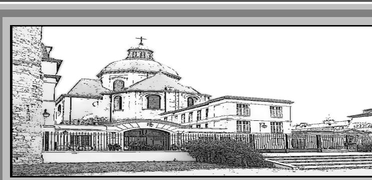
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 15 septembre
$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025

TD03

⊲0⊳ ♠ On se propose de résoudre l'équation $x^4 + 11.x^3 - 92.x + 80 = 0$ d'inconnue complexe x, sans passer par la recherche de racines évidentes.
Dérivez deux fois, déduisez ses variations. déduisez que l'équation admet quatre racines réelles que l'on peut ordonner : $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$. Précisez le signe de chacune.

Calculez $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$, calculez $r_1.r_2.r_3.r_4$, calculez $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} + \dfrac{1}{r_4}$.
Prouvez $(r_1)^2 + (r_2)^2 + (r_3)^2 + (r_4)^2 = 121$.

On pose alors : $s_1 = r_1.r_2 + r_3.r_4$, $s_2 = r_1.r_3 + r_2.r_4$ et $s_3 = r_1.r_4 + r_2.r_3$.

Calculez $s_1 + s_2 + s_3$. Montrez : $s_1.s_2 + s_1.s_3 + s_2.s_3 = -1\,332$ et aussi $s_1.s_2.s_3 = 18\,144$.
Donnez l'équation de racines s_1, s_2 et s_3 sous la forme $z^3 = p.z + q$ chère à Tartaglia (ou admettez puisqu'on vous les donne).

Appliquez les formules de Cardan pour trouver que s_1, s_2 et s_3 valent 42, -18 et -24.
Justifiez que c'est s_1 *(c'est à dire $r_1.r_2 + r_3.r_4$)* qui vaut 42. Que vaut alors $r_1.r_2.r_3.r_4$?
Trouvez alors $r_1.r_2$ et $r_3.r_4$.
On pose à présent : $y = r_1 + r_2 - r_3 - r_4$. Montrez : $y^2 = 289$. Trouvez alors y (attention au signe).
Déduisez : $r_1 + r_2 = -14$ et $r_3 + r_4 = 3$.
Trouvez alors les valeurs de r_1, r_2,r_3 et r_4. Enfin, félicitez LUDOVICO FERRARI.

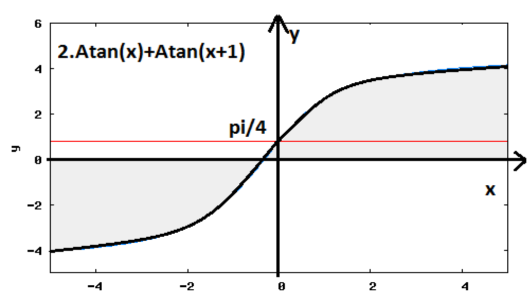
⊲1⊳ Résolution de l'équation du troisième degré par $\cos(3.\theta)$.
On veut résoudre $64.X^3 + 96.X^2 + 36.X + 3 = 0$ d'inconnue réelle X, notée (E). Trouvez les réels qui manquent $(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} X & = & Y & +a \\ 64.Y^3 & +c.Y & +d & =0 \end{array} \right|$ puis $(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} X & = & Y & +a \\ Y & = & \alpha.T & \\ 4.T^3 & -3.T & +e & =0 \end{array} \right|$. Résolvez l'équation en T puis celle en X.

⊲2⊳ ♡ Démontrez $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$ et calculez $\tan(3.\pi/8)$.
♡ Démontrez $\tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}$ et calculez $\tan(k.\pi/12)$ pour k de 0 à 12 (tableau).

⊲3⊳ Un polynôme P de degré 6 a six racines r_1 à r_6. On pose $D = r_1.r_2 + r_3.r_4 + r_5.r_6$. Combien de valeurs peut prendre D sous l'action des permutations σ de la liste $[1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6]$? C'est à dire, si on décide de poser $D_\sigma = r_{\sigma(1)}.r_{\sigma(2)} + r_{\sigma(3)}.r_{\sigma(4)} + r_{\sigma(5)}.r_{\sigma(6)}$, que est le cardinal de $\{D_\sigma \mid \sigma \in \mathbb{S}_6\}$.
Montrez que $\{\sigma \in \mathbb{S}_6 \mid D = D_\sigma\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{S}_6, \circ)$. Quel est son cardinal ? Est il commutatif ?

⊲4⊳

On demande de résoudre l'équation
$2.Arctan(x) + Arctan(x+1) = \dfrac{\pi}{4}$.
Un élève passe à la tangente dans l'équation
$2.Arctan(x) + Arctan(x+1) = \dfrac{\pi}{4}$ et trouve une équation de degré 3 dont il donne les trois racines. Résolvez son équation quand même, mais dites aussi pourquoi il a tort.



⊲5⊳ Montrez : $\tan(\pi/16) = (\sqrt{2}+1).(\sqrt{4 - 2.\sqrt{2}} - 1)$.
Méthode 1 : exprimez ˆ$tan(2.\theta)$ à l'aide de $\tan(\theta)$, trouvez l'équation de degré 2 dont $\tan(\pi/8)$ est racine, résolvez, éliminez, recommencez pour $\tan(\pi/16)$.

Méthode 2 : cherchez dans le cours $\tan(\theta/2)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$. Déduisez la valeur de $\tan(\pi/8)$, puis $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$ et recommencez.

◃6▹ On note D_t le domaine de définition de l'application tangente ($D_t = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Vrai ou faux : $\forall a \in D_t,\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \tan(a + k.\pi) = \tan(a)$.
Vrai ou faux : $\forall a \in D_t,\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \tan(a + k.\pi) = \tan(a)$.
Vrai ou faux : $\forall (a,\ b) \in (D_t)^2,\ (\tan(a) = \tan(b)) \Rightarrow (b = a + k.\pi)$.
Montrez : $\forall (a,\ b) \in \mathbb{Z}^2,\ (\tan(a) = \tan(b)) \Rightarrow (a = b)$.

◃7▹ Donnez module et argument de $1 + e^i$ et $1 - e^{i.\pi/3}$.

◃8▹ ♡ Calculez $(-1)^{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.(k+1)}$ en fonction de n.

◃9▹ Pour tout a de $\mathbb{C}$, montrez $|a| = \Re e(a) \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$.
Montrez pour z et w dans $\mathbb{C}$: $(|z| + |w|)^2 - |z + w|^2 = 2.(|z.\overline{w}| - \Re e(z.\overline{w}))$.
Déduisez l'inégalité $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ et montrez qu'il y a égalité si et seulement si z et w sont sur la même demi droite issue de l'origine.

◃10▹ On définit la prépatorielle (c'est plus compliqué que la fac-torielle) :
$n\dagger = \prod_{k=1}^{n} k^{n-k+1} = 1^n.2^{n-1}.3^{n-2}\ldots(n-1)^2.n^1$.
Décomposez $10\dagger$ en produit de facteurs premiers.
Montrez que $n!$ divise toujours $n\dagger$.
Résolvez $n\dagger$ est multiple de 2000 d'inconnue entière n.

◃11▹ Montrez que si $\tan(\theta)$ vaut 2 alors pour tout n, $\tan(n.\theta)$ existe et est un rationnel de la forme $\frac{p_n}{q_n}$ avec p_n pair et q_n impair.

◃12▹ Résolvez $\int_a^{2.a} \tan(\theta).d\theta = \frac{\ln(3)}{2}$ d'inconnue réelle a (attention aux modulo ?).

◃13▹ ♡ Montrez : $\sum_{n=0}^{N}(n + 2).2^n = (N + 1).2^{N+1}$ pour tout N.

◃14▹ ♡ On suppose : $\tan(a) = \frac{1}{5}$ et $\tan(b) = \frac{1}{239}$. Calculez $\tan(2.a)$, $\tan(4.a)$ et $\tan(4.a - b)$.
Démontrez : $(5 + i)^4 = 2.(1 + i).(239 + i)$.
♠ On suppose : $\tan(c) = \frac{1}{18}$ et $\tan(d) = \frac{1}{57}$. Calculez $\tan(12.c)$, $\tan(8.d)$ et $\tan(12.c + 8.d - 5.b)$.

◃15▹ Calculez $\cos(\pi/12)$ et prouvez $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{16} + \sqrt{6} + \sqrt{2}}}{\sqrt{8}}$.

◃16▹ ♡ *ou* ♣ L'élève Ach-Sethprof a écrit $128 + 257 = 381$. Vous voulez lui dire que c'est faux. Mais vous constatez qu'il n'a pas le même nombre de doigts que vous et compte dans une autre base... Laquelle ?

En base 8 par exemple, les chiffres vont de 0 *à* 7 *, et le nombre s'écrivant* 143 *c'est* $1.8^2 + 4.8^1 + 3.8^0$.

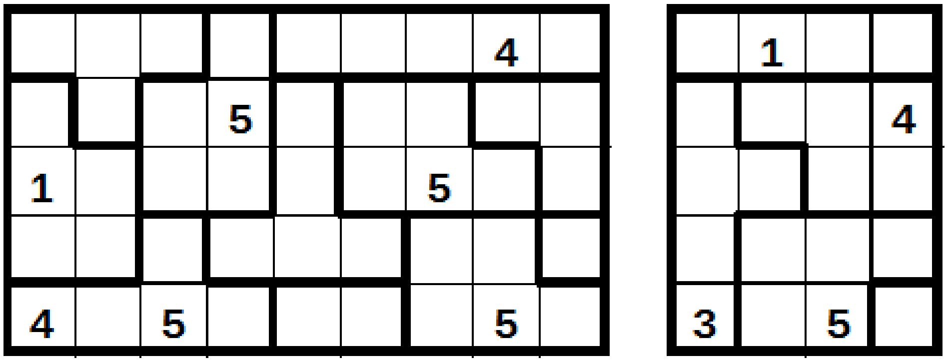
En base 8*, on a donc* $346 + 127 = 475$ *puisque* $\begin{array}{cccc} & 3 & {}^14 & 6 \\ + & 1 & 2 & 7 \\ \hline & 4 & 7 & 5 \end{array}$ *avec une belle retenue :* $6 + 7 = 13$ *donc* 5 *et je retiens* 1 *(une huitaine).*

◃17▹ Donnez l'écriture décimale de $\frac{355}{113}$.
Donnez l'écriture binaire de $\frac{1}{5}$.
On sait : $0,9999\ldots = 1$. Mais si on remplace un 9 sur dix par un 8, qui est le nombre obtenu ?

◃18▹ Vrai ou faux :

a	$\exists (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$
b	$\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$
c	$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$
d	$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}^2,\ (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$

◃19▹



On rappelle : $-3 \leqslant 1 \leqslant 2$. Qu'obtenez vous en élevant cette inégalité au carré comme le font certains élèves ?

Tectonic est un jeu développé depuis quelques années maintenant. Il s'agit de compléter une grille. La règle : une maison de taille n contient les entiers de 1 à n. Deux cases voisines ne peuvent pas contenir la même valeur. Une première grille résolue vous permet de comprendre. Et ensuite, c'est à vous

◃20▹ ♡ Calculez $\displaystyle\int_2^3 \frac{\log_x(2)}{x}.dx$.

◃21▹

I∼0) Pour tout réel x, on note $[x]$ sa partie entière et $dec(x)$ sa partie décimale (dite aussi partie fractionnaire), caractérisées par $[x] \in \mathbb{Z}$, $[x] \leqslant x < [x]+1$, $dec(x) = x - [x]$ ou même $x = [x] + dec(x)$ avec $[x] \in \mathbb{Z}$ et $dec(x) \in [0,\ 1[$.
Un élève affirme pour tout couple de réels $(x,\ y)$: $dec(x+y) = dec(x) + dec(y)$. Montrez qu'il a tort.
I∼1) Un élève affirme pour tout réel x $dec(-x) = -dec(x)$. Montrez qu'il a tort.
I∼2) Un élève affirme pour tout couple de réels $(x,\ y)$: $dec(x+y) \leqslant dec(x) + dec(y)$. Montrez qu'il n'a pas tort.

II∼0) α est un irrationnel fixé. Pour tout couple d'entiers naturels $(a,\ b)$, on pose $a \ltimes b$ si et seulement si on a $dec(a.\alpha) \leqslant dec(b.\alpha)$. Montrez que c'est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$.

Réflexive	Antisymétrique	Transitive
$\forall a,\ a \ltimes a$	$\forall (a,b),\ (a \ltimes b \text{ et } b \ltimes a) \Rightarrow a = b$	$\forall (a,b,c),\ (a \ltimes b \text{ et } b \ltimes c) \Rightarrow a \ltimes c$

Laquelle de ces propriétés serait perdue si α était un rationnel *(une affirmation sans preuve est de la politique, pas des mathématiques...)* ?
Montrez que α et $dec(\alpha)$ définissent le même ordre $\ltimes$.

III∼0) On prend $\alpha = \sqrt{2}$. Prouvez

x	$\sqrt{2}$	$2.\sqrt{2}$	$3.\sqrt{2}$	$4.\sqrt{2}$	$5.\sqrt{2}$	$6.\sqrt{2}$	$7.\sqrt{2}$
$[x]$	1	2	4	5	7	8	9

(et pas juste en disant $\sqrt{2} \simeq 1,41421$).
III∼1) Classez les entiers de 0 à 7 pour la relation $\ltimes$.

III∼2) On définit les suites (p) et (q) par $p_0 = q_0 = 1$ et $p_{n+1} = p_n + 2.q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$. Montrez que ce sont deux suites d'entiers naturels strictement croissantes.
III∼3) Exprimez $p_{2.n+1}$ et $q_{2.n+1}$ à l'aide de $p_{2.n}$et $q_{2.n}$.
III∼4) Exprimez $p_{2.(n+1)}$ et $q_{2.(n+1)}$ à l'aide de $p_{2.n}$ et $q_{2.n}$.
III∼5) Montrez pour tout n : $(p_{2.n})^2 < 2.(q_{2.n})^2$, $(p_{2.n+1})^2 > 2.(q_{2.n+1})^2$ et $p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1} = 1$.
III∼6) Déduisez $p_{2.n} < q_{2.n}.\sqrt{2} < p_{2.n} + \dfrac{p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1}}{q_{2.n+1}}$.
III∼7) Quelle est la valeur de $dec(q_{2.n}.\sqrt{2})$?
III∼8) Déduisez que la suite $(q_{2.n}.\sqrt{2})$ est strictement décroissante pour $\ltimes$.
III∼9) Retrouvez que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

III∼10) Écrivez un script Python qui pour n donné retourne deux liste : celle des p_k pour k de 0 à n et celle des q_k pour k de 0 à n. Par exemple, pour n égal à 5 elle devra répondre $[1,\ 3,\ 7,\ 17,\ 41,\ 99]$, $[1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70]$.

IV∼0) On prend $\alpha = 5.\sqrt{2}$. J'ai trouvé les valeurs approchées suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$5.\sqrt{2}.n$	0	7.07	14.14	21.21	28.28	35.35	42.43	49.50	56.57	63.64	70.71	77.78	84.85	91.92

Un élève en déduit rapidement : la suite (n) des entiers est visiblement croissante pour l'ordre $\ltimes$. Montrez qu'il a tort.
IV~1) Existe-t-il α vérifiant "(n) est croissante pour $\ltimes$" ?

V~0) On prend $\alpha = e$ *(base des logarithmes népériens)*. Classez pour la relation $\ltimes$ les nombres 10^k pour k de 0 à 10.

V~1) Montrez pour tout entier naturel n : $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$ *(deux mots clefs à puiser dans le cours rien que pour cette question)*.
V~2) Montrez que $\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ est une somme d'entiers *(on le notera A_n)*.
V~3) Montrez $dec(n!.e) = \int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$ *(qu'on pourra noter I_n, $n \geqslant 2$)*.
V~4) Montrez que la suite $(n!)$ est strictement décroissante pour la relation $\ltimes$.
V~5) Déduisez que e est effectivement irrationnel.

VI~0) *A toutes fins utiles : $e \simeq 2.718281828459045$ à 10^{-15} près.* Si vous avez l'âme poétique, je vous rappelle que pour retenir les décimales de π, on peut faire appel à la phrase "QUE J'AIME À FAIRE CONNAÎTRE CE NOMBRE UTILES AUX SAGES, IMMORTEL ARCHIMÈDE" dans laquelle il suffit de compter le nombre de lettres de chaque mot *(convention : pour 0 un mot de dix lettres)*. Alors, trouvez moi une phrase pour e.

que	j'	aime	à	faire	connaître	ce	nombre	utile	aux	sages	immortel	Archimède
3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9

Paris aux prestigieuses ***scè***nes est la capitale mondiale capitale du ***lu***xe.
On y rencontre plein de ***t***i***t***is qui ru***s***ent et bi***s***ent des copines à l'air cool.
On voit plein de péni***ches*** à la ***S***eine et plein de b***us*** faciles à c***it***er.
On entend parfois soupirer des touristes subjugués par l'abî***m***e dans la ***T***our : "Ah que j'aurais aimé connaître vos ***motiv***ations, Ei***ffel*** !"

Et Joël Martin en Haute-Savoie (ah le ***g***oût de Mont-***B***lanc) :
Les amateurs de ***p***entes collectionnent les ***f***aces, ***é***patés par les f***a***ces et les ***p***entes e***ff***ilées. Une grimpeuse qui apprécie la Ver***t***e quand elle est ***j***olie, et surtout la Ver***t***e ennei***g***ée, parcourt le mont sans craindre le vi***de***. Une autre lu***g***e sous la Ver***t***e. Mais gare à l'excès de ***gl***isse quand se déchaîne le ***v***ent... détr***e***sse sur les f***a***ces !

◁22▷ L'entier 2017 est la somme de deux nombres palindromes ; trouvez les. Rappel : exemples de palindromes 134431, 54366345, 98589.
Faites de même pour 2018. Montrez que c'est impossible pour 2019.
Allez, trouvez moi les millésimes à venir qui seront des sommes de deux palindromes. (Python ?)

◁23▷ ♡ Les a_k sont n réels strictement positifs ; montrez : $\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big).\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\Big) \geqslant n^2$.
Ce n'est pas évident si on ne pense pas à étudier le signe et le discriminant du trinôme

$$x^2.\sum_{k=1}^{n} a_k - 2.x.\sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

mais une fois qu'on a vu ça, on se dit que c'est génial !

◁24▷ ♣ Donnez un sens à $x \longmapsto \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}}}$ et calculez l'intégrale de cette application de 0 à 1.

Indication : quelle équation vérifie $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}}}$

SI ! OR, CE JEUNE SI LÀS (RÉMI), LAVÉ VA LIMER SA LISE, NUE, JE CROIS.
AVARE, TA REVUE NUE PEU NEUVE RATERA, VA !
A L'ASILE, TU AS SAUTÉ LISA, LÀ.
LUC N'OSA ! L'AMI ! SALI, IL A SI MAL À SON CUL.

◁25▷ Encore des stations de métro (des terminus de lignes) :
`Plan d'égout incorrect. Médailles à iris. Démolirait une rime. Dirigé au métronome. Ponte des vers.`

Découpons le bandit glouton. Thé lacté. Le pot-de-vin consolable. Soleil adulé téléchargé. Suivant en déchéance.
Et en cadeau : Un con rose, Frais bordel virtuel.

◁26▷ On note W_n la n^{ieme} intégrale de Wallis. Montrez : $(W_{n+p})^2 \leqslant W_{2.n}.W_{2.p}$. (un carré, des intégrales, une inégalité...)

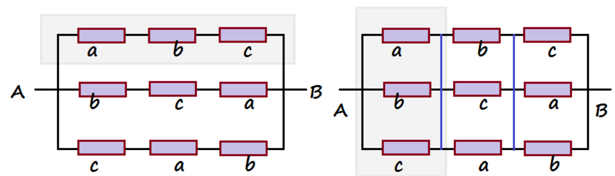
◁27▷ Résolvez $\left\{\begin{array}{lcl} 2^a \times 3^b & = & 2021 \\ 2^b \times 3^a & = & 2022 \end{array}\right.$ | d'inconnues réelles a et b.

◁28▷ On prend trois réels strictement positifs a, b et c. leur moyenne arithmétique est connue, et leur moyenne harmonique est l'inverse de la moyenne des inverses $\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

Montrez que la moyenne harmonique est plus petite que la moyenne arithmétique, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur deux triplets bien choisis (c'est à dire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \leqslant |\overrightarrow{u}| \times |\overrightarrow{v}|$ produit scalaire face à produit des normes).

$a.x + b.y + c.z \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Montrez que la moyenne harmonique est plus petite que la moyenne arithmétique en calculant la résistance entre A et B sur les deux scémas ci-contre.



◁29▷ ♡ Soient f et g continues de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$, montrez en identifiant l'intégrale d'un carré :
$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2.\int_0^1 (f(t))^2.dt + 2.\lambda.\int_0^1 f(t).g(t).dt + \int_0^1 (g(t))^2.dt \geqslant 0.$
Déduisez ensuite $\left(\int_0^1 f(t).g(t).dt\right)^2 \leqslant \int_0^1 (f(t))^2.dt.\int_0^1 (g(t))^2.dt$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz)*
Déduisez enfin $\sqrt{\int_0^1 (f(t)+g(t))^2.dt} \leqslant \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2.dt} + \sqrt{\int_0^1 (g(t))^2.dt}$ *(inégalité triangulaire)*.

◁30▷ Mettre dans le grille tous les entiers de 1 à 9 (certains sont déjà placés) pour que les trois additions en ligne et en colonne soient correctes :

			=	11
	6		=	14
			=	20
=	=	=		
13	23	.9		

et

			=	18
		2	=	15
			=	12
=	=	=		
23	16	.6		

◁31▷ La consommation quotidienne des français en pizza, ça fait combien de terrains de football ?

◁32▷ Un professeur fou propose de calculer les moyennes d'une suite de notes *(comprises entre 0 et $\pi/2$, si si !)* d'une façon étrange : l'arcsinus de la moyenne des sinus *(il existe toujours cet arcsinus ?)*. Écrivez un script `Python` qui le fait pour une liste L donnée. Sur trois devoirs, vous avez eu deux 0 et une autre note oubliée. Quelle moyenne maximale pouvez vous obtenir ?

◁33▷ Il me semble évident qu'on a : $\dfrac{n!}{n^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, mais quand même prouvez le.

◁34▷ On prend pour un triangle les notations usuelles : sommets A, B et C, d'angles aux sommets α β et γ et de longueurs des côtes opposés aux sommets a, b et c. Un triangle est dit arithmétique si l'un de ses angles est moyenne arithmétique des deux autres. Un triangle est dit géométrique si l'un de ses côtés est moyenne géométrique des deux autres. Montrez que les triangles équilatéraux sont à la fois arithmétiques et géométriques.
Construisez un triangle arithmétique et un triangle géométrique qui ne soient pas équilatéraux *(donnez une construction à la règle et au compas, et donnez les coordonnées des sommets)*.
Peut il exister des triangles qui soient arithmétiques et géométriques à la fois sans être équilatéraux.

Rappel

arithmétique	géométrique	harmonique
$\dfrac{x+y}{2}$	$\sqrt{x.y}$	$\dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

Rappel aussi : $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$ que je vous demande de démontrer en calculant de plusieurs façons une hauteur du triangle.

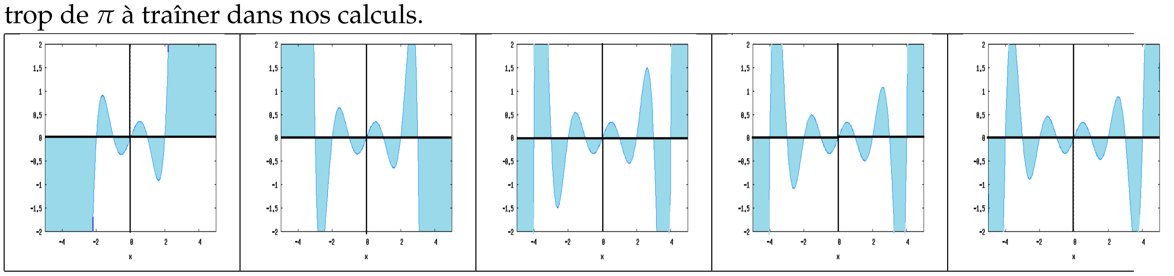
◁35▷ Justifiez pour toute application φcontinue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$: $\left(\int_a^b \varphi(t).dt\right)^2 \leqslant (b-a).\int_a^b \varphi(t)^2.dt$; dans quel cas a-t-on égalité ? Soit f dérivable de $[0,\ 8]$ dans $\mathbb{R}^*$ vérifiant $f(4) = \dfrac{1}{4} = (f(8))^2$ et $\displaystyle\int_4^8 \frac{(f'(t))^2}{(f(t))^4}.dt = 1$. Calculez $f(8)$ et $\displaystyle\int_4^8 \frac{f'(t)}{(f(t))^2}.dt$. Retrouvez le résultat de cet examen vietnamien cité par Presh Talwalkar : $f(6)$ vaut $\dfrac{1}{3}$ ou $\dfrac{1}{6}$.

◁36▷ On doit montrer $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k.\overline{b_k}\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right).\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)$ où les a_k et les b_k sont des complexes.

Choisissez bien α pour que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\lambda.e^{i.\alpha}.a_k - b_k).\overline{(\lambda.e^{i.\alpha}.a_k - b_k)}$ soit à coefficients réels.

◁37▷

L'objectif de ce4 problème est la formule $\boxed{\sin(\theta) = \theta.\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{\theta^2}{k^2.\pi^2}\right)}$ démontrée *(à l'ancienne, c'est à dire pas avec toute la rigueur de preuve des convergences)* par Leonhard Euler. Disons qu'on va étudier avec rigueur le membre de droite de $\dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi} = x.\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{x^2}{k^2}\right)$ pour ne pas avoir trop de π à traîner dans nos calculs.



VII~0) Pour tout entier naturel N, on pose $\boxed{F_N(x) = x.\prod_{k=1}^{N}\left(1 - \dfrac{x^2}{k^2}\right)}$

Soit x un réel positif. On note K l'entier naturel $[x]$. Montrez que $(F_N(x))_N$ est monotone à partir du rang K, de signe constant. Déduisez que $F_N(x))_N$ converge, vers une limite qu'on va noter $F(x)$ (et que l'on va déterminer plus tard).

VII~1) On définit ainsi sur $\mathbb{R}^+$ une application $x \longmapsto F(x)$. Montrez qu'elle se définit aussi sur $\mathbb{R}^-$ et qu'elle est impaire.

VII~2) Montrez que F est positive, majorée par 1sur $[0,\ 1]$.

VII~3) Montrez : $F_N(x).(x+N+1) = F_N(x+1).(x-N)$ pour tout couple $(N,\ x)$.

VII~4) Déduisez que F est périodique de période 2.

VII~5) Déduisez que F est bornée sur $\mathbb{R}$.

VII~6) Juste parce que la question précédente m'y a fait penser, un exercice en passant, sans rapport avec la suite : soit φ une application paire telle que $x \longmapsto \varphi(x+1)$ soit impaire. Montrez que φ est périodique.

VIII~0) Montrez que F est croissante sur $[0,\ 1/2]$ *(celui qui commence par "je dérive F" peut aller tout de suite cherche un emploi d'attaché parlementaire, on ne sait même pas si elle sera continue... alors, dérivable... et la forme de sa dérivée...).*

VIII~1) Laquelle de ces phrases est correcte : "sur $[0,\ 1/2]$, (F_N) est une suite croissante d'applications décroissantes" "sur $[0,\ 1/2]$, (F_N) est une suite décroissante d'applications croissantes".

VIII~2) Pour éviter de dire des bêtises sur les suites de fonctions et leur limite, montrez moi que $(x \longmapsto Arctan(n.x))_n$ est une suite d'applications continues dont la limite n'est plus continue.

IX~0) On va calculer $F(1/2)$. Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t).dt$. Prouvez : $W_{n+1} = \frac{n}{n+1}.W_{n-1}$. Calculez $W_{2.n}$ pour tout entier naturel n. (on pourra intégrer par parties $\int \sin^n .\sin$ et retrouver l'intégrale initiale dans $\int \sin^{n-1} .(1-\sin^2))$

IX~1) Montrez : $W_{2.n+1} \leqslant W_{2.n} \leqslant W_{2.n-1}$ pour tout n. Déduisez : $W_{2.n} \sim_{n\to+\infty} W_{2.n+1}$.[1]

IX~2) Prouvez $(2.n+1).W_{2.n}.W_{2.n+1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout n. Déduisez $W_{2.n} \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4.n}}$.

IX~3) Déduisez $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}$ *(formule dite "de Wallis", on se demande pourquoi)*.

X~0) Même si ça n'a aucun rapport avec la suite, prouvez moi : $(W_n)^2 \leqslant \frac{\pi}{2}.W_{2.n}$ pour tout n.Si je ne l'ai pas démontrée dans le cours, allez chercher dans « les beaux théorèmes de Sup » la formule de Cauchy-Schwarz.

XI~0) Montrez : $F_n\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{W_{2.n}}{2.\pi.W_{4.n+1}}$ pour tout n. Calculez $F\left(\frac{1}{4}\right)$. Calculez $F\left(\frac{1}{3}\right)$.

◃38▹ On se donne treize complexes non nuls dans le disque unité (ensemble des complexes de moudlu plus petit que 1. Montrez qu'il existe deux complexes z_p et z_q (avec $p \neq q$) vérifiant $|Arg(z_p/z_q)| \leqslant \pi/6$.
Montrez qu'il existe deux indices r et s vérifiant $|z_r - z_s| \leqslant 1/12$.

◃39▹ Un hexagone régulier a pour centre de gravité A d'affixe $2+i$ et pour sommet A d'affixe $2+3.i$. Trouvez les autres sommets.
Rappel : pour faire tourner B d'un angle α autour de A, il suffit d'écrire $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{.i.\alpha}$.

◃40▹ Calculez $\cos(\pi/12)$ et ensuite prouvez $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{16}+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\sqrt{8}}$.

Indication $\cos^2(\theta/2)$ si vous voulez. Mais j'ai aussi $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \ldots$.

◃41▹ On définit : $f = x \longmapsto \frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2.x^2}{x^3-x}$. Représentez la graphiquement (♠ ?), après l'avoir simplifiée (ah, ça devient ♡ !)...
Représentez aussi le graphe de $f \circ f \circ f \circ f$.

◃42▹ Résolvez : les deux derniers chiffres de $n + n!$ sont 2 suivi de 5 (d'inconnue entier n).

◃43▹ ♡ Comparez $Arcsin(1/3)$ et $Arccos(1/6)$ pour l'ordre usuel *(pensez à comparer les sinus de ces deux angles ou insérez une mesure classique entre les deux, mais sortout, ne me répondez pas « la calcculatrice me dit que... »)*.

◃44▹ Vrai ou faux : $\cos(x) = 1 \Rightarrow x = 0\ [\pi]$?

◃45▹ Indiquez suivant la valeur de λ le nombre de racines réelles du polynôme $X^3 - 7.X^2 + 8.X + \lambda$.

◃46▹ ♡ Classez les en fonction de leur argument :

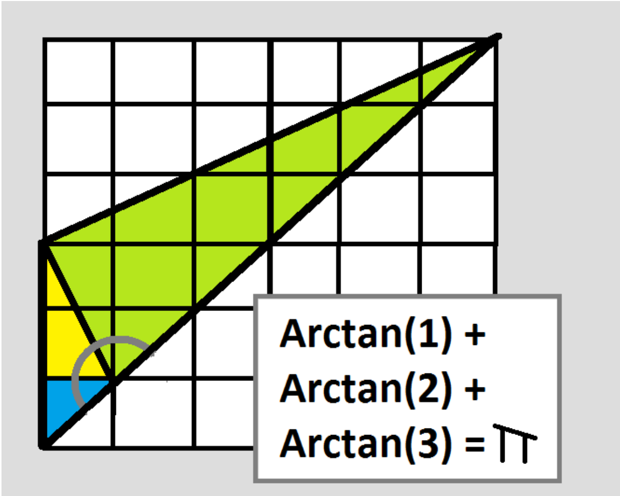
3+4.i	34+45.i	346+443.i	512+641.i	100+127.i

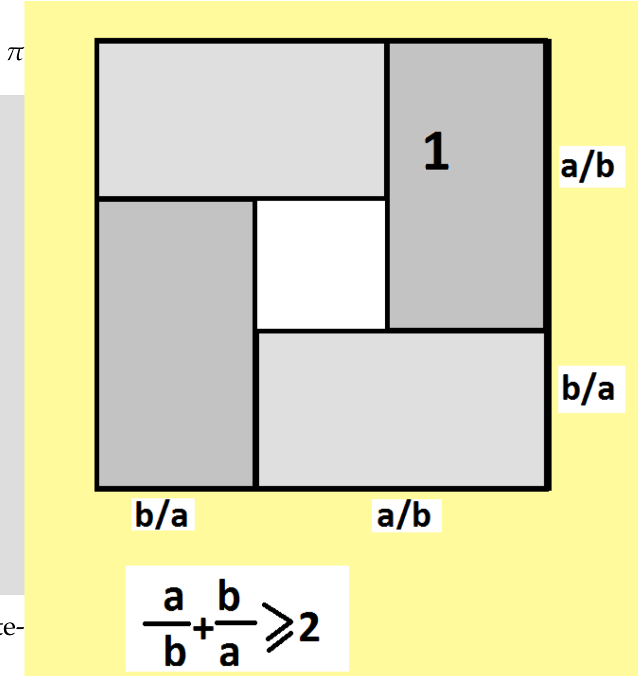
(calculatrice interdite, quand même !)

---

1. deux suites (a_n) et (b_n) sont dites équivalentes si leur quotient a_n/b_n tend vers 1 quand n tend vers l'infini, et on note alors $a_n \sim b_n$

♡ Montrez : $Arctan(1) + Arctan(2) + Arctan(3) = \pi$
Le dessin ci dessous vous aide-t-il ?





◁ 47 ▷ Vous connaissez $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ pour a et b réels strictement positifs.
Il faut la démontrer : il y a une preuve qui par de $(a-b)^2 \geqslant 0$. Il y en a une autre qui étudie $x \longmapsto x + \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, et il y en a une qui utilise un dessin.

◁ 48 ▷ Posez les opérations suivantes (on est en base 8) :

2 4 7 + 1 3 5 7 + 6 1 5 3 + 1 2 1 1 = ?	2 4 7 × 4 2 2 1 = ?	1 2 4 7 × 3 6 0 1 = ?	5 2 4 7 - 1 7 5 7 = ?	2 4 7 - 1 7 5 7 = ?

◁ 49 ▷ ♡ Démontrez $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$ et calculez $\tan(3.\pi/8)$.
♡ Démontrez $\tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}$ et calculez $\tan(k.\pi/12)$ pour k de 0 à 12 (tableau).

◁ 50 ▷ Regroupez en trois familles :

p implique q	p donc q	p est condition nécessaire et suffisante de q
si p alors q	il faut avoir q pour avoir p	p est une condition suffisante pour q
p car q	il suffit d'avoir q pour avoir p	p est une condition nécessaire pour q
p donc q	les solutions de l'équation p sont des solutions de q	pour avoir p il faut avoir q
sans p, pas de q	pour avoir p il fait et il suffit d'avoir q	p seulement si q
p si q	p si et seulement si q	p a besoin de q

◁ 51 ▷ Démontrez par récurrence : $\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$ pour tout n.
Et sans récurrence ?

◁ 52 ▷ ♡ Sachant que $273 + 736.i$ a pour racine $23 + 16.i$, donnez les racines carrées de $273.i + 736$. Même question pour $273 - 736.i$.

◁ 53 ▷ ♡ Résolvez $\left(\frac{1+i.t}{1-i.t}\right)^4 - 2.\cos(\theta).\left(\frac{1+i.t}{1-i.t}\right)^2 + 1 = 0$ d'inconnue réelle t *(indication : posez $t = \tan(\alpha)$)*.

◁ 54 ▷ ♡ "$(p \Rightarrow q)$ *et* $(\overline{p} \Rightarrow q)$" est il bien équivalent à q ?
De "$(p \Rightarrow q)$ *et* $(q \Rightarrow \overline{p})$", que pouvez vous déduire sur p et sur q ?

◁ 55 ▷ ♣ Les chiffres du digicode (de 1 à 9) sont mis dans le désordre (comme pour les sites Internet qui veulent vérifier que vous n'êtes pas un bot). Exemple :

1	3	8
2	4	7
5	6	9

Montrez qu'il existe au moins une ligne où le produit des trois termes vaut au moins 72.
Donnez une situation où chacun des produits vaut au plus 72.