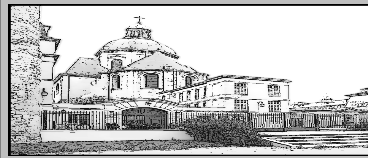
LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 27 septembre
M.P.S.I.2



2024 2025

DS01

◊ 0 ◊ Vous ne trouvez pas les racines du polynôme $8.X^3 - 84.X^2 + 254.X - 203$? Normal, elles ne sont pas évidentes. Mais si je vous dis que l'une d'entre elles est la moyenne des deux autres, pouvez vous la retrouver ? 1 pt.
Calculez ensuite la somme et le produit des deux autres. 1 pt.
Donnez moi finalement la liste des trois racines, et calculez la somme de leurs carrés. 2 pt.

♯ 0 ♯ Montrez que l'application `sd` va de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, n'est pas injective, ni surjective. 4 pt.

```
def sd(n) : #int -> int
....s = 0
....for d in range(1, n+1) :
........if n%d == 0 :
............s += d*d
....return s
```

♣ 0 ♣ En M.P.S.I.2, il y a cinquante élèves (numérotés de 0 à 49 évidemment). Chaque élève a une note de maths et une note de physique (entiers de 0 à 20 inclus tous deux. Voici les affirmations du prof Anateur-Dessay-Pultur, du prof Iteur-Kabuz, de la prof Ondeur-Demanarine, du prof Haitsur-Lemon-Sinaille, de la prof Huzion-d'Aubjezi-Nutill. Qui a raison ? 5 pt.

$\bullet_a$ il existe au moins deux élèves qui ont la même note de maths ($i \neq j$ et $m_i = m_j$)
$\bullet_b$ il existe au moins trois élèves qui ont la même note de physique,
$\bullet_c$ il existe au moins deux élèves qui ont la même note de maths et la même note de physique ($i \neq j$ et $m_i = m_j$ et $p_i = p_j$)
$\bullet_d$ il existe au moins deux élèves qui ont la même note de maths ou la même note de physique
$\bullet_e$ il existe au moins deux élèves dont les notes sont proches ($i \neq j$ et $|m_i - m_j| \leqslant 3$ et $|p_i - p_j| \leqslant 3$)

♣ 1 ♣ Le temps de cet exercice, on travaille avec range(19) et les opérations modulo 19.
Complétez la liste des inverses et la liste des carrés 2 pt.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
inverse			13			16						8						
carré					6		11			5							4	

On suppose $a + b + c = 11$, $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ et $a^3 + b^3 + c^3 = 2$. Calculez $a.b + a.c + b.c$ puis $a.b.c$. 3 pt.
Retrouvez le polynôme de racines a, b et c. 1 pt. L'une des racines doit alors être évidente. Trouvez les toutes. 2 pt.
Et sinon, vous résolvez avec Python ? 2 pt.

I∼0) On définit la cotangente sur $]0,\ \pi[$: $\cot = \theta \longmapsto \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$. Exprimez $\cot(a+b)$ à l'aide de $\cos(t)$ et $\cot(b)$ (pour a et b dans $]0,\ \pi/2[$ pour ne pas avoir de problème d'existence). 2 pt.
I∼1) Étudiez les variations et le signe des deux fonctions suivantes sur $[0,\ \pi/2[$: $\theta \longmapsto \tan(\theta) - \theta$ et $\theta \longmapsto \theta - \sin(\theta)$. 2 pt. Déduisez : $\forall \theta \in]0,\ \pi[,\ \cot^2(\theta) \leqslant \dfrac{1}{\theta^2} \leqslant \dfrac{1}{\sin^2(\theta)} = 1 + \cot^2(\theta)$. 1 pt.

II∼0) Pour tout n, on pose $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $T_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.(k-1)}$, $Q_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}$ et $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2.k-1)^2}$.
Montrez que ces trois suites sont croissantes. 2 pt. Oui, comme les trois mousquetaires, elles sont quatre.
II∼1) Exprimez C_n à l'aide de $B_{2.n}$ et B_n. 2 pt.
II∼2) Montrez pour tout n : $Q_n \leqslant B_n \leqslant T_n = 2 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2$. 3 pt.
II∼3) Déduisez que les suites (B_n), (Q_n) et (C_n) convergent (on ne demande pas leur limite). 1 pt.

II∼4) Pour tout n, on définit $P_n = \dfrac{(X+i)^{2.n+1} - (X-i)^{2.n+1}}{2.i}$. Montrez que P_n est un polynôme, de degré $2.n$ et donnez le coefficient de $X^{2.n}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

II∼5) Montrez que pour tout k de 1 à $2.n$, $\cot\left(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\right)$ est une racine du polynôme P_n. $\boxed{\text{2 pt.}}$

II∼6) On pose $V_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2.n+1}{2.k+1}.(-1)^k.X^{n-k}$. Explicitez les coefficients de X^n, X^{n-1} et X^{n-2}. $\boxed{\text{2 pt.}}$

II∼7) Montrez : $P_n(X) = V_n(X^2)$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

II∼8) Montrez : $\cot\left(\dfrac{(2.n+1-k).\pi}{2.n+1}\right) = -\cot\left(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\right)$ pour k de 1 à $2.n$. Donnez la liste des racines de V_n. $\boxed{\text{2 pt.}}$

Rappel : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (a,\ b) \in \mathbb{C}^2$, $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.X^p$ avec $\forall p$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!.(n-p)!}$.

$\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\tan^2\left(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$	$\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$	$\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\tan^4\left(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$	$\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sin^4\left(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$
Retrouvez qui est qui $\boxed{\text{4 pt.}}$			
$\dfrac{2.n.(n+1)}{3}$	$\dfrac{8.n.(n+1).(n^2+n+3)}{45}$	$\dfrac{n.(2.n-1)}{3}$	$\dfrac{n.(2.n-1).(4.n^2+10.n-9)}{45}$

II∼9) Déduisez : $\dfrac{n.(2.n-1)}{3} \leqslant \dfrac{(2.n+1)^2}{\pi^2} B_n \leqslant \dfrac{2.n.(n+1)}{3}$. $\boxed{\text{1 pt.}}$

II∼10) Calculez la limite de la suite (B_n) puis de la suite (P_n). $\boxed{\text{1 pt.}}$

III∼0) Montrez que Q_n converge vers $\dfrac{\pi^4}{90}$ quand n tend vers l'infini.

III∼1) L'objectif est de démontrer l'affirmation de François Viète :

$$\pi = 2.\frac{2}{\sqrt{2}}.\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\ldots$$

Montrez pour θ de $[0,\ \pi/4]$ $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2+2.\cos(\theta)}}{2}$. $\boxed{\text{1 pt.}}$

III∼2) Déduisez $\dfrac{2}{\sqrt{2}}.\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} = \dfrac{1}{\cos(\pi/4).\cos(\pi/8).\cos(\pi/16).\cos(\pi/32)}$.

III∼3) x est fixé dans $[0,\ \pi/2[$. Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $u_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$; montrez par récurrence sur n :

$u_n(x).\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = \dfrac{\sin(x)}{2^n}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$ Retrouvez la formule de Viète ci dessus. $\boxed{\text{2 pt.}}$

III∼4) Montrez pour tout couple $(a,\ b)$: $\cos(a).\cos(b) = \dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

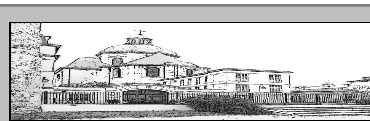
III∼5) Déduisez : $u_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}}.\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\dfrac{2.k-1}{2^n}.x\right)$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

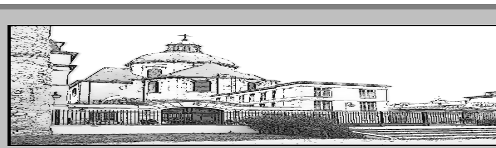
Un pangramme de Def : J'Y PIQUE VINGT OS BIFOCAUX D'ALE-KHUWÂRIZMÎ. Chacune des 26 lettres de l'alphabet est ici présente au moins une fois.

Un extrait de Perec « Les revenentes » :
Elle me débecte, cette Edmée ! Elle enlève des enfants, et même des bébés, et les mène chez des gentlemen dérêglés. Ces chers enges, exempts de péchés tels des chevrettes qend elles nessent, les gentlemen s'en servent perversement. Ces excès entrènent des esclendres. des pères et des mères qe le désenchentement rend déments trènent les gentlemen en terre et les éventrent. Les fleekmen les séqestrent. Des déléggés de gens se présentent chez le Préfet et demendent qe des enqêtes révèlent les fets et q'en émergent des pènes sévères et exemplères. Le Prefet en prend le serment.

Des calindromes de Gérard Durand , mais où faut il couper ?
Cesse là, député têtu. Tu pédales sec. Etre làs, si malade, l'amer Ivan a viré Léda, la Miss alerte. Rien Sonia cire le

bar arabe (le Ricain ose nier ?) Si le livre se repère (servile) : lis ! Il a sucé ses écus, Ali. Non ! fit Omer, émotif. Non ! Ce mac, sidéré, mutila le bel Ali, tu me redis ça mec ! Ella, sale, dégage de la salle. Ami laid, nu, le cul à l'air, pâle nabab, Bob, baba né là, pria la Luce lundi à Lima. Un ado rôda nu. Là, sous ce lit, Julie se saoula. Nue, ton amère mémère m'a noté : un ! Il a plu, ce cul pâli. "Alec a tiré Mona" rapporte Luc, né là. L'enculé trop parano mérita cela. Noé le Rital a tiré Léon. Un émir pédé déprime nu. L'ami saturé de rut a si mal. Eh, ce pur Dani pina dru ! (péché ?) Nue, Diane en aide un. Luc, note là : ce trône en or te cale ton cul. Avide, nu, Rémi (là, vite baisé) si abêti va limer une diva. Un as si pédé pissa nu. Il aima le cul aéré à Luce, l'ami Ali.





DS01 Relations coefficients racines dans $\mathbb{R}$.

On a trois racines. On les appelle a, b et c. On a donc $8.(X-a).(X-b).(X-c) = 8.X^3 - 84.X^2 + 254.X - 203$
Il ne faut pas oublier le facteur 8 devant pour la cohérence du terme en X^3.

On identifie alors nos relations coefficients racines $\begin{array}{cccl} a & +b & +c & = \frac{84}{8} \\ a.b & +a.c & +b.c & = \frac{254}{8} \\ a & \times b & \times c & = \frac{203}{8} \end{array}$

Ceci ne permet pas de conclure ? Mais on a une information en plus.

L'une des racines est la moyenne des deux autres. En fixant des rôles : $a = \dfrac{b+c}{2}$.
Mais alors $a+b+c = a+2.a = 3.a$.
La première formule nous donne la valeur de a : $3.a = \dfrac{84}{8}$ et donc $a = \dfrac{7}{2}$.

Vous étiez prêt à proposer « racine évidente $7/2$ *» ?*
Si on y tient, on reporte dans l'équation pour valider.

Maintenant, on reporte dans les autres relations : $b+c = 2.a = 7$ et $b.c = \dfrac{203/8}{7/2} = \dfrac{29}{4}$ (et la formule $a.(b+c)+b.c = \dfrac{127}{4}$ redonne la même chose).

Ayant la somme et le produit, b et c sont les racines de $X^2 - 7.X + \frac{29}{4}$ de discriminant 20.

Pas d'extractions dans $\mathbb{C}$, tout est direct. On a les trois racines

$$\left\{\frac{7}{2}, \frac{7-2.\sqrt{5}}{2}, \frac{7+2.\sqrt{5}}{2}\right\}$$

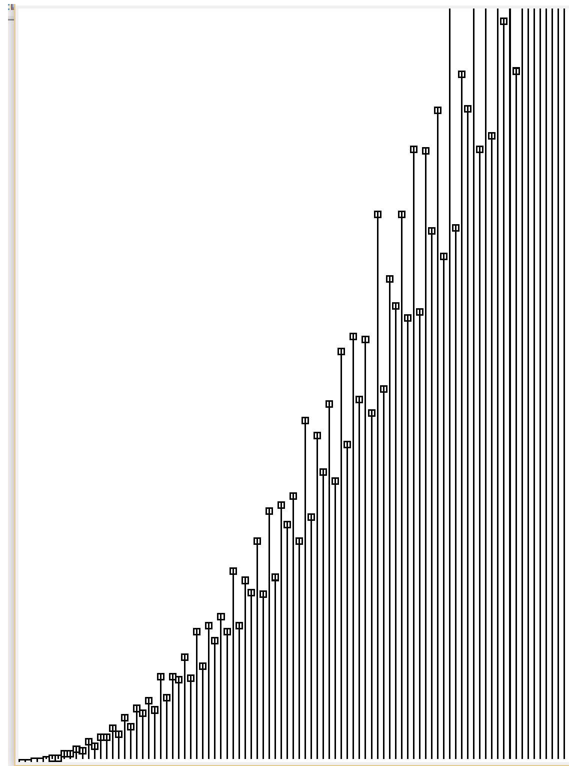
DS01 Injectivité, surjectivité, fonction en Python.

Que fait la fonction `sd` ?
Elle prend un entier `n`,
initialise un accumulateur `s` à `0`,
prend les entiers de `1` à `n` (inclus) dans le rôle de `d`,
teste si `n` est divisible par `d`, et dans ce cas ajoute à `s` la quantité `d*d`
Les `d` utiles ne sont donc que les diviseurs de `n` (`n` compris), et on additionne leurs carrés.

Bref, $\boxed{\text{la somme des carrés des diviseurs de n.}}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
sd(n)	0	1	1+4	1+9	1+4+16	1+25	1+4+9+36	1+49	1+4+16+64	1+9+81	1+4+25+100

On ne devine pas de formule explicite, ni de variation simple pour cette fonction.



On va donc regarder son défaut d'injectivité en cherchant un contre-exemple.

Mais il est déjà dans ces premiers calculs : `sd(6) = 50 = sd(7)`.

Pour le défaut de surjectivité, il faut trouver un entier qui ne sera jamais atteint.
Par exemple `3` n'a pas d'antécédent.
Comment une somme de carrés d'entiers (distincts) peut elle donner 3 ?

DS01 Cinquanté élèves, des notes.

On modélise les applications dont on a besoin, et pour chacune, on indique le cardinal de l'ensemble de départ et de l'ensemble d'arrivée. La dernière fonction semblera un peu étrange, mais on va l'expliquer

$\bullet_a$	note de maths			$\bullet_b$	note de physique		
	M.P.S.I.	$\rightarrow$	$\{0,\ 1,\ ,\dots 20\}$		M.P.S.I.	$\rightarrow$	$\{0,\ 1,\ ,\dots 20\}$
	i	$\longmapsto$	m_i		i	$\longmapsto$	p_i
	50		21		50		21
$\bullet_d$	notes de maths et physique			$\bullet_e$	notes arrondies		
	M.P.S.I.	$\rightarrow$	$\{0,\ 1,\ ,\dots 20\}^2$		M.P.S.I.	$\rightarrow$	$\{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}^2$
	i	$\longmapsto$	(m_i, p_i)		i	$\longmapsto$	$(\overline{m_i},\ \overline{p_i})$
	50		441		50		49

$\bullet_a$ il existe au moins deux élèves qui ont la même note de maths ($i \neq j$ et $m_i = m_j$) : VRAI
L'application $i \longmapsto m_i$ va d'un ensemble de cardinal 50 vers un ensemble de cardinal 21.
Elle ne peut pas être injective. Il y a au moins deux élèves qui ont la même note.

Je le redis avec un langage imagé (principe des tiroirs : 50 chaussettes dans 21 tiroirs : au moins un tiroir contient deux chaussettes ».
On peut raisonner par l'absurde.
Si les élèves ont tous des notes différentes, il a un ensemble $\{m_0,\ m_1, \dots m_{49}\}$ de cinquante valeurs qui doit être inclus dans un ensemble de cardinal 21.

> *Visuellement, on peut aussi découper la classe en* 21 *cases et tenter de remplir « jamais deux élèves n'ont la même note ». A partir du* 22° *élève, ça plante.*
> *C'est le premier des trois graphiques un peu plus loin.*

$\bullet_b$ il existe au moins trois élèves qui ont la même note de physique : VRAI
Cette fois, on a encore cinquante élèves et toujours vingt et une cases.
Il y a forcément une case qui contient trois élèves.

Par l'absurde : si aucune case n'a plus de deux élèves (si une image n'a pas plus de deux antécédents), alors l'ensemble de départ est au plus de cardinal 2×21.

C'est le second des trois graphiques un peu plus loin.

Or, ici, l'ensemble est de cardinal 50. Au moins une note est atteinte trois fois.

$\bullet_c$ il existe au moins deux élèves qui ont la même note de maths et la même note de physique ($i \neq j$ et $m_i = m_j$ et $p_i = p_j$) : FAUX

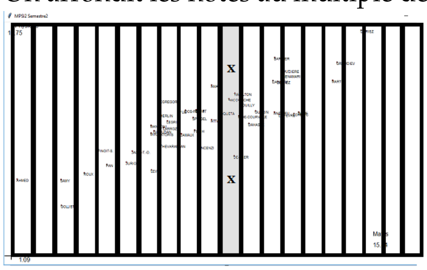
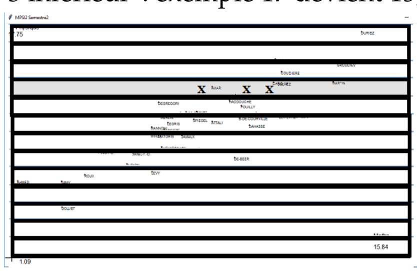
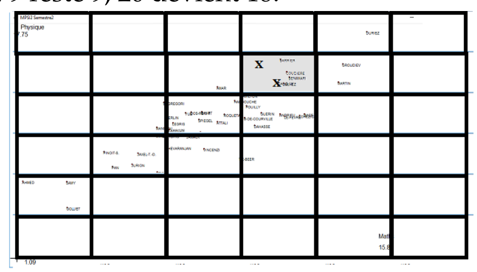
Cette fois, on exige trop. Il y a 21^2 couples possibles.
L'application $i \longmapsto (m_i,\ p_i)$ peut être injective.
Il suffit de proposer un contre-exemple, brutal si on veut aller vite, ou plus raffiné.

10					x	x	x		x	x		x	x	x		x	x	x	x		
9	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x
8		x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
7																					
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Comptez les croix, c'est bon. Du moins, je crois.

$\bullet_d$ il existe au moins deux élèves qui ont la même note de maths ou la même note de physique : VRAI.
On a montré qu'il existait au moins deux élèves ayant la même note de physique.
Ce couple a alors la même note de maths ou la même note de physique.

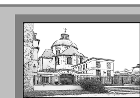
$\bullet_e$ il existe au moins deux élèves dont les notes sont proches ($i \neq j$ et $|m_i - m_j| \leqslant 3$ et $|p_i - p_j| \leqslant 3$) : VRAI
Ici, on découpe la classe en 49 cases.
On arrondit les notes au multiple de 3 inférieur : exemple 17 devient 15, 9 reste 9, 20 devient 18.

Les valeurs des notes $\overline{m_i}$ et $\overline{p_i}$ sont donc $\{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$.
Les couples possibles sont dans $\{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}^2$, de $(0, 0)$ à $(18, 18)$ en passant par $(5,\ 9)$ et autres $(12,\ 6)$.
Il y a cinquante élèves : au moins une case contient deux élèves.
Pour ces deux élèves, $\overline{m_i}$ et $\overline{m_j}$ sont égaux.
Ceci implique que la différence $m_i - m_j$ est plus petite que 3 (m_i et m_j sont dans le même ensemble $\{m,\ m+1,\ m+2\}$.
De même, la différence $p_i - p_j$ est plus petite que 3 (en valeur absolue évidemment).

DS01

Relations coefficients racines encore, mais modulo 19.



Pour les inverses, quand on dit que α est l'inverse de a, on sait que a est l'inverse de α, ce qui permet de trouver quelques cases rapidement (après avoir certes vérifié par exemple $3.13 = 39 = 2.19 + 1 = 1$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
données à vérifier			13			16						8						
par aller retour	1		13			16		12				8	3			6		18
	1 et -1 sont leur propre inverse																	
par 2.10=20=1=4.5	1	10	13	5	4	16		12		2		8	3			6		18
par 17=-2 donc $17^{-1} = -2^{-1}$	1	10	13	5	4	16		12	17	2		8	3			6	9	18
	Et pour finir : « qui va avec qui » ? »																	
inverse	1	10	13	5	4	16	11	12	17	2	7	8	3	15	14	6	9	18

Pour les carrés, la moitié de la liste suffit, car $(-x)^2 = x^2$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
offert					6		11			5							4	
carrés évidents	1	4	9	16	6		11			5							4	
les opposés	1	4	9	16	6		11		5	5		11		6	16	9	4	1
simple calcul	1	4	9	16	6	17	11	7	5	5	7	11	17	6	16	9	4	1

On a ensuite les calculs classiques :

$$(a+b+c)^2 = (a^2+b^2+c^2) + 2.(a.b+a.c+b.c)$$

et donc $2.(a.b+a.c+b.c) = 11^2 - 4 = 3$. On divise par 2. Non, on multiplie par 10 :

$$a.b+a.c+b.c = \frac{3}{2} = 3.10 = 30 = 11$$

(accessible aussi par $\frac{3}{2} = \frac{22}{2} = 11$).

On développe ensuite par exemple

$$(a.b+a.c+b.c).(a+b+c) = a^2.b+a^2.c+b^2.a+b^2.c+c^2.a+c^2.b+3.a.b.c$$

$$(a+b+c)^3 = (a^3+b^3+c^3) + 3.(a^2.b+a^2.c+b^2.a+b^2.c+c^2.a+c^2.b) + 6.a.b.c$$

et par comparaison

$$a.b.c = \frac{(a^3+b^3+c^3) - (a+b+c).(a^2+b^2+c^2) + (a.b+a.c+b.c).(a+b+c)}{3}$$

et aussi

$$a.b.c = \frac{2.(a^3+b^3+c^3) - 3.(a+b+c).(a^2+b^2+c^2) + (a+b+c)^3}{6}$$

On trouve cette fois $a.b.c = 1$.

On trouve donc le polynôme de racines a,b et c

$$X^3 - 11.X^2 + 11.X - 1$$

On l'écrira aussi $X^3 + 8.X^2 + 11.X + 18$ mais ça saute moins aux yeux.

On trouve une racine évidente : 1.

Maintenant, il nous manque les deux autres. Leur somme vaut 10 et leur produit 1.
On résout donc la nouvelle équation

$$x^2 - 10.X + 1 = 0$$

Modulo 19, le discriminant vaut 1 (trop gentil).

Les racines sont alors $\frac{10+1}{2} = \frac{10+1+19}{2} = 15$ et $\frac{10-1}{2} = \frac{10-1+19}{2} = 14$.

On peut résumer et vérifier

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & + & 14 & + & 15 & = & 11 \\
1^2 & + & 14^2 & + & 15^2 & = & \\
1 & + & 6 & + & 16 & = & 4 \\
1 & + & 6.14 & + & 16.15 & = & \\
1 & + & 8 & + & 12 & = & 2
\end{array}$$

Et sinon, je vous offre aussi (pas optimisé)

```
for a in range(19) :
....for b in range(19) :
........for c in range(19) :
............s1 = (a + b + c) % 19
............s2 = (a*a + b*b + c*c) % 19
............s3 = (a*a*a + b*b*b + c*c*c) % 19
............if (s, sc, scc) == (11, 4, 2) :
................print(a, b, c)
```

En tant que quotient de deux fonctions dérivables, la cotangente est dérivable sur son domaine de définition.
Comme pour la tangente, on a deux formulations possibles de sa dérivée

$$\left(\frac{\cos}{\sin}\right)' = \frac{\cos' . \sin - \cos . \sin'}{\sin^2} = \frac{-\sin^2 - \cos^2}{\sin^2} = \frac{-1}{\sin^2}$$

$$(\cos . \sin^{-1})' = \cos' . \sin^{-1} + \cos . (-\sin' . \sin^{-2}) = -\sin . \sin^{-1} - \cos^2 . \sin^{--2} = -1 - \cot^2$$

Dans les deux formulations, la dérivée est négative. La cotangente décroit sur chaque intervalle de son domaine de définition (comme $]0,\ \pi[$).

Quand a et b sont entre 0 et $\pi/2$, $\cot(a)$, $\cot(b)$ et $\cos(a+b)$ existent. Le calcul se fait comme pour la tangente en développant $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ puis en divisant haut et bas par $\sin(a).\sin(b)$

$$\cot(a+b) = \frac{\cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)}{\cos(a).\sin(b) + \cos(b).\sin(a)} = \frac{\dfrac{\cos(a)}{\sin(a)}.\dfrac{\cos(b)}{\sin(b)} - 1}{\dfrac{\cos(a)}{\sin(a)}.1 + 1.\dfrac{\cos(b)}{\sin(b)}} = \frac{\cot(a).\cot(b) - 1}{\cot(a) + \cot(b)}$$

On pouvait aussi partir de $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a).\tan(b)} = \dfrac{\dfrac{1}{\cot(a)} + \dfrac{1}{\cot(b)}}{1 - \dfrac{1}{\cot(a)}.\dfrac{1}{\cot(b)}}$ *et passer à l'inverse.*

$\tan(\theta) - \theta$				$\theta - \sin(\theta)$			
	0		$\pi/2$		0		$\pi/2$
$1 + \tan^2(\theta) - 1$		$\oplus$		$1 - \cos(\theta)$		$\oplus$	
$\tan(\theta) - \theta$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\theta - \sin(\theta)$	0	$\nearrow$	$\pi/2-1$
croissante et positive				croissante et positive			

En mettant bout à bout nos histoires de signe, on a

$$\forall \theta \in [0,\ \pi/2[,\ \sin(\theta) \leqslant \theta \leqslant \tan(\theta)$$

C'est une de nos inégalités classiques de l'année. Famille des inégalités de convexité.

Mais comme tout est positif, on passe aux inverses et le sens des inégalités change (décroissance de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0,\ +\infty[$).
On aboutit à l'encadrement qui servira plus tard

$$\forall \theta \in [0,\ \pi/2[,\ \cot(\theta) \leqslant \frac{1}{\theta} \leqslant \frac{1}{\sin(\theta)}$$

La fonction $\dfrac{1}{\sin}$ porte le nom de cosécante (dans les vieux livres).

Si vous n'avez pas cité la positivité avant de passer aux inverses, vous avez perdu.
Vous avez perdu quoi ? Des points.

On élève au carré (réels positifs)

$$\forall \theta \in [0,\ \pi/2[,\ \cot^2(\theta) \leqslant \frac{1}{\theta^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2(\theta)}$$

Il ne reste qu'à remplacer $\dfrac{1}{\sin^2} = 1 + \tan^2$ en passant par

$$\frac{1}{\sin^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\sin^2} = \frac{\cos^2}{\sin^2} + \frac{\sin^2}{\sin^2} = \cot^2 + 1$$

DS01 Quatre suites.

Pour la croissance des suites, on se donne n quelconque, et on étudie des différences comme $B_{n+1} - B_n$ dont on cherche le signe. Si il est positif, on valide la croissance de nos suites. En fait, à chaque fois, la seule différence entre

B_{n+1} et B_n (par exemple) est un terme : celui pour $k = n+1$.

$$\begin{array}{rcccl}
B_{n+1} - B_n & = & \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} & = & \frac{1}{(n+1)^2} & > 0 \\
T_{n+1} - T_n & = & 1 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k.(k-1)} - 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.(k-1)} & = & \frac{1}{(n+1).n} & > 0 \\
Q_{n+1} - Q_n & = & \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} & = & \frac{1}{(n+1)^4} & > 0 \\
C_{n+1} - C_n & = & \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2.k-1)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2.k-1)^2} & = & \frac{1}{(2.(n+1)-1)^2} & > 0
\end{array}$$

Croiserai-je des horreurs issues de réflexes sans fondement logique « pour montrer que c'est croissant, je dérive ». Mais par rapport à qui ? Il n'y a pas de variable réelle là dedans, juste des variables entières.

On doit relier P_n, $B_{2.n}$ et B_n. Quel rapport ?
Écrivons avec des points de suspension (et comptons les termes)

$C_n =$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2.k-1)^2} =$	$\frac{1}{1^2}$	$+\frac{1}{3^2}$	$+\frac{1}{5^2}$	$+\frac{1}{7^2}$	$\dots$	$+\frac{1}{(2.n-1)^2}$				n termes
$B_n =$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} =$	$\frac{1}{1^2}$	$+\frac{1}{2^2}$	$+\frac{1}{3^2}$	$+\frac{1}{4^2}$	$\dots$	$+\frac{1}{n^2}$				n termes
$B_{2.n} =$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} =$	$\frac{1}{1^2}$	$+\frac{1}{2^2}$	$+\frac{1}{3^2}$	$+\frac{1}{4^2}$	$\dots$	$+\frac{1}{n^2}$	$+\frac{1}{(n+1)^2}$	$\dots$	$+\frac{1}{(2.n)^2}$	$2.n$ termes

Dans $B_{2.n}$ on a tous les entiers (on s'arrête au rang $2.n$ mais il y a $2.n-1$ avant, et au début il y a 1, 2 , 3 et ainsi de suite.
Dans P_n il n'y a que des termes d'indice pair. Mais quand même jusqu'à $2.n-1$ donc « presque jusqu'à $2.n$ ».
L'idée sera donc de comparer déjà C_n et $B_{2.n}$. En fait, on va calculer la différence $B_{2.n} - C_n$.
Il reste quoi ? Juste les termes pairs de 2 à $2.n$.

Proprement sur une ligne, visuellement sur l'autre

$B_{2.n} =$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} =$	$\frac{1}{1^2}$	$+\frac{1}{2^2}$	$+\frac{1}{3^2}$	$+\frac{1}{4^2}$	$+\frac{1}{5^2}$	$+\dots$	$+\dots$	$+\frac{1}{(2.n-2)^2}$	$+\frac{1}{(2.n-1)^2}$	$+\frac{1}{(2.n)^2}$
$C_n =$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2.k-1)^2} =$	$\frac{1}{1^2}$		$+\frac{1}{3^2}$		$+\frac{1}{5^2}$		$+\dots$		$+\frac{1}{(2.n-1)^2}$	
différence			$\frac{1}{2^2}$		$+\frac{1}{4^2}$		$+\dots$		$+\frac{1}{(2.n-2)^2}$		$+\frac{1}{(2.n)^2}$

$$B_{2.n} - C_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant 2.n} \frac{1}{k^2} - \sum_{1\leqslant p\leqslant n} \frac{1}{(2.p-1)^2} = \sum_{1\leqslant k\leqslant 2.n} \frac{1}{k^2} - \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2.n \\ k\ impair}} \frac{1}{k^2} = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2.n \\ k\ pair}} \frac{1}{k^2} = \sum_{1\leqslant p\leqslant n} \frac{1}{(2.p)^2}$$

Mais dans les deux formes, on voit la factorisation par 4 au dénominateur sur chacun des n termes

$$B_{2.n} - C_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2.p)^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{4.p^2} = \frac{1}{4}.\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$$

Bref, on a $B_{2.n} - C_n = \dfrac{B_n}{4}$.

On notera qu'écrire comme point de départ $B_{2.n} - B_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2.n} \frac{1}{k^2}$ *est totalement correct, très tentant, mais hélas ne mène à rien.*
Et je n'ai pas d'argument pour vous dire qu'il ne fallait pas essayer quand même cette piste.

Ce résultat servira plus tard à trouver la limite de (C_n) une fois qu'on aura trouvé la limite de (B_n).

On peut prouver le jeu d'inégalités (et égalité) $Q_n \leqslant B_n \leqslant T_n = 2 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2$ par récurrence sur n.
Mais on peut opérer un traitement direct.

Déjà, la majoration $2 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2$ est vraie sans effort. Elle servira juste à avoir un majorant qui ne dépende pas de n.

Pour $Q_n \leqslant B_n$, c'est terme à terme que tout se passe bien.

$T_n =$	1	$+\dfrac{1}{1.2}$	$+\dfrac{1}{2.3}$	$+\dfrac{1}{3.4}$	$\dots$	$+\dfrac{1}{(k-1).k}$	$\dots$	$+\dfrac{1}{(n-1).n}$
$B_n =$	1	$+\dfrac{1}{2^2}$	$+\dfrac{1}{3^2}$	$+\dfrac{1}{4^2}$	$\dots$	$+\dfrac{1}{k^2}$	$\dots$	$+\dfrac{1}{n^2}$
$Q_n =$	1	$+\dfrac{1}{2^4}$	$+\dfrac{1}{3^4}$	$+\dfrac{1}{4^4}$	$\dots$	$+\dfrac{1}{k^4}$	$\dots$	$+\dfrac{1}{n^4}$

Pour chaque k de $\mathbb{N}^*$ (et donc de 2 à n) : $\dfrac{1}{k^4} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ puisque $k^4 \geqslant k^2$
$\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{(k-1).k}$ (la différence $\dfrac{1}{(k-1).k} - \dfrac{1}{k^2}$ vaut $\dfrac{1}{(k-1).k^2}$).

On somme de 2 à n : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^4} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1).k}$ et on ajoute 1.
On a donc $Q_n \leqslant B_n \leqslant T_n$.

Pour l'égalité, on verra une méthode par somme télescopique, mais on va se contenter d'une récurrence.
La propriété P_n à initialiser et propager est $1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1).k} = 2 - \frac{1}{n}$.

On initialise à $n = 1$ avec $1 + 0 = 2 - \dfrac{1}{1}$.
Par mesure de sécurité si on n'aime pas les sommes vides, on regarde pour n égal à 2 : $1 + \dfrac{1}{1.2} = \dfrac{3}{2} = 2 - \dfrac{1}{2}$.

On se donne un entier naturel n quelconque, et on suppose $1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1).k} = 2 - \frac{1}{n}$
On calcule le premier membre au rang $n+1$ pour voir si il donne bien ce qu'on attend dans le membre de droite

$$1 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1).k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1).k} + \frac{1}{n.(n+1)}$$

$$1 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1).k} = 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n.(n+1)}$$

$$1 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1).k} = 2 - \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n.(n+1)}\Big) = 2 - \frac{n+1-1}{n.(n+1)}$$

et on arrive bien à $2 - \dfrac{1}{n+1}$.

On notera qu'on prouve $1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1).k} = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$ *avec une récurrence et une majoration brute.*

En revanche, on ne peut pas montrer $1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1).k} \leqslant 2$ *par récurrence sans le terme intermédiaire.*

Si vous aimez les mathématiques élégantes (pléonasme), il existe une preuve directe

$$1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1).k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\Big)$$

$$1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1).k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

$$1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1).k} = 1 + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

$$1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1).k} = 1 + 1 - \frac{1}{n}$$

car la partie commune $\displaystyle\sum_{p=2}^{n-1}$ s'en va.

Les deux suites (B_n) et (Q_n) sont croissantes. Et majorées (par 2).
Elles convergent chacune vers son plus petit majorant (qui n'a que peu de chances d'être 2).

C'est fini les exercices de Terminale où la suite converge et où la valeur de sa limite tombe tout de suite et coïncide huit fois sur sept avec le majorant de la première question.

DS01 Polynôme P_n.

Chaque $(X+i)^{2.n+1}$ et $(X-i)^{2.n+1}$ est un polynôme (de degré $2.n+1$).
Leur différence est un polynôme. Et le degré est inférieur ou égal à $2.n+1$.
La division par $2.i$ ne change rien à son statut de polynôme (ni à son degré).

Mais si on développe $(X+i)^{2.n+1}$ et $(X-i)^{2.n+1}$, les deux commencent par $X^{2.n+1}$.
La différence efface ce terme en $X^{2.n+1}$. Le degré chute.

Mais de combien ?

Écrivons les premiers termes en citant juste $(a+b)^N = a^N + N.a^{N-1}.b + \ldots$, on a

$$(X+i)^{2.n+1} - (X+i)^{2.n+1} = \begin{array}{ccc} X^{2.n+1} & +(2.n+1).X^{2.n+1-1}.i & +\ldots \\ -\quad (X^{2.n+1} & +(2.n+1).X^{2.n+1-1}.(-i) & +\ldots) \end{array}$$

Il reste $2.(2.n+1).X^{2.n}.i$ et la division par $2.i$ donne bien un polynôme de degré $2.n$ exactement.
Malproprement : $P_n = (2.n+1).X^{2.n} + \ldots$ et si on nous en demande d'autres, on va prendre le temps.

Proprement :
$$\begin{array}{rcl} (X+i)^{2.n+1} & = & \sum_{k=0}^{2.n+1} \binom{2.n+1}{k} .X^{2.n+1-k}. \quad i^k \\ (X-i)^{2.n+1} & = & \sum_{k=0}^{2.n+1} \binom{2.n+1}{k} .X^{2.n+1-k}. \quad (-i)^k \end{array}$$

Quand on soustrait, on a

$$(X+i)^{2.n+1} - (X-i)^{2.n+1} = \sum_{k=0}^{2.n+1} \binom{2.n+1}{k}.X^{2.n+1-k}.i^k.(1-(-1)^k)$$

et pour k pair, les deux termes se compensent $(1-(-1)^k = 0)$. Il ne reste que les k impairs, qu'on va noter $2.p+1$ avec p de 0 à n

$$(X+i)^{2.n+1} - (X-i)^{2.n+1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{2.n+1}{2.p+1}.X^{2.n+1-(2.p+1)}.i^{2.p+1}.(1-(-1)^{2.p+1})$$

$$(X+i)^{2.n+1} - (X-i)^{2.n+1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{2.n+1}{2.p+1}.X^{2.n+1-(2.p+1)}.i^{2.p}.i.2$$

On divise par $2.i$ et on remplace le $i^{2.p}$ par $(i^2)^p$

$$\frac{(X+i)^{2.n+1} - (X-i)^{2.n+1}}{2.i} = \sum_{p=0}^{n} \binom{2.n+1}{2.p+1}.X^{2.n-2.p}.(-1)^p$$

Sous cette forme, on écrit les premiers termes

$$\frac{(X+i)^{2.n+1} - (X-i)^{2.n+1}}{2.i} = \binom{2.n+1}{1}.X^{2.n} - \binom{2.n+1}{3}.X^{2.n-2} + \binom{2.n+1}{5}.X^{2.n-4} + \ldots$$

DS01 Racines du polynôme P_n.

Comme on ne sait pas résoudre une équation d'un tel degré, on se contente de suivre l'indication de l'énoncé et de voir si les nombres proposés sont bien des racines du polynômes.

C'est ensuite qu'en réfléchissant, on passera de « des racines » à « les racines ».

On va donc remplacer X par $\cot\left(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\right)$ dans l'une des formes du polynôme.

Laquelle ? Pas celle avec des binomiaux, plutôt celle qui nous rappelle $\dfrac{1+i.t}{1-i.t}$ quand on y pense.

On pose $\theta_k = \dfrac{k.\pi}{2.n+1}$ pour alléger l'écriture (et on l'appelle θ_k car il dépend de k)

$$P_n\Big(\cot\Big(\frac{k.\pi}{2.n+1}\Big)\Big) = \frac{1}{2.i}.\Big(\Big(\frac{\cos(\theta_k)}{\sin(\theta_k)}+i\Big)^{2.n+1} - \Big(\frac{\cos(\theta_k)}{\sin(\theta_k)}-i\Big)^{2.n+1}\Big)$$

$$P_n\Big(\cot\Big(\frac{k.\pi}{2.n+1}\Big)\Big) = \frac{1}{2.i}.\Big(\Big(\frac{\cos(\theta_k)+i.\sin(\theta_k)}{\sin(\theta_k)}\Big)^{2.n+1} - \Big(\frac{\cos(\theta_k)-i.\sin(\theta_k)}{\sin(\theta_k)}\Big)^{2.n+1}\Big)$$

On sent l'usage des formules de Moivre et Euler

$$P_n\Big(\cot\Big(\frac{k.\pi}{2.n+1}\Big)\Big) = \frac{1}{2.i}.\Big(\frac{(e^{i.\theta_k})^{2.n+1}}{\sin^{2.n+1}(\theta_k)} - \frac{(e^{-i.\theta_k})^{2.n+1}}{\sin^{2.n+1}(\theta_k)}\Big)$$

$$P_n\Big(\cot\Big(\frac{k.\pi}{2.n+1}\Big)\Big) = \frac{1}{\sin^{2.n+1}(\theta_k)}.\Big(\frac{e^{i.(2.n+1)\theta_k} - e^{-i.(2.n+1)\theta_k}}{2.i}\Big)$$

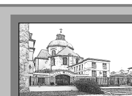
Le contenu de la parenthèse est un sinus. De qui ? De $(2.n+1).\theta_k$ c'est à dire de $k.\pi$.
Et pour les multiples de π, le sinus est nul (et celui du dénominateur ne l'est pas).

Bref, chacun des $2.n$ réels distincts $\cot\left(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\right)$ est racine du polynôme P_n.

Ces réels sont distincts car on a $2.n$ angles distincts $\dfrac{k.\pi}{2.n+1}$ sur un intervalle sur lequel l'application cotangente est strictement décroissante.

Or, P_n est de degré $2.n$. On a donc toutes les racines. On va pouvoir utiliser les formules de Viète.

DS01 — Polynôme V_n.



Si on regarde bien, $V_n$est de degré n, et on a $P_n(X) = V_n(X^2)$.
Le calcul a été fait plus haut, avec la formule du binôme.

On écrit ensuite les premiers coefficients de $V_n$comme demande

$$\begin{array}{rcllll} V_n & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2.n+1}{2.k+1}.(-1)^k.X^{n-k} & & & \\ V_n & = & \dbinom{2.n+1}{1}.X^n & -\dbinom{2.n+1}{3}.X^{n-1} & +\dbinom{2.n+1}{5}.X^{n-2} & +\dots \\ & & k=0 & k=1 & k=2 & k\geqslant 3 \end{array}$$

Attention, le polynôme n'est pas unitaire, il faudra tout diviser par $\dbinom{2.n+1}{1}$ dans les relations coefficients racines.

Malproprement :

$$\begin{array}{rcllll} V_n & = & (2.n+1).\Big(& X^n & -\dfrac{\binom{2.n+1}{3}}{(2.n+1)}.X^{n-1} & +\dfrac{\binom{2.n+1}{5}}{(2.n+1)}.X^{n-2} \quad -\dots\Big) \\ & & & X^n & -S.X^{n-1} & +D.X^{n-2} \end{array}$$

Qui sont les racines de V_n ? On en connaît : les $\cot^2\left(\dfrac{k.\pi}{2.n+1}\right)$ pour k de 1 à $2.n$.
En effet, on a pour tout k de 1 à $2.n$.

$$V_n\Big(\cot^2\Big(\frac{k.\pi}{2.n+1}\Big)\Big) = P_n\Big(\cot\Big(\frac{k.\pi}{2.n+1}\Big)\Big) = 0$$

Le polynôme aurait combien de racines ? k va de 1 à $2.n$. On copte $2.n$ racines alors que le polynôme est de degré n !
Mais comme proposé dans l'énoncé, on compare

$$\cot\left(\frac{(2.n+1-k).\pi}{2.n+1}\right) = -\cot\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)$$

Il suffit d'écrire, avec la notation $\theta_k = \dfrac{k.\pi}{2.n+1}$ déjà introduite et bien pratique

$$\cot\left(\frac{(2.n+1-k).\pi}{2.n+1}\right) = \cot\left(\pi - \frac{k.\pi}{2.n+1}\right) = \frac{\cos(\pi-\theta_k)}{\sin(\pi-\theta_k)} = \frac{-\cos(\theta_k)}{\sin(\theta_k)} = -\cot(\theta_k)$$

Les racines se regroupent deux à deux au signe près, et quand on élève au carré, on a

$$\cot^2\left(\frac{(2.n+1-k).\pi}{2.n+1}\right) = \cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)$$

et k varie juste de 1 à n pour avoir n racines de V_n, distinctes.

Mais alors on tient toutes les racines de V_n puisqu'il est de degré n.

Les relations coefficients racines donnent (en n'oubliant pas de diviser par le coefficient dominant)

$$S = \cot^2\left(\frac{\pi}{2.n+1}\right) + \cot^2\left(\frac{2.\pi}{2.n+1}\right) + \ldots + \cot^2\left(\frac{n.\pi}{2.n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right) = \frac{\binom{2.n+1}{3}}{2.n+1}$$

$$D = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}\cot^2\left(\frac{j.\pi}{2.n+1}\right).\cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right) = \frac{\binom{2.n+1}{5}}{2.n+1}$$

C'est bon signe pour l'une des sommes. Il suffit de revenir à la définition maniable des binomiaux

$$\binom{N}{3} = \frac{N.(N-1).(N-2)}{1.2.3}$$

qui donne alors proprement

$$\frac{1}{2.n+1}.\binom{2.n+1}{3} = \frac{2.n.(2.n-1)}{6}$$

On commence à compléter le tableau

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^4\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^4\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$
$\dfrac{n.(2.n-1)}{3}$			

Qui serait à présent $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^4\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$? La somme des carrés des racines (car le carré de $\cot^2$ c'est $\cot^4$).
On va donc chercher cette fois $S^2 - 2.D$ avec nos notations habituelles.
Et c'est donc

$$\left(\frac{n.(2.n-1)}{3}\right)^2 - 2.\frac{\binom{2.n+1}{5}}{2.n+1}$$

On écrit même ceci

$$\frac{n^2.(2.n-1)^2}{9} - 2.\frac{(2.n+1).(2.n).(2.n-1).(2.n-2).(2.n-3)}{(2.n+1).1.2.3.4.5}$$

$$\frac{n^2.(2.n-1)^2}{9}-\frac{n.(2.n-1).(n-1).(2.n-3)}{3.5}$$

On met en facteur commun $\dfrac{n.(2.n-1)}{45}$

$$\frac{n.(2.n-1)}{45}.(5.n.(2.n-1)-3.(n-1).(2.n-3))$$

Le contenue de la parenthèse vaut $10.n^2-5.n-6.n^2+15.n-9$ et se « factorise » en $4.n^2+10.n-9$. Oui, il ne se factorise pas, mais c'est bon signe. On sait qui c'est.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^4\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^4\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$
$\dfrac{n.(2.n-1)}{3}$		$\dfrac{n.(2.n-1).(4.n^2+10.n-9)}{45}$	

Comment ensuite relier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$?

On a montré $\cot'=-1-\cot^2=-\dfrac{1}{\sin^2}$. On garde juste $\dfrac{1}{\sin^2}=1+\cot^2$.
On a donc des 1 à ajouter. Un pour chaque terme de la somme

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}\right)=\sum_{k=1}^{n}1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$$

On déduit qu'il y a donc un facteur n en plus

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}=1+\frac{n.(2.n-1)}{3}=\frac{3.n+2.n^2-n}{3}=\frac{2.n.(n+1)}{3}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^4\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^4\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$
$\dfrac{n.(2.n-1)}{3}$	$\dfrac{2.n.(n+1)}{3}$	$\dfrac{n.(2.n-1).(4.n^2+10.n-9)}{45}$	

On complète la dernière case par élimination si on veut passer vite à la suite.
Mais si on veut les points, on doit écrire

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^4\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)\right)^2$$

On va donc additionner n, $2.\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cot^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cot^4\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)$, que l'on a déjà calculés.
Le reste n'est plus qu'un calcul moche

$$n+2.\frac{n.(2.n-1)}{3}+\frac{n.(2.n-1).(4.n^2+10.n-9)}{45}$$

Bref, on a le contenu de la dernière case.

DS01 Limite de la suite (B_n).

On a calculé $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$, et on s'intéresse à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k.^2}$.

Et on a une formule d'encadrement $\cot^2\leqslant\frac{1}{\theta^2}\leqslant\frac{1}{\sin^2}$. Si on l'écrit pour nos n mesures angulaires $\frac{k.\pi}{2.n+1}$ et qu'on somme, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$$

Les deux encadrants sont connus, et le terme du milieu vaut (une fois que $(2.n+1)^2$ est passé au numérateur et sorti de la somme) $\frac{(2.n+1)^2}{\pi^2}.B_n$.
En remplaçant par leurs valeurs :

$$\frac{n.(2.n-1)}{3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}\leqslant\frac{(2.n+1)^2.B_n}{\pi^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}=\frac{2.n.(n+1)}{3}$$

On va isoler B_n lui même

$$\pi^2.\frac{n.(2.n-1)}{3.(2.n+1)^2}\leqslant B_n\leqslant\pi^2.\frac{2.n.(n+1)}{3.(2.n+1)^2}$$

On entend venir la cavalerie ou les gendarmes. Si on a un théorème tout prêt, $\frac{n.(2.n-1)}{3.(2.n+1)^2}$ tend vers $\frac{2}{3.4}$.

Sinon, on passe par $\displaystyle\frac{n.(2.n-1)}{3.(2.n+1)^2}=\frac{2-\frac{1}{n}}{3.\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}$ en divisant haut et bas par n^2.

Bref, $\pi^2.\frac{n.(2.n-1)}{3.(2.n+1)^2}$ et $\pi^2.\frac{2.n.(n+1)}{3.(2.n+1)^2}$ tendent vers la même limite : $\frac{\pi^2}{6}$. Par encadrement, B_n converge vers $\frac{\pi^2}{6}$ quand n tend vers l'infini.

Ensuite, comme on a écrit $B_{2.n}-C_n=\frac{B_n}{4}$ on extrait $C_n=B_{2.n}-\frac{B_n}{4}$. Quand n tend vers $+\infty$, le membre de droite converge vers $\frac{\pi^2}{6}.\left(1-\frac{1}{4}\right)$ ce qui donne $\frac{\pi^2}{8}$.

On termine avec un enchainement de formules

$$\forall\theta\in]0,\ \pi[,\ \cot^4(\theta)\leqslant\frac{1}{\theta^4}\leqslant\frac{1}{\sin^4(\theta)}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^4\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)^4}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^4\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}$$

$$\frac{n.(2.n-1).(4.n^2+10.n-9)}{45}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^4\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}\leqslant\frac{(2.n+1)^4}{\pi^4}.Q_n\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^4\left(\frac{k.\pi}{2.n+1}\right)}=\dots$$

On divise par $4.n^4$, on étudie les limites de fractions rationnelles, et on termine avec le théorème d'encadrements (ou des gendarmes, comme vous voulez).

DS01 Formule de Viète.

Le développement de $\cos(a+b)$ dans le cas $a=b$ donne

$$\cos(2.a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=\cos^2(a)-(1-\cos^2(a))$$

On a la célèbre formule $\cos(2.a) = 2.\cos^2(a) - 1$.
On isole alors $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2.a)}{2}$. L'intervalle de travail force le cosinus à être positif, on peut passer à la racine sans perdre de point

$$\cos(a) = \frac{\sqrt{2+2.\cos(2.a)}}{2}$$

Il n'y a plus qu'à l'appliquer en $a = \frac{\theta}{2}$.

Que font ces cosinus dans la formule de Viète ? On a déjà $\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
On reporte ensuite dans la formule précédente :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+2.\frac{\sqrt{2}}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

On recommence

$$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2+2.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

et on le fait autant de fois qu'il faut pour finir par écrire

$$\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \cos(\pi/4).\cos(\pi/8)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.\frac{2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} = \cos(\pi/4).\cos(\pi/8).\cos(\pi/16)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.\frac{2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} = \cos(\pi/4).\cos(\pi/8).\cos(\pi/16).\cos(\pi/32)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\ldots\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}{2} = \cos(\pi/4).\cos(\pi/8)\ldots\cos(\pi/2^n)$$

à condition de définir le premier objet. Mais disons qu'il y a un produit de n termes de chaque côté.

Le membre de droite est du type $u_n(x)$ pour x égal à $\pi/4$.

On prouve $u_n(x).\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n}$ par récurrence sur n.

Pour n égal à 0, le produit $u_n(x)$ est vide et vaut 1. Et $\sin(x/2^n)$ est bien égal à $\sin(x)$.

Par prudence on initialise aussi pour $n = 1$:

$$u_1(x).\sin\left(\frac{x}{2^1}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{2}$$

on a utilisé la formule $\sin(2.\theta) = 2.\sin(\theta).\cos(\theta)$.

On suppose pour un n donné quelconque $u_n(x).\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n}$.
On veut alors calculer $u_{n+1}(x).\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$ et essayer d'y trouver $\frac{\sin(x)}{2^n}$.
On sait $u_{n+1}(x) = u_n(x).\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$ par définition d'un produit de $n+1$ termes, et on peut remplacer

$$u_{n+1}(x).\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = u_n.\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right).\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

En utilisant encore la formule $\sin(2.\theta) = 2.\sin(\theta).\cos(\theta)$,

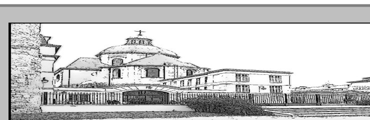
$$u_{n+1}(x).\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = u_n.\frac{\sin\left(\frac{2.x}{2^{n+1}}\right)}{2} = \frac{1}{2}.u_n.\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

et on peut nutiliser l'hypothèse de récurrence et conclure.

$$u_{n+1}(x).\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}.u_n.\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2}.\frac{\sin(x)}{2^n} = \frac{\sin(x)}{2^{n+1}}$$

Pour arriver à alf rmule de Vière, il suffit de prendre la formule précédente pour $x = \dfrac{\pi}{2}$ $u_n\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sin(\pi/2)}{2^n.\sin\left(\dfrac{\pi}{2.2^n}\right)}$ et de simplifier la forme indéterminée $2^n.\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ en y voyant un taux dd'accroissement bien caché.

LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2024 2025
DS01
50- points