pi}{n+1}\right)$ avec $n \geqslant 2$ et k premier avec $n+1$ n'est rationnel.

IV~1) el pour n strictement plus grand que 2, k dans $range(1, n+1)$ et $\frac{k}{n+1}$ irréductible. Montrez que $\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ est irrationnel pour n strictem

Et si k varie dans tout n tout en gardant $\frac{k}{n+1}$ irréductible ? C'est pareil.
Par périodicité du cosinus, on se ramènerait à k' dans $range(1,\ n+1)$ déjà traité.

C'est ainsi que tous les $\cos\left(\frac{k.\pi}{31}\right)$ sont irrationnels (sauf pour k lui même multiple de 31).
Et le physicien répondra « oui, et alors ? ».

V~0) Montrez $\forall x \in]-1,\ 1[,\ \sqrt{1-x^2}.U_n(x) = \sin((n+1).Arccos(x))$.

On veut prouver $\forall x \in]-1,\ 1[,\ \sqrt{1-x^2}.U_n(x) = \sin((n+1).Arccos(x))$?
On sait $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin(\theta).U_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1).\theta)$.
Si on se donne x quelconque dans $]-1,\ 1[$ et qu'on pose $\theta = Arccos(x)$, on a

$$\sin(Arccos(x)).U_n(x) = \sin((n+1).Arccos(x))$$

et le cours permet de simplifier $\sin(Arccos(x))$ en $\sqrt{1-x^2}$.

V~1) Déduisez $\forall x \in]-1,\ 1[,\ (1-x^2).U_n'(x) - x.U_n(x) = -(n+1).\cos((n+1).Arccos(x))$.
$(1-x^2).U_n''(x) - 3.x.U_n'(x) + n.(n+2).U_n(x) = 0$

Comme cette égalité est vraie pour tout x, on peut la dériver *(attention, on dérive un produit et des composées)* :

$$\frac{-2.x}{2.\sqrt{1-x^2}}.U_n(x) + \sqrt{1-x^2}.U_n'(x) = \frac{-(n+1)}{\sqrt{1-x^2}}\cos((n+1).Arccos(x))$$

On multiplie par $\sqrt{1-x^2}$: $-x.U_n(x) + (1-x^2).U_n'(x) = -(n+1).\cos((n+1).Arccos(x))$.

On recommence pour avoir à nouveau un sinus à droite :

$$-\Big(U_n(x) + x.U_n'(x)\Big) + \Big((1-x^2).U_n''(x) - 2.x.U_n'(x)\Big) = (n+1).\frac{-(n+1)}{\sqrt{1-x^2}}.\sin((n+1).Arccos(x))$$

(j'ai moi même recompté trois signes moins à droite).
On remplace $\sin((n+1).Arccos(x))$ par $\sqrt{1-x^2}.U_n(x)$ et on a :

$$-\Big(U_n(x) + x.U_n'(x)\Big) + \Big((1-x^2).U_n''(x) - 2.x.U_n(x)\Big) = -(n+1)^2.U_n(x)$$

Il ne reste plus qu'à faire passer de l'autre côté et à regrouper les $U_n'(x)$:

$$(1-x^2).U_n''(x) - 3.x.U_n'(x) - U_n(x) + (n+1)^2 U_n(x) = 0$$

Victoire !

V~2) On pose $U_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}.X^k$,montrez : $\sum_{k=0}^{n} k.(k-1).\lambda_{n,k}.x^{k-2} + \sum_{k=0}^{n} (k.(1-k) + n.(n+2)).\lambda_{n,k}.x^k = 3.\sum_{k=0}^{n} k.\lambda_{n,k}.x^k$.

On a écrit $U_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}.X^k$. C'est légitime car on sait qu'on a un polynôme de degré n.

On peut dériver : $U_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k}.k.x^{k-1}$ *(le terme $\lambda_{n,0}.x^0$ est une constante, il a disparu à la dérivation).*

On peut multiplier par x : $x.U_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k}.k.x^k$.

On peut ré-incorporer le terme $k=0$, il est nul : $x.U_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}.k.x^k$.

On peut même multiplier par 3 : $3.x.U_n'(x)=\sum_{k=0}^{n}(3.\lambda_{n,k}.k).x^k$.

Mais on pouvait aussi re-deriver $U_n''(x)=\sum_{k=2}^{n}\lambda_{n,k}.k.(k-1).x^{k-2}$ *(un terme de plus a disparu à la dérivation)*.

On peut alors faire deux choses : • re-indexer
• multiplier par x^2

On va multiplier par $-x^2$: $-x^2.U_n''(x)=\sum_{k=2}^{n}\lambda_{n,k}.k.(k-1).x^k=\sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}.k.(k-1).x^k$.

De la première à la seconde, ai-je ajouté des termes *($k=2$ est devenu $k=0$)* ? Ils sont nuls : $\lambda_{n,0k}.0.(0-1).x^0+\lambda_{n,1}.1.(1-1).x^1$.

Ayant tout à la fois
$$\boxed{\begin{array}{l} 1.U_n''(x)=\sum_{k=2}^{n}\lambda_{n,k}.k.(k-1).x^{k-2}\\ -x^2.U_n''(x)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}.k.(k-1).x^k\\ n.(n+2).U_n(x)=\sum_{k=0}^{n}n.(n+2).\lambda_{n,k}.X^k\\ 3.x.U_n'(x)=\sum_{k=0}^{n}3.\lambda_{n,k}.k.x^k \end{array}}$$
on peut reporter dans $(1-x^2).U_n''(x)+n.(n+2)U_n(x)=-3.x.U_n'(x)$ et obtenir

$$\sum_{k=0}^{n}k.(k-1).\lambda_{n,k}.x^{k-2}+\sum_{k=0}^{n}(k.(1-k)+n.(n+2)).\lambda_{n,k}.x^k=3.\sum_{k=0}^{n}k.\lambda_{n,k}.x^k$$

Cette question ne figurait pas dans le sujet de l'EPITA qui passait directement de $\forall\theta,\ \sin(\theta).U_n(\cos(\theta))=\sin((n+1).\theta)$ à $\forall x,\ (1-x^2).U_n''(x)-3.x.U_n'(x)+n.(n+2).U_n(x)=0$ puis $\lambda_{n,n-2.k}=\frac{(-1)^k}{2^{2.k}}.\binom{n-k}{k}.\lambda_0$.
Mais vous pouvez demander aux Spé, c'est une démarche usuelle : obtenir une équation différentielle en dérivant deux fois, puis en déduire une relation de récurrence sur les coefficients du développement limité (ou ici du polynôme).

On nous offre ensuite la formule à prouver, profitons en : $\lambda_{n,n-2.k}=\frac{(-1)^k}{2^{2.k}}.\binom{n-k}{k}.\lambda_{n,0}$.
On va faire une récurrence sur k *(n est fixe tout au long de l'exercice)*.

Pour k nul, on doit prouver $\lambda_{n,n}=\frac{(-1)^0}{2^{2.0}}.\binom{n-0}{0}.\lambda_{n,0}$.
Les trois nombres $(-1)^0$, $\binom{n-0}{0}$ et 2^0 valent 1. C'est bien engagé.

On se donne k *(plus petit que n pour ne pas aller au delà des bornes)*, et on suppose $\lambda_{n,n-2.k}=\frac{(-1)^k}{2^{2.k}}.\binom{n-k}{k}.\lambda_{n,0}$.
On veut accéder à $\lambda_{n,n-2.(k+1)}$ c'est à dire $\lambda_{n,n-2.k-2}$.
La formule $\sum_{k=0}^{n}k.(k-1).\lambda_{n,k}.x^{k-2}+\sum_{k=0}^{n}(k.(1-k)+n.(n+2)).\lambda_{n,k}.x^k=3.\sum_{k=0}^{n}k.\lambda_{n,k}.x^k$ doit nous aider à cela.
Je la réécris $\sum_{k=0}^{n}k.(k-1).\lambda_{n,k}.x^{k-2}=\sum_{k=0}^{n}(3.k+k.(k-1)-n.(n+2)).\lambda_{n,k}.x^k$
puis
$$\sum_{k=0}^{n}k.(k-1).\lambda_{n,k}.x^{k-2}=\sum_{k=0}^{n}(k.(k+2)-n.(n+2)).\lambda_{n,k}.x^k$$

Ceux qui, pour prouver $\sum_{k=0}^{n}k.(k-1).\lambda_{n,k}.x^{k-2}+\sum_{k=0}^{n}(k.(1-k)+n.(n+2)).\lambda_{n,k}.x^k=3.\sum_{k=0}^{n}k.\lambda_{n,k}.x^k$ ont d'abord tout fait passer d'un même côté sans chercher à voir d'abord le rapport avec la question précédente ont perdu.
La difficulté vient d'un chemin est moins balisé qu'en Terminale ; c'est à vous d'en saisir les étapes et l'enchainement.

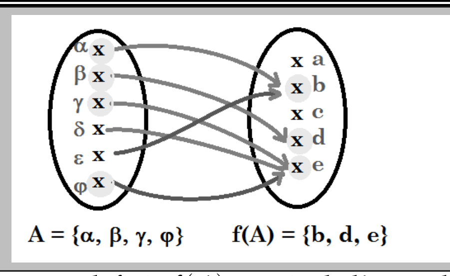
Je l'écris même avec une variable p $\sum_{p=0}^{n}p.(p-1).\lambda_{n,p}.x^{p-2}=\sum_{p=0}^{n}2.$

J'identifie de part et d'autres du signe égale le terme en $x^{n-2.k-2}$.
D'un côté il faut prendre $p = n-2.k$: $(n-2.k).(n-2.k-1).\lambda_{n,n-2.k}.x^{n-2.k-2}$
De l'autre il faut prendre $p = n-2.k-2$: $((n-2.k-2).(n-2.k)-n.(n+2)).\lambda_{n,n-2.k-2}.x^{n-2.k-2}$.
On égalise les deux coefficients : $(n-2.k).(n-2.k-1).\lambda_{n,n-2.k} = ((n-2.k-2).(n-2.k)-n.(n+2)).\lambda_{n,n-2.k-2}$.

V∼3) Déduisez $\lambda_{n,n-2.k} = \dfrac{(-1)^k}{2^{2.k}}.\begin{pmatrix} n-k \\ k \end{pmatrix}.\lambda_{n,0}$. Explicitez U_{10}.

V∼4) Écrivez une procédure Python qui pour n donné retourne la liste des coefficients de U_n (int -> list of int).

◃22▹ Soit f une application de E dans F.
Montrez que f est injective si et seulement si $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$ pour tout couple de parties A et B incluses dans E.
Rappel $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$



Rappelons pour commencer que si A est une partie de l'ensemble de départ on définit $f(A)$, partie de l'ensemble d'arrivée (et même de l'ensemble image).
Pour des ensembles finis : $A = \{a_1, \dots a_n\} \subset E$, on pose $f(A) = \{f(a_1), \dots f(a_n)\}$ et c'est bien une partie de F.
Et pour des ensembles finis ou non $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$.
Un y de F est dans $f(A)$ si et seulement si il s'écrit $f(a)$ pour au moins un a de A.

> On a les deux points de vue :
> tu veux un élément de $f(A)$? Prends un a dans A et calcule $f(a)$.
> Tu veux savoir si un y de F est dans $f(A)$? Regarde si l'équation $f(x) = y$ a des solutions x dans A.

On notera qu'en général $f(A)$ a mins d'éléments que A, justement si f n'est pas injective.

On doit prouver une équivalence « f injective » si et seulement si « $\forall(A, B),\ f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$ ».

On découpe en deux implications.

• On commence par la première implication « f injective » seulement si « $\forall(A, B),\ f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$ ».
On suppose donc f injective (formule $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$, qui est à l'étage des éléments).
On doit alors montrer « pour tout couple de partie $(A,\ B)$... ».
On prend donc A et B quelconques.
On doit montrer une égalité entre deux ensemble : $f(A\cap B)$ et $f(A)\cap f(B)$ (dans F).
On va cette fois découper en deux inclusions : $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$ et $f(A)\cap f(B) \subset f(A)\cap f(B)$.

◦ On prend un élément y dans $f(A\cap B)$. Il s'écrit $y = f(x)$ pour un x de $A\cap B$.
Comme x est dans A, $f(x)$est dans $f(A)$.
Comme x est dans B, $f(x)$est dans $f(B)$.
On reconnaît que y est à la fois dans $f(A)$ et $f(B)$, il est dans $f(A)\cap f(B)$.

On note qu'à ce stade on n'a pas utilisé l'injectivité de f. Ce sera pour l'autre inclusion.

◦ On prend un élément y dans $f(A)\cap f(B)$.
y est dans $f(A)$. Il s'écrit $y = f(a)$ pour un a de A.
y est dans $f(B)$. Il s'écrit $y = f(b)$ pour un b de B.
Mais alors $y = f(a) = f(b)$. Et par injectivité de f mise en hypothèse, on a $a = b$.
y s'écrit donc $f(a)$ pour ce a à la fois dans A et B (c'est à dire dans $A\cap B$).
On reconnaît que y est dans $f(A\cap B)$.

On passe à la seconde implication. On suppose que pour tout couple de parties$(A,\ B)$ on a $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$.

On garde cette hypothèse dans un coin de notre esprit, et on l'utilisera au bon moment, pour un choix convenable de A et B.

On veut prouver que f est injective. On prend donc deux éléments quelconques u et v et on suppose $f(u) = f(v)$ (objectif $u = v$).

Peut on faire un choix judicieux de A et B pour arriver à notre conclusion ?
Prenons comme par hasard $A = \{u\}$ et $B = \{v\}$ (les u et v de nos hypothèses).
Pourquoi eux ? Parce qu'on a $f(A) = \{f(u)\} = \{y\}$, $f(B) = \{f(v)\} = \{y\}$.
On déduit $f(A) \cap f(B) = \{y\}$. Cet ensemble est non vide.
Mais par hypothèse, il est aussi égal à $f(A \cap B)$.
L'ensemble $A \cap B$ ne peut donc pas être nul (sinon , non ?).
On a donc $\{u\} \cap \{v\} \neq \emptyset$ ce qui donne $u = v$ comme attendu.

Il vous semblera sans doutes plus simple de raisonner par l'absurde (ou par contraposée comme indiqué plus loin).
On suppose que f n'est pas injective. Il existe alors deux éléments u et v distincts ayant la même image.
On prend effectivement alors $A = \{u\}$ et $B = \{v\}$.
On a alors $f(A \cap B) = f(\{u\} \cap \{v\}) = f(\emptyset) = \emptyset$ mais aussi $f(A) = f(B) = \{f(u)\}$ et donc $f(A) \cap f(B) = \{f(u)\} \neq f(A \cap B)$.

Résumé de ce qu'on a construit

H	f injective	?	$\forall(A, B),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$	$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$
H	$\forall A, B),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$	?	$\forall(u,\ v),\ f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$	choisir $A = \{u\}$ et $B = \{v\}$
		ou par contraposée		
H	$\exists(u,\ v),\ (f(u) = f(v))\ et\ (u \neq v)$		$\exists(A, B),\ f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$	choisir $A = \{u\}$ et $B = \{v\}$

◁23▷ On définit $f = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} x & si & x\ rationnel \\ \sqrt{2} - x & si & x\ irrationnel \end{array} \right\updownarrow$. Un élève affirme après calcul : $f \circ f = Id$ (pour$x$ rationnel, c'est évident, et pour x irrationnel, c'est $\sqrt{2} - (\sqrt{2} - x)$). Il en déduit que f est bijective *(de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*)*.
Montrez que f n'est pas injective, ni surjective, pourtant.

L'erreur de l'élève : si x est rationnel, on a bien $x \longmapsto x \longmapsto x$.
Mais pour x irrationnel, la première étape est bien $x \longmapsto \sqrt{2} - x$.
Mais la question est ensuite $\sqrt{2} - x$ est il rationnel.
Et la réponse est « ça dépend ».
$\sqrt{2} \longmapsto 0 \longmapsto 0$
$\sqrt{3} \longmapsto \sqrt{2} - \sqrt{3} \longmapsto \sqrt{2} - (\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

En fait on a déjà un défaut d'injectivité : $\begin{array}{ccccc} 0 & \to & 0 & car & rationnel \\ \sqrt{2} & \to & \sqrt{2} - \sqrt{2} & car & irrationnel \end{array}$. Le réel 0 a deux antécédents (au moins).

On a un défaut d'injectivité : $\sqrt{2}$ n'a pas d'antécédent.

En effet, si on écrit $f(x) = \sqrt{2}$, on a deux (im)possibilités :

x rationnel	et $x = \sqrt{2}$	incohérent
x irrationnel	et $\sqrt{2} - x = \sqrt{2}$	incohérent

◁24▷ ♡ Soit f de E dans E. Montrez que f est injective si et seulement si $f \circ f$ est injective.

Sens direct. Si f est injective, alors par composition, $f \circ f$ l'est aussi.

Réciproque. Si f n'est pas injective, il existe a et b avec a différent de b vérifiant $f(a) = f(b)$.
On compose : $f(f(a)) = f(f(b))$. Ceci montre par contre-exemple que $f \circ f$ n'est pas injective non plus.

On peut aussi utiliser $g \circ f$ injective implique f injective dans un cas particulier ici.

◁25▷ Montrez que l'application $n \longmapsto \cos(n + \sqrt{2})$ est injective sur $\mathbb{Q}$. Montrez que $\theta \longmapsto \cos(\theta)$ n'est pas injective sur $\mathbb{Q}$.

On se donne a et b (rationnels) et on suppose $\cos(a + \sqrt{2}) = \cos(b + \sqrt{2})$.
Les cas d'égalité des cosinus donnent $\exists k \in \mathbb{Z},\ a + \sqrt{2} = b + \sqrt{2} + k.\pi$ ou $\exists k \in \mathbb{Z},\ a + \sqrt{2} = -b - \sqrt{2} + k.\pi$.
Le premier cas donne si k est non nul $\pi = \dfrac{a - b}{k} \in \mathbb{Q}$; impossible, la seule solution est $k = 0$, et donc $a = b$.

Le second cas donne $\exists k \in \mathbb{Z},\ a+\sqrt{2} = -b-\sqrt{2}+k.\pi$ soit $a+b = k.\pi - 2.\sqrt{2}$. Que k soit nul ou non, le second membre est irrationnel. C'est donc impossible.

On a éliminé les fausses pistes : $a = b$ est la seule porte de sortie.

Le défaut d'injectivité de cos sur $\mathbb{Q}$ repose sur la parité, avec un contre-exemple tel que $\cos(1) = \cos(-1)$.

◃26▹ L'application $trinome \longmapsto (nombre\ de\ filles,\ nombre\ de\ lunettes)$ est elle injective de l'ensemble des trinômes de MPSI2 vers $\mathbb{N}^2$? Et l'application $trinome \longmapsto (nombre\ de\ filles,\ nombre\ d'eleves\ dont\ le\ nom\ commence\ par\ B)$?

La réponse dépend vraiment des années.

◃27▹ Le produit de deux applications injectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est injective : la preuve

$\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \neq b) \Rightarrow \begin{pmatrix} f(a) & \neq & f(b) \\ & et & \\ g(a) & \neq & g(b) \end{pmatrix} \Rightarrow \big(f(a).g(a) \neq f(b).g(b)\big).$

Le produit de deux applications surjectives de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ est surjective. La preuve :

je prends b dans $\mathbb{R}^+$, alors par surjectivité de f : $\exists a \in \mathbb{R},\ f(a) = \sqrt{b}$ et par surjectivité de g : $\exists a \in \mathbb{R},\ g(a) = \sqrt{b}$.

On multiplie : $f(a).g(a) = \sqrt{b}.\sqrt{b} = b$.

Où sont les erreurs ?

C'est quoi cette idée de multiplier membre à membre des non égalités ?
On a certes $2 \neq 12$ et $18 \neq 3$ mais en multipliant membre à membre...

J'ai encore plus rigolo : $0 \neq \sqrt{2}.\pi$ et $e^{\sqrt{184}} \neq 0$. Multiplions membre à membre...

Sinon, certes ont a $\exists a \in \mathbb{R},\ f(a) = \sqrt{b}$ et $\exists a' \in \mathbb{R},\ g(a') = \sqrt{b}$.
Mais rien ne permet de prendre le même a !

Rappelons que Id et Id sont bijectives de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Mais le produit $x \longmapsto x^2$ n'est ni injectif (deux réels opposés ont la même image)
ni surjectif (aucun réel négatif n'est atteint)

◃28▹

♡ - a - Combien existe-t-il d'applications surjectives de MPSI2 dans $\mathbb{N}$?
- b - Combien existe-t-il d'applications surjectives de MPSI2 dans $\{MPSI2\}$?
- c - Combien existe-t-il d'applications surjectives de MPSI2 dans $\emptyset$?
- d - Combien existe-t-il d'applications surjectives de MPSI2 dans MPSI2 ?
- e - Combien existe-t-il d'applications surjectives de $MPSI2 \cup \{Sucri\}$ dans $MPSI2$?
- f - Combien existe-t-il d'applications surjectives de $\emptyset$ dans $\emptyset$?

- a - Combien existe-t-il d'applications surjectives de MPSI2 dans $\mathbb{N}$?
Aucune. En effet, il y aura au plus 48 éléments distincts de la forme $f(eleve)$. Et $\mathbb{N}$ est infini.
Réponse : 0.

- b - Combien existe-t-il d'applications surjectives de MPSI2 dans $\{MPSI2\}$?
MPSI2 est un ensemble à 48 éléments.
En revanche, $\{MPSI2\}$ est un ensemble à un élément, et cet élément est un ensemble.
En fait $MPSI2 = \{Frida,\ \dots Louis\}$ et $\{MPSI2\} = \{\{Frida, \dots Louis\}\}$.
Il n'y a qu'une application possible d'un ensemble à 48 éléments vers un ensemble à un élément, et elle est constante :
$Frida \longrightarrow MPSI2$
$Leo \longrightarrow MPSI2$ et ainsi de suite, jusqu'à $Louis \longrightarrow MPSI2$.
Et cette application constante est surjective.
Le seul élément de l'ensemble d'arrivée (l'élément $MPSI2$) a au moins un antécédent (et il en a même 48).
Réponse : 1.

- c - Combien existe-t-il d'applications surjectives de MPSI2 dans $\emptyset$?
Il n'y a pas d'application de $MPSI2$ vers l'ensemble vide.
Valentine n'a pas d'image, puisque son image devrait être un élément de l'ensemble vide.
Et Valentine n'est pas la seule. Tout le monde a ce problème.
Réponse : 0.

- d - Combien existe-t-il d'applications surjectives de MPSI2 dans MPSI2 ?
C'est parti. Frida choisit une image dans $MPSI2$. Elle a 48 choix possibles.
Vient alors Léo B. qui doit choisir une image. Il a encore 48 choix ? Non, car si il fait la bêtise de dire $f(LeoB) = f(Frida)$, notre application ne sera pas surjective.

D'accord, ce qui saute aux yeux c'est non injective.
Mais si $Frida$ et $LeoB$ ont pris tous deux la même image, il ne reste que 46 élèves pour atteindre les 47 images qui restent. C'est impossible.

$LeoB$ n'a donc plus que 47 choix.
Et on a 48×47 applications.

A ce stade, $f(Frida) \neq f(LeoB)$ et les deux éléments indiqués dans l'ensemble d'arrivée ont chacun un antécédent.
Et on demande à Violette : « quelle est ton image » (il faut qu'elle en choisisse une, et une seule, car on a dit « application »).
Elle comprend qu'elle ne peut pas prendre comme image $f(Frida)$ ni $f(LeoB)$ car sinon, il resterait 45 élèves pour 46 images.
Son choix porte donc sur 46 possibilités. A ce stade on a $48 \times 47 \times 46'$ applications.

Le choix se restreint : ne pas prendre comme image un élément vers lequel une flèche pointe déjà.
Ceci créerait immédiatement un défaut d'injectivité visible, mais aussi un défaut de surjectivité à la fin.

Bref, une application surjective d'un ensemble fini dans lui même est forcément bijective.

Le k^{iemme} élément n'a donc que $n - k$ choix d'image possible.
Le nombre de choix total est $n.(n-1).(n-2)\dots 1$ (c'est à dire $n!$ et ici 48!).

Réponse 48!.

- e - Combien existe-t-il d'applications surjectives de $MPSI2 \cup \{Sucri\}$ dans $MPSI2$?
L'ensemble de départ a 48 éléments et l'ensemble d'arrivée en a 47. Mais on veut aussi que l'ensemble image ait 47 éléments.
Chaque élément de l'ensemble d'arrivée aura donc un antécédent, sauf un élément qui en aura deux.

En version classe légère (trinôme) : trois élèves A, B et C, plus donc Sucri.

Une application peut être

A	$\longmapsto$	B
B	$\longmapsto$	A
C	$\longmapsto$	C
Sucri	$\longmapsto$	A

ou

A	$\longmapsto$	B
B	$\longmapsto$	A
C	$\longmapsto$	C
Sucri	$\longmapsto$	B

ou

A	$\longmapsto$	A
B	$\longmapsto$	A
C	$\longmapsto$	B
Sucri	$\longmapsto$	C

Comment décrire tous les cas une fois et une seule ?
On choisit qui est l'élément qui va avoir deux antécédents : n choix (et il reste $n-1$ éléments).
On choisit ses deux antécédents : $\begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (deux éléments à choisir dans la classe incluant Sucri).
Il reste $n-1$ éléments au départ et $n-1$ éléments à l'arrivée. Et il faut une correspondance bijective pour ne pas laisser de trou. Cette fois : $(n-1)!$ applications.

On multiplie. Réponse : $n \times \binom{n+1}{2} \times (n-1)!$
Il y a d'autres façons d'arriver à ce $\dfrac{n.(n+1)!}{2}$ (ci dessus pour n égal à 3 : 36 applications, je n'en donnerai pas la liste).

- f - Combien existe-t-il d'applications surjectives de $\emptyset$ dans $\emptyset$?
On prend un élément dans l'ensemble vide : il n'y en a pas.
On choisit une image : il n'y en a pas non plus.
Bref, on n'a rien fait, et on a quand même créé une application.
Tout élément de $\emptyset$ a une image.

Vous trouvez que non ? Alors donnez moi un contre-exemple !

Et tout élément de $\emptyset$ a un antécédent (encore la propriété $\forall x \in \emptyset, \dots$).

Réponse : 1 application.

◁29▷ L'application f associe à un entier naturel n la somme des carrés de ses chiffres en base 10.
f est elle injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? f est elle surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? f est elle croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$?

Elle va certes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, mais elle n'est pas injective : 1 et 10 ont la même image.
Et plus fin : 34 et 50 ont la même image (c'est 25).

Vous voulez atteindre 0 ? Prenez $0 \longmapsto 0$.
Vous voulez atteindre 1 ? Prenez $1 \longmapsto 1$.
Vous voulez atteindre 2 ? Prenez $11 \longmapsto 2$.
Vous voulez atteindre 3 ? Prenez $111 \longmapsto 3$.
Et ainsi de suite, avec ce qu'on appelle un rep-unit (l'unité 1 répétée).

Pour la non croissance, on donne un contre-exemple : 9 est plus petit que 10, mais leurs images sont 81 et 1, dans cet ordre inverse.

◁30▷ Débrouillez vous pour que l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ne soit pas injective de $\mathbb{R}^2$ dans lui même.
Est elle alors surjective ? Si non, déterminez son ensemble image (droite d'équation à préciser).

Débrouillez vous pour que l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aille de $\mathbb{Z}^2$ dans lui même (combien de choix possibles ?).

Débrouillez vous pour que l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aille de $\mathbb{Z}^2$ dans lui même et soit bijective.

L'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ va bien de $\mathbb{R}^2$ dans lui même.
Est il possible que deux éléments différents $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ aient la même image ?

Attention,, l'injectivité, c'est arriver à $x = x'$ et $y = y'$ et pas à $x = y$ comment le pensent certains en ne sachant pas qui sont les éléments de l'ensemble de départ.

La condition « même image » donne $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On peut certes se ruer sur des calculs, avec des inconnues et un paramètre.

Et ne plus savoir alors qui on cherche, mais penser gagner des points juste parce qu'on fait des lignes de calculs.

L'idée est de raisonner avant de calculer, et d'écrire $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 9 \end{pmatrix}$ est inversible, on aboutit (en multipliant à gauche par son inverse) à $\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc à lunicité de l'antécédent.
On ne veut pas.

On va donc imposer « matrice non inversible ».

C'est nécessaire, mais est ce suffisant ?

On annule le déterminant $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Et maintenant, on cherche des défauts d'injectivité. Et on voit que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ont la même image.

Plus généralement, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x-3.t \\ y+t \end{pmatrix}$ *ont la même image quels que soient* x, y *et* t.

L'ensemble image est alors formé de tous les $\begin{pmatrix} x+3.y \\ 3.x+9.y \end{pmatrix}$. Ce sont tous des éléments de la forme $\begin{pmatrix} a \\ 3.a \end{pmatrix}$ (et ce sont même tous ces éléments).
L'ensemble image est donc $\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid a = 3.b\}$.

◃31▹ Soient a et b deux réels positifs ; qui est le plus grand : la moyenne arithmétique de leurs inverses ou l'inverse de leur moyenne arithmétique ?

On doit comparer deux nombres : • la moyenne arithmétique de leurs inverses $A = \dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$

• l'inverse de leur moyenne arithmétique $B = \dfrac{1}{\frac{a+b}{2}}$.

On soustrait : $B - A = \dfrac{2}{a+b} - \dfrac{a+b}{2.a.b} = \dfrac{4.a.b-(a+b)^2}{2.a.b.(a+b)} = \ldots = \dfrac{-(a-b)^2}{2.a.b.(a+b)}$.
Le numérateur est négatif, et le dénominateur positif : l'inverse de la moyenne est plus petit que la moyenne des inverses.

Et on peut le prouver avec des résistances en parallèle. Si si !

◃32▹ Calculez $Arctan\left(\dfrac{1}{7}\right) + 2.Arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)$ (et sa tangente pour commencer ?).

La tangente de cet angle vaut 1 (après calcul comme $\dfrac{\frac{1}{7}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{7}.\frac{1}{3}}$).

C'est bien parti pour être $\dfrac{\pi}{4}$. mais pourquoi pas $\dfrac{5.\pi}{4}$?
L'angle est entre 0 et $Arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2.Arctan(1)$.

Sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{2.\pi}{3}\right]$ un seul angle a pour tangente 1 : $\boxed{Arctan\left(\dfrac{1}{7}\right) + 2.Arctan\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}}$

◃33▹ ♡ t est un réel fixé, θ est un réel de $]-\pi/2,\ \pi/2[$. Montrez : $\dfrac{1+i.\tan(\theta)}{1-i.\tan(\theta)} = e^{2.i.\theta}$.
Déterminez partie réelle et partie imaginaire de $\dfrac{1+i.t}{1-i.t}$ en utilisant la quantité conjuguée. Retrouvez les formules en arc moitié.

On part de

$$\frac{1+i.\tan(\theta)}{1-i.\tan(\theta)} = \frac{1+i.\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1-i.\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{\cos(\theta)+i.\sin(\theta)}{\cos(\theta)-i.\sin(\theta)}$$

en multipliant haut et bas par $\cos(\theta)$.
On utilise les formules de Moivre :

$$\frac{1+i.\tan(\theta)}{1-i.\tan(\theta)} = \frac{e^{i.\theta}}{e^{-i.\theta}} = e^{i.\theta}.(e^{-i.\theta})^{-1} = e^{i.\theta}.e^{i.\theta} = e^{2.i.\theta}$$

En posant $t = \tan(\theta)$ on a donc $\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = \cos(2.\theta) + i.\sin(2.\theta)$.
On efface les i du dénominateur par quantité conjuguée dans le premier membre :

$$\cos(2.\theta) + i.\sin(2.\theta) = \frac{1+i.t}{1-i.t} = \frac{(1+i.t).(1+i.t)}{(1-i.t).(1+i.t)} = \frac{1-t^2+2.i.t}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i.\frac{2.t}{1+t^2}$$

Il ne reste plus qu'à identifier partie réelle et partie imaginaire.

◁ 34 ▷ ♣ Un parallélépipède rectangle pour volume . Sa surface latérale vaut $96cm^2$. La somme des longueurs de ses arêtes vaut $48cm$. Calculez ses dimensions.

Aurait on trop peu d'informations avec les formules de Viète ?
On note a, b et c les trois mesures.
On traduit les hypothèses : $a.b.c = P$ (inconnu)
$a.b + a.c + b.c = 48$ (c'est $96/2$)
$a + b + c = 12$ (c'est $48/4$)
Le polynôme s'écrit $X^3 - 12.X^2 + 48.X - P$.
Et il a trois racines réelles.
C'est donc que la fonction polynôme n'est pas monotone. Et coupe même trois fois l'axe.
Or, si on dérive, on trouve $3.X^2 - 24.X + 48$. C'est à dire$3.(X-4)^2$.
La dérivée refuse de changer de signe !
La seule solution pour avoir trois racines réelles est « on a une racine triple ».
Et cette racine, c'est 4.

Le seul parallélépipède possible est un cube. De côté 4 avec $P = 64$.

◁ 35 ▷ Résolvez $X^4 + 12.X = 5$ d'inconnue X sachant qu'il y a deux solutions dont le produit vaut -1.

Nommons a, b, c et $\dfrac{-1}{a}$ les quatre solutions.

Les formules de Viète nous disent alors $a - \dfrac{1}{a} + b + c = 0$, jusqu'à $-b.c = -5$.

On sait aussi qu'on peut factoriser $\Big(X^2 - \Big(a - \dfrac{1}{a}\Big).X + 1\Big).\Big(X^2 - (b+c).X + b.c\Big)$.

Mais on peut espérer trouver a en écrivant $a^4 + 12.a = 5$ et aussi $\dfrac{1}{a^4} - \dfrac{12}{a} = 5$.
Deux équations en a, on peut reporter l'une dans l'autre ou bien bricoler (à coups de conditions nécessaires déjà, donc par analyse).
On a donc $a^4 + 12.a - 5 = 0$ et $1 - 12.a^3 = 5.a^4$ (j'ai multiplié la seconde par a^4).
On reporte la première dans la seconde : $5.(5 - 12.a) = 1 - 12.a^3$.
a est maintenant racine d'une équation de degré 3 seulement.$12.a^3 - 60.a + 24 = 0$.
On la multiplie par a, elle reste valable : $12.a^4 - 60.a^2 + 24.a = 0$.
On la compare de nouveau avec $a^4 = -12.a + 5$ et on trouve : $-144.a + 60 = 60.a^2 - 24.a$ (et c'est $12.a^4$).
Cette dernière équation se simplifie énormément : $-1 + \sqrt{2}$ et $-1 - \sqrt{2}$.

On tient a et $\dfrac{-1}{a}$. On vérifie que le produit$(-1 + \sqrt{2}).(-1 - \sqrt{2})$ vaut bien -1.

Et on jette un coup d'oeil à l'équation initiale : $(-1 + \sqrt{2})^4 + 12.(-1 + \sqrt{2}) = \ldots = \ldots = \ldots = 5$.

Il faut quand même trouver les deux autres racines.
Mais inutile de poser la division.
On a écrit les formules de Viète : $(-1 + \sqrt{2}) + (-1 - \sqrt{2}) + b + c = 0$ et $(-1 + \sqrt{2}) \times (-1 - \sqrt{2}) \times b \times c = -5$.
$b + c$ vaut 2 et $b.c$ vaut 5.
Les deux racines qui manquent sont les racines de $X^2 - 2.X + 5$. Elles valent $1 + 2.i$ et $1 - 2.i$.

Allez, les racines $\boxed{S_x = \{-1 - \sqrt{2},\ -1 + \sqrt{2},\ 1 + 2.i,\ 1 - 2.i\}}$

◁ 36 ▷ Sachant $a + b + c = 1$, $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ et $a^3 + b^3 + c^3 = 3$ calculez $a^4 + b^4 + c^4$ (mais déjà aussi$a.b + a.c + b.c$ et $a.b.c$).

On imagine l'équation $X^3 - S.X^2 + D.X - P$ de racines a, b et c.
Les formules de Viète donnent $S = 1$.
Le cours donne $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2.D$ donc $D = \dfrac{-1}{2}$.

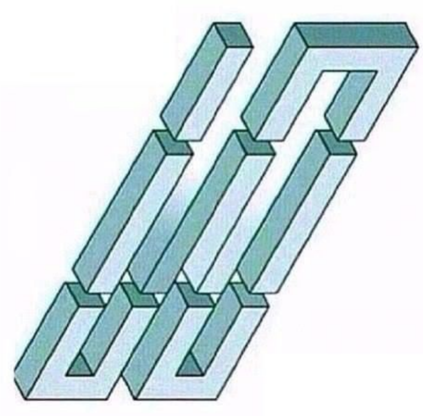
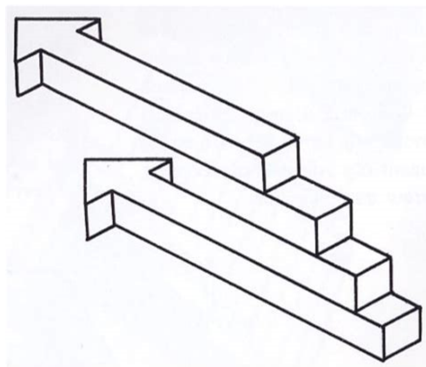
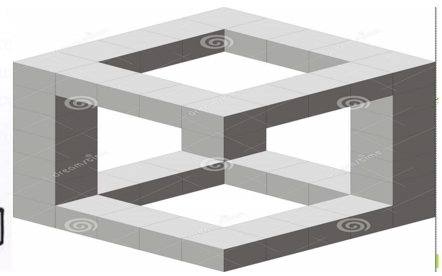
On reporte a, b et c dans l'équation et on somme
$$\begin{array}{lllll} a^3 & -a^2 & -\frac{a}{2} & -p & = 0 \\ b^3 & -b^2 & -\frac{b}{2} & -p & = 0 \\ c^3 & -c^2 & -\frac{c}{2} & -p & = 0 \\ 3 & -2 & -\frac{1}{2} & -3.p & = 0 \end{array}$$

On trouve $p = \dfrac{1}{6}$.

On ne sait pas résoudre $X^3 - X^2 - \dfrac{X}{2} - \dfrac{1}{6} = 0$. Mais pas grave.

On recommence en multipliant les lignes plus haut par a, b et c : $\begin{array}{ccccc} a^4 & -a^3 & -\frac{a^2}{2} & -\frac{a}{6} & =0 \\ b^4 & -b^3 & -\frac{b^2}{2} & -\frac{b}{6} & =0 \\ c^4 & -c^3 & -\frac{c^2}{2} & -\frac{c}{6} & =0 \end{array}$.

On extrait : $a^4 + b^4 + c^4 = \dfrac{25}{6}$.
L'exercice se généralise.
Et sinon, on le trouve « à l'américaine » sur https ://www.youtube.com/watch ?v=4FNCIYD8HdA.

◁ 37 ▷ ♡ L'équation $x^2 + b.x + c = 0$ d'inconnue x admet pour racines α et β. Donnez *(sous forme développée)* l'équation polynomiale de racines α^2 et β^2.

L'équation $x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0$ d'inconnue x admet pour racines α, β et γ. Donnez l'équation polynomiale de racines α^2 et β^2 et γ^2.
Donnez l'équation polynomiale de racines $\alpha.\beta$, $\alpha.\gamma$ et $\beta.\gamma$.

On sait $\alpha + \beta = -b$ et $\alpha.\beta = c$.

L'équation de racines α^2 et β^2 est $x^2 - S.x + P = 0$ avec $S = \alpha^2 + \beta^2$ et $P = \alpha^2.\beta^2$.
Classiquement : $S = (\alpha + \beta)^2 - 2.\alpha.\beta = b^2 - 2.c$.

L'équation cherchée est donc $\boxed{x^2 - (b^2 - 2.c).x + c^2 = 0}$

Il faut savoir utiliser les formules de Viète dans les deux sens.

On recommence avec $\alpha + \beta + \gamma = -b$, $\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma = c$ et $\alpha.\beta.\gamma = -d$.
Notre mission est de calculer $S = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$
$D = \alpha^2.\beta^2 + \alpha^2.\gamma^2 + \beta^2.\gamma^2$
et $P = \alpha^2.\beta^2.\gamma^2$
Deux ne posent pas de problème : $S = (-b)^2 - 2.c$ et $P = (-d)^2$.
Pour D, on va développer $c^2 = (\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma)^2$.
On trouve la somme cherchée $\alpha^2.\beta^2 + \alpha^2.\gamma^2 + \beta^2.\gamma^2$ et un terme « en trop » :
$2.(\alpha.\beta.\alpha.\gamma + \alpha.\beta.\beta.\gamma + \alpha.\gamma.\beta.\gamma)$ qui n'est autre que $2.\alpha.\beta.\gamma.(\alpha + \beta + \gamma)$.
On a donc $D = c^2 - 2.(-b).(-d)$.

On n'a plus qu'à reporter dans le polynôme.

Même type de travail pour le dernier.

◁ 38 ▷ ♡ Sachant $a + b + c = 4$, $a^2 + b^2 + c^2 = 20$ et $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{6}$ calculez $a.b + a.c + b.c$ et $a.b.c$.
Donnez le polynôme de racines a, b et c. Calculez a, b et c.

Les relations $a + b + c = 4$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 20$ donnent $4^2 - 2.(a.b + a.c + b.c) = 20$, d'où $a.b + a.c + b.c = 2$.

Les relations $a.b + a.c + b.c = -2$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6}$ donnent $\frac{-2}{a.b.c} = \frac{1}{6}$ puis $a.b.c = -12$.

Les formules de Viète offrent :

$$(X-a).(X-b).(X-c) = X^3 - 4.X^2 - 2.X + 12$$

On résout l'équation $x^3 - 4.x^2 - 2.x + 12 = 0$ d'inconnue réelle (ou complexe x).

Une racine évidente ? 2 car $2^3 + 12 = 20 = 4.4 + 2.2$.
On cherche les deux autres racines, de somme 2 et de produit -6.
On résout donc $x^2 - 2.x - 6 = 0$.
On trouve $1+\sqrt{7}$ et $1-\sqrt{7}$.

On peut vérifier : $2 + (1+\sqrt{7}) + (1-\sqrt{7}) = 4$
$4 + (1+\sqrt{7})^2 + (1-\sqrt{7})^2 = 4 + 1 + 7 + 1 + 7 = 20$
$\frac{1}{2} + \frac{1}{1+\sqrt{7}} + \frac{1}{1-\sqrt{7}} = \frac{(1+\sqrt{7}).(1-\sqrt{7}) + 2.(1-\sqrt{7}) + 2.(1+\sqrt{7})}{2.(1+\sqrt{7}).(1-\sqrt{7})} = \frac{-6+4}{1.(-6)}$

$$S = \left\{ \begin{array}{lll} (2, 1+\sqrt{7}, 1-\sqrt{7}), & (1+\sqrt{7}, 2, 1-\sqrt{7}), & (1+\sqrt{7}, 1-\sqrt{7}, 2), \\ (2, 1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}), & (1-\sqrt{7}, 2, 1+\sqrt{7}), & (1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}, 2), \end{array} \right\}$$

six triplets solutions.

◁39▷

♣ On va prouver que i (de carré -1) est en fait un réel. Considérons l'équation $x = e^{x.\pi/2}$.
le complexe i en est évidemment racine.
Mais si x est racine de $x = e^{x.\pi/2}$, on a donc $x = e^{e^{x.\pi.2}.\pi/2}$ puis $x = e^{e^{e^{x.\pi/2}.\pi.2}.\pi/2}$ et recommencer.
On va donc poser $a = e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\cdots}}}}}$ avec une infinité de termes. Sachant $\infty = \infty + 1$, a est solution de l'équation.
On identifie : $a = i$. Et i se construit donc avec uniquement des réels...

Première objection : il se peut qu'il y ait une autre solution (réelle) à l'équation $x = e^{x.\pi/2}$, et que notre nombre a soit celle ci.

Il se peut que a n'existe pas.
a est la limite (si elle existe) de la suite $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = e^{u_n.\pi/2}$. Et si cette suite diverge, ça n'a pas de sens de nommer a.

D'ailleurs en mettant ensemble les deux idées : $\infty = e^{\infty.\pi/2}$ donc $a = e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\frac{\pi}{2}.e^{\cdots}}}}}} = +\infty$.

◁40▷

Résolvez : $\left\{ \begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & 3 \\ a & + & b & = & 2 \end{array} \right|$ d'inconnues a et b dans $\mathbb{R}$.

Résolvez : $\left\{ \begin{array}{ccccc} 2^a & + & 2^b & = & 2^3 \\ a & + & b & = & 2 \end{array} \right|$ d'inconnues a et b dans $\mathbb{R}$.

Pour le premier *(de type classique)*, on raisonne par équivalences avec les formules de Viète :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & 3 \\ a & + & b & = & 2 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & 3 \\ (a & + & b)^2 & = & 4 \\ a & + & b & = & 2 \end{array} \right|$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & 3 \\ a & + & b & = & 2 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} a^2 & + & b^2 & & = & 3 \\ a^2 & + & b^2 & +2.a.b & = & 4 \\ a & + & b & & = & 2 \end{array} \right|$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & 3 \\ a & + & b & = & 2 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & 3 \\ a & \times & b & = & 1/2 \\ a & + & b & = & 2 \end{array} \right|$$

a et b sont les deux racines de $X^2 - 2.X + \frac{1}{2}$.

On trouve $\boxed{S_{(a,b)} = \left\{ \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}}$ *(deux couples de solutions)*.

L'autre système fera appel à des substitutions

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2^a & + & 2^b & = & 2^3 \\ a & + & b & = & 2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 2^a & + & 2^{2-a} & = & 8 \\ a & + & b & = & 2 \end{array}\right|$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2^a & + & 2^b & = & 2^3 \\ a & + & b & = & 2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} & & p & = & 2^a \\ p & + & \frac{4}{p} & = & 8 \\ a & + & b & = & 2 \end{array}\right|$$

On résout l'équation du milieu : $p^2 - 8.p + 4 = 0$, et on trouve deux solutions : $4 - \sqrt{12}$ et $4 + \sqrt{12}$.
Ce sont deux nombres positifs dont on peut prendre le logarithme de base 2, et on trouve a puis b *(avec des rôles symétriques quand même mine de rien)* :

$$\boxed{S_{(a,b)} = \left\{ \left(\frac{\ln(4-\sqrt{12})}{\ln(2)},\ 2 - \frac{\ln(4-\sqrt{12})}{\ln(2)}\right),\ \left(\frac{\ln(4+\sqrt{12})}{\ln(2)},\ 2 - \frac{\ln(4+\sqrt{12})}{\ln(2)}\right) \right\}}$$

Remarque : *On notera que les rôles sont bien symétriques, puisque* $2 - \frac{\ln(4-\sqrt{12})}{\ln(2)} = \frac{\ln(4+\sqrt{12})}{\ln(2)}$.
En effet, $\frac{\ln(4-\sqrt{12})}{\ln(2)} + \frac{\ln(4+\sqrt{12})}{\ln(2)} = \frac{\ln((4-\sqrt{12}).(4+\sqrt{12}))}{\ln(2)} = \frac{\ln(4)}{\ln(2)} = 2$.

◃41▹ On raisonne avec les entiers modulo 13. Donnez la liste des opposés et des inverses, et des carrés.

entier	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
opposé													
inverse													
carré													

entier	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
opposé	0	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
inverse		1	7	9	10	8	11	2	5	3	4	6	12
carré	0	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1

On note que 8 est à la fois l'opposé de 5 ($8 + 5 = 13 = 0$) et son inverse ($5 \times 8 = 40 = 1$).

Bonus qui servira dans cet exercice : liste de multiples de 13 : 0, 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130.

Résolvez les équations et systèmes suivants :

$2.x + 1 = 4$	$x^2 + 6.x = 0$	$x^2 + 6.x = 7$	$\left\{\begin{array}{ccc} x & +7.y & = 0 \\ 3.x & +5.y & = 0 \end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{ccc} x & +2.y & = 5 \\ 3.x & +5.y & = 2 \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{ccc} x & +7.y & = 5 \\ 3.x & +5.y & = 3 \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{ccc} 4.x & +7.y & = 5 \\ x & +5.y & = 2 \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{ccc} x & +y & = 5 \\ x^2 & +y^2 & = 2 \end{array}\right.$

$2.x + 1 = 4$	$x^2 + 6.x = 0$	$x^2 + 6.x = 7$	$\left\{\begin{array}{ccc} x & +7.y & = 0 \\ 3.x & +5.y & = 0 \end{array}\right.$
8	0 et 7	1 et 6	(0, 0)
$\left\{\begin{array}{ccc} x & +2.y & = 5 \\ 3.x & +5.y & = 2 \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{ccc} x & +7.y & = 5 \\ 3.x & +5.y & = 3 \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{ccc} 4.x & +7.y & = 5 \\ x & +5.y & = 2 \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{ccc} x & +y & = 5 \\ x^2 & +y^2 & = 2 \end{array}\right.$
(5, 0)	(3, 4)	pas de solution	

On commence simple : $2.x + 1 = 4 \Leftrightarrow 2.x = 3 \Leftrightarrow 7.2.x = 7.3 \Leftrightarrow x = 8$.

Un corps est intègre : $x^2 + 6.x = 0 \Leftrightarrow x.(x+6) = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ *ou* $x + 6 = 0)$.

$x^2 + 6.x = 7 \Leftrightarrow (x+3)^2 - 9 = 7 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 3 \Leftrightarrow (x+3)^2 - 4^2 = 0 \Leftrightarrow (x+3+4).(X+3-4) = 0$
Et on a deux solutions : $x = -7$ ou $x = 1$.
On pouvait aussi dire qu'on avait une racine évidente : 1. Il suffisait de trouver l'autre par la somme des racines.
Sinon, on calculait : $\Delta = 6^2 - 4.(-7) = 10 + 2 = 12$. C'est un carré parfait : $12 = 5^2$.
On a donc deux racines : $(-6+5).2^{-1} = -1.7 = 6$ et $(-6-5).2^{-1} = 2.7 = 1$.

Le système $\left\{\begin{array}{ccc} x & +7.y & = & 0 \\ 3.x & +5.y & = & 0 \end{array}\right|$ n'aura qu'une solution. Et on la devine tout de suite.
On peut aussi combiner $10.(L1) + 1.(L2)$. On a ainsi $13.x + 75.y = 0$ soit $10.y = 0$.
y est nul et x l'est à son tour.

Par substitutions : $\left\{\begin{array}{cccc} x & +2.y & = & 5 \\ 3.x & +5.y & = & 2 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} x & = 11.y & + & 5 \\ 3.x & +5.y & = & 2 \end{array}\right|$.
La seconde équation donne alors $(33+5).y + 15 = 2$ c'est à dire $12.y = 0$. y vaut 0 et on reporte pour x.

Pour $\left\{\begin{array}{cccc} x & +7.y & = & 5 \\ 3.x & +5.y & = & 3 \end{array}\right|$ on peut encore substituer ou combiner.
Encore avec $10.(L1) + (L2)$ j'élmine x et récupère y.
On peut aussi écrire $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Le cours de Terminale donne l'inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sous la forme $(a.d - b.c)^{-1}.\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
On a donc
$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = (5-21)^{-1}.\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = (5-21)^{-1}.\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = 10^{-1}.\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 4.\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Finalement : $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et on vérifie : $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 39 \\ 26 & 53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\left\{\begin{array}{cccc} 4.x & +7.y & = & 5 \\ x & +5.y & = & 2 \end{array}\right|$ est un piège.
Quand on reporte $x = 2 + 8.y$ dans la première, on obtient $39.y + 8 = 5$ ce qui est impossible.
Il n'y a pas de solution.
Matriciellement, $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ a un déterminant nul. Elle n'est pas inversible.
D'ailleurs, si on multiplie la seconde équation par 4, on obtient $4.x + 20.y = 8$ c'est à dire $4.x + 7/.y = 8$. C'est impossible.

$\left\{\begin{array}{cccc} x & +y & = & 5 \\ x^2 & +y^2 & = & 2 \end{array}\right|$ donne $\left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & & = & 5 \\ x^2 & +y^2 & +2.x.y & = & 25 \\ x^2 & +y^2 & & = & 2 \end{array}\right|$ puis $\left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & & = & 5 \\ x^2 & +y^2 & +2.x.y & = & 12 \\ x^2 & +y^2 & & = & 2 \end{array}\right|$ et même $\left\{\begin{array}{ccc} x & +y & \\ & & 2.x.y \\ x^2 & +y^2 & \end{array}\right.$
On tient la somme et le produit : x et y sont les deux racines de $X^2 - 5.X + 5$.

> On l'avait aussi en reportant $y = 5 - x$ dans la seconde : $x^2 + (5-x)^2 = 2$ devient $2.x^2 - 10.x + 25 = 2$ puis $2.x^2 - 10.x + 23 = 0$ et même $2.x^2 - 10.x + 10 = 0$.
> Vous voyez la simplificaton par 2 ?

On écrit $X^2 - 5.X + 5 = X^2 + 8.X + 5 = X^2 + 8.X + 18 = (X+4)^2 + 2 = (X+4)^2 - 11$.
Mais 11 n'est pas un carré parfait.
Il n'y aura pas de solution.

L'équation $x^2 + 7.x =$  a une racine double. Retrouvez la ainsi que la tache.

On note a le coefficient : $x^2 + 7.x + a = 0$.
Le discriminant vaut $49 - 4.a$ c'est à dire $10 - 4.a$.
Il est nul pour $4.a = 10$. On multiplie par 10 : $a = 9$.

On peut aussi dire que a est le produit des racines, et -7 leur somme.
Mais si la somme vaut 6 (oui, c'est -7), et que la racine est double, c'est qu'elle vaut 3.
Et le produit 3.3 vaut bien 9.

On pouvait aussi mettre sous forme canonique le polynôme : $x^2 + 7.x + a = x^2 - 6.x + a = (x-3)^2 - 9 + a$.
On retrouve $a = 9$ pour qu'il n'y ait qu'une racine double.

Montrez que le système $\left\{\begin{array}{cccc} 6.x & +2.y & = & 5 \\ 5.x & +6.y & = & 2 \end{array}\right|$ a plusieurs solutions (combien ?).

C'est étrange. On a deux équations dit l'élève.
Non, on n'en a qu'une.

Multipliez la première équation par 3, et vous avez la seconde : $6 \times 3 = 18 = 5$, $2 \times 3 = 6$ et $5 \times 3 = 15 = 2$.

On a donc juste $6.x + 2.y = 5$.
Pour chaque x on a un y : $y = (5 - 6.x).2^{-1} = (5 + 7.x).7 = 35 + 49.x = 9 + 10.x$.
On a donc treize solutions.

Ajustez l'étoile pour que $\left\{\begin{array}{ccc} 5.x & +y & = & \star \\ x & +8.y & = & 2 \end{array}\right|$ ait plusieurs solutions.

Il faut là encore que les deux équations soient la même (ou plutôt soient proportionnelles).
On passe de la seconde à la première en multipliant par 5 : x donne $5.x$, $8.y$ donne $39.y$ et c'est bien y.
On va donc demander $\star = 5.2 = 10$.

$x^3 + 10.x^2 + 4.x + 11 = 0$ a pour racines a, b et c. Calculez $a^2 + b^2 + c^2$ puis $a^3 + b^3 + c^3$.
Qui est alors l'équation (à coefficients entiers) dont les racines sont a^{-1}, b^{-1} et c^{-1}.

Les formules de Viète sont encore valables.
$a + b + c = -10 = 3$, $a.b + a.c + b.c = 4$ et $a.b.c = -11 = 2$.

Classiquement : $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2.(a.b + a.c + b.c) = 1$.

Ensuite : $a^3 = -10.a^2 - 4.a - 11$. On fait de même pour b et c.
On some et on utilise les résultats précédents.

Le polynôme de racines « les inverses » est juste à renverser : $11.X^3 + 4.X^2 + 10.X + 1$.

◁42▷ ♡♣ Le polynôme $X^n - n.X^{n-1} + \ldots + (-1)^n$ admet n racines réelles positives. Trouvez les.
A priori, il manque plein de coefficients, donc on ne peut pas conclure. Mais rappelez l'inégalité de convexité $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + \ldots a_n}{n}$ et indiquez quand il y a égalité.

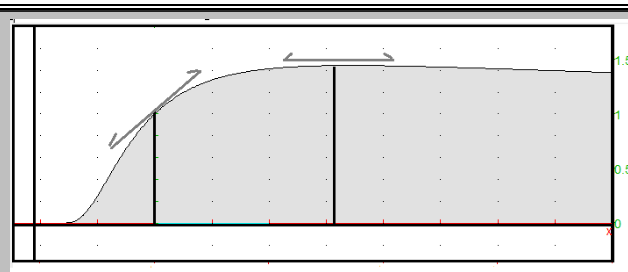
Tout va très vite : on note a_1 à a_n les racines.
Les formules de Viète nous donnent la somme des racines : $a_1 + \ldots + a_n = n$.
Et leur produit : $a_1 \ldots a_n = (-1)^n.(-1)^n$.

On passe à la racine n^{ieme} : $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = 1 = \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$.
Les réels positifs sont tels que leur moyenne géométrique est égale à leur moyenne arithmétique.
Or, on connaît déjà bien $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ issue d'une inégalité de convexité (en fait de concavité du logarithme).
Et comme le logarithme est strictement concave, la seule possibilité pour qu'il y ait égalité est que les $a_k$soient tous égaux (sinon, dans la formule, il y a une position strictement au dessus d'une corde).
L'égalité des moyennes force donc la main : tous les $a_i$sont égaux entre eux.

Comme de plus leur somme vaut n, ils valent tous 1.
Et le polynôme est $\boxed{(X-1)^n}$ dont les coefficients sont des binomiaux, comme ce n et ce $(-1)^n$.

Pouvez vous confirmer que $x \longmapsto x^{1/x}$ admet bien un maximum en $x = e$?

En utilisant le module `random`, simulez un dé dont les six faces ont pour valeur [1, 1, 3, 5, 5, 10].
Simulez l'expérience : lancer ce dé jusqu'à ce que la somme des valeurs obtenues dépasse 100.



◁43▷

Pour ce qui est du maximum, on sait que $x \longmapsto x^{1/x}$a le même sens de variation que son logarithme (composition par exp et ln).
On va donc juste dériver $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. On trouve $x \longmapsto \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$.
La dérivée s'annule et change de signe en $x = e$. On confirme.

Pour les très mauvais élèves : $x \longmapsto x^{1/x}$ *ne se dérive pas facilement.*
Pour les élèves normaux : $x \longmapsto x^{1/x}$ *se dérive en passant au logarithme.*
Pour les élèves efficaces : pour le sens de variation de $x \longmapsto Arctan(u(x))$ *ou* $x \longmapsto e^{u(x)}$*, ou* $x \longmapsto \ln(u(x))$ *: inutile de dériver cette chose, dites juste que cette chose a le même sens de variations que u et donc dérivez juste u.*

J'adore simuler.

```
from random import randrange
L = [1, 1, 3, 5, 5, 10]
```

```
def lancer() :
....return(L[randrange(6)])
```

Ou même `return(choice(L))`.

```
def jusquacent() :
....S, n = 0, 0
....while S < 100 :
.......S += lancer()
.......n += 1
....return(n)
```

◁44▷ ♡ Sachant que 4 et -3 sont solutions, résolvez : $x^4 - 8.x^3 - 3.x^2 + 82.x - 24 = 0$ d'inconnue complexe x.

On factorise par $(x-4)$ puisque 4 est racine $x^4 - 8.x^3 - 3.x^2 + 82.x - 24 = (x-4).(x^3 - 4.x^2 - 19.x + 6.$
On recommence avec $(x+3)$: $x^4 - 8.x^3 - 3.x^2 + 82.x - 24 = (x-4).(x+3).(x^2 - 7.x + 2)$

Par intégrité[2], on a quatre solutions :

$$\boxed{S_x = \left\{4,\ -3,\ \frac{7-\sqrt{41}}{2},\ \frac{7+\sqrt{41}}{2}\right\}}$$

◁45▷ ♡ Sachant $\cos(a) = \dfrac{3}{5}$, $\cos(b) = \dfrac{20}{29}$ et $\cos(c) = \dfrac{7}{25}$, combien de valeurs différentes peut avoir $\cos(a+b+c)$?

On peut développer en deux étapes :
$\cos(a+b+c) = \cos(a).\cos(b).\cos(c) - \sin(a).\sin(b).\cos(c) - \sin(a).\cos(b).\sin(c) - \cos(a).\sin(b).\sin(c)$.
Les cosinus sont connus.
Les sinus aussi. Aux signes près. $|\sin| = \sqrt{1-\cos^2}$.
On a huit choix de signes pour les sinus.

$\sin(a) = 4/5$	$\sin(b) = 21/29$	$\sin(c) = 24/25$
$\sin(a) = 4/5$	$\sin(b) = 21/29$	$\sin(c) = -24/25$
$\sin(a) = 4/5$	$\sin(b) = -21/29$	$\sin(c) = 24/25$
$\sin(a) = 4/5$	$\sin(b) = -21/29$	$\sin(c) = -24/25$
$\sin(a) = -4/5$	$\sin(b) = 21/29$	$\sin(c) = 24/25$
$\sin(a) = -4/5$	$\sin(b) = 21/29$	$\sin(c) = -24/25$
$\sin(a) = -4/5$	$\sin(b) = -21/29$	$\sin(c) = 24/25$
$\sin(a) = -4/5$	$\sin(b) = -21/29$	$\sin(c) = -24/25$

Mais en regroupant les produits, on a quatre valeurs possibles pour $\cos(a+b+c)$.

◁46▷ A partir de quelle valeur de n l'entier $n!$ est il divisible par 2021 ?
Pour quelles valeur de n l'entier $\dfrac{(2.n)!}{n!}$ est il divisible par 2021 ?

On peut écrire $n \geqslant 2021 \Rightarrow 2021$ *divise* $n!$.
Mais la chose a lieu avant. En effet, $2021 = 43 \times 47$.
Il faut et il suffit qu'il y ait un facteur 43 et un facteur 47 dans le produit.
C'est vrai si et seulement si (équivalence) n dépasse 47.
$(n \geqslant 47) \Leftrightarrow (2021 \mid n!)$.

La notation pour « a divise b » est « a | b.

2. « un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul »

La quantification est $\exists k \in \mathbb{Z},\ b = k.a$.
Et si vous écrivez juste $b = k.a$ sans avoir quantifié k, c'est que vous n'avez jamais fait de maths... Ce n'est pas grave, on est là pour ça...

On veut ensuite que le produit $(n+1).(n+2)\dots(2.n)$ contienne 43 et 47 ou même un de leurs multiples.
A compléter.

◁47▷ Posez ces opérations, sachant qu'on travaille en base 8 :
$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 5 \\ + & 4 & 3 & 7 \\ + & 1 & 2 & 1 \\ + & 6 & 5 & 0 \\ \hline = & & ? & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & 2 & 5 \\ \times & & & & 7 & 2 & 1 \\ \hline + & & & & & & * \\ + & & & & & * & * \\ \hline = & & & ? & & & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} & 7 & 4 & 6 & 5 \\ - & 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline = & & ? & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & {}^1 & {}^1 & {}^1 & \\ & & 1 & 2 & 5 \\ + & & 4 & 3 & 7 \\ + & & 1 & 2 & 1 \\ + & & 6 & 5 & 0 \\ \hline & 1 & 5 & 5 & 5 \end{array} \quad \text{et aussi} \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & 2 & 5 \\ \times & & & & 7 & 2 & 1 \\ \hline & & & & 1 & 2 & 5 \\ + & & & 2 & 5 & 2 & * \\ + & 1 & 1 & 2 & 3 & * & * \\ \hline = & 1 & 1 & 5 & 1 & 4 & 5 \end{array} \quad \text{car} \quad \begin{array}{ccccc} & & {}^2 & {}^4 & \\ & & 1 & 2 & 5 \\ \times & & & & 7 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Passons à la soustraction.

Tout commence bien au début : $\begin{array}{ccccc} & 7 & 4 & 6 & 5 \\ - & 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline = & & & 5 & 1 \end{array}$

Mais tout à coup : $4 - 6$ n'est pas possible. Mais ce qui est possible, c'est $8 + 4 - 6$. On va piquer une huitaine au dessus.

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 8{+}4 & 6 & 5 \\ - & 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline = & & & 5 & 1 \end{array} \quad \text{c'est bon, on peut continuer :} \quad \begin{array}{ccccc} & 6 & 8{+}4 & 6 & 5 \\ - & 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline = & 4 & 6 & 5 & 1 \end{array}$$

Et on peut vérifier : $\begin{array}{ccccc} & {}^1 & & & \\ & 4 & 6 & 5 & 1 \\ + & 2 & 6 & 1 & 4 \\ \hline = & 7 & 4 & 6 & 5 \end{array}$

◁48▷ α est un réel fixé. Résolvez l'équation $x^2 - (e^\alpha + e^{-\alpha}).x + 1 = 0$ d'inconnue complexe x.

La somme vaut $e^\alpha + e^{-\alpha}$ et le produit vaut 1 ? les deux racines sont e^α et $e^{-\alpha}$.
Comme pour $e^{i.\theta}$ et $e^{-i.\theta}$quand l'équation est $x^2 - 2.x.\cos(\theta) + 1 = 0$.

◁49▷ ♣ Ce jeu s'appelle Jump. Vous pouvez en deviner par vous même la règle si je vous dis « démarche du cavalier aux échecs » :

	.	1	.	
.	11	⊠	7	.
5	⊠	15	⊠	13
.	17	⊠	3	.
	.	9	.	

		5	20		
	1	.	13	.	
17	.	⊠	⊠	19	.
.	9	⊠	⊠	.	7
	.	3	.	11	
		.	15		

		17	12		
		.	.		
1	.	.	.	.	6
14	.	.	.	.	19
		.	20		
		8	3		

			7	14
1		11	⊠	3
	⊠		13	
5		9		

		1		11
14	5		⊠	
9	⊠	3		7
	13			

1	10		36	7	
22					
				13	
34				28	19
	16	25			
	31	4			

	6	1	12	
18	11	⊠	7	2
5	⊠	15	⊠	13
10	17	⊠	3	8
	4	9	14	

		5	20		
	1	18	13	6	
17	4	⊠	⊠	19	12
2	9	⊠	⊠	14	7
	16	3	8	11	
		10	15		

		17	12		
		10	5		
1	16	13	18	11	6
14	9	2	7	4	19
		15	20		
		8	3		

		2	7	14
1	6	11	⊠	3
10	⊠	4	13	8
5	12	9		

		1	6	11
14	5	10	⊠	2
9	⊠	3	12	7
4	13	8		

1	10	21	36	7	12
22	33	8	11	20	27
9	2	35	26	13	6
34	23	32	17	28	19
3	16	25	30	5	14
24	31	4	15	18	29

Le premier est facile, on n'a pas le choix pour aller de 1 à 3 et ainsi de suite.
De même pour les suivants directs.
Mais pour le dernier, je vous recommande de commncer par les coins.

◁50▷ On sait : $\cos(\theta) = \frac{2}{5}$. Calculez $\cos(2.\theta)$ et $\cos(4.\theta)$.
On sait aussi $\cos(\varphi) = \frac{1}{5}$. Quelles sont les valeurs possibles de $\sin(\theta+\varphi)$?

On a sans effort : $\cos(2.\theta) = 2.\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{17}{25}$ (on est passé dans un autre quadrant).

De même : $\cos(4.\theta) = 2.\left(-\frac{17}{25}\right)^2 - 1 = \frac{-47}{625}$.

Ensuite, $\sin(\theta+\varphi) = \sin(\theta).\cos(\varphi) + \cos(\theta).\sin(\varphi)$.

On connaît (presque) : $|\sin(\theta)| = \sqrt{1-\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

$|\sin(\varphi)| = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5}$

Le sinus peut prendre quatre valeurs

$\frac{\sqrt{21}.1}{25}$	$+\frac{2.\sqrt{24}}{25}$
$\frac{\sqrt{21}.1}{25}$	$-\frac{2.\sqrt{24}}{25}$
$-\frac{\sqrt{21}.1}{25}$	$+\frac{2.\sqrt{24}}{25}$
$-\frac{\sqrt{21}.1}{25}$	$-\frac{2.\sqrt{24}}{25}$

◁51▷ ♡ On note a le réel d'écriture $0,12340123401234...$ *(le motif* 01234 *se répète indéfiniment)*. Simplifiez $100000.a - a$.
Déduisez a sous forme rationnelle p/q.

$$\begin{array}{lcccccccccccccc} 100000.a & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & , & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ & & & & & & 0 & , & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & \dots \end{array}$$
la différence vaut 12340.

On a donc $99999.a = 12340$ et par division : $\boxed{a = \frac{12\,340}{99\,999}}$

◁52▷ Calculez $\int_0^1 \frac{2.t+2}{4.t^2+6.t+2}.dt$.

L'intégrale existe, par continuité (et existence) de la fonction sous le signe somme.

On factorise : $\int_0^1 \frac{2.t+2}{4.t^2+6.t+2} = \int_0^1 \frac{2.t+2}{2.(t+1).(2.t+1)}.dt$.

On simplifie un peu : $\int_0^1 \frac{dt}{2.t+1}$.

On intègre en mettant le 2 qui manque $\boxed{\int_0^1 \frac{2.t+2}{4.t^2+6.t+2} = \frac{1}{2}\Big[\ln(2.t+1)\Big]_3^7 = \frac{\ln(3)}{2}}$

◁53▷ * ♡ Simplifiez $\dfrac{\cos(a)+\cos(b)}{\sin(a)+\sin(b)}$ et $\dfrac{\cos(a)-\cos(b)}{\sin(a)-\sin(b)}$ puis $\dfrac{\cos(a)+\cos(b)}{\sin(a)-\sin(b)}$ (sans préciser les domaines).

Si l'on ne s'occupe pas (à tort) des domaines :

$$\frac{\cos(a)+\cos(b)}{\sin(a)+\sin(b)} = \frac{2.\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2.\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)} = \tan\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

On rappelle en effet :

$$\begin{array}{rrcccc} & \cos(a) & = & \cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) & - & \sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ & \cos(b) & = & \cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) & + & \sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \textit{on somme} & \cos(a)+\cos(b) & = & 2.\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) & & \end{array}$$

en ayant juste la bonne idée d'écrire $a = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}$ et $b = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{a-b}{2}$.

Pareillement

$$\begin{array}{rrcccc} & \sin(a) & = & \sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) & + & \cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ & \cos(b) & = & \sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) & - & \cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \textit{on somme} & \sin(a)+\sin(b) & = & 2.\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) & & \end{array}$$

De même $\dfrac{\cos(a)-\cos(b)}{\sin(a)-\sin(b)} = \dfrac{-2.\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2.\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} = -\tan\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$.

Enfin $\dfrac{\cos(a)+\cos(b)}{\sin(a)-\sin(b)} = \dfrac{-2.\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2.\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} = -\tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

◁54▷ L'opérateur $\pm$ est il « distributif ? » : $a \pm (b+c)$ est il égal à $a \pm b \pm c$?

Non. $2 \pm (1+3)$ peut valoir 6 ou -2.
Tandis que $2 \pm 1 \pm 3$ peut valoir 6, 0, 4 ou -2.

◁55▷ Exprimez $\cos(3.x)$ à l'aide de $\cos(x)$. Donnez un polynôme non nul à coefficients entiers de degré le plus petit possible dont $\cos(\pi/9)$ soit racine.

On peut écrire $2.\cos(3.x) = e^{3.i.x} + e^{-3.i.x} = (e^{i.x})^3 + (e^{-i.x})^3 = (c+i.s)^3 + (c-i.s)^3$ avec c et s pour $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
On développe par la formule du binôme, les $i.s^3$ s'en vont (imaginaires). De même que les $3.c^2.i.s$.
Il reste $2.\cos(3.x) = 2.c^3 - 6.c.s^2$ (car $(i.s)^2 = -s^2$).
On remplace s^2 par $1-c^2$ et on trouve $\cos(3.x) = 4.\cos^3(x) - 3.\cos(x)$.

On peut aussi partir du membre de droite, et le développer par les formules de Moivre.

On a donc $4.\cos^3\left(\dfrac{\pi}{9}\right) - 3.\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right) = \dfrac{1}{2}$.

L'équation $4.X^3 - 3.X = \dfrac{1}{2}$ donne le polynôme $8.X^3 - 6.X - 1$. Et pourquoi pas les formules de Cardan.

Un mathématicien va faire les courses.
Sa femme lui dit : "tu prendras un litre de lait et si il y a des œufs, alors tu en prends six".
Le mathématicien revient avec six litres de lait. Sa femme en déduit qu'il y avait des œufs.

◁56▷ ♡ Montrez : $\cos(2.\pi/5) + \cos(3.\pi/5) = 0$.
Montrez : $\forall\theta,\ \cos(3.\theta) + \cos(\theta) = 2.\cos(\theta).\cos(2.\theta)$ puis $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$.
Déduisez que $\cos(\pi/5)$ est racine de l'équation $4.X^3 + 2.X^2 - 3.X - 1 = 0$ d'inconnue réelle X.
Résolvez l'équation ci dessus. Déduisez la valeur de $\cos(\pi/5)$.

Les angles $\dfrac{2.\pi}{5}$ et $3.\frac{\pi}{5}$ sont complémentaires (leur somme vaut π). La somme de leurs sinus vaut 0.
On utilise la formule $\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$.

On développe $\begin{array}{ccccccc} \cos(3.\theta) & = & \cos(2.\theta+\theta) & = & \cos(2.\theta).\cos(\theta) & -\sin(2.\theta).\sin(\theta) \\ \cos(\theta) & = & \cos(2.\theta-\theta) & = & \cos(2.\theta).\cos(\theta) & +\sin(2.\theta).\sin(\theta) \end{array}$.

On somme les deux formules et on a bien $\cos(3.\theta) + \cos(\theta) = 2.\cos(\theta).\cos(2.\theta)$.

On remplace $\cos(2.\theta)$ par $2.\cos^2(\theta) - 1$ et on fait passer $\cos(\theta)$ de l'autre côté. On a cette fois $\cos(3.\theta) =$

$4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$.

On peut la retrouver par d'autres voies.

On applique nos formules de trigonométrie à $\cos(2.\pi/5) + \cos(3.\pi/5) = 0$:
$4.\cos^3\left(\frac{\pi}{5}\right) - 3.\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2.\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = 0.$
C'est la définition de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est racine de $4.X^3 - 3.X + 2.X^2 - 1$.

Cette équation a pour racine évidente -1 (c'est $\cos(\pi)$ avec $\cos(3.\pi) + \cos(2.\pi) = 0$)..
On factorise : $(X + 1).(4.X^2 - 2.X - 1)$.
Comme $\cos(\pi/5)$ est racine de cette équation, il vaut -1, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Mais comme il est positif, on élimine -1 et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Il ne reste que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

◁57▷ Comparez les propositions suivantes :

α	$\forall(a, b) \in E,\ a \times b = 0 \Rightarrow (a = 0\ ou\ b = 0)$	$\forall(a, b) \in E,\ (a \neq 0\ et\ b \neq 0) \Rightarrow a \times b = 0$	γ
β	$\forall(a, b) \in E,\ (a \neq 0\ ou\ b \neq 0) \Rightarrow a \times b = 0$	$\forall(a, b) \in E,\ (a \neq 0\ et\ a \times b = 0) \Rightarrow b = 0$	δ

Sont elles vraies ?

α est l'intégrité de la multiplication.
Elle est équivalente à δ (par $p \Rightarrow (q\ ou\ r) = \overline{p}\ ou\ q\ ou\ r$ et $(p\ et\ \overline{q}) \Rightarrow r = \overline{p\ et\ \overline{q}}\ ou\ r = pareil$.

β est absurde, puisque l'on peut prendre $a = b = 1$.

On préfère « $\forall(a, b) \in E,\ (a \neq 0\ et\ b \neq 0) \Rightarrow a \times b \neq 0$ » à γ qui, elle, est totalement délirante.

◁58▷ ♡ Quel est le coefficient de $a^2.b.c$ dans $(a.b + a.c + b.c)^2$?
Quel est le coefficient de $a^2.b.c$ dans $(a + b + c + d)^4$?
Quel est le coefficient de $a^2.b.c$ dans $(a + b + c)^4$?

On développe à la main : $(a.b + a.c + b.c)^2 = \ldots + 2.a^2.b.c + \ldots$ car .il ne peut venir que de$(a.b).(a.c)$.

Plus simplement : $(a.b + a.c + b.c)^4 = \ldots + 0.a^2.b.c + \ldots$ le terme n'est pas « homogène »

Pour avoir $(a + b + c)^4 = \ldots + 12.a^2.b.c + \ldots$ il suffit de développer. Ou d'utiliser la formule du multinôme, pas encore dans notre cours.