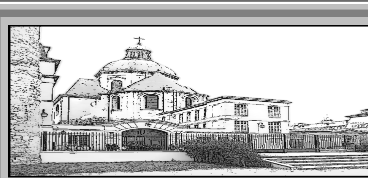
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 30 septembre
M.P.S.I.2



2024 2025

TD03

◁ 0 ▷

♠ On se propose de résoudre l'équation $x^4 + 11.x^3 - 92.x + 80 = 0$ d'inconnue complexe x, sans passer par la recherche de racines évidentes.
Dérivez deux fois, déduisez ses variations. déduisez que l'équation admet quatre racines réelles que l'on peut ordonner : $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$. Précisez le signe de chacune.

On dérive : $4.x^3 - 33.x^2 - 92$ et on redérive : $12.x^2 + 66.x$.

La dérivée seconde s'annule et change de signe en $-66/12$ (simplifiable) et 0.

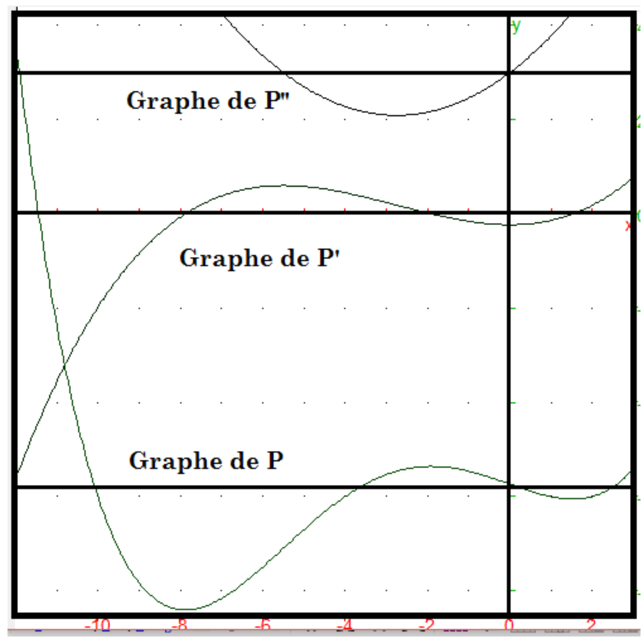
La dérivée première est croissante, décroissante, croissante.
Les valeurs en $-66/12$ et en 0 permettent d'appliquer le TVI et de déduire que cette dérivée change de signe trois fois.

L'application initiale est décroissante, croissante, décroissante, croissante.

On calcule en quelques points pour cerner les raciens (pas plus de quatre et même qutre).

Deux sont positives et deux sont négatives.

Les formules de Viète nous confirmenront cette idée.



Calculez $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$, calculez $r_1.r_2.r_3.r_4$, calculez $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} + \dfrac{1}{r_4}$.
Prouvez $(r_1)^2 + (r_2)^2 + (r_3)^2 + (r_4)^2 = 121$.

Les formules de Viète donnent

$$\begin{array}{cccccccc} r_1 & +r_2 & +r_3 & +r_4 & & & = & -11 \\ r_1.r_2 & +r_1.r_3 & +r_1.r_4 & +r_2.r_3 & +r_2.r_4 & +r_3.r_4 & = & 0 \\ r_2.r_3.r_4 & +r_1.r_3.r_4 & +r_1.r_2.r_4 & +r_1.r_2.r_3 & & & = & 92 \\ r_1.r_2.r_3.r_4 & & & & & & = & 80 \end{array}$$

Méthode classique
$$\begin{array}{ccccccc} r_1 & +r_2 & +r_3 & +r_4 & = & -11 & = S \\ (r_1)^2 & +(r_2)^2 & +(r_3)^2 & +(r_4)^2 & = & 121 & = S^2 - 2.D \\ (r_1)^{-1} & +(r_2)^{-1} & +(r_3)^{-1} & +(r_4)^{-1} & = & 92/80 & = T/P \end{array}$$

Ce sont des fonctions simples, qui d'ailleurs ne serviront pas plus loin.

On pose alors : $s_1 = r_1.r_2 + r_3.r_4$, $s_2 = r_1.r_3 + r_2.r_4$ et $s_3 = r_1.r_4 + r_2.r_3$.

Calculez $s_1 + s_2 + s_3$. Montrez : $s_1.s_2 + s_1.s_3 + s_2.s_3 = -1\,332$ et aussi $s_1.s_2.s_3 = 18\,144$.

Les trois quantités ci dessus ne sont pas des fonctions symétriques des quatre racines, puisque par permutation, on passe de l'une à l'autre.
Si vous échangez r_1 et r_2, alors s_1 reste la même mais s_2 et s_3 s'échangent.

La somme $s_1 + s_2 + s_3$ est juste la somme des six doublets. Elle est nulle.

Quand on développe $s_1.s_2$ par exemple, on a $(r_1)^2.r_2.r_3 + (r_2)^2.r_1.r_4 + (r_3)^2.r_1.r_4 + (r_4)^2.r2.r\_3$.
Avec $s_1.s_3$ et $s_2.s_3$ on va avoir huit autres termes de la même forme.
D'ailleurs, on va avoir tous les termes en $(r_i)^2.r_j.r_k$.

Il en faut en effet 12 : on choisit l'indice particulier i : quatre choix.
On choisit ensuite les deux j et k parmi les trois indices qui restent (trois choix).
On a donc bien quatre fois trois trois termes.

Mais cette somme ressemble beaucoup à $(r_1.r_2.r_3 + r_1.r_2.r_4 + \ldots).(r_1 + r_2 + r\grave{e}_3 + r_4)$ c'est à dire à $T.S$.
Mais $T.S$ contient seize termes au lieu de douze, acr on crée quatre termes en $r_1.r_2.r_3.r_4$.

A ce stade, tout va bien :

$$s_1.s_2 + s_2.s_3 + s_3.s_1 = T.S - 4.P$$

et on trouve la valeur indiquée.

Il faut beaucoup beaucoup de courage pour calculer les huit termes de $s_1.s_2.s_3$ et bricoler avec S, D, T et P pour trouver 18 144.
On ne le fera pas ici, et on fera confiance à l'énoncé.

Donnez l'équation de racines s_1, s_2 et s_3 sous la forme $z^3 = p.z + q$ chère à Tartaglia (ou admettez puisqu'on vous les donne).

On a la somme, les doublets et le produit : les $s_k$sont les racines de

$$X^3 - 0.X^2 - 1332.X - 18144$$

Appliquez les formules de Cardan pour trouver que s_1, s_2 et s_3 valent 42, -18 et -24.

Comme on sait résoudre les équations du troisième degré, avec des racines carrées et cubiques, on trouve les trois racines s_1, s_2 et s_3.

On va dire qu'on a appliqué les formules et trouvé 42, -18 et -24.

> Ce n'est pas la partie importante du problème, puisqu'on est juste ramené à un problème qu'on maitrise déjà.

Justifiez que c'est s_1 *(c'est à dire $r_1.r_2 + r_3.r_4$)* qui vaut 42. Que vaut alors $r_1.r_2.r_3.r_4$?

Comme on a troié les racines par ordre croissante avec $\ominus r_1 < \ominus r_2 < \oplus r_3 < \oplus r_4$, les produits $r_1.r_2$ et $r_3.r_4$ sont positifs, la somme s_1 est positive.
Or, une seule des trois racines est positive. C'est donc elle.

Drôle de question : $r_1.r_2.r_3.r_4$ est déjà connue, c'est 80.

Trouvez alors $r_1.r_2$ et $r_3.r_4$.

Mais c'est là qu'on comprend combien l'idée de Ferrari est géniale.
On connaîtla somme $(r_1.r_2) + (r_3.r_4)$ et le produit $(r_1.r_2).(r_3.r_4)$.
Il suffit de résoudre une équation du second degré pour trouver $r_1.r_2$ et $r_3.r_4$.
Cette équation, c'est $z^2 - 42.z + 80 = 0$.
Et les racines sont 40 et 2.

> On approche, on a des informations sur deux racines à la fois.

On pose à présent : $y = r_1 + r_2 - r_3 - r_4$. Montrez : $y^2 = 289$.

Si on développe comme proposé y^2 on trouve

$$y^2 = (r_1)^2 + (r_2)^2 + (r_3)^2 + (r_4)^2 + 2.(r_1.r_2 + r_3.r_4) - 2.(r_1.r_3 + r_1.r_4 + r_2.r_3 + r_2.r_4)$$

On reconnaît

$$y^2 = 121 + 2.s_1 - 2.(D - s_1)$$

Bref, y^2 se calcule maintenant qu'on a trouvé s_1.

Trouvez alors y (attention au signe).

Heureusement qu'on est prévenu.
y peut valoir 17 ou -17. Mais comme ici r_1 et r_2(avec un signe plus) sont négatifs, et les deux autres (avec un signe

moins) positifs, la « somme » y est négative.

Déduisez : $r_1+r_2=-14$ et $r_3+r_4=3$.
Trouvez alors les valeurs de r_1, r_2,r_3 et r_4. Enfin, félicitez LUDOVICO FERRARI.

On a trouve au début $r_1+r_2+r_3+r_4=-11$ et on vient de trouver $r_1+r_2-r_3-r_4=-17$.

Par simple combinaison (demi somme et demi différence), on trouve r_1+r_2 et r_1-r_2 :

$$r_1+r_2=-14 \; et \; r_3+r_4=3$$

Trouvez alors les valeurs de r_1, r_2, r_3 et r_4. Enfin, félicitez LUDOVICO FERRARI.

On tenait le produit $r_1.r_2$ quelques lignes plus haut.
On tient leur somme.
On a juste à résoudre $t^2+14.t+40=0$.
Les deux racines sont alors -4 et -10.

Ayant deux racines du polynôme, on factorise et on trouve les deux autres.

On sait donc résoudre l'équation de degré 4 en se ramenant à des équations de degré 3 et 2. Trop fort !

◁1▷ Résolution de l'équation du troisième degré par $\cos(3.\theta)$.
On veut résoudre $64.X^3+96.X^2+36.X+3=0$ d'inconnue réelle X, notée (E). Trouvez les réels qui manquent $(E)\;\Leftrightarrow\;\left\{\begin{array}{cccc|} X & = & Y & +a \\ 64.Y^3 & +c.Y & +d & =0\end{array}\right.$ puis $(E)\;\Leftrightarrow\;\left\{\begin{array}{cccc|} X & = & Y & +a \\ Y & = & \alpha.T & \\ 4.T^3 & -3.T & +e & =0\end{array}\right.$. Résolvez l'équation en T puis celle en X.

On ne connaît pas a (translation), on va le trouver par condition nécessaire dont on vérifiera la suffisance.
$64.X^3+96.X^2+36.X+3=64.(Y-a)^3+96.(Y-a)^2+36.(Y-a)+3$

$$64.X^3+96.X^2+36.X+3=\begin{array}{cccc} 64.Y^3 & -192.a.Y^2 & +192.a^2.Y & -64.a^3 \\ & +96.Y^2 & -192.a.Y & +64.a^2 \\ & & +36.Y & -36.a \\ & & & +3\end{array}$$

Posons naturellement $a=\dfrac{1}{2}$ pour annuler la colonne des Y^2.
Il reste $64.Y^3-12.Y+1$.
$(E)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cccc|} X & = & Y & +\frac{1}{2} \\ 64.Y^3 & -12.Y & +1 & =0\end{array}\right.$

A présent, on fait un changement d'échelle : $Y=\alpha.T$.
L'équation devient $64.\alpha^3.T^3-12.\alpha.T+1=0$.
On ne peut pas poser à la fois $64.\alpha^3=4$ et $12.\alpha=3$.
C'est donc impossible ?
Non, car on peut avoir des équations proportionnelles. Ce qu'on veut en fait c'est que $64.\alpha^3$ soit à 4 ce que $12.\alpha$ soit à 3.
On va donc imposer : $\dfrac{64.\alpha^3}{4}=\dfrac{12.\alpha}{3}$. On trouve $\alpha=\dfrac{1}{2}$ (ou son opposé).
L'équation devient $8.T^3-6.T+1=0$.
$(E)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cccc|} X & = & Y & +\frac{1}{2} \\ Y & = & \frac{1}{2}.T & \\ 4.T^3 & -3.T & +\frac{1}{2} & =0\end{array}\right.$.
Mais en quoi est elle si simple $4.t^3-3.t=\dfrac{-1}{2}$?
Tout dépend de notre niveau en trigonométrie.
Si on connaît la formule $\cos(3.\theta)=4.\cos^3(\theta)-3.\cos(\theta)$, on sent le bout du chemin...

On pose $T=\cos(\theta)$.
L'équation devient $4.\cos^3(\theta)-3.\cos(\theta)=\dfrac{-1}{2}$ c'est à dire $\cos(3.\theta)=-\dfrac{1}{2}$.

Remarque : Un prof rigoureux vous dire « non, on ne pose pas $T = \cos(\theta)$ ». Les grandes lettres formelles comme X ne sont pas des réels.
Depuis le début, on dit qu'on résout $64.x^3 + 96.x^2 + 36.x + 3 = 0$ d'inconnue réelle x.
On pose alors $y = x + \frac{1}{2}$ et $t = 2.y$ puis $\theta = Arccos(t)$.

On trouve les solutions en $3.\theta$: $3.\theta = \pm\frac{2.\pi}{3}\ [2.\pi]$.

On trouve les solutions en θ : $\theta = \pm\frac{2.\pi}{9}\ \left[\frac{2.\pi}{3}\right]$.

On écrit les solutions en θ : $\theta = \pm\frac{2.\pi}{9} + \frac{2.k.\pi}{3}$ avec k dans $\mathbb{Z}$.

On trouve les solutions en t : $t = \cos\left(\pm\frac{2.\pi}{9} + \frac{2.k.\pi}{3}\right)$ avec k dans $\mathbb{Z}$.

On trouve les solutions en t : $t = \cos\left(\frac{2.\pi}{9} + \frac{2.k.\pi}{3}\right)$ avec k dans $\{0,\ 1,\ 2\}$ car le cosinus est pair et périodique.

On trouve les solutions en y : $y = \frac{1}{2}.\cos\left(\frac{2.\pi}{9} + \frac{2.k.\pi}{3}\right)$ avec k dans $\{0,\ 1,\ 2\}$.

On trouve les solutions en x : $x = \frac{1}{2}.\cos\left(\frac{2.\pi}{9} + \frac{2.k.\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$ avec k dans $\{0,\ 1,\ 2\}$.

Bilan : trois solutions $\boxed{S_x = \left\{\frac{1}{2}.\cos\left(\frac{2.\pi}{9}\right) - \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}.\cos\left(\frac{8.\pi}{9}\right) - \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}.\cos\left(\frac{14.\pi}{9}\right) - \frac{1}{2}\right\}}$

◃2▹ ♡ Démontrez $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$ et calculez $\tan(3.\pi/8)$.
♡ Démontrez $\tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}$ et calculez $\tan(k.\pi/12)$ pour k de 0 à 12 (tableau).

Première méthode : on sait pour θ convenable : $\tan(2.\theta) = \frac{2.\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$.

On a donc en particulier : $1 = \tan(\pi/4) = \frac{2.\tan(\pi/8)}{1 - \tan^2(\pi/8)}$.

Par produit en croix, $\tan(\pi/8)$ est racine de l'équation $T^2 + 2.T - 1 = 0$ d'inconnue réelle T.

Le bourrin résout l'équation (moquons nous tous de lui).
Il trouve deux racines : $-1 + \sqrt{2}$ et $-1 - \sqrt{2}$.
Il élimine la racine négative car $\tan(\pi/8)$ est positive.
Par élimination : $\tan(\pi/8) = -1 + \sqrt{2}$.

L'élève plus fin dit « je sais déjà qu'il y a une racine positive et une racine négative (produit des racines), or $\tan(\pi/8)$ est positif, donc il coïncide avec la racine positive.
Il ne reste qu'à vérifier que $\sqrt{2} - 1$ est bien racine (et donc LA racine positive).

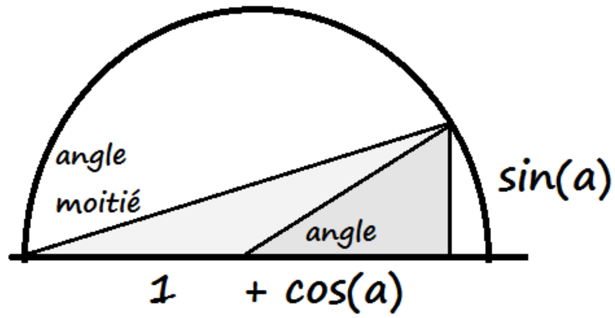
Deuxième méthode. On sait : $\cos(2.\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)}$.

Avec $\pi/8$, on obtient cette fois l'équation $\frac{1 - T^2}{1 + T^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On résout : $\sqrt{2}.(1 - T^2) = 1 + T^2$ puis $T^2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$.

On multiplie par la quantité conjuguée : $T^2 = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2 - 1}$.

Surtout, on ne développe pas (halte aux réflexes de calcul trop rapide). De $T^2 = (\sqrt{2} - 1)^2$ on déduit $T = \sqrt{2} - 1$ (au signe près).
Comme $\tan(\pi/8)$ est positif, il reste $\sqrt{2} - 1$.



Troisième méthode. On connaît ses formules de trigonométrie :
$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)} = \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.
Elles donnent immédiatement
$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}-1.$$
C'est bien sûr celle ci que choisit le mathématicien.

Pour $\tan(3.\pi/8)$, on reprend les mêmes idées avec $2.\frac{3.\pi}{8}$.

Ou alors : $\tan\left(\frac{3.\pi}{8}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right).\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1+\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}+1}$.

Après conjugaison : $\tan\left(\frac{3.\pi}{8}\right) = 1+\sqrt{2}$ (plus grande que $\tan(\pi/4)$).

A terminer.

◁3▷

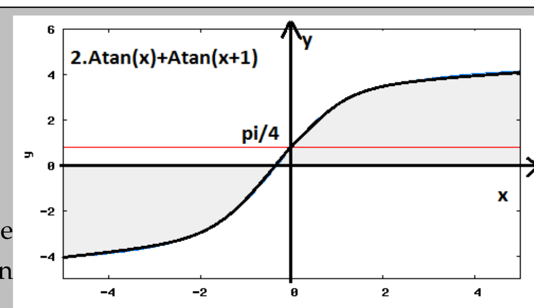
Un polynôme P de degré 6 a six racines r_1 à r_6. On pose $D = r_1.r_2 + r_3.r_4 + r_5.r_6$. Combien de valeurs peut prendre D sous l'action des permutations σ de la liste $[1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6]$? C'est à dire, si on décide de poser $D_\sigma = r_{\sigma(1)}.r_{\sigma(2)} + r_{\sigma(3)}.r_{\sigma(4)} + r_{\sigma(5)}.r_{\sigma(6)}$, que est le cardinal de $\{D_\sigma \mid \sigma \in \mathbb{S}_6\}$.
Montrez que $\{\sigma \in \mathbb{S}_6 \mid D = D_\sigma\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{S}_6, \circ)$. Quel est son cardinal ? Est il commutatif ?

On ne va pas lister les 6! permutations.
On va se dire que r_1 est présente dans un des trois produits. On va le mettre dans le premier.
On a cinq choix pour dire avec qui elle va : $r_1.r_2$, $r_1.r_3$, $r_1.r_4$, $r_1.r_5$, $r_1.r_6$.
Ensuite, il reste quatre éléments à regrouper en deux groupes de deux : $r_i.r_j + r_p.r_q$.
Il faut choisir le couple $(i,\ j)$ parmi les quatre indices qui restent : $\binom{4}{2}$ choix.
Mais en fait deux fois moins, car le regroupement $r_i.r_j + r_p.r_q$ donne le même groupement « complémentaire » $r_p.r_q + r_i.r_j$.
Total : 5×3 formules possibles.

$r_1.r_2$		$r_1.r_2+r_3.r_4+r_5.r_6$	$r_1.r_2+r_3.r_5+r_4.r_6$	$r_1.r_2+r_3.r_6+r_5.r_4$
$r_1.r_3$		$r_1.r_3+r_2.r_4+r_5.r_6$	$r_1.r_3+r_2.r_5+r_4.r_6$	$r_1.r_3+r_2.r_6+r_5.r_4$
$r_1.r_4$		$r_1.r_4+r_2.r_3+r_5.r_6$	$r_1.r_4+r_2.r_5+r_3.r_6$	$r_1.r_4+r_2.r_6+r_5.r_3$
$r_1.r_5$		$r_1.r_5+r_2.r_3+r_4.r_6$	$r_1.r_5+r_2.r_4+r_3.r_6$	$r_1.r_5+r_2.r_6+r_4.r_3$
$r_1.r_6$		$r_1.r_6+r_2.r_3+r_4.r_5$	$r_1.r_6+r_2.r_4+r_3.r_5$	$r_1.r_6+r_2.r_5+r_4.r_3$

◁4▷

On demande de résoudre l'équation
$2.Arctan(x) + Arctan(x+1) = \frac{\pi}{4}$.
Un élève passe à la tangente dans l'équation
$2.Arctan(x) + Arctan(x+1) = \frac{\pi}{4}$ et trouve une équation de degré 3 dont il donne les trois racines. Résolvez son équation quand même, mais dites aussi pourquoi il a tort.



Le domaine est $\mathbb{R}$ (pas de condition sur x pour qu'existe $Arctan(x)$ et $Arctan(x+1)$).

On passe à la tangente : $\tan(2.Arctan(x) + Arctan(x+1)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

On obtient $\dfrac{\frac{2.x}{1-x^2}+(x+1)}{1-\frac{2.x}{1-x^2}.(x+1)} = 1$ (condition momentanée : x ne vaut pas 1 ni -1, mais 1 n'est pas solution).

On simplifie : $\dfrac{x^3+x^2-3.x-1}{3.x^2+2.x-1}=1$. On sent venir le degré 3.
On fait un produit en croix et on regroupe : $x^3-2.x^2-5.x=0$.

On a tout de suite une racine nulle $x^3-2.x^2-5.x=x.(x^2-2.x-5)=x.(x-1-\sqrt{6}).(x-1+\sqrt{6})$.

Peut on conclure $\boxed{S=\{0,\ 1+\sqrt{6},\ 1-\sqrt{6}\}}$?

Le graphique plus haut donne envie de dire « non ».

Et on le prouve. L'application $x\longmapsto Arctan(x)+Arctan(x+1)$ est strictement croissante, donc injective.
L'équation ne peut pas avoir plus d'une racine.

> *Pour la croissance, s'il vous plait, faites des maths, pas du calcul.*
> *On a la somme de deux applications croissantes.*
> *Qui a perdu du temps à dériver ?*

Alors laquelle des trois est racine ?

Testons 0.
On a $2.Arctan(0)+Arctan(0+1)=\dfrac{\pi}{4}$. C'est bon pour elle.

Testons quand même $1-\sqrt{6}$:
$2.Arctan(1-\sqrt{6})+Arctan(2-\sqrt{6})$ est négatif. Chacun des deux nombres dans la fonction $Arctan$ l'est.
De fait, ce réel vaut $-\dfrac{3.\pi}{4}$.

Testons enfin $1+\sqrt{6}$.
Déjà $Arctan(1+\sqrt{6})$ dépasse $\dfrac{\pi}{4}$. Multiplions par 2, ajoutons un terme positif. Tout déborde.
Si vous voulez, j'ai $2.Arctan(1+\sqrt{6})+Arctan(2+\sqrt{6})=\dfrac{5.\pi}{4}$.

Pouvait on prévoir ces erreurs ?
Oui, en passant à la tangente, on n'a pas raisonné par équivalences,mais juste par implications : $\boxed{S\subset\{0,\ 1+\sqrt{6},\ 1-\sqrt{6}\}}$

Il aurait fallu garder $-\pi/2\leqslant 2.Arctan(x)+Arctan(1+x)\leqslant \pi/2$ pour pouvoir identifier et remonter.

◃5▹ Montrez : $\tan(\pi/16)=(\sqrt{2}+1).(\sqrt{4-2.\sqrt{2}}-1)$.
Méthode 1 : exprimez $\hat{}tan(2.\theta)$ à l'aide de $\tan(\theta)$, trouvez l'équation de degré 2 dont $\tan(\pi/8)$ est racine, résolvez, éliminez, recommencez pour $\tan(\pi/16)$.
Méthode 2 : cherchez dans le cours $\tan(\theta/2)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$. Déduisez la valeur de $\tan(\pi/8)$, puis $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$ et recommencez.

On va donc calculer $\tan(\pi/8)$ puis $\tan(\pi/16)$.

Méthode équation. On rappelle : $\tan(2.\theta)=\dfrac{2.\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$. On applique à $\theta=\pi/4$.
On trouve $\dfrac{2.\tan(\pi/8)}{1-\tan^2(\pi/8)}=1$. Le réel (positif) $\tan(\pi/8)$ est racine de l'équation $t^2+2.t-1=0$. on trouve $\tan(\pi/8)=-1\pm\sqrt{2}$, et par élimination $\tan(\pi/8)=\sqrt{2}-1$.

On sait ensuite que $\tan(\pi/16)$ vérifie $\dfrac{2.t}{1-t^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.
On a alors une équation du second degré $t^2+2.(\sqrt{2}+1).t-1=0$.
Cette équation du second degré de discriminant $4.(\sqrt{2}+1)^2+1$ a deux racines qu'on calcule.
On élimine la racine négative (il y en a une et une seule, c'est le produit des racines qui le dit). Celle qui reste est $\tan(\pi/16)$.

Sinon, on a aussi $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ et donc

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

On extrait alors

$$\cos^2(\pi/8) = \frac{1}{1+\tan^2(\pi/8)} = \frac{1}{1+(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{1}{1+2+1-2.\sqrt{2}} = \frac{1}{4-2.\sqrt{2}}$$

On poursuit avec

$$\sin^2(\pi/8) = 1-\cos^2(\pi/8) = \ldots = \frac{3-2.\sqrt{2}}{4-2.\sqrt{2}}$$

On passe à la racine, sachant que sinus et cosinus sont positifs en $\pi/8$.
On recommence avec la formule du cours en $\frac{1-\cos}{\sin}$

$$\tan\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{1-\sqrt{\frac{1}{4-2.\sqrt{2}}}}{\sqrt{\frac{3-2.\sqrt{2}}{4-2.\sqrt{2}}}} = \frac{\sqrt{4-2.\sqrt{2}}-1}{\sqrt{3-2.\sqrt{2}}}$$

Ça ne ressemble pas à $(\sqrt{2}+1).(\sqrt{4-2.\sqrt{2}}-1)$? Je crois qu'il suffit de vérifier qu'on a bien $\sqrt{2}+1 = \frac{1}{\sqrt{3-2.\sqrt{2}}}$.
Et moi j'écris par exemple :

$$(\sqrt{2}+1)^2 = 2+1+2.\sqrt{2}$$

et

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3-2.\sqrt{2}}}\right)^2 = \frac{1}{3-2.\sqrt{2}} = \frac{3+2.\sqrt{2}}{(3-2.\sqrt{2}).(3+2.\sqrt{2})} = \frac{3+2.\sqrt{2}}{9-8}$$

◃6▹

On note D_t le domaine de définition de l'application tangente $(D_t = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Vrai ou faux : $\forall a \in D_t,\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \tan(a+k.\pi) = \tan(a)$.
Vrai ou faux : $\forall a \in D_t,\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \tan(a+k.\pi) = \tan(a)$.
Vrai ou faux : $\forall (a,\ b) \in (D_t)^2,\ (\tan(a) = \tan(b)) \Rightarrow (b = a+k.\pi)$.
Montrez : $\forall (a,\ b) \in \mathbb{Z}^2,\ (\tan(a) = \tan(b)) \Rightarrow (a = b)$.

$\forall a \in D_t,\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \tan(a+k.\pi) = \tan(a)$: vrai

$\forall a \in D_t,\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \tan(a+k.\pi) = \tan(a)$: vrai, déjà par exemple avec $k = 0$

$\forall (a,\ b) \in (D_t)^2,\ (\tan(a) = \tan(b)) \Rightarrow (b = a+k.\pi)$: Faux. k n'est pas quantifié.

$\forall (a,\ b) \in (D_t)^2,\ (\tan(a) = \tan(b)) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ b = a+k.\pi)$: vrai.

$\forall (a,\ b) \in \mathbb{Z}^2,\ (\tan(a) = \tan(b)) \Rightarrow (a = b)$: vrai.
On part de $\tan(a) = \tan(b)$. On arrive à $b-a$ est un multiple de π.
Mais comme π est irrationnel, le seul multiple de π qui soit entier est 0.
On a bien $b-a = 0$.

◃7▹

Donnez module et argument de $1+e^i$ et $1-e^{i.\pi/3}$.

On prend la formule $1+e^{i.\theta} = 2.\cos(\theta/2).e^{i.\theta/2}$ et on exprime $1-e^{i.\pi/3}$ sous forme cartésienne $1-\frac{1+i.\sqrt{3}}{2}$:

	module	argument
$1+e^i$	$2.\cos(1/2)$	$1/2$
$1-e^{i.\pi/3}$	1	$-\pi/3$

◁8▷ ♡ Calculez $(-1)^{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.(k+1)}$ en fonction de n.

L'entier $(-1)^{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.(k+1)}$ vaut 1 ou -1 suivant la parité de l'exposant.

On ne connaît pas la valeur de $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.k.(k+1)$? Qu'importe. C'est une somme d'entiers qui sont tous pairs.

En effet, si k est pair, $k.(k+1)$ est de la forme $pair \times impair$
si k est impair, $k.(k+1)$ est de la forme $impair \times pair$

La somme d'entiers pairs est paire. L'exposant étant pair, $\boxed{(-1)^{\sum_{k=0}^{n}k.(k+1)} \text{ vaut toujours } 1}$

◁9▷ Pour tout a de $\mathbb{C}$, montrez $|a| = \Re e(a) \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$.
Montrez pour z et w dans $\mathbb{C}$: $(|z|+|w|)^2 - |z+w|^2 = 2.(|z.\overline{w}| - \Re e(z.\overline{w}))$.
Déduisez l'inégalité $|z+w| \leqslant |z|+|w|$ et montrez qu'il y a égalité si et seulement si z et w sont sur la même demi droite issue de l'origine.

L'implication $(a \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow (|a| = \Re e(a))$ est triviale.

Réciproquement, on se donne a et on suppose $|a| = \Re e(a)$.
Déjà, sa partie réelle est positive car égale à un module.
Sa partie imaginaire est ensuite nulle, puisque en élevant au carré :
l'équation donne $|a|^2 = (\Re e(a))^2$ alors que la définition donne $|a|^2 = (\Re e(a))^2 + (\Im m(a))^2$.

Inutile de poser $z = x + i.y$ et $w = x' + i.y'$. On cherche le plus joli.
La clef est $|z+w|^2 = (z+w).\overline{(z+w)}$
$|z+w|^2 = (z+w).(\overline{z}+\overline{w})$
$|z+w|^2 = z.\overline{z} + w.\overline{w} + z.\overline{w} + \overline{z}.w$
$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + (z.\overline{w}) + \overline{(\overline{z}.w)}$
$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2.\Re e(z.\overline{w})$ pour z et w « orthogonaux », c'est le théorème de Pythagore
sinon c'est la formule d'Al-Kashi
On soustrait : $(|z|+|w|)^2 - |z+w|^2 = 2.|z|.|w| - 2.\Re e(z.\overline{w})$.
Or, w et $\overline{w}$ ont le même module.

Comme nous la fait penser la première question, on affirme : pour tout complexe a, le réel $|a| - \Re e(a)$ est positif.
En effet, on a $\Re e(a) \leqslant |\Re e(a)| \leqslant |a|$ quitte à écrire cette fois effectivement $x \leqslant |x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$.
On a donc en particulier $|z.\overline{w}| - \Re e(z.\overline{w}) \geqslant 0$.
On reporte dans la question (ou la réponse) précédente : $(|z|+|w|)^2 - |z+w|^2 \geqslant 0$.
Comme ce sont des réels positifs, ils sont dans le même ordre que leurs carrés : $(|z|+|w|) - |z+w| \geqslant 0$.

C'est l'inégalité triangulaire qui est ainsi prouvée.

Pour conclure : dans quel cas est ce une égalité ?
Il faut et il suffit que $|z.\overline{w}| - \Re e(z.\overline{w})$ soit nul.
Ceci revient à demander « réel positif ».
On écrit $z.\overline{w} = k$ avec k dans $\mathbb{R}^+$.
On reconnaît que z et w ont le même argument. Ils sont colinéaires, de même sens.

Pardon, comment on passe de $z.\overline{w} = k$ à « colinéaires de même sens » ? J'ai deux chemins.

$z.\overline{w} = k$ puis on multiplie par w	en posant $z = \rho.e^{i.\alpha}$ et $w = r.e^{i.\beta}$ on obtient
$z.\overline{w}.w = k.w$ puis on simplifie	$z.r.e^{i.(\alpha-\beta)} = k$ et en passant aux arguments :
$z.\lvert w\rvert = k.w$ et on divise par k : $w = \frac{\lvert w\rvert}{k}.z$	$\alpha - \beta$ est multiple de $2.\pi$.

◁10▷ On définit la prépatorielle (c'est plus compliqué que la fac-torielle) :
$n\dagger = \prod_{k=1}^{n} k^{n-k+1} = 1^n.2^{n-1}.3^{n-2}\dots(n-1)^2.n^1$.
Décomposez $10\dagger$ en produit de facteurs premiers.
Montrez que $n!$ divise toujours $n\dagger$.
Résolvez $n\dagger$ est multiple de 2000 d'inconnue entière n.

On calcule

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	2	3	4	5	6	7	8	9		
1	2	3	4	5	6	7	8			
1	2	3	4	5	6	7				
1	2	3	4	5	6					
1	2	3	4	5						
1	2	3	4							
1	2	3								
1	2									
1										
1^{10}	2^9	3^8	4^7	5^6	6^5	7^4	8^3	9^2	10	
	2^9		2^{14}		2^5		2^9		2	2^{38}
		3^8			3^5			3^4		3^{17}
				5^6					5	5^7
						7^4				7^4

Dans $n\dagger$, il y a déjà « une première ligne » égale à $n!$.

On peut aussi écrire : $n\dagger = \Big(\prod_{k=1}^{n} k\Big).\Big(\prod_{k=1}^{n} k^{n-k}\Big) = n!.\Big(\prod_{k=1}^{n} k^{n-k}\Big)$.

Chaque exposant de $\Big(\prod_{k=1}^{n} k^{n-k}\Big)$ est positif ou nul, on a un entier. L'entier $n\dagger$ est bien multiple de $n!$.

Attention de ne pas écrire en revanche $n\dagger = (n!)^2.\Big(\prod_{k=1}^{n} k^{n-k-1}\Big)$ qui ne prouver rien, puisque $\Big(\prod_{k=1}^{n} k^{n-k-1}\Big)$ n'est pas entier.

Attention aussi à la qualité de rédaction. a est multiple de b, c'est $\exists k \in \mathbb{N}$, $a = k.b$, et pas $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$ même si ça ressemble dans la forme et la logique. Le second fait sortir du champ de l'arithmétique et invente des divisions inutiles.

Pour que $n\dagger$ soit un multiple de 2020, il faut qu'on y trouve les atomes 2^2, 5 et 101.
Il faut donc attendre $n = 101$. Et c'est largement suffisant.
Le même exo en 2021 devra attendre $n = 47$.

◁ 11 ▷ Montrez que si $\tan(\theta)$ vaut 2 alors pour tout n, $\tan(n.\theta)$ existe et est un rationnel de la forme $\frac{p_n}{q_n}$ avec p_n pair et q_n impair.

Par récurrence sur n initialisée au rang 0 avec $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$, et plutôt au rang 1 avec $p_1 = 2$ et $q_1 = 1$.

On suppose à un rang n donné $\tan(n.\theta) = \frac{p_n}{q_n}$ et on calcule $\tan(n.\theta + \theta) = \dfrac{\frac{p_n}{q_n} + 2}{1 - 2.\frac{p_n}{q_n}} = \dfrac{p_n + 2.q_n}{q_n - 2.p_n}$.

On a bien un rationnel.
Son dénominateur ne s'annule pas, puisque $q_n - 2.p_n$ ne peut pas être pair.
Comme le dénominateur est impair, même après réduction éventuelle de la fraction par 3, 5 ou que sais je, le dénominateur restera impair.

◁ 12 ▷ Résolvez $\int_a^{2.a} \tan(\theta).d\theta = \frac{\ln(3)}{2}$ d'inconnue réelle a (attention aux modulo ?).

On est amené à résoudre $-\ln(\cos(2.a)) + \ln(\cos(a)) = \ln(\sqrt{3})$.

On passe en inconnue $X = \cos(a)$: $\ln\left(\frac{x}{2.x^2-1}\right) = \ln(\sqrt{3})$.

On efface les logarithmes par bijectivité.
On résout une équation du second degré.
On revient à a. Et on fait attention au domaine.
Il ne doit pas y avoir de nombre en $\frac{\pi}{2} + k.\pi$ entre a et $2.a$.

◁ 13 ▷ ♡ Montrez : $\sum_{n=0}^{N} (n+2).2^n = (N+1).2^{N+1}$ pour tout N.

Une récurrence ? Allez oui. Sur N.

Initialisation : $\sum_{n=0}^{0}(n+2).2^n = (N+1).2^{N+1}$ et $(0+1).2^{0+1}$ sont bien égaux.

Hérédité. On se donne n quelconque et on suppose $\sum_{n=0}^{N}(n+2).2^n = (N+1).2^{N+1}$.

On ajoute le terme de rang $N+1$: $\sum_{n=0}^{N+1}(n+2).2^n = \sum_{n=0}^{N}(n+2).2^n + (N+1+2).2^{N+1}$

$$\sum_{n=0}^{N+1}(n+2).2^n = (N+1).2^{N+1} + (N+1+2).2^{N+1}$$
$$\sum_{n=0}^{N+1}(n+2).2^n = (N+1+N+3).2^{N+1}$$
$$\sum_{n=0}^{N+1}(n+2).2^n = (2.N+4).2^{N+1}$$
$$\sum_{n=0}^{N+1}(n+2).2^n = (N+2).2.2^{N+1}$$
$$\sum_{n=0}^{N+1}(n+2).2^n = (N++1+1).2^{N+1+1}$$

D'autres chemins sont possibles.

◃14▹ ♡ On suppose : $\tan(a) = \frac{1}{5}$ et $\tan(b) = \frac{1}{239}$. Calculez $\tan(2.a)$, $\tan(4.a)$ et $\tan(4.a-b)$.
Démontrez : $(5+i)^4 = 2.(1+i).(239+i)$.
♠ On suppose : $\tan(c) = \frac{1}{18}$ et $\tan(d) = \frac{1}{57}$. Calculez $\tan(12.c)$, $\tan(8.d)$ et $\tan(12.c+8.d-5.b)$.

Par formules de trigonométrie ' $\tan(2.a) = \frac{5}{12}$ et $\tan(4.a) = \frac{120}{119}$.

On effectue : $\tan(4.a-b) = \dfrac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119}.\frac{1}{239}} = \dfrac{120.239 - 119}{119.239 + 120}$.

Il reste à montrer que ceci vaut 1.
Non pas par calcul brutal, y'a écrit « maths ».
On montre $120.239 - 119 = 119.239 + 120$ en regroupant d'un même côté : $120.238 = 119.240$. Un facteur 2 glisse et c'est bon.

On peut aussi écrire $\tan(4.a-b) = \dfrac{120.(120+119) - 119}{(120-1).(120+119) + 120}$ et conclure encore.

Sinon, on gagne du temps en comparant $\tan(4.a)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{4} + b\right)$. les deux valent $\frac{120}{119}$.

On va le retrouver autrement *(plus joliment ?)*.
On développe $(5+i)^2 = 25 - 1 + 10.i = 24 + 10.i$
On recommence : $(5+i)^4 = 4.(12+5.i)^2 = 4.(144 - 25 + 120.i)$.
On simplifie : $(5+i)^4 = 476 + 420.i$.

On compare : $2.(1+i).(239+i) = 476 + 420.i$.
Il y a bien égalité !

Passons alors aux arguments dans $(5+i)^4 = 2.(1+i).(239+i)$:
On obtient $Arg((5+i)^4) = Arg(2) + Arg(1+i) + Arg(239+i)$.
Et même $4.Arg(5+i) = Arg(1+i) + Arg(239+i)$.
On reconnaît $4.Arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{4} + Arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ puisque $Arg(a+i) = Arctan\left(\frac{1}{a}\right)$.

◃15▹ Calculez $\cos(\pi/12)$ et prouvez $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \dfrac{\sqrt{\sqrt{16}+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\sqrt{8}}$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1.\sqrt{2}+\sqrt{3}.\sqrt{2}}{2.2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Ensuite, $\cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right)$ vérifie $2.\cos^2\left(\dfrac{\pi}{24}\right)-1=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
Et il est positif.
Or, cette équation a deux solutions opposées, on ne garde donc que la solution positive :
on fait passer 1 de l'autre côté et on réduit au dénominateur commun : $2.\cos^2\left(\dfrac{\pi}{24}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+2+4}{4}$
on divise par 2 : $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{24}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+4}{8}$
on passe à la racine : $\cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right)=\pm\dfrac{\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}+4}}{\sqrt{8}}$
on justifie le choix de signe.

Un colleur de physique vous engueulera pour une faute de calcul (ou trouvera idiot de remplacer 4 par $\sqrt{16}$).
Un colleur de maths vous mettra 0 parce que vous n'aurez pas justifié le choix de signe(estimant qu'ensuite, une erreur de calcul est négligeable face à une erreur de raisonnement).

◃16▹ ♡ *ou* ♣ L'élève Ach-Sethprof a écrit $128+257=381$. Vous voulez lui dire que c'est faux. Mais vous constatez qu'il n'a pas le même nombre de doigts que vous et compte dans une autre base... Laquelle ?

En base 8 par exemple, les chiffres vont de 0 à 7 , et le nombre s'écrivant 143 c'est $1.8^2+4.8^1+3.8^0$.

En base 8, on a donc $346+127=475$ puisque $\begin{array}{cccc} & 3 & {}^{1}4 & 6 \\ + & 1 & 2 & 7 \\ \hline & 4 & 7 & 5 \end{array}$ *avec une belle retenue : $6+7=13$ donc 5 et je retiens 1 (une huitaine).*

En notant b la base, les nombres concernés sont

128	257	381
$b^2+2.b+8$	$2.b^2+5.b+7$	$3.b^2+8.b+1$

L'équation permettant de trouver b devient $3.b^2+7.b+15=8.b+1$.
On trouve $b=14$. Et c'est cohérent d'y trouver des chiffres 8.
La lise des chiffres en base 14 est

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D

◃17▹ Donnez l'écriture décimale de $\dfrac{355}{113}$.
Donnez l'écriture binaire de $\dfrac{1}{5}$.
On sait : $0,9999\ldots=1$. Mais si on remplace un 9 sur dix par un 8, qui est le nombre obtenu ?

On pose la division de 355 par 133 jusqu'à retomber sur un reste déjà croisé. On sait alors que tout se met en boucle.
Ça peut être très long... et ça l'est.
3,14159292035398230088495575221238938053097345132743362831858407079646017699115044247787610619469026548672566371
Après 121 divisions, on retrouve le même motif :
03539823008849557522123893805309734513274336283185840707964601769911504424778761061946902654867256637168141592922
car on retombe sur le même reste : 230 déjà croisé plus haut.
3.14159292 035398230088495575221238938053097345132743362831858407079646017699115044247787610619469026548672
035398230088495575221238938O5

Oui, le début de notre nombre rappelle beaucoup π.

Il faut écrire $\dfrac{1}{5}$ uniquement avec des $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{8}$ et autres $\dfrac{1}{2^n}$. En quantité infinie si nécessaire.

0,	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	$\frac{1}{4096}$			

L'écriture (en binaire) : $0,001100110011001100\ldots$ est faite du motif répétitif 0011.

Vérification : on note ce réel $x=0,001100110011001100\ldots$.
On calcule : $2.x=0,01100110011001100\ldots$ (tout est décalé d'un chiffre).
puis $4.x=0,110011001100110011\ldots$
et $8.x=1,1001100110011001\ldots$ et enfin $16.x=11,001100110011001100\ldots$.
On reconnaît : $16.x-x=11$ puisque après le motif se retrouve chaque fois face à lui même.
$15.x=2+1$ (et pas $10+1$, puisque c'est du binaire).
On a $15.x=3$ ce qui se simplifie en $x=\dfrac{1}{5}$.

On regarde le nombre $0,99999999989999999999899999999998\ldots$.
On l'écrit x. On calcule $10^{10}.x = 9999999998,99999999989999999998\ldots = 9999999998 + x$.
On équilibre : $\boxed{x = \dfrac{9999999998}{9999999999}}$ (non simplifiable)

◁ 18 ▷ Vrai ou faux :

a	$\exists (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$
b	$\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$
c	$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$
d	$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}^2,\ (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$

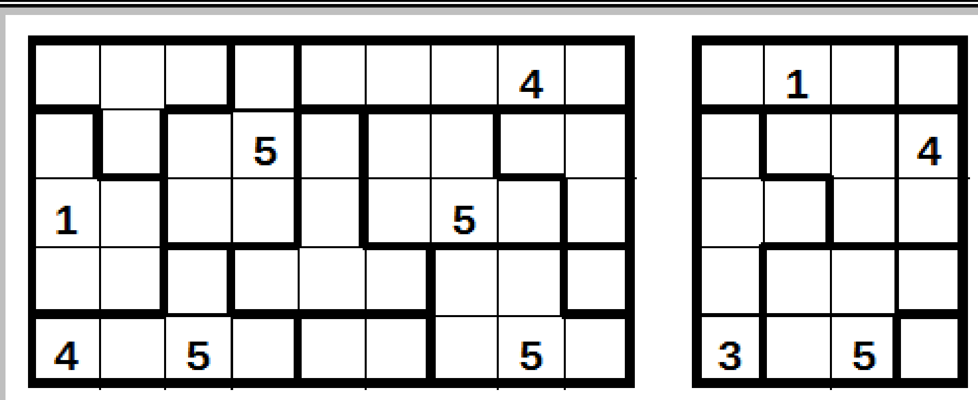
a	$\exists (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$
	Vrai. On prend $a = b = 0$ par exemple. mais plein d'autres sont possibles. comme $a = 0$ et $b = \pi/2$.
b	$\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$
	Faux. Contre-exemple $a = 0$ et $b = \pi$.
c	$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$
	Vrai. pour a donné, il suffit de prendre $b = a$. Ou même $b = a + \pi/2$ pour avoir « Faux implique... »
d	$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}^2,\ (\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)$
	Faux.

Pour le d si un tel a existait, il suffirait de prendre $b = a + 2.\pi$ pour avoir une contradiction dans l'implication.

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b (= a + 2.\pi) \in \mathbb{R}^2,\ \overline{(\sin(a) = \sin(b)) \Rightarrow (a = b)}$$

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b (= a + 2.\pi) \in \mathbb{R}^2,\ (\sin(a) = \sin(b))\ et\ (a \neq b)$$

◁ 19 ▷



On rappelle : $-3 \leqslant 1 \leqslant 2$. Qu'obtenez vous en élevant cette inégalité au carré comme le font certains élèves ?

Tectonic est un jeu développé depuis quelques années maintenant. Il s'agit de compléter une grille. La règle : une maison de taille n contient les entiers de 1 à n. Deux cases voisines ne peuvent pas contenir la même valeur. Une première grille résolue vous permet de comprendre. Et ensuite, c'est à vous

On ne passe pas de $-3 \leqslant 1 \leqslant 2$ à $(-3)^2 \leqslant 1^2 \leqslant 2^2$.
L'application $x \longmapsto x^2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
Elle l'est juste sur $[0,\ +\infty[$.
La bonne formule sera dans le cours (et vos copies) : $\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant a \leqslant b \Rightarrow a^2 \leqslant b^2$.

1	2	4	2	1	2	5	4	3
4	3	1	5	4	3	1	2	1
1	2	4	3	1	2	5	4	3
5	3	1	2	5	3	1	2	1
4	2	5	3	1	2	4	5	3

4	1	2	3
2	3	5	4
1	4	1	2
5	2	3	4
3	1	5	1

◃20▹ ♡ Calculez $\int_2^3 \frac{\log_x(2)}{x}.dx$.

Cette fois, l'application est $x \longmapsto \frac{\ln(2)}{x.\ln(x)}$. Et on a mine de rien une forme en $\frac{u'}{u}$ avec $u = \ln$.

On intègre en $x \longmapsto \ln(\ln(x))$ et on trouve $\boxed{\ln(2).\Big(\ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2))\Big)}$

◃21▹ I∼0) Pour tout réel x, on note $[x]$ sa partie entière et $dec(x)$ sa partie décimale (dite aussi partie fractionnaire), caractérisées par $[x] \in \mathbb{Z}$, $[x] \leqslant x < [x]+1$, $dec(x) = x - [x]$ ou même $x = [x] + dec(x)$ avec $[x] \in \mathbb{Z}$ et $dec(x) \in [0,\ 1[$.
Un élève affirme pour tout couple de réels $(x,\ y)$: $dec(x+y) = dec(x) + dec(y)$. Montrez qu'il a tort.
I∼1) Un élève affirme pour tout réel x $dec(-x) = -dec(x)$. Montrez qu'il a tort.
I∼2) Un élève affirme pour tout couple de réels $(x,\ y)$: $dec(x+y) \leqslant dec(x) + dec(y)$. Montrez qu'il n'a pas tort.

On s'attaque à l'élève qui affirme pour tout couple de réels $(x,\ y)$: $dec(x+y) = dec(x) + dec(y)$. Pour montrer qu'il a tort, il suffit de donner un contre-exemple. On devine que c'est le cas où la somme des deux parties décimales dépasse 1.

On a par exemple $dec(1,6) + dec(2,7) = 0,6 + 0,7 = 1,3$ et $dec(1,6 + 2,7) = dec(4,3) = 0,3$.

Passons à celui qui affirme $dec(-x) = -dec(x)$. On ne va pas chercher trop loin : $1,1$ a pour partie décimale $0,1$ tandis que son opposé $-1,1$ a pour partie décimale $0,9$ (en effet, $-1,1 = -2 + 0,9$).

Un élève affirme pour tout couple de réels $(x,\ y)$: $dec(x+y) \leqslant dec(x) + dec(y)$. Cette fois, on doit montrer qu'il a raison (négation de "il a tort"). Cette fois, on ne trouve pas de contre-exemple, et un exemple ne suffit pas.
On doit donner une vraie preuve. On se donne x et y. On écrit $x = [x] + dec(x)$ et $y = [y] + dec(y)$, avec $[x]$ et [y] dans $\mathbb{Z}$ et $dec(x)$ et $dec(y)$ dans $[0,\ 1[$. On somme : $x + y = [x] + [y] + dec(x) + dec(y)$.
Le nombre $[x] + [y]$ est entier, mais $dec(x) + dec(y)$ est entre 0 et 2. On distingue deux cas :
$0 \leqslant dec(x) + dec(y) < 1$ alors on reconnaît $dec(x) + dec(y) = dec(x) + dec(y)$
$1 \leqslant dec(x) + dec(y) < 2$ alors on écrit $x + y = ([x] + [y] + 1) + (dec(x) + dec(y) - 1)$reconnaît $dec(x) + dec(y) = dec(x) + dec(y) - 1$.

Dans tous les cas, on a
$$dec(x) + dec(y) \leqslant dec(x) + dec(y)$$
avec "la moitié des cas" qui sont des cas d'égalité.

I∼0) α est un irrationnel fixé. Pour tout couple d'entiers naturels $(a,\ b)$, on pose $a \ltimes b$ si et seulement si on a $dec(a.\alpha) \leqslant dec(b.\alpha)$. Montrez que c'est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$.

Réflexive	Antisymétrique	Transitive
$\forall a,\ a \ltimes a$	$\forall(a,b),\ (a \ltimes b \text{ et } b \ltimes a) \Rightarrow a = b$	$\forall(a,b,c),\ (a \ltimes b \text{ et } b \ltimes c) \Rightarrow a \ltimes c$

Laquelle de ces propriétés serait perdue si α était un rationnel *(une affirmation sans preuve est de la politique, pas des mathématiques...)* ?
Montrez que α et $dec(\alpha)$ définissent le même ordre $\ltimes$.

On montre la réflexivité. On se donne un entier naturel a. On a alors $a.\alpha = a.\alpha$ et $dec(a.\alpha) = dec(a.\alpha)$. On reconnaît $a \ltimes a$. Et c'est vrai pour tout a.

On se donne maintenant a, $b$et c. On fait deux hypothèses : $a \ltimes b$ et $b \ltimes c$. On les traduit : $dec(a.\alpha) \leqslant dec(b.\alpha)$ et $dec(b.\alpha) \leqslant dec(c.\alpha)$. Par transitivité de l'ordre usuel dans $\mathbb{R}$: $dec(a.\alpha) \leqslant dec(c.\alpha)$. On reconnaît $a \ltimes c$. On a montré $(a \ltimes b \text{ et } b \ltimes c) \Rightarrow (a \ltimes c)$ pour tout triplet d'entiers (a, b, c).

On se donne enfin a et b (on ne sait pas encore si ils sont distincts ou pas). On suppose $a \ltimes$b et $b \ltimes a$. On traduit : $dec(a.\alpha) \leqslant dec(b.\alpha)$ et $dec(b.\alpha) \leqslant dec(a.\alpha)$. On déduit déjà $deca.\alpha) = dec(b.\alpha)$. C'est gentil, mais ce n'est pas encore $a = b$.

Pourquoi le fait que $a.\sqrt{2}$et $b.\sqrt{2}$ aient les mêmes parties décimales entrainerait il que a soit égal à b ?

On écrit $a.\alpha = [a.\alpha] + dec(a.\alpha)$ et $b.\alpha = [b.\alpha] + dec(b.\alpha)$.
L'égalité de $dec(a.\alpha)$ et $dec(b.\alpha)$ donne alors $a.\alpha - [a.\alpha] = b.\alpha - [b.\alpha]$. On fait passer d'un côté et de l'autre : $(a - b).\alpha = [a.\alpha] - [b.\alpha]$. On souligne ce qui est entier : $\underline{(a - b)}.\alpha = \underline{[a.\alpha]} - \underline{[b.\alpha]}$. En revanche, α est irrationnel.
Si a est différent de b, on divise : $\alpha = \dfrac{[a.\alpha] - [b.\alpha]}{a - b}$; le réel α est rationnel. C'est une contradiction.

On a prouvé en fait $(a \neq b)$ et $(a \ltimes b \text{ et } b \ltimes a) \Rightarrow$ contradiction. C'est une autre formulation de antisymétrie.

C'est cette propriété d'antisymétrie qui est perdue avec un α rationnel.

Enfin, non. On sait juste que pour α rationnel, ce raisonnement ne tient plus. Mais pourquoi n'y en aurait il pas un autre ? Il faut donc vraiment un contre-exemple dans le cas α rationnel.

Prenons pour α un rationnel d'écriture $\dfrac{p}{q}$.
On a alors $dec(q.\alpha) = dec(2.q.\alpha) = 0$ puisque les deux nombres $q.\dfrac{p}{q}$ et $2.q.\dfrac{p}{q}$ sont entiers.
On a alors $q \ltimes 2.q$ et $2.q \ltimes q$. C'est bien un contre-exemple pour nier l'antisymétrie.
On a vraiment prouvé qu'on la perdait avec α rationnel.

On va utiliser cette propriété pour montrer plus loin que certains réels sont irrationnels.

On montre que α et $dec(\alpha)$ définissent la même relation d'ordre.
On pose donc $\beta = dec(\alpha)$.
Il faut montrer que si on a $a \ltimes b$ pour la relation issue de α, alors on a aussi $a \ltimes b$ pour la relation issue de β.

On prend a et b, on suppose $a \ltimes b$ pour l'ordre issu de α.
On traduit $dec(a.\alpha) \leqslant dec(b.\alpha)$ (objectif : $dec(a.\beta) \leqslant dec(b.\beta)$).

On calcule $dec(b.\beta) - dec(a.\beta) = (b.\beta - [b.\beta]) - (a.\beta - [a.\beta])$.
On remplace β par $\alpha - [\alpha]$ puisque telle est sa définition :

$$dec(b.\beta) - dec(a.\beta) = (b - a).\beta + [a.\beta] - [b.\beta]$$

$$dec(b.\beta) - dec(a.\beta) = (b - a).(\alpha - [\alpha]) + [a.\alpha - a.[\alpha]] - [b.\alpha - b.[\alpha]]$$

Mais comme $a.[\alpha]$ est un entier, "il sort de la partie entière" : $[a.\alpha - a.[\alpha]] = [a.\alpha] - a.[\alpha]$
et aussi $[b.\alpha - b.[\alpha]] = [b.\alpha] - b.[\alpha]$:

$$dec(b.\beta) - dec(a.\beta) = (b - a).(\alpha - [\alpha]) + ([a.\alpha] - a.[\alpha]) - ([b.\alpha] - b.[\alpha])$$

On simplifie : $dec(b.\beta) - dec(a.\beta) = (b-a).\alpha - +[a.\alpha] - [b.\alpha]$.
Par hypothèse "a est plus petit que b pour l'ordre issu de α", cette différence est positive.
On a donc, avec des notations $\forall(a,b),\ (a \ltimes_\alpha b \Rightarrow a \ltimes_{[\alpha]} b)$, et on constate même $\forall(a,b),\ (a \ltimes_\alpha b \Leftrightarrow a \ltimes_{[\alpha]} b)$.

Sur cette question, la difficulté était sans doutes déjà de comprendre la question.
Mais il faut s'attendre à ceci : une question de mathématiques n'est pas seulement "résoudre, calculer". C'est devenu raisonner. On n'est plus en train de passer le bac, on veut des ingénieurs, c'est à dire des gens qui raisonnement.
J'ai peur qu'à ce stade de l'année, il demeure même des élèves qui restent perplexes devant le corrigé, même après l'avoir lu : "que fallait il prouver, et pourquoi les lignes de formules que j'ai alignées n'ont aucun rapport avec la question".

I∼0) On prend $\alpha = \sqrt{2}$. Prouvez

x	$\sqrt{2}$	$2.\sqrt{2}$	$3.\sqrt{2}$	$4.\sqrt{2}$	$5.\sqrt{2}$	$6.\sqrt{2}$	$7.\sqrt{2}$
$[x]$	1	2	4	5	7	8	9

(et pas juste en disant $\sqrt{2} \simeq 1,41421$).
I∼1) Classez les entiers de 0 à 7 pour la relation $\ltimes$.

Cet α est bien irrationnel. On va avoir une relation d'ordre, mais sans rapport avec l'ordre usuel...

Pour prouver

x	$\sqrt{2}$	$2.\sqrt{2}$	$3.\sqrt{2}$	$4.\sqrt{2}$	$5.\sqrt{2}$	$6.\sqrt{2}$	$7.\sqrt{2}$
$[x]$	1	2	4	5	7	8	9

, on va établir des choses comme $1 \leqslant \sqrt{2} < 2$. On le prouve en montrant en fait $1 \leqslant 2 \leqslant 4$ puis en passant à la racine.

On fait de même avec les autres :

information	$1 \leqslant 2 < 4$	$4 \leqslant 4.2 < 9$	$16 \leqslant 9.2 < 25$	$25 \leqslant 16.2 < 36$	$49 \leqslant 25.2 < 84$	$64 \leqslant 36.2 < 81$	$81 \leqslant 49.2 < 100$
passage à la racine	$1 \leqslant \sqrt{2} < 2$	$2 \leqslant 2.\sqrt{2} < 3$	$4 \leqslant 3.\sqrt{2} < 5$	$5 \leqslant 4.\sqrt{2} < 6$	$7 \leqslant 5.\sqrt{2} < 8$	$8 \leqslant 6.\sqrt{2} < 9$	$9 \leqslant 7.\sqrt{2} < 10$
conclusion	$[\sqrt{2}] = 1$	$[\sqrt{2}] = 1$	$[3.\sqrt{2}] = 4$	$[4.\sqrt{2}] = 5$	$[5.\sqrt{2}] = 7$	$[6.\sqrt{2}] = 8$	$[7.\sqrt{2}] = 9$

Il existe aussi une version compacte :

$$1^2 \leqslant 2 < 2^2 \leqslant 4.2 < 3^2 < 4^2 \leqslant 9.2 < 5^2 \leqslant 16.2 < 6^2 < 7^2 \leqslant 25.2 < 8^2 \leqslant 36.2 < 9^2$$

$$1 \leqslant \sqrt{2} < 2 \leqslant 2.\sqrt{2} < 3 < 4 \leqslant 3.\sqrt{2} < 5 \leqslant 4.\sqrt{2} < 6 < 7 \leqslant 5.\sqrt{2} < 8 \leqslant 6.\sqrt{2} < 9$$

L'essentiel est de rédiger efficacement, proprement, lisiblement, sans lasser le lecteur par de longues explications répétitives, ni l'arnaquer par un "il est évident que".
Le boulot du matheux : "prouver ces inégalités par encadrement". Le boulot du physicien : "prouver par des presque égalités". Le boulot de l'ingénieur : "rendre la chose compréhensible".

Mais en quoi ceci nous avance-t-il ?

x	$dec(\sqrt{2})$	$dec(2.\sqrt{2})$	$dec(3.\sqrt{2})$	$dec(4.\sqrt{2})$	$dec(5.\sqrt{2})$	$dec(6.\sqrt{2})$	$dec(7.\sqrt{2})$
$[x]$	$\sqrt{2}-1$	$2.\sqrt{2}-2$	$3.\sqrt{2}-4$	$4.\sqrt{2}-5$	$5.\sqrt{2}-7$	$6.\sqrt{2}-8$	$7.\sqrt{2}-9$

Il reste à comparer deux à deux les nombres de la ligne du bas. Sans calculatrice. On veut des résultats exacts, et on veut aussi montrer qu'on mérite pour salaire plus que le prix d'une calculatrice ou d'un ordinateur (même une Pomme).

Par exemple, pour comparer $3.\sqrt{2}-4$ et $4.\sqrt{2}-5$, on étudie le signe de leur différence $\sqrt{2}-1$. Il est positif : $3.\sqrt{2}-4$ et $3.\sqrt{2}-4 \leqslant 4.\sqrt{2}-5$. On a donc $3 \ltimes 4$.
Comme on ne sait pas qui va gagner, on doit tous les comparer

	$\sqrt{2}-1$	$2.\sqrt{2}-2$	$3.\sqrt{2}-4$	$4.\sqrt{2}-5$	$5.\sqrt{2}-7$	$6.\sqrt{2}-8$	$7.\sqrt{2}-9$
$\sqrt{2}-1$	0	$\sqrt{2}-1$	$2.\sqrt{2}-3$	$3.\sqrt{2}-4$	$4.\sqrt{2}-6$	$5.\sqrt{2}-7$	$6.\sqrt{2}-8$
$2.\sqrt{2}-2$	$1-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}-2$	$2.\sqrt{2}-3$	$3.\sqrt{2}-5$	$4.\sqrt{2}-6$	$5.\sqrt{2}-7$
$3.\sqrt{2}-4$	$3-2.\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}-1$	$2.\sqrt{2}-3$	$3.\sqrt{2}-4$	$4.\sqrt{2}-5$
$4.\sqrt{2}-5$	$4-3.\sqrt{2}$	$3-2.\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}-2$	$2.\sqrt{2}-3$	$3.\sqrt{2}-4$
$5.\sqrt{2}-7$	$6-4.\sqrt{2}$	$5-3.\sqrt{2}$	$3-2.\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}-1$	$2.\sqrt{2}-2$
$6.\sqrt{2}-8$	$7-5.\sqrt{2}$	$6-4.\sqrt{2}$	$4-3.\sqrt{2}$	$3-2.\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}-1$
$7.\sqrt{2}-9$	$8-6.\sqrt{2}$	$7-5.\sqrt{2}$	$5-4.\sqrt{2}$	$4-3.\sqrt{2}$	$2-2.\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	0

Une fois rempli ce tableau de différences, on ne garde que celles qui sont positives :

	$dec(\sqrt{2})$	$dec(2.\sqrt{2})$	$dec(3.\sqrt{2})$	$dec(4.\sqrt{2})$	$dec(5.\sqrt{2})$	$dec(6.\sqrt{2})$	$dec(7.\sqrt{2})$
$dec(\sqrt{2})$		$\sqrt{2}-1$	$2.\sqrt{2}-3$	$3.\sqrt{2}-4$		$5.\sqrt{2}-7$	$6.\sqrt{2}-8$
$dec(2.\sqrt{2})$							$5.\sqrt{2}-7$
$dec(3.\sqrt{2})$	$3-2.\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}-1$		$3.\sqrt{2}-4$	$4.\sqrt{2}-5$
$dec(4.\sqrt{2})$		$3-2.\sqrt{2}$					$3.\sqrt{2}-4$
$dec(5.\sqrt{2})$	$6-4.\sqrt{2}$	$5-3.\sqrt{2}$	$3-2.\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}-1$	$2.\sqrt{2}-2$
$dec(6.\sqrt{2})$		$6-4.\sqrt{2}$		$3-2.\sqrt{2}$			$\sqrt{2}-1$
$dec(7.\sqrt{2})$							

Les signes obtenus nous renseignent de qui est le plus petit des deux :

	$dec(\sqrt{2})$	$dec(2.\sqrt{2})$	$dec(3.\sqrt{2})$	$dec(4.\sqrt{2})$	$dec(5.\sqrt{2})$	$dec(6.\sqrt{2})$	$dec(7.\sqrt{2})$
$dec(\sqrt{2})$		+	+	+		+	+
$dec(2.\sqrt{2})$							+
$dec(3.\sqrt{2})$	+	+		+		+	+
$dec(4.\sqrt{2})$		+					+
$dec(5.\sqrt{2})$	+	+	+	+		+	+
$dec(6.\sqrt{2})$		+		+			+
$dec(7.\sqrt{2})$							

Ce tableau antisymétrique permet de conclure

0	$\ltimes 5$	$\ltimes 3$	$\ltimes 1$	$\ltimes 6$	$\ltimes 4$	$\ltimes 2$	$\ltimes 7$

Évidemment, avec une calculatrice, on va très vite

n	1	2	3	4	5	6	7
$dec(n.\sqrt{2})$ à 10^{-2} près	0,41	0,83	0,24	0,66	0,07	0,49	0,90

Savoir non seulement calculer, mais aussi organiser son travail, voilà une part du métier d'ingénieur. D'ailleurs, ensuite, une fois qu'on est ingénieur, on organise son travail, et ce sont les autres qui calculent.

Pardon ? Vous avez tout fait à la calculatrice ?
Vade retro Satanas ! Allez rôtir en enfer en salle de TP de physique.

Et vous avez fait confiance à votre calculatrice ?
Les deux profs d'info vous bannissent.

∼0) On définit les suites (p) et (q) par $p_0 = q_0 = 1$ et $p_{n+1} = p_n + 2.q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$. Montrez que ce sont deux suites d'entiers naturels strictement croissantes.
∼1) Exprimez $p_{2.n+1}$ et $q_{2.n+1}$ à l'aide de $p_{2.n}$et $q_{2.n}$.
∼2) Exprimez $p_{2.(n+1)}$ et $q_{2.(n+1)}$ à l'aide de $p_{2.n}$ et $q_{2.n}$.
∼3) Montrez pour tout n : $(p_{2.n})^2 < 2.(q_{2.n})^2$, $(p_{2.n+1})^2 > 2.(q_{2.n+1})^2$ et $p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1} = 1$.
∼4) Déduisez $p_{2.n} < q_{2.n}.\sqrt{2} < p_{2.n} + \dfrac{p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1}}{q_{2.n+1}}$.
∼5) Quelle est la valeur de $dec(q_{2.n}.\sqrt{2})$?
∼6) Déduisez que la suite $(q_{2.n}.\sqrt{2})$ est strictement décroissante pour $\ltimes$.
∼7) Retrouvez que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

On définit $p_1 = q_1 = 1$ et $p_{n+1} = p_n + 2.q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$.
On initialise une récurrence sur n : $p_1$et q_1 sont des entiers naturels.
Si ensuite pour un n quelconque, $p_n$et $q_n$sont dans $\mathbb{N}$, alors $p_n + q_n$ et $p_n + 2.q_n$ y sont aussi (irait on jusqu'à invoquer la structure de monoïde ?).

L'hérédité est établie.

Pour la croissance, le mauvais réflexe est d'invoquer encore la récurrence.
Pourquoi ? Parce qu'il faut passer de $p_n \leqslant p_{n+1}$ à $p_{n+1} \leqslant p_{n+2}$, c'est à dire observer en même temps p_n, p_{n+1}et p_{n+2}.

Pour la croissance, il suffit de montrer que tout tout n, la différence $p_{n+1} - p_n$est positive.
Mais on a $p_{n+1} - p_n = 2.q_n$ dont on sait déjà qu'il est dans $\mathbb{N}^*$.
De même $q_{n+1} - q_n = p_n > 0$. Voilà, c'est aussi bête que ça.

Mais c'est surtout vous qui êtes bête si vous avez rempli des lignes pour ça...

On calcule :
$$p_{n+2} = p_{n+1} + 2.q_{n+1} = (p_n + 2.q_n) + 2.(p_n + q_n) = 3.p_n + 4.q_n$$
et
$$q_{n+2} = p_{n+1} + q_{n+1} = (p_n + 2.q_n) + (p_n + q_n) = 2.p_n + 3.q_n$$
On a donc $\boxed{p_{2.n+1} = p_{2.n} + 2.q_{2.n} \text{ et } q_{2.n+1} = p_{2.n} + q_{2.n}}$
et aussi $\boxed{p_{2.n+2} = 3.p_{2.n} + 4.q_{2.n} \text{ et } q_{2.n+2} = 2.p_{2.n} + 3.q_{2.n}}$

Cette fois, en revanche, on n'échappe peut être pas à la récurrence pour prouver $(p_{2.n})^2 < 2.(q_{2.n})^2$.
On initialise : $(p_0)^2 = 1 < 2.(q_0)^2 = 2$.

On suppose pour un n quelconque $(p_{2.n})^2 < 2.(q_{2.n})^2$.
On calcule alors la différence au rang $n+1$:
$$2.(q_{2.(n+1)})^2 - (p_{2.(n+1)})^2 = 2.(2.p_{2.n} + 3.q_{2.n})^2 - (3.p_{2.n} + 4.q_{2.n})^2$$
grâce à la question précédente (qui n'a pas compris que les questions s'enchaînent ?).
On développe
$$2.(q_{2.(n+1)})^2 - (p_{2.(n+1)})^2 = 2.(4.(p_{2.n})^2 + 12.p_{2.n}.q_{2.n} + 9.(q_{2.n})^2) - (9.(p_{2.n})^2 + 24.p_{2.n}.q_{2.n} + 16.(q_{2.n})^2)$$
Il reste $2.(q_{2.(n+1)})^2 - (p_{2.(n+1)})^2 = 2.(q_{2.n})^2 - (p_{2.n})^2$.
Et par hypothèse de récurrence, ceci est positif. Le principe de récurrence étend à tout n de $\mathbb{N}$.

En lisant le corrigé, certains vont peut être se dire "oh non ! ça tenait en quatre lignes". Ce sont là ceux qui auront suivi la pire des démarches : partir de $(p_{2.n})^2 < 2.(q_{2.n})^2$ et taper dessus pour arriver ou tenter d'arriver à $(p_{2.n+2})^2 < 2.(q_{2.n+2})^2$. Ceci n'a jamais été une démarche scientifique ni même intelligente.
Rappelons que pour prouver $A < B$, on ne tape sur rien. On calcule $B - A$ et on regarde si au final son signe est positif.

On s'intéresse ensuite aux différences $(p_{2.n+1})^2 - 2.(q_{2.n+1})^2$.
On initialise
$$(p_{2.n+1})^2 - 2.(q_{2.n+1})^2 = (1+2)^2 - 2.(1+1)^2 = 1$$
C'est positif.

On calcule ensuite pour un n donné $(p_{2.n+3})^2 - 2.(q_{2.n+3})^2 = (3.p_{2.n} + 4.q_{2.n})^2 - 2.(2.p_{2.n} + 3.q_{2.n})^2$.
Les mêmes double produits se simplifient, on voit encore $9-8$ et $18-16$: $(p_{2.n+3})^2 - 2.(q_{2.n+3})^2 = (p_{2.n+1})^2 - 2.(q_{2.n+1})^2$.
Bref, si à un rang n, on a $(p_{2.n+1})^2 - 2.(q_{2.n+1})^2$ strictement positif, on l'a encore au rang $n+1$.

On étudie ensuite la suite $(p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1})$ *(avec pour objectif de montrer qu'elle vaut toujours 1)*.
On la note $u_n$et on calcule $u_{n+1} = p_{2.n+3}.q_{2.n+2} - p_{2.n+2}.q_{2.n+3}$.
On remplace
$$u_{n+1} = (3.p_{2.n+1} + 4.q_{2.n+1}).(2.p_{2.n} + 3.q_{2.n}) - (3.p_{2.n} + 4.q_{2.n}).(2.p_{2.n+1} + 3.q_{2.n+1})$$
Les $p_{2.n}.p_{2.n+1}$ s'en vont *(facteurs 6 et -6)*.
Les $q_{2.n}.q_{2.n+1}$ s'en vont *(facteurs 12 et -12)*.
Les $p_{2.n}.q_{2.n+1}$ restent, mais juste avec facteur $8-9$.
Les $p_{2.n+1}.q_{2.n}$ restent aussi, mais juste avec facteur $9-8$.
Bref, $u_{n+1} = p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1} = u_n$.
La suite u est constante. Elle reste donc égale à son premier terme : 1.
Tiens, on a réussi à prouver ce résultat finalement sans récurrence. On pouvait aussi montrer pour les deux premières que la suite $((p_{2.n+1})^2 - 2.(q_{2.n+1})^2)$ notée (w_n) était constante, donc de signe constant.

On doit déduire $p_{2.n} < q_{2.n}.\sqrt{2} < p_{2.n} + \dfrac{1}{q_{2.n+1}}$. On a déjà obtenu $(p_{2.n})^2 < 2.(q_{2.n})^2$. Comme tout y est positif, on passe au radical : $p_{2.n} < \sqrt{2}.q_{2.n}$. Bon début.

On a aussi prouvé $2.(q_{2.n+1})^2 < (p_{2.n+1})^2$. On passe à la racine $\sqrt{2}.q_{2.n+1} < p_{2.n+1}$.
On remplace : $\sqrt{2}.q_{2.n+1} < p_{2.n+1}$.
On a donc
$$\sqrt{2} < \frac{p_{2.n+1}}{q_{2.n+1}} = \frac{p_{2.n+1}}{q_{2.n+1}} - \frac{p_{2.n}}{q_{2.n}} + \frac{p_{2.n}}{q_{2.n}}$$
tout naturellement.
On réduit au dénominateur commun
$$\sqrt{2} < \frac{p_{2.n}}{q_{2.n}} + \left(\frac{p_{2.n+1}}{q_{2.n+1}} - \frac{p_{2.n}}{q_{2.n}}\right) = \frac{p_{2.n}}{q_{2.n}} + \frac{p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1}}{q_{2.n+1}.q_{2.n}}$$
On remultiplie par $q_{2.n}$ *(positif)* : $q_{2.n}.\sqrt{2} < p_{2.n} + \dfrac{p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1}}{q_{2.n+1}}$.
C'est la formule demandée *(et il n'était pas judicieux de remplacer $p_{2.n+1}.q_{2.n} - p_{2.n}.q_{2.n+1}$ par 1 pour la trouver).*

Maintenant, on remplace par 1 : $p_{2.n} < q_{2.n}.\sqrt{2} < p_{2.n} + \dfrac{1}{q_{2.n+1}}$.
On a encadré $q_{2.n}.\sqrt{2}$ par l'entier $p_{2.n}$ et ce même entier augmenté d'un nombre plus petit que 1.
On ira même écrire $p_{2.n} < q_{2.n}.\sqrt{2} < p_{2.n} + \dfrac{1}{q_{2.n+1}} < p_{2.n} + 1$.
On extrait par définition la partie entière : $[q_{2.n}.\sqrt{2}] = p_{2.n}$.
On sort ce qu'il manque : $\boxed{dec(q_{2.n}.\sqrt{2}) = q_{2.n}.\sqrt{2} - p_{2.n}}$

On nous demande de montrer que la suite $(q_{2.n})$ est décroissante pour $\ltimes$.

On revient à la définition de $q_{2.n+2} \ltimes q_{2.n}$:
$$dec(q_{2.n+2}.\sqrt{2}) \leqslant dec(q_{2.n}.\sqrt{2})$$
C'est ce qu'on doit montrer ? On calcule une différence : $dec(q_{2.n}.\sqrt{2}) - dec(q_{2.n+2}.\sqrt{2})$.
On remplace par le résultat précédent :
$$dec(q_{2.n}.\sqrt{2}) - dec(q_{2.n+2}.\sqrt{2}) = (q_{2.n}.\sqrt{2} - p_{2.n}) - (q_{2.n+2}.\sqrt{2} - p_{2.n+2})$$
On regroupe
$$dec(q_{2.n}.\sqrt{2}) - dec(q_{2.n+2}.\sqrt{2}) = (q_{2.n} - q_{2.n+2}).\sqrt{2} - (p_{2.n} - p_{2.n+2})$$
Pour avoir le signe de cette quantité, on compare $(p_{2.n} - p_{2.n+2})^2$ et $(q_{2.n} - q_{2.n+2})^2.2$ (élévation au carré).
On effectue donc une différence $2.(q_{2.n} - q_{2.n+2})^2 - (p_{2.n} - p_{2.n+2})^2$.

Je vous laisse montrer par récurrence sur n que cette différence vaut toujours -4.
Ce signe négatif permet de conclure.

> *Attention, il y a un faux raisonnement :*
> *une suite majorée par une suite décroissante est décroissante. Ceci est faux, et on a des contre-exemples.*

On va déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Quand je dis déduire, je n'attends donc pas le "j'ai appris par cœur une démonstration l'an denier, je la ressors".
L'idée est ici d'exploiter ce qui précède.
On fait effectivement quand même un raisonnement par l'absurde.
Imaginons que $\sqrt{2}$ soit le rationnel $\dfrac{P}{Q}$.
Alors chaque $q_{2.n}.\sqrt{2}$ est un rationnel de la forme $\dfrac{P.q_{2.n}}{Q}$.
Quitte à poser la division euclidienne du numérateur, ceci s'écrit $entier + \dfrac{r}{Q}$ avec r égal à à un entier entre 0 et $Q-1$.
La partie décimale $dec\left(\dfrac{P.q_{2.n}}{Q}\right)$ prend toujours les mêmes valeurs en nombre fini : $\dfrac{0}{Q}$, $\dfrac{1}{Q}$, $\dfrac{2}{Q}$ ou $\dfrac{Q-1}{Q}$.
Mais comment une suite ne prenant qu'un nombre fini de valeurs peut elle alors décroître strictement ?
On a notre contradiction.

D'accord, le prix à payer pour cette démonstration est plus lourd que la démonstration de Terminale. Mais la preuve conduite ici est reproductible sur e, alors que celle de Terminale n'est pas exportable pour e.

∼0) Écrivez un script Python qui pour n donné retourne deux liste : celle des p_k pour k de 0 à n et celle des q_k pour k de 0 à n. Par exemple, pour n égal à 5 elle devra répondre [1, 3, 7, 17, 41, 99], [1, 2, 5, 12, 29, 70].

On va initialiser deux entiers : `p = 1` et `q = 1`,
puis deux listes presque vides : `P = [1]` et `Q = [1]`.

Ensuite, on va faire une boucle où `k` sert juste de compteur : `for k in range(n)`.

On calcule chaque nouveau couple de termes `p,q = p+2*q, p+q`.

On mémorise ensuite `P.append(p)` et `Q.append(q)`.

On retourne le doublet de listes.

```
def racine(n) :
....p, q = 1, 1
....P, Q = [1], [1]
....for k in range(n) :
........p, q = p+2*q, p+q
........P.append(p)
........Q.append(q)
....return(P, Q)
```

L'affection simultanée `p, q = p+2*q, p+q` fait à la fois `p = p+2*q` et `q = p+q` ; en même temps.
Si vous écrivez `p = p+2*q` suivi de `q = p+q`, vous avez perdu l'ancienne valeur de `p`.
Si vous ne faites pas du simultané, vous pouvez taper `p = p+2*q` puis `q = p-q`.

Ou alors vous créez un tampon

```
a = p
b = q
p = a+2*b
q = a+b
```

I∼0) On prend $\alpha = 5.\sqrt{2}$. J'ai trouvé les valeurs approchées suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$5.\sqrt{2}.n$	0	7.07	14.14	21.21	28.28	35.35	42.43	49.50	56.57	63.64	70.71	77.78	84.85	91.92

Un élève en déduit rapidement : la suite (n) des entiers est visiblement croissante pour l'ordre $\ltimes$. Montrez qu'il a tort.
I∼1) Existe-t-il α vérifiant "(n) est croissante pour $\ltimes$" ?

On nous a donné

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$dec(5.\sqrt{2}.n)$	0	0.07	0.14	0.21	0.28	0.35	0.42	0.49	0.56	0.63	0.71	0.78	0.85	0.92

Certes, sur ces observations, on a

$$0 \ltimes 1 \ltimes 2 \ltimes 3 \ltimes 4 \ltimes 5 \ltimes 6 \ltimes 7 \ltimes 8 \ltimes 9 \ltimes 10 \ltimes 11 \ltimes 12 \ltimes 13$$

Mais ce n'est pas parce qu'une propriété est valable jusqu'au rang 13 qu'elle va se poursuivre jusqu'à l'infini.

On rappelle que la proposition $n \leqslant 100$ semble vraie pour beaucoup d'entiers si on fait l'expérience avec les premiers qu'on a sous la main. Peut on en déduire $n \leqslant 100$ pour tout entier naturel n ?

Au rang suivant, on voit croître encore le terme "derrière la virgule". Et il peut dépasser la virgule, non ?
En multipliant encore par 2 le réel $7.5.\sqrt{2}$, on obtient $98,994$ environ. La partie décimale a encore augmenté, mais elle n'a pas atteint 1.
Mais au rang suivant, on a de manière approchée $106,06$ ou $106,06$. La partie décimale s'effondre et tombe entre 0 et 1 :

$$0 \ltimes 15 \ltimes 1 \ltimes 2 \ltimes 3 \ltimes 4 \ltimes 5 \ltimes 6 \ltimes 7 \ltimes 8 \ltimes 9 \ltimes 10 \ltimes 11 \ltimes 12 \ltimes 13 \ltimes 14$$

La suite n'est vraiment plus croissante.

Proprement, $11\,236 = 106^2 \leqslant 15^5.(25.2) = 11\,250 < 11\,449 = 107^2$.
On en déduit après passage à la racine : $[15.5.\sqrt{2}] = 106$.
On soustrait : $dec(15.5.\sqrt{2}) = 75.\sqrt{2} - 106$.
Ce nombre est plus petit que $dec(5.\sqrt{2})$ qui vaut $5.\sqrt{2} - 7$.
En effet, $75.\sqrt{2} - 106 < 5.\sqrt{2} - 7$ s'obtient en comparant $(70.\sqrt{2})^2$ et 99^2
(9 800 contre 9 801, de peu, mais on gagne !).

De toutes façons, on doit pouvoir, dans cette suite des $dec(n.5.\sqrt{2})$ retrouver des $dec(q_{2.n}.\sqrt{2})$ qui vont en décroissant.

On cherche α tel que la suite (n) soit croissante pour $\ltimes$.
Comme α et $dec(\alpha)$ définissent le même ordre, on va supposer α entre 0 et 1.

Ceci revient à demander $n \ltimes n+1$ pour tout n (inégalité stricte, car $n+1 \neq n$).
On traduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ n.\alpha - [n.\alpha] < (n+1).\alpha - [(n+1).\alpha]$.
On fait passer d'un côté $\forall n \in \mathbb{N},\ [(n+1).\alpha] - [n.\alpha] < \alpha$.
Or, $[(n+1).\alpha] - [n.\alpha]$ est un entier naturel.

Si il est nul, on n'a pas d'information.

Mais on veut avoir cette minoration pour tout n. Or, il y a au moins un n pour lequel $[(n+1).\alpha] - [n.\alpha]$ est non nul.
En effet, si tel n'était pas le cas, on aurait $[(n+1).\alpha] = [n.\alpha]$ pour tout n. On aurait donc, quitte à remonter $[(n+1).\alpha] = [0.\alpha] = 0$ pour tout n. La suite des $n.\alpha$ resterait donc toujours entre 0 et 1, alors même qu'elle tend vers l'infini... On tient notre contradiction.
Comme $[(n+1).\alpha] = [n.\alpha]$ est non nul au moins une fois, il vaut 1 au moins une fois (c'est un entier).
Le réel αest donc au moins égal à 1.
Ceci contredit que α a été pris entre 0 et 1.

I∼0) On prend $\alpha = e$ *(base des logarithmes népériens)*. Classez pour la relation $\ltimes$ les nombres 10^k pour k de 0 à 10.

On doit calculer $d(10^k.e)$ pour les premières valeurs de k, puis trier ces nombres.

On crée les listes arrondies

k	$10^k.e$	$dec(10^k.e)$
0	2.718281828459045 à 10^{-15} près	0.718 à 10^{-3} près
1	27.18281828459045 à 10^{-14} près	0.182 à 10^{-3} près
2	271.8281828459045 à 10^{-13} près	0.828 à 10^{-3} près
3	2718.281828459045 à 10^{-12} près	0.281 à 10^{-3} près
4	27 182.81828459045 à 10^{-11} près	0.818 à 10^{-3} près
5	271 828.1828459045 à 10^{-10} près	0.182 à 10^{-3} près
6	2 718 281.828459045 à 10^{-9} près	0.828 à 10^{-3} près
7	27 182 818.28459045 à 10^{-8} près	0.284 à 10^{-3} près
8	271 828 182.8459045 à 10^{-7} près	0.845 à 10^{-3} près
9	2 718 281 828.459045 à 10^{-6} près	0.459 à 10^{-3} près
10	27 182 818 284.59045 à 10^{-5} près	0.590 à 10^{-3} près

Bref, on lit les décimales de e en gardant à chaque fois un lot de trois.
On les classe ensuite

k	$dec(10^k.e)$
1	0.18281 à 10^{-5} près
5	0.18284 à 10^{-5} près
3	0.281 à 10^{-3} près
7	0.284 à 10^{-3} près
9	0.459 à 10^{-3} près
10	0.590 à 10^{-3} près
0	0.718 à 10^{-3} près
4	0.818 à 10^{-3} près
2	0.82818 à 10^{-5} près
6	0.82845 à 10^{-3} près
8	0.845 à 10^{-3} près
	$10^1 \ltimes 10^5 \ltimes 10^3 \ltimes 10^7 \ltimes 10^9 \ltimes 10^{10} \ltimes 10^0 \ltimes 10^4 \ltimes 10^2 \ltimes 10^6 \ltimes 10^8$

$\sim$0) Montrez pour tout entier naturel n : $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$ *(deux mots clefs à puiser dans le cours rien que pour cette question).*
$\sim$1) Montrez que $\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ est une somme d'entiers *(on le notera A_n).*
$\sim$2) Montrez $dec(n!.e) = \int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$ *(qu'on pourra noter I_n, $n \geqslant 2$).*
$\sim$3) Montrez que la suite $(n!)$ est strictement décroissante pour la relation $\ltimes$.
$\sim$4) Déduisez que e est effectivement irrationnel.

On veut prouver

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$$

Il y a un n, on va essayer une récurrence sur n.
Pour n égal à 0, la somme ne contient qu'un terme. On doit prouver $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1}.\int_0^1 e^t.dt$. Et l'intégrale vaut $[e^t]_{t=0}^{t=1}$ ce qui fait $e-1$. On ajoute 1, on a e. C'est initialisé.

On suppose ensuite que pour un n quelconque, on a

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$$

On vise

$$e = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^{n+1}.dt$$

On part de $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$ et on intègre $\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$ par parties : $\left\{\begin{array}{ccc} e^t & \hookrightarrow & e^t \\ (1-t)^n & \hookleftarrow & -\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \end{array}\right|$.
On gagne un terme égal à $\Big[-e^t.\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\Big]_{t=0}^{t=1}$ de valeur $\frac{1}{n+1}$, et le terme intégrale $\frac{1}{n+1}.\int_0^1 e^t.(1-t)^{n+1}.dt$ avec un signe plus.
On multiplie par $\frac{1}{n!}$:

$$\frac{1}{n!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^{n+1}.dt$$

Le terme $\frac{1}{(n+1)!}$ rejoint la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ qui devient $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}$.
Le terme $\frac{1}{(n+1)!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^{n+1}.dt$ devient le nouveau terme intégrale.
La formule est établie par récurrence sur n et intégration par parties.

La somme $\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}$ semble avoir un rapport avec la question précédente. mais c'est surtout une somme d'entiers.
Quand on écrit avec des points de suspension : $\frac{n!}{k!} = \frac{1.2.3\ldots k.(k+1)\ldots n}{1.2\ldots k}$. Il reste $(k+1).(k+2)\ldots n$. C'est à chaque fois un produit d'entiers.

On peut passer par une récurrence. Mais attention, quand on passe de A_n à A_{n+1}, on ajoute un terme de plus dans la somme, mais on change aussi les numérateurs. Si vous y tenez : $A_{n+1} = (n+1).A_n + 1$. Mais est ce que ça vous semble évident à partir de $A_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}$ et $A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{k!}$?

On met bout à bout quelques résultats précédents :

$$n!.e = n!.\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{n!}{n!}.\int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$$

On reconnaît $n!.e = A_n + I_n$ avec $I_n = \int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$.
Déjà, A_n est entier. Ensuite, I_n est positive, comme intégrale d'une application positive.
Peut on montrer que I_n est plus petite que 1 ? Si tel est le cas, on aura séparé en "partie entière et partie décimale".
On majore tous les e^t par e :

$$I_n \leqslant \int_0^1 e.(1-t)^n.dt$$

On intègre e $-e.\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}$ entre 0 et 1. On a donc $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$. Dès que n a dépassé 2, ce majorant est bien plus petit que 1.
On a un entier et un réel entre 0 et 1 ; c'est ce réel qui mesure la partie fractionnaire.

Ayant, avec notre notation $dec(n!.e) = I_n = \int_0^1 e^t.(1-t)^n.dt$, la question de la monotonie de $(n!.e)$ pour la relation $\ltimes$ se ramène à la comparaison de I_n et I_{n+1}.
Surtout, on ne tente pas de calculer I_n, on ne ferait que revenir en arrière avec la somme A_n et l'irrationnel e.
Pour savoir si on a $I_n \leqslant I_{n+1}$ ou $I_{n+1} \leqslant I_n$, on calcule leur différence et on en détermine le signe :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^t.\Big((1-t)^{n+1} - (1-t)^n\Big).dt$$

On a même

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^t.(1-t)^n.(1-t-1).dt$$

Sous l'intégrale, tout est positif, qu'il s'agisse de e^t, ou de $(1-t)^n$ ou de t. Ah, mais il reste un signe moins.
On a donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
Ayant $dec((n+1)!.e) = I_{n+1} < I_n = dec(n!.e)$, on identifie $(n+1)! \ltimes n!$.
Ceci étant vrai pour tout n, la suite $(2!,\ 3!,\ 4!,\ldots n!,\ldots)$ est strictement décroissante pour $\ltimes$.

On termine avec un petit raisonnement par l'absurde.
Si e était rationnel, de la forme $\frac{p}{q}$, la suite $(dec(n.e))$ ne prendrait qu'un nombre fini de valeurs.
En effet, ce seraient des $dec\Big(\frac{n.p}{q}\Big)$, ne prenant des valeurs que parmi 0, $\frac{1}{q}$, $\frac{2}{q}$ jusqu'à $\frac{q-1}{q}$.
Ne prenant des valeurs qu'en nombre fini, on ne pourrait pas avoir cette suite strictement décroissante qui prend, elle, une infinité de valeurs.
Et c'est ainsi, madame, que e est irrationnel !

I∼0) *A toutes fins utiles : $e \simeq 2.718281828459045$ à 10^{-15} près.* Si vous avez l'âme poétique, je vous rappelle que pour retenir les décimales de π, on peut faire appel à la phrase "QUE J'AIME À FAIRE CONNAÎTRE CE NOMBRE UTILES AUX SAGES, IMMORTEL ARCHIMÈDE" dans laquelle il suffit de compter le nombre de lettres de chaque mot *(convention : pour 0 un mot de dix lettres)*. Alors, trouvez moi une phrase pour e.

que	j'	aime	à	faire	connaître	ce	nombre	utile	aux	sages	immortel	Archimède
3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9

La phrase

TU AIDERAS À RAPPELER TA QUANTITÉ À BEAUCOUP DE DOCTEURS AMIS

a déjà été proposée. Qu'en pensez vous ?

Et pour le prof de SII, comme on arrondit $2 \simeq e \simeq 3 \simeq \pi$, on a juste besoin de « *oh* ».

Paris aux prestigieuses ***scè***nes est la capitale mondiale capitale du ***lu***xe. On y rencontre plein de ***t***i***t***is qui ru***s***ent et bi***s***ent des copines à l'air cool. On voit plein de péni***ches*** à la ***S***eine et plein de b***us*** faciles à c***it***er. On entend parfois soupirer des touristes subjugués par l'abî***m***e dans la ***T***our : "Ah que j'aurais aimé connaître vos ***motiv***ations, Ei***ffel*** !"

Et Joël Martin en Haute-Savoie (ah le ***g***oût de Mont-***B***lanc) :
Les amateurs de ***p***entes collectionnent les ***f***aces, ***é***patés par les f***a***ces et les ***p***entes e***ff***ilées. Une grimpeuse qui apprécie la Ver***t***e quand elle est ***j***olie, et surtout la Ver***t***e ennei***g***ée, parcourt le mont sans craindre le vi***de***. Une autre lu***g***e sous la Ver***t***e. Mais gare à l'excès de ***gl***isse quand se déchaîne le ***v***ent... détr***e***sse sur les f***a***ces !

◁ 22 ▷ L'entier 2017 est la somme de deux nombres palindromes ; trouvez les. Rappel : exemples de palindromes 134431, 54366345, 98589.
Faites de même pour 2018. Montrez que c'est impossible pour 2019.
Allez, trouvez moi les millésimes à venir qui seront des sommes de deux palindromes.

Si les deux ont quatre chiffres, *abba* et *cddc*, alors le chiffre de tête sera égal au chiffre de queue, à peut être une retenue près. Et là, c'est étrange.
On prend donc un palindrome à quatre chiffres *abba* et un palindrome à trois chiffres *cdc*.

On pose l'addition $\begin{array}{cccccc} & & a & b & b & a \\ + & & & c & d & c \\ - & - & - & - & - & - \\ = & & 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}$.

On tente avec $a = 2$ et pas de retenue venant de b+c de la colonne des centaines $\begin{array}{cccccc} & & 2 & b & b & 2 \\ + & & & c & d & c \\ - & - & - & - & - & - \\ = & & 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}$.

c vaut 5 à cause des unités : $\begin{array}{cccccc} & & a & b & b & 2 \\ + & & & 5 & d & 5 \\ - & - & - & - & - & - \\ = & & 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}$. Il y a un problème pour b.

On reprend avec une retenue venant de $b + c$: $\begin{array}{cccccc} & & {}^{1}1 & b & b & 1 \\ + & & & c & d & c \\ - & - & - & - & - & - \\ = & & 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}$.

c vaut cette fois 6 et pour avoir une retenue b vaut 4 : $\begin{array}{cccccc} & & {}^{1}1 & 4 & 4 & 1 \\ + & & & 6 & d & 6 \\ - & - & - & - & - & - \\ = & & 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}$ ah non !

c vaut cette fois 6 et pour avoir une retenue b vaut 3 : $\begin{array}{cccccc} & & {}^{1}1 & {}^{1}3 & 3 & 1 \\ + & & & 6 & 8 & 6 \\ - & - & - & - & - & - \\ = & & 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}$ ah oui !

Pour 2018 : $\begin{array}{cccccc} & & {}^{1}1 & {}^{1}2 & 2 & 1 \\ + & & & 7 & 9 & 7 \\ - & - & - & - & - & - \\ = & & 2 & 0 & 1 & 8 \end{array}$.

Pour 2019 on aboutit à des contradictions quel que soit le chemin suivi (tester aussi les palindromes plus courts $abba + cc$).

Programme brut de test « un nombre est il un palindrome » :

```
def Palin(n) :
....Direct = list(str(n)) #transformation de l'entier en liste
....Indirecte = Direct[ : :-1] #copie de la liste inversée
....return(Direct==Indirect) #comparaison des deux listes
```

```
def Decomp(n) :
....L = [ ]
....for k in range(n//2) :
.......if Palin(k) and Palin(n-k) :
...........L.append([k, n-k])
....return(L)
```

```
for n in range(200,2050) :
....print(n, Decomp(n))
```

```
2020 [[909, 1111]]
2022 [[141, 1881]]
2023 [[252, 1771]]
2024 [[22, 2002], [33, 1991], [363, 1661]]
2025 [[474, 1551]]
2026 [[585, 1441]]
2027 [[696, 1331]]
2029 [[808, 1221]]
2030 [[919, 1111]]
2032 [[151, 1881]]
2033 [[262, 1771]]
2034 [[373, 1661]]
2035 [[33, 2002], [44, 1991], [484, 1551]]
2036 [[595, 1441]]
2038 [[707, 1331]]
2039 [[818, 1221]]
2040 [[929, 1111]]
2042 [[161, 1881]]
2043 [[272, 1771]]
2044 [[383, 1661]]
2045 [[494, 1551]]
2046 [[44, 2002], [55, 1991]]
2047 [[606, 1441]]
2048 [[717, 1331]]
2049 [[828, 1221]]
```

Je n'ai gardé que ceux avec une (ou des) décompositions.

◃23▹ ♡ Les a_k sont n réels strictement positifs ; montrez : $\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big).\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\Big) \geqslant n^2$.

Ce n'est pas évident si on ne pense pas à étudier le signe et le discriminant du trinôme $x^2.\sum_{k=1}^{n} a_k - 2.x.\sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$, mais une fois qu'on a vu ça, on se dit que c'est génial !

Partons comme suggéré (mais pourquoi donc ?) de

$$x^2.\sum_{k=1}^{n} a_k - 2.n.x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

(puisque $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$).

C'est un trinôme du second degré en x de discriminant $2.n^2 - 4.\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big).\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\Big)$. Et pourquoi pas. On peut envisager d'en prendre la racine carrée pour trouver les racines. Si toutefois ce discriminant est positif.

Mais sinon, on peut écrire $x^2.\sum_{k=1}^{n} a_k - 2.x.\sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} a_k.x^2 - \sum_{k=1}^{n} 2.x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$

$$x^2.\sum_{k=1}^{n} a_k - 2.x.\sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k.x^2 - 2.x + \frac{1}{a_k}\Big)$$

Et chaque trinôme du second degré a un discriminant nul $(4-4)$.
Mais rien ne relie le discriminant de la somme des polynômes aux discriminants de chacun !
Seulement voilà, chaque petit trinôme $\Big(a_k.x^2 - 2.x + \frac{1}{a_k}\Big)$ reste de signe constant positif (c'est en fait $(\sqrt{a_k}.x-1)^2$, si si).
La somme est donc positive.

Le trinôme $x^2.\sum_{k=1}^{n} a_k - 2.n.x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ reste donc positif.
Comme il ne change jamais de signe, son discriminant est négatif ou nul.
On a donc

$$2.n^2 - 4.\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big).\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\Big) \leqslant 0$$

On traduit : $2.n^2 - 4.\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big).\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\Big) \geqslant n^2$.
C'est exactement ce qu'on voulait.

Rédigé dans le sens direct et magique. Considérons

$$x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \Big(\sqrt{a_k}.x - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\Big)^2$$

C'est une application positive, comme somme de carrés de réels.
Si on la développe , c'est le trinôme du second degré

$$x \longmapsto x^2.\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big) - 2.n.x + \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\Big)$$

Comme il reste de signe constant, il n'a pas de racines, et son discriminant est négatif ou nul.
On calcule donc :

$$0 \geqslant \Delta = 4.n^2 - 4.\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big).\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\Big)$$

Démonstration dite « de Cauchy-Schwarz ».

Il existe aussi une preuve directe, en développant.
On part du produit $\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big).\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\Big)$ qu'on va noter P.
On écrit plutôt $P = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big).\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\Big)$ par soucis des variables indépendantes.
On développe

$$P = \Big(\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant i\leqslant n}} \frac{a_k}{a_i}\Big)$$

avec n^2 termes.
On isole déjà les n termes diagonaux $(i=k)$:

$$P = \Big(\sum_{i=k} \frac{a_k}{a_i} + \sum_{i\neq k} \frac{a_k}{a_i}\Big)$$

(n termes plus n^2-n termes).
On regroupe les autres deux à deux :

$$P = \Big(\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i<k} \frac{a_k}{a_i} + \frac{a_i}{a_k}\Big)$$

(n termes, plus $\dfrac{n.(n-1)}{2}$ couples de deux termes « symétriques »).
Mais chaque $\dfrac{a_k}{a_i}+\dfrac{a_i}{a_k}$ vaut au moins 2 (quantités de la forme $x+\dfrac{1}{x}$, c'est classique [1]).
On a donc n termes égaux à 1 et $\dfrac{n^2-n}{2}$ termes plus grands que 2.
La somme dépasse $n+2.\dfrac{n^2-n}{2}$. C'est bien n^2.

Corolaire :

$$\frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}\geqslant\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}}=\frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}}{n}}$$

La moyenne arithmétique est plus grande que la moyenne harmonique.
Qui est la moyenne harmonique ? C'est l'inverse de la moyenne des inverses.
Pour deux termes, c'est $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$.

◁24▷ ♣ Donnez un sens à $x\longmapsto\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}}$ et calculez l'intégrale de cette application de 0 à 1.

Réflexe pas assez mathématique, mais futé : si $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}}$ alors $y^2=x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}=x+y$.

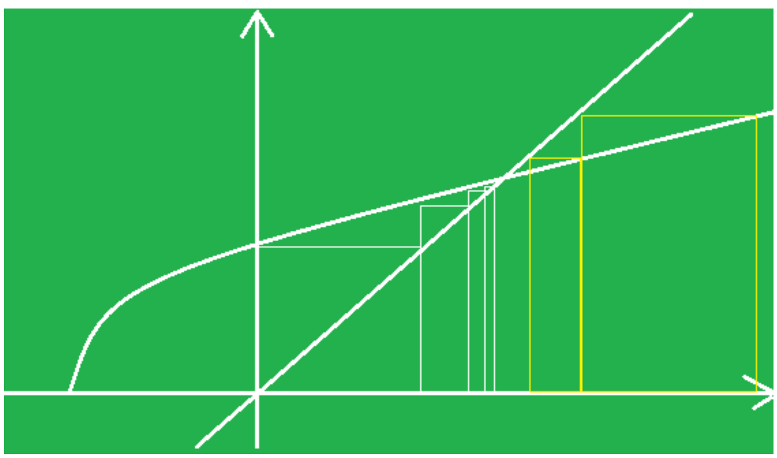
---

y est donc clairement défini à partir de x par une équation du second degré $y^2-y-x=0$ dont on ne retient que la racine positive : $y=\dfrac{1+\sqrt{1+4.x}}{2}$.

C'est alors facile d'intégrer $\boxed{\displaystyle\int_0^1\frac{1+\sqrt{1+4.x}}{2}.dx=\frac{1}{2}+\left[\frac{(1+4.x)^{\frac{3}{2}}}{6}\right]_0^1=\frac{5+5.\sqrt{5}}{12}}$

Mais on est en maths. On veut bien faire des recherches sur des objets dont l'existence n'a pas été prouvée, se perdre en conjecture plus ou moins étonnantes voire farfelues (comme $1+2+4+8+16+\ldots=-1$), mais après, il faut quand même prouver que ce dont on parle existe. Le physicien n'a pas ce problème. Il dit qu'il ne parle que ce ce qui existe. Et vous demande dès lors un acte de foi sur l'univers qui vous entoure (vous faites plus confiance à vos sens ou à votre cerveau, c'est peut être ça qui distingue physique et maths [2])

On a la suite $u_0=0$ et $u_{n+1}=\sqrt{x+u_n}$, dont les termes sont donc 0, $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+\sqrt{x}}$, $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ et ainsi de suite.
On étudie donc la suite récurrente, et elle converge.
Attention, sur le dessin, x est fixé, et on compare les graphes de $u\longmapsto u$ et $u\longmapsto\sqrt{x+u}$.



Et si on s'entraînait à TeX ? $x\longmapsto\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}}$ c'est
$x \rightarrow \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x+\ldots}}}}$.
Et cette fois, **\displaystyle** n'apporte rien. **\ldots** c'est les trois petits points.

---

1. variations de $t\longmapsto t+\frac{1}{t}$, ou développement de $\left(\sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)^2$, ou comparaison de moyenne arithmétique et géométrique, ou reconnaissance de $2.ch(\ln(t))$
2. *mais c'est quoi les cinq sens si il n'y a pas un cerveau derrière pour interpréter*

SI ! OR, CE JEUNE SI LÀS (RÉMI), LAVÉ VA LIMER SA LISE, NUE, JE CROIS.
AVARE, TA REVUE NUE PEU NEUVE RATERA, VA !
A L'ASILE, TU AS SAUTÉ LISA, LÀ.
LUC N'OSA ! L'AMI ! SALI, IL A SI MAL À SON CUL.

◃25▹ Encore des stations de métro (des terminus de lignes) :
`Plan d'égout incorrect. Médailles à iris. Démolirait une rime. Dirigé au métronome. Ponte des vers. Découpons le bandit glouton. Thé lacté. Le pot-de-vin consolable. Soleil adulé téléchargé. Suivant en déchéance.`
Et en cadeau : Un con rose, Frais bordel virtuel.

Porte de Clignancourt.
Mairie des Lilas.
Mairie de Montreuil.
Mairie de Montrouge.
Pont de Sèvres.
Boulogne pont de Saint-Cloud.
Châtelet.
Pont de Levallois-Becon.
Charles de Gaulle-Etoile.
Château de Vincennes.

Et sur `http ://metromap.fr/assets/img/Paris_Metro_map_04_2020.pdf` vous avez un plan de métro « anamorphosé ».

◃26▹ On note W_n la n^{ieme} intégrale de Wallis. Montrez : $(W_{n+p})^2 \leqslant W_{2.n}.W_{2.p}$. (un carré, des intégrales, une inégalité...)

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\Big(\int_0^{\pi/2} f(t).g(t).dt\Big)^2 \leqslant \Big(\int_0^{\pi/2}(f(t))^2.dt\Big).\Big(\int_0^{\pi/2}(g(t))^2.dt\Big)$$

On prend $f = \sin^n$ et $g = \sin^p$ et c'est fini !

On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les fonctions continues :

$$\int_a^b f(t).g(t).dt\Big)^2 \leqslant \Big(\int_a^b (f(t))^2.dt\Big).\Big(\int_a^b (g(t))^2.dt\Big)$$

On l'obtient en étudiant $\int_a^b \Big(x.f(t)+g(t)\Big)^2.dt$ comme trinôme du second degré en x ($x^2.\int_a^b \Big(x.f(t)+g(t)\Big)^2.dt + 2.x.\int_a^b \Big(f(t).g(t)\Big)^2.dt + \int_a^b \Big(g(t)\Big)^2.dt$) de signe constant, donc de discriminant négatif ou nul.

◃27▹ Résolvez $\left\{\begin{array}{rcl|} 2^a \times 3^b & = & 2021 \\ 2^b \times 3^a & = & 2022 \end{array}\right.$ d'inconnues réelles a et b.

Par passage au logarithme (bijectif), $\left\{\begin{array}{rcl|} 2^a \times 3^b & = & 2021 \\ 2^b \times 3^a & = & 2022 \end{array}\right.$ équivaut à $\begin{pmatrix} \ln(2) & \ln(3) \\ \ln(3) & \ln(2)\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\ln(2021) \\ \ln(2022)\end{pmatrix}$.

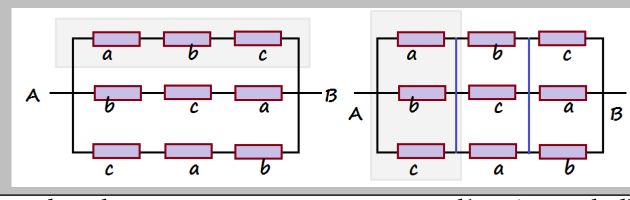
On inverse la matrice, et on trouve $a = \dfrac{\ln(3).\ln(2022)-\ln(2).\ln(2021)}{(\ln(3))^2-(\ln(2))^2}$ et $b = \dfrac{\ln(3).\ln(2021)-\ln(2).\ln(2022)}{(\ln(3))^2-(\ln(2))^2}$.

◃28▹ On prend trois réels strictement positifs a, b et c. leur moyenne arithmétique est connue, et leur moyenne harmonique est l'inverse de la moyenne des inverses $\dfrac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$.

Montrez que la moyenne harmonique est plus petite que la moyenne arithmétique, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur deux triplets bien choisis (c'est à dire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \leqslant |\overrightarrow{u}| \times |\overrightarrow{v}|$ produit scalaire face à produit des normes).

$a.x + b.y + c.z \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Montrez que la moyenne harmonique est plus petite que la moyenne arithmétique en calculant la résistance entre A et B sur les deux schémas ci-contre.



Qui vont être les deux vecteurs construits à partir de a, b et c dont les composantes permettront d'avoir une belle majoration quand on écrira $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \leqslant |\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|$ avec dans $|\overrightarrow{u}|$ et $|\overrightarrow{v}|$ des sommes de carrés ?

Prenons assez naturellement $\begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ \sqrt{b} \\ \sqrt{c} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{a} \\ 1/\sqrt{b} \\ 1/\sqrt{c} \end{pmatrix}$. leur produit scalaire vaut 9 (ah ?) et les normes donnent nos $a+b+c$ et somme des inverses.

L'inégalité donne

$$9 \leqslant (a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

et en équilibrant

$$\frac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$$

Regardons à présent le premier réseau de résistances.
On a en parallèle trois fois le même modèle en grisé, fait de trois résistances a, b et c en série.
Chaque bloc « horizontal » a pour résistance $a+b+c$.
Quand on met ces trois blocs en parallèle (ah on ne dit plus « en parallèles », on dit « en dérivation », c'est trop bête d'y perdre la vision), les conductances s'additionnent : $\dfrac{1}{R_q} = \dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}$.
Bref, entre A et B on a une résistance $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a+b+c}+\dfrac{1}{b+c+a}+\dfrac{1}{c+a+b}}$, ce qui fait $\dfrac{a+b+c}{3}$.

Quand on met trois fois la même résistance en parallèle, la résistance est divisée par 3.

Prenons alors le schéma de droite. On a cette fois trois blocs « verticaux » consécutifs.
Le premier est fait de trois résistances a, b et c en parallèle. Sa résistance équivalente est donc $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$.

Le bloc suivant a la même résistance, de même que le dernier.
Comme les trois se suivent en série, la résistance équivalente est cette fois

$$3 \times \frac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$$

Dans le second schéma, il y a plus de connexions, le courant va mieux circuler (moi j'y vois des voitures dans les rues, pas vous ?).

On a donc

$$3 \times \frac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$$

L'exercice se généralise à n nombres réels positifs, et n lots de n résistances.

◁29▷

♡ Soient f et g continues de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$, montrez en identifiant l'intégrale d'un carré :
$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda^2.\int_0^1(f(t))^2.dt+2.\lambda.\int_0^1 f(t).g(t).dt+\int_0^1(g(t))^2.dt\geqslant 0.$
Déduisez ensuite $\Big(\int_0^1 f(t).g(t).dt\Big)^2\leqslant\int_0^1(f(t))^2.dt.\int_0^1(g(t))^2.dt$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz)*
Déduisez enfin $\sqrt{\int_0^1(f(t)+g(t))^2.dt}\leqslant\sqrt{\int_0^1(f(t))^2.dt}+\sqrt{\int_0^1(g(t))^2.dt}$ *(inégalité triangulaire)*.

Par linéarité et simple calcul, l'intégrale $\lambda^2.\int_0^1(f(t))^2.dt+2.\lambda.\int_0^1 f(t).g(t).dt+\int_0^1(g(t))^2.dt$ n'est autre que $\int_0^1(\lambda.f(t)+g(t))^2.dt$.
L'application intégrée est positive (carré de réel), sur un intervalle pris a priori dans le sens croissant. Elle est positive.

Le trinôme $\lambda^2.\int_0^1(f(t))^2.dt+2.\lambda.\int_0^1 f(t).g(t).dt+\int_0^1(g(t))^2.dt$ reste de signe constant, positif.
Son discriminant est donc négatif ou nul (sinon, il aurait des racines et changerait de signe en en croisant une).
On a donc

$$\Big(\int_0^1 f(t).g(t).dt\Big)^2\leqslant\int_0^1(f(t))^2.dt.\int_0^1(g(t))^2.dt$$

Les ergoteurs diront qu'il faut traiter à part le cas où f est identiquement nulle sur $[a,\ b]$. Le trinôme n'est plus du second degré. Mais l'exercice n'a aucun intérêt.

Pour comparer $\sqrt{\int_0^1(f(t)+g(t))^2.dt}$ et $\sqrt{\int_0^1(f(t))^2.dt}+\sqrt{\int_0^1(g(t))^2.dt}$ (réels positif), comparons leurs carrés :
$\int_0^1(f(t)+g(t))^2.dt$ et $\int_0^1(f(t))^2.dt+\int_0^1(g(t))^2.dt+2.\sqrt{\int_0^1(f(t))^2.dt.\int_0^1(g(t))^2.dt}$.
Mais dans les deux, on trouve $\int_0^1(f(t))^2.dt+\int_0^1(g(t))^2.dt$.
On doit donc juste comparer $2.\int_0^1 f(t).g(t).dt$ et $\sqrt{\int_0^1(f(t))^2.dt.\int_0^1(g(t))^2.dt}$. C'est l'objet de la question précédente.

On a prouvé ici que $f\longmapsto\sqrt{\int_0^1(f(t))^2.dt}$ est une norme sur $C_0([0,\ 1],\ R)$.

◁30▷

Mettre dans le grille tous les entiers de 1 à 9 (certains sont déjà placés) pour que les trois additions en ligne et en colonne soient correctes :

			=	11
	6		=	14
			=	20
=	=	=		
13	23	.9		

et

			=	18
		2	=	15
			=	12
=	=	=		
23	16	.6		

1	8	2	=	11
5	6	3	=	14
7	9	4	=	20
=	=	=		
13	23	.9		

et

8	7	3	=	18
9	4	2	=	15
6	5	1	=	12
=	=	=		
23	16	.6		

◁31▷

La consommation quotidienne des français en pizza, ça fait combien de terrains de football ?

C'est un exercice à la maison. Vous avez accès à internet.
On va dire 800 millions de pizzas par an *(13 pizzas par français, une par mois, et combien pour moi ?)*.

On va assimiler la pizza moyenne à un disque de rayon 12 centimètres.
Chaque pizza a un pouvoir couvrant de $0,045$ mètres carrés.*(22 pizzas au mètre carré)*.

En une année : 36 200 000 mètres carrés.
36 kilomètres carrés. *(Paris fait 100 kilomètres carrés)*.

En une journée : 100 000 mètres carrés.
Un terrain de football fait 8 000 mètres carrés *(on peut y mettre* 2 000 *joueurs ?)*.

On couvre quand même une douzaine de terrains de football.
Avec un truc qu'on va appeler du fromage *(ce truc vendu sous le nom de mozzarella, fait à partir de... de quoi ?)* sur lequel les footballeurs vont patiner.

La question vous semble incongrue dans une feuille d'exercices de maths ?
Rappelons quand même l'anecdote dite « de Fermi » :
Le folklore professionnel retient ainsi comme emblématique le problème dit « des accordeurs de New York » – dans certaines versions, il s'agit de Chicago – selon Enrico Fermi, qui fut certainement l'un des promoteurs majeurs de l'esprit artisanal en physique.
Émigré aux États-Unis, Fermi avait l'habitude, dit-on, de poser à ses étudiants, afin de tester leur tempérament de physicien, non un exercice ultra spécialisé de physique atomique ou nucléaire, mais une question du genre : « Combien y a-t-il d'accordeurs de pianos dans la ville ? »
La réponse attendue repose sur le raisonnement suivant :

a) il y a environ 10 millions d'habitants dans le grand New York, soit 10 puissance 7 ;
b) à raison de 3 membres par foyer en moyenne, cela correspond à 3 fois 10 puissance 6 foyers ;
c) dont 1 sur 30 environ possède un piano – c'est le stade le plus critique du raisonnement –, ce qui donne 10 puissance 5 pianos ;
d) lesquels doivent être accordés, disons, tous les trois ans, soit 10 puissance 3 jours ; d'où 10 puissance 5 : 10 puissance 3 = 10 puissance 2, c'est-à-dire 100 pianos à accorder par jour ;
e) ce qui, à raison de un ou deux pianos par jour pour chaque accordeur, exige entre 50 et 100 accordeurs – soit quelques dizaines.

J'aime faire de la physique comme Fermi.

Sinon, il y a un prof de maths de Sup (à Henri 4) qui aime bien ajouter à la fin de ses devoirs une petite question de bon sens, d'ordre de grandeur. Avec seulement un quart de ces futurs ingénieurs (qui seront vos supérieurs ou vous égaux) capables de bien répondre.

◃32▹ Un professeur fou propose de calculer les moyennes d'une suite de notes *(comprises entre* 0 *et* $\pi/2$*, si si !)* d'une façon étrange : l'arcsinus de la moyenne des sinus *(il existe toujours cet arcsinus ?)*. Écrivez un script **Python** qui le fait pour une liste L donnée. Sur trois devoirs, vous avez eu deux 0 et une autre note oubliée. Quelle moyenne maximale pouvez vous obtenir ?

La moyenne d'une suite $(a_0, \dots a_{n-1})$ se calcule par $Arcsin\Big(\dfrac{a_0 + \dots + a_{n-1}}{n}\Big)$.
Pour ce qui est de l'existence, chaque sinus est entre -1 et 1, la somme est entre $-n$ et n, la moyenne arithmétique est entre -1 et 1 et on peut en prendre l'arcsinus.
Le script est par exemple :

```
def moyenne_sinus(L) :
....S = 0
....for note in L :
........S = S + sin(note)
....S = S/len(L)
....return asin(S)
```

Il ne faudra pas oublier d'importer : `from math import sin, asin`.
On pourra aussi se montrer prudent pour éviter la division par 0 :
`if len(L) == 0 :`
`....return(0)`
`else` ce qu'on a déjà tapé plus haut.

Si vous avez eu deux 0 et une note α, votre moyenne sera $Arcsin\Big(\dfrac{\sin(\alpha)}{3}\Big)$.
Le réel $\sin(\alpha)/3$ reste entre 0 et $1/3$. Par croissance de l'arcsinus, la moyenne reste entre 0 et $Arcsin(1/3)$ *(maximum atteint avec une note de $\pi/2$).*

◁33▷ Il me semble évident qu'on a : $\frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$, mais quand même prouvez le.

On va prendre n pair dans un premier temps. On écrit : $n = 2.p$ et $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots (2.p)$.

On regroupe les termes deux à deux : k avec $n - k + 1$: $n! = \prod_{k=1}^{p} k.(n - k + 1)$.

On étudie le trinôme $X.(n - X + 1)$. Son maximum vaut $\frac{(n+1)^2}{2}$ (positif, atteint en $\frac{n+1}{2}$).

On majore donc $n! \leqslant \left(\frac{(n+1)^2}{4}\right)^p$.

Comme p est égal à $\frac{n}{2}$ cela donne $n! \leqslant \frac{(n+1)^n}{2^n}$.

Quitte à faire passer $(n+1)^n$ de l'autre côté, on a $\frac{n!}{(n+1)^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$.

Si n est impair, il reste un terme au milieu qu'on garde tel quel, et tout s'arrange à peu près pareil.

J'ai posé l'exercice en 2020. Voici deux propositions d'élèves.

Proposition de Math Max : on se souvient que la moyenne géométrique est plus petite que la moyenne arithmétique : $\sqrt{a.b} \leqslant \frac{a+b}{2}$ et sa généralisation à n termes : $\sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_é + \ldots + a_n}{n}$.

On l'écrit pour $n-1$ termes : $\sqrt[n-1]{1.2\ldots(n-1)} \leqslant \frac{1 + 2 + \ldots + n - 1}{n-1}$.

On a donc $\Big((n-1)!\Big)^{\frac{1}{n-1}} \leqslant \frac{n.(n-1)}{2.(n-1)} = \frac{n}{2}$.

On élève à la puissance $n-1$: $(n-1)! \leqslant \frac{n^{n-1}}{2^{n-1}}$. On multiplie par n : $n! \leqslant \frac{n^n}{2^{n-1}}$.

On passe au quotient : $\frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

Pas mal non plus. On l'aura la bonne formule !

Proposition d'Alexandre (quelle année ?) : on montre le résultat pour n petit, jusqu'à 6. Ensuite, on fait une récurrence.
Pour un n donné (quelconque), on suppose $n!.2^n \leqslant n^n$ (objectif $(n+1)!.2^{n+1} \leqslant (n+1)^{n+1}$).
On part de $n!.2^n \leqslant n^n$ qu'on multiplie par $2.(n+1)$ (positif) : $(n+1)!.2^{n+1} \leqslant 2.n^n.(n+1)$.
On veut majorer par $(n+1)^{n+1} = (n+1).(n+1)^n$.
Il suffit de majorer $2.n^n$ par $(n+1)^{n+1}$.
On calcule la différence de deux logarithmes : $n.\ln(n+1) - (n.\ln(n) + \ln(2))$.

On introduit $x \longmapsto x.\ln(x+1) - x.\ln(x) - \ln(2)$ (notée f), de dérivée $f' = x \longmapsto \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ (si si) et de dérivée seconde $f'' = x \longmapsto \frac{-1}{x.(x+1°\text{^}2}$.
f' est décroissante et tend vers 0 à l'infini, elle reste donc positive.
f est donc croissante, nulle en 1. Elle est donc positive.
$x.\ln(x+1) - x.\ln(x) - \ln(2)$ donc $\ln((x+1)^x) \geqslant \ln(2.x^x)$ et on a bien $2.n^n \leqslant (n+1)^n$ puis $(n+1)!.2^{n+1} \leqslant 2.n^n.(n+1) \leqslant (n+1)^n.(n+1) = (n+1)^{n+1}$.

◁34▷ On prend pour un triangle les notations usuelles : sommets A, B et C, d'angles aux sommets α β et γ et de longueurs des côtes opposés aux sommets a, b et c. Un triangle est dit arithmétique si l'un de ses angles est moyenne arithmétique des deux autres. Un triangle est dit géométrique si l'un de ses côtés est moyenne géométrique des deux autres. Montrez que les triangles équilatéraux sont à la fois arithmétiques et géométriques.
Construisez un triangle arithmétique et un triangle géométrique qui ne soient pas équilatéraux *(donnez une construction à la règle et au compas, et donnez les coordonnées des sommets)*.
Peut il exister des triangles qui soient arithmétiques et géométriques à la fois sans être équilatéraux.

Rappel

arithmétique	géométrique	harmonique
$\frac{x+y}{2}$	$\sqrt{x.y}$	$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

Rappel aussi : $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ que je vous demande de démontrer en calculant de plusieurs façons une hauteur du triangle.

◁35▷ Justifiez pour toute application φcontinue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$: $\Big(\int_a^b \varphi(t).dt\Big)^2 \leqslant (b-a).\int_a^b \varphi(t)^2.dt$; dans quel cas a-t-on égalité ? Soit f dérivable de $[0,\ 8]$ dans $\mathbb{R}^*$ vérifiant $f(4) = \dfrac{1}{4} = (f(8))^2$ et $\displaystyle\int_4^8 \frac{(f'(t))^2}{(f(t))^4}.dt = 1$. Calculez $f(8)$ et $\displaystyle\int_4^8 \frac{f'(t)}{(f(t))^2}.dt$. Retrouvez le résultat de cet examen vietnamien cité par Presh Talwalkar : $f(6)$ vaut $\dfrac{1}{3}$ ou $\dfrac{1}{6}$.

L'inégalité $\Big(\int_a^b \varphi(t).dt\Big)^2 \leqslant (b-a).\int_a^b \varphi(t)^2.dt$ est un cas particulier de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\Big(\int_a^b \psi(t).\varphi(t).dt\Big)^2 \leqslant \int_a^b \psi(t)^2.dt.\int_a^b \varphi(t)^2.dt$$

appliquée ici à ψ constante égale à 1.

Il y a égalité s et seulement si les deux applications sont proportionnelles.

On nous dit que f est dérivable (donc continue) de $[0,\ 10]$ dans $\mathbb{R}^*$ (réunion de deux intervalles).
Par contraposée du théorème des valeurs intermédiaires, f est de signe constant sur l'intervalle $[0,\ 10]$.
Comme sa valeur en 4 est positive, celle en 8 l'est aussi.
On n'a donc pas le choix : $f(8) = \dfrac{1}{2}$ (pour que son carré vaille $\dfrac{1}{4}$).

Ensuite, on peut calculer

$$\int_4^8 \frac{f'(t)}{f((t))^2}.dt = \Big[\frac{-1}{f(t)}\Big]_{t=4}^{t=8} = \frac{-1}{1/2} - \frac{-1}{1/4} = -2+4 = 2$$

Une hypothèse dit $\displaystyle\int_4^8 \frac{(f'(t))^2}{(f(t))^4}.dt = 1$. On reporte dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $\varphi = \dfrac{f'}{f^2}$:

$$4 = 2^2 = \Big(\int_4^8 \frac{f'(t)}{f((t))^2}.dt\Big)^2 \leqslant (8-4).\int_4^8 \frac{(f'(t))^2}{(f(t))^4}.dt = 4.1 = 4$$

L'inégalité est une égalité ! C'est donc que $\dfrac{f'}{f^2}$ (l'une des fonctions) est proportionnelle à 1 (l'autre fonction).

Mais quelle est la valeur de cette constante ? Si on écrit $\dfrac{f'(t)}{(f(t))^2} = a$ pour tout , on doit avoir par le calcul précédent $\displaystyle\int_4^8 a = 2$.
C'est donc que a vaut $\dfrac{1}{2}$.

Notre problème d'analyse se spécialise alors en problème d'équation différentielle : $\dfrac{f'(t)}{(f(t))^2} = \dfrac{1}{2}$ pour tout t.
On intègre de $t = 4$ à $t = 6$:

$$\int_4^6 \frac{f'(t)}{(f(t))^2}.dt = \int_4^6 \frac{dt}{2}$$

On effectue : $\Big[\dfrac{-1}{f(t)}\Big]_{t=4}^{t=6} = 1$ puis $\dfrac{1}{f(4)} - \dfrac{1}{f(6)} = 1$.

Connaissant $f(4)$, il reste $\boxed{f(6) = \dfrac{1}{3}}$

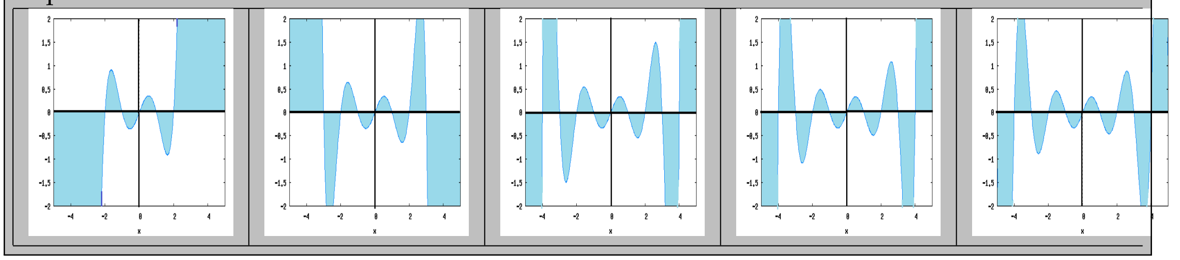
◁36▷ On doit montrer $\Big|\sum_{k=1}^n a_k.\overline{b_k}\Big|^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\Big).\Big(\sum_{k=1}^n |b_k|^2\Big)$ où les a_k et les b_k sont des complexes.

Choisissez bien α pour que $\sum_{k=1}^n (\lambda.e^{i.\alpha}.a_k - b_k).\overline{(\lambda.e^{i.\alpha}.a_k - b_k)}$ soit à coefficients réels.

A faire. C'est le début de l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{C}$.

◁37▷

L'objectif de ce4 problème est la formule $\boxed{\sin(\theta) = \theta.\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1-\dfrac{\theta^2}{k^2.\pi^2}\Big)}$ démontrée *(à l'ancienne, c'est à dire pas avec toute la rigueur de preuve des convergences)* par Leonhard Euler. Disons qu'on va étudier avec rigueur le membre de droite de $\dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi} = x.\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1-\dfrac{x^2}{k^2}\Big)$ pour ne pas avoir trop de π à traîner dans nos calculs.



I∼0) Pour tout entier naturel N, on pose $\boxed{F_N(x) = x.\prod_{k=1}^{N}\Big(1-\dfrac{x^2}{k^2}\Big)}$

Soit x un réel positif. On note K l'entier naturel $[x]$. Montrez que $(F_N(x))_N$ est monotone à partir du rang K, de signe constant. Déduisez que $F_N(x))_N$ converge, vers une limite qu'on va noter $F(x)$ (et que l'on va déterminer plus tard).

I∼1) On définit ainsi sur $\mathbb{R}^+$ une application $x \longmapsto F(x)$. Montrez qu'elle se définit aussi sur $\mathbb{R}^-$ et qu'elle est impaire.

On se donne x et on considère $F_N(x) = x.\prod_{k=1}^{N}\Big(1-\dfrac{x^2}{k^2}\Big)$ avec N plus grand que K.

On va donc couper $F_N(x) = x.\prod_{k=1}^{K}\Big(1-\dfrac{x^2}{k^2}\Big).\prod_{k=K+1}^{N}\Big(1-\dfrac{x^2}{k^2}\Big)$.

Quelle est l'utilité de $k > K = [x]$? Dans le second produit $\prod_{k=K+1}^{N}\Big(1-\dfrac{x^2}{k^2}\Big)$, tous les termes sont positifs *((x/k) est positif plus petit que 1, son carré aussi)*.
Le signe de $F_N(x)$ est donc celui de $F_K(x)$.

Par exemple, pour $x = 3,4$, on a :
$F_5(x) = 3,4.\Big(1-(3,4)^2\Big).\Big(1-\dfrac{(3,4)^2}{4}\Big).\Big(1-\dfrac{(3,4)^2}{9}\Big).\Big(1-\dfrac{(3,4)^2}{16}\Big).\Big(1-\dfrac{(3,4)^2}{25}\Big)$ et dans ce produit, les trois termes de $\Big(1-(3,4)^2\Big).\Big(1-\dfrac{(3,4)^2}{4}\Big).\Big(1-\dfrac{(3,4)^2}{9}\Big)$ sont négatifs. En revanche, $\Big(1-\dfrac{(3,4)^2}{16}\Big)$ et les suivants seront positifs.

On étudie ensuite la monotonie en soustrayant :

$$F_{N+1}(x) - F_N(x) = \Big(1-\frac{x^2}{(N+1)^2}\Big).F_N(x) - F_N(x) = -\frac{x^2}{(N+1)^2}.F_N(x)$$

Cette différence est du signe de $-F_N(x)$ qui est d'ailleurs celui de $-F_K(x)$.
C'est toujours le même, la suite est monotone.

Soyons maintenant plus précis et étudions suivant le signe de $F_K(x)$:

	$F_K(x)$ positif	$F_K(x)$ négatif
$N > K$	$F_N(x)$ positif	$F_N(x)$ négatif
monotonie	suite décroissante	suite croissante
convergence	décroissante minorée par 0	croissante majorée par 0

Dans les deux cas, la suite $(F_N(x))_{N>K}$ converge. Pas forcément vers 0, comme on le verra par exemple avec $F(1/2)$.
Il reste à part le cas où $F_K(x)$ est déjà nul (x entier). Mais dans ce cas, la convergence est assurée.

Pour x négatif, on se contente de $F_N(-x) = -F_N(x)$ et on passe à la limite.
Non seulement, $F(x)$ existe pour x négatif, mais il coïncide avec $-F(-x)$. F est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire.

I~2) **Montrez que F est positive, majorée par 1sur $[0,\ 1]$.**

On prend x juste entre 0 et 1. Dans $F_N(x)$, il y a x et des $\Big(1-\dfrac{x^2}{k^2}\Big)$.
Chacun de ces termes est positif, plus petit que 1.
Leur produit est positif, plus petit que 1.
Pour tout N, on a $0 \leqslant F_N(x) \leqslant 1$.
On passe à la limite : $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, l'application F est positive plus petite que 1 sur $[0,\ 1]$.

Par imparité, elle restera entre -1 et 1 sur $[-1,\ 1]$.
Elle ne parviendra pas à atteindre ce majorant 1, on verra que son maximum est $1/\pi$, atteint en 1.

I~3) **Montrez : $F_N(x).(x+N+1) = F_N(x+1).(x-N)$ pour tout couple $(N,\ x)$.**

On se donne x et on prouve $F_N(x).(x+N+1) = F_N(x+1).(x-N)$ par récurrence sur N (prévenir sur qui porte la récurrence, il pourrait y avoir plusieurs variables).

Pour N égal à 0, on a $F_0(x) = x$, et $F_0(x+1) = x+1$.
On a bien $x.(x+0+1) = (x+1).(x-0)$.

Pour N égal à 1, on compare :

$F_1(x).(x+1+1)$	$F_1(x+1).(x-1)$
$\Big(x.(1-x).(1+x)\Big).(x+2)$	$\Big((x+1).(1-(x+1)).(1+(x+1)).(x-1)$

Supposons la relation correcte au rang N. On calcule au rang $N+1$:

$$F_{N+1}(x).(x+N+1+1) = \Big(F_N(x).\Big(1-\frac{x^2}{(N+1)^2}\Big)\Big).(x+N+2)$$

$$F_{N+1}(x).(x+N+2) = \frac{1}{(N+1)^2}.F_N(x).(N+1-x).(N+1+x).(x+N+2)$$

On regroupe $F_N(x).(N+1+x)$ qu'on remplace par $F_{N+1}(x).(x-N)$ par hypothèse de récurrence :

$$F_{N+1}(x).(x+N+2) = \frac{1}{(N+1)^2}.\Big(F_{N+1}(x).(x-N)\Big).(N+1-x).(x+N+2)$$

On arrange en jouant même sur les signes :

$$F_{N+1}(x).(x+N+2) = \frac{1}{(N+1)^2}.\Big(F_{N+1}(x).(N-x).(x+N+2)\Big).(x-(N+1))$$

On est en droit de se demander si $\dfrac{1}{(N+1)^2}.(N-x).(N+3-x)$ n'est pas le terme $\Big(1-\dfrac{(x+1)^2}{(N+1)^2}\Big)$ qui manque pour passer de $F_N(x+1)$ à $F_{N+1}(x+1)$.
On vérifie : $((N+1)^2-(x+1)^2) = ((N+1)-(x+1)).((N+1)+(x+1))$. C'est gagné.

On pouvait aussi trouver la formule sans récurrence en écrivant $F_N(x) = x.\prod_{k=1}^{n}\dfrac{(k-x).(k+x)}{k^2}$ puis en décalant les indices.

I~4) **Déduisez que F est périodique de période 2.**

On va faire tendre N vers l'infini dans cette formule qu'on écrit plutôt $F_N(x).\dfrac{(x+N+1)}{(x-N)} = F_N(x+1)$ *(petite condition : dénominateur non nul ; mais même si x a le mauvais goût d'être entier, on prend N plus grand que x et c'est bon).*
On fait tendre N vers l'infini. Comme x est fixé, le quotient $\dfrac{(x+N+1)}{(x-N)}$ tend vers -1.
Comme F est la limite simple des applications F_N,
les deux termes $F_N(x)$ et $F_N(x+1)$ convergent : $\boxed{F(x+1) = -F(x)}$

C'est la relation $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$, elle traduit des symétries centrales sur le graphe.

On veut montrer que F est périodique de période 2. On calcule donc :

$$F(x+2) = F((x+1)+1) = -F(x+1) = -(-F(x)) = F(x)$$

en appliquant le résultat précédent à $x+1$ puis à x.
On reconnaît la périodicité.

I∼5) Déduisez que F est bornée sur $\mathbb{R}$.

Il suffit de regarder et borner F sur une période pour la borner sur tout $\mathbb{R}$, par périodicité.

I∼6) Juste parce que la question précédente m'y a fait penser, un exercice en passant, sans rapport avec la suite : soit φ une application paire telle que $x \longmapsto \varphi(x+1)$ soit impaire. Montrez que φ est périodique.

On traite donc ici un petit exercice. On suppose que φ est paire et $x \longmapsto \varphi(x+1)$.
On traduit : $\varphi(-x) = \varphi(x)$ et $f(-x) = -f(x)$ pour $f(x) = \varphi(x+1)$ et donc $f(-x) = \varphi(-x+1)$.
On reformule : $\varphi(-x+1) = -\varphi(x+1)$ et pour $-x$ à la place de x : $\varphi(x+1) = -\varphi(-x+1)$ (oui, c'est la même).

Ça ne ressemble pas à la périodicité. la période ne doit pas être 1. On va essayer 2.

$$f(x+2) = f((x+1)+1) = -\varphi(-(x+1)+1) = -\varphi(-x) = -\varphi(x)$$

On a utilisé la parité de φ en fin de ligne.
Ce n'est pas encore gagné. On continue.

$$(x+4) = \varphi((x+2)+2) = -\varphi(x+2)$$

On met les résultats bout à bout : $\varphi(x+4) = \varphi(x)$.

Une interprétation graphique avec des centres et axes de symétrie pouvait mettre sur la piste.

II∼0) Montrez que F est croissante sur $[0,\ 1/2]$ *(celui qui commence par "je dérive F" peut aller tout de suite cherche un emploi d'attaché parlementaire, on ne sait même pas si elle sera continue... alors, dérivable... et la forme de sa dérivée...).*

Pour la croissance, on ne va pas dériver, c'est trop lourd, vu le nombre de termes du produit. Et vu aussi le passage à la limite qui peut faire perdre la dérivabilité.
On oublie les réflexes de Terminable, et on en revient à la définition.

On se donne a plus petit que b, et on va montrer $F(a) \leqslant F(b)$.
Mais la présence de l'infini nous pousse à éviter les bêtises. On travaille à horizon fini N.
On se donne donc N et on compare $F_N(a)$ et $F_N(b)$

$a \leqslant b$	
$1-a^2 \leqslant 1-b^2$	
$1-\dfrac{a^2}{4} \leqslant 1-\dfrac{b^2}{4}$	
$\vdots$	
$1-\dfrac{a^2}{N^2} \leqslant 1-\dfrac{b^2}{N^2}$	
$F_N(a) \leqslant F_N(b)$	

Attention, si vous vous contentez de ce que j'ai écrit ici[a], vous avez perdu. Il manque un argument capital : toutes ces inégalités sont entre des réels positifs. Si on n'a pas cette garantie, on ne peut pas multiplier des inégalités membre à membre.

$-3 \leqslant 2$
$-5 \leqslant -1$
et donc $15 \leqslant -2$

a. judicieusement avec un tableau, mais je n'ose encore vous demander de rendre les choses lumineuses, je dois déjà me contenter qu'elles soient justes

On passe à la limite : $F(a) \leqslant F(b)$. F est croissante.

Pour montrer la croissance d'une application définie avec sa variable sous un signe somme ou sous un signe intégrale ou de manière tordue, revenez à la définition.

C'est bien parti que que F soit $x \longmapsto \dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi}$.

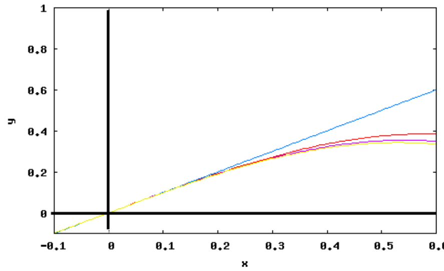
Cette preuve ne va pas du tout. Il faut que je trouve autre chose. Et je crois qu'on va devoir dériver F_N.
Et peut être même qu'on va dériver $\ln(F_N)$.

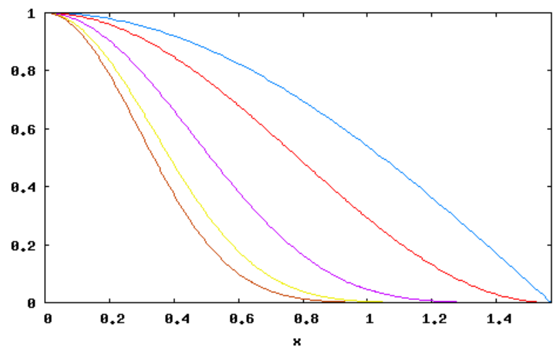
II∼1) Laquelle de ces phrases est correcte : “sur $[0,\ 1/2]$, (F_N) est une suite croissante d'applications décroissantes” “sur $[0,\ 1/2]$, (F_N) est une suite décroissante d'applications croissantes”.

Chaque application $x \longmapsto F_n(x)$ est croissante sur $[0,\ 1/2]$, comme on vient de le voir.
Pour chaque x, la suite $N \longmapsto F_N(x)$ est positive décroissante (d'un terme au suivant, on multiplie par $\left(1 - \dfrac{x^2}{(N+1)^2}\right)$.

On a donc une $\boxed{\text{suite décroissante d'applications croissantes}}$

Comme quoi la mathématique n'est pas loin de la grammaire et vice versa. Il faut savoir qui s'accorde avec qui, une histoire de variable. Quand ce n'est pas aussi une histoire d'algèbre en linguistique.

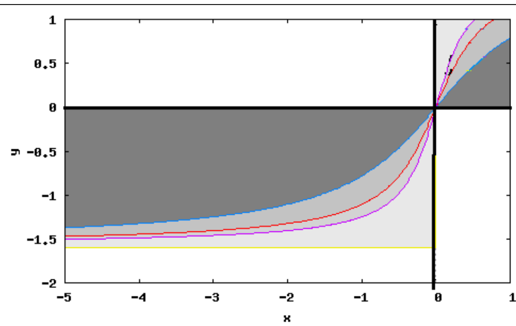
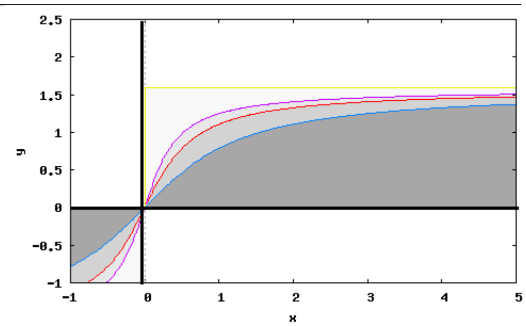




Que serait une suite décroissante d'applications décroissantes ? Par exemple les $\cos^n$ qui vont servir plus loin, sur $[0,\ \pi/2]$.
Pour n fixé, $x \longmapsto \cos^n(x)$ décroit.
Pour x fixé, $n \longmapsto \cos^n(x)$ décroît (suite géométrique).

II∼2) Pour éviter de dire des bêtises sur les suites de fonctions et leur limite, montrez moi que $(x \longmapsto Arctan(n.x))_n$ est une suite d'applications continues dont la limite n'est plus continue.

Chaque application $x \longmapsto Arctan(n.x)$ (notée g_n) est continue, puisque l'arctangente l'est.
Passons à la limite, en discutant suivant x :

x	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
formule	$g_n(x) = Arctan(n.x)$ et $n.x \to_{n\to+\infty} -\infty$	$g_n(0) = 0$	$g_n(x) = Arctan(n.x)$ et $n.x \to_{n\to+\infty} +\infty$
limite	$g_\infty(x) = -\dfrac{\pi}{2}$	$g_\infty(0) = 0$	$g_\infty(x) = \dfrac{\pi}{2}$
			

Chaque g_n est continue, mais la limite g_∞ est une application discontinue en 0, elle y fait deux demi-sauts de hauteur $\pi/2$ (et un saut total de hauteur π.

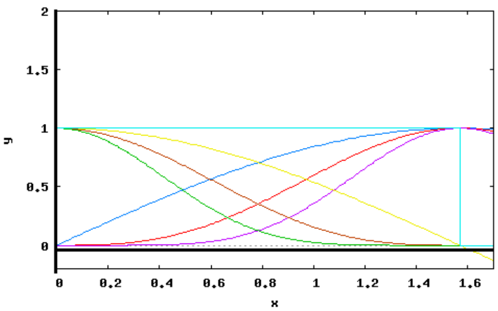
Comme quoi il y a des choses qu'on perd par passage à la limite.
Mais est il si facile pour l'élève de construire des phrases au goût (faux) de théorème comme “cette application est continue car c'est une somme d'applications continues”, alors qu'il s'agit d'une limite de sommes par exemple.

III∼0) On va calculer $F(1/2)$. Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t).dt$. Prouvez : $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}.W_{n-1}$. Calculez $W_{2.n}$ pour tout entier naturel n. (on pourra intégrer par parties $\int \sin^n .\sin$ et retrouver l'intégrale initiale dans $\displaystyle\int \sin^{n-1}.(1-\sin^2))$

Chaque intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t).dt$ existe *(et coïncide avec la formulation* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta).d\theta$ *car sinus et cosinus font la même chose sur* $[0,\ \pi/2]$ *mais pas dans le même sens).*

On calcule les deux premières : $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$.
On intègre W_{n+1} par parties :

$\cos^n(t)$	$\hookrightarrow$	$-n.\cos^{n-1}(t).\sin(t)$
$\cos(t)$	$\hookleftarrow$	$\sin(t)$



Le terme crochet $[\cos^n(t).\sin(t)]_0^{\pi/2}$ est nul en 0 et en π. Le terme de compensation est $n.\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t).\sin^2(t).dt$ et on le remplace par $n.(W_{n-1} - W_{n+1})$ en remplaçant $\sin^2$ par $1 - \cos^2$.

On regroupe et simplifie : $\boxed{W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}.W_{n-1}}$

On applique : $W_2 = \dfrac{1}{2}.W_0$ puis $W_4 = \dfrac{3}{4}.W_2$ et même $W_6 = \dfrac{5}{6}.W_4$.
Par récurrence non rédigée : $W_{2.n} = \dfrac{1.3.5\ldots(2.n-1)}{2.4.6\ldots(2.n)}.W_0$.
Quitte à insérer des termes : $W_{2.n} = \dfrac{(2.n)!}{(2.4.6\ldots(2.n))^2}.W_0$.

En factorisant des 2 : $\boxed{W_{2.n} = \dfrac{(2.n)!}{(1.2.3\ldots n)^2}.\dfrac{\pi}{2^{2.n+1}} = \dfrac{(2.n)!}{(n!)^2}.\dfrac{\pi}{2^{2.n+1}}}$

III~1) **Montrez : $W_{2.n+1} \leqslant W_{2.n} \leqslant W_{2.n-1}$ pour tout n. Déduisez : $W_{2.n} \sim_{n\to+\infty} W_{2.n+1}$.** [a]

[a]. deux suites (a_n) et (b_n) sont dites équivalentes si leur quotient a_n/b_n tend vers 1 quand n tend vers l'infini, et on note alors $a_n \sim b_n$

Pour tout t de $[0,\ \pi/2]$, on écrit $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$. On élève à des puissances convenables : $\cos^{2.n+1}(t) \leqslant \cos^{2.n}(t) \leqslant \cos^{2.n-1}(t)$. On intègre de 0 à $\pi/2$: $\boxed{W_{2.n-1} \leqslant W_{2.n} \leqslant W_{2.n-1}}$

(bref, la suite W est décroissante).

On divise par $W_{2.n+1}$ positif : $1 \leqslant \dfrac{W_{2.n}}{W_{2.n+1}} \leqslant \dfrac{W_{2.n-1}}{W_{2.n+1}} = \dfrac{2.n+1}{2.n}$ *(la dernière égalité est issue d'un cas particulier de la formule $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}.W_{n-1}$).*
Le majorant tend vers 0. Par encadrement, $\dfrac{W_{2.n}}{W_{2.n+1}}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. C'est la définition de l'équivalence asymptotique de deux suites.

III~2) **Prouvez $(2.n+1).W_{2.n}.W_{2.n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout n. Déduisez $W_{2.n} \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{4.n}}$.**

La formule $(2.n+1).W_{2.n}.W_{2.n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ se démontre par récurrence sur n facile à initialiser.
Pour passer de n à $n+1$, on écrit :

$$(2.n+3).W_{2.n+3}.W_{2.n+2} = (2.n+3).\Big(\frac{2.n+2}{2.n+3}.W_{2.n+2}\Big).\Big(\frac{2.n+1}{2.n+2}.W_{2.n+1}\Big)$$

et on recommence avec $W_{2.n+2}$ et $W_{2.n+1}$. Tout se simplifie et il reste $(2.n+1).W_{2.n}.W_{2.n+1}$.

On peut aussi poser $H_p = (p+1).W_{p+1}.W_p$. On calcule H_0 qui vaut $\dfrac{\pi}{2}$.
On calcule $\dfrac{H_{p+1}}{H_p} = \dfrac{p+2}{p+1}.\dfrac{W_{p+2}}{W_{p+1}}.\dfrac{W_{p+1}}{W_p} = 1$. La suite est constante. En particulier, en p=2.n elle donne la relation demandée.

On a donc $W_{2.p}.W_{2.p+1} = \dfrac{\pi}{2.(2.n+1)} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{4}$.
Mais le premier membre est équivalent à $(W_{2.n})^2$.

Les équivalents passent aux racines carrées : $\boxed{W_{2.n} \text{ est équivalent à } \sqrt{\dfrac{\pi}{4.n}}}$

III∼3) Déduisez $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}$ *(formule dite "de Wallis", on se demande pourquoi).*

Pour tout entier naturel n, on calcule $F_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{4.k^2}\right)$.

On réduit au dénominateur commun et on identifie remarquablement :

$$F_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{(2.k-1).(2.k+1)}{4.k^2}\right)$$

On factorise ce qu'on peut : $F_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2.n+1}}.\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{(2.k-1).(2.k+1)}{k^2}\right)$.

On sépare même $F_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2.n+1}}.\prod_{k=1}^{n}(2.k-1).\prod_{k=1}^{n}(2.k+1).\frac{1}{(n!)^2}$.

On sort un terme inutile : $F_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2.n+1}{2^{2.n+1}.(n!)^2}.\left(\prod_{k=1}^{n}(2.k-1)\right)^2$.

Dans le produit des impairs, on recommence à mettre les termes pairs : $\prod_{k=1}^{n}(2.k-1) = \frac{(2.n)!}{2^n.n!}$.

La formule à peu près définitive est $F_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2.n+1).((2.n)!)^2}{2^{4.n+1}.(n!)^4}$

Or, on avait montré : $W_{2.n} = \frac{(2.n)!}{2^{2.n+1}.(n!)^2}.\pi$ d'où $\left(\frac{(2.n)!}{2^{2.n+1}.(n!)^2}\right)^2 = \left(\frac{W_{2.n}}{\pi}\right)^2$.

On a donc $F_N\left(\frac{1}{2}\right) = 2.(2.n+1).\left(\frac{W_{2.n}}{\pi}\right)^2$ *(bigre !).*

Il est temps de passer aux équivalents : $F_N(\frac{1}{2}) \sim_{n\to+\infty} 4.n.\left(\sqrt{\frac{\pi}{4.n}}\right)^2.\frac{1}{\pi^2}$.

$F_n\left(\frac{1}{2}\right)$ est équivalent au nombre $\frac{1}{\pi}$. Ceci signifie que $F_n\left(\frac{1}{2}\right)$ converge vers ce réel. Et la limite des $F_n\left(\frac{1}{2}\right)$ quand n tend vers l'infini, c'est $F\left(\frac{1}{2}\right)$. On a donc bien $\boxed{F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}}$

C'est $\frac{\sin(\pi.x)}{\pi}$ pour x égal à $1/2$.

La formule dite de Wallis, c'est $\boxed{\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{+\infty}\frac{4.k^2}{4.k^2-1}}$ *et pour la forme factorisée d'Euler :*

$1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{(\pi/2)^2}{k^2.\pi^2}\right)$

IV∼0) Même si ça n'a aucun rapport avec la suite, prouvez moi : $(W_n)^2 \leqslant \frac{\pi}{2}.W_{2.n}$ pour tout n.Si je ne l'ai pas démontrée dans le cours, allez chercher dans « les beaux théorèmes de Sup » la formule de Cauchy-Schwarz.

On doit prouver une majoration $(W_n)^2 \leqslant \frac{\pi}{2}.W_{2.n}$.

On a certes une formule explicite pour $W_{2.n}$ du membre de droite. Mais pas de formule pour $(W_n)^2$, car elle dépend en tout cas de la parité de n.

Mais on a le carré d'une intégrale, et l'intégrale d'un carré.

On sent venir $\boxed{\text{l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les intégrales}}$:

$$\int_a^b f(t).g(t).dt \leqslant \int_a^b f(t)^2.dt.\int_a^b g(t)^2.dt$$

avec ici $a = 0$, $b = \pi/2$, $f = 1$ et $g = \sin^n$.

C'est aussi rapide que ça. Et classique aussi. mais peut être n'avons nous pas encore vu l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cours... Ça dépend des années.

V∼0) Montrez : $F_n\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{W_{2.n}}{2.\pi.W_{4.n+1}}$ pour tout n. Calculez $F\left(\frac{1}{4}\right)$. Calculez $F\left(\frac{1}{3}\right)$.

J'en ai certes bavé pour ma part en bricolant mes produits d'entiers impairs et autres pour aboutir à $F_n\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{W_{2.n}}{2.\pi.W_{4.n+1}}$*, vous pouvez vous contenter de prouver le résultat par récurrence sur n.*

On initialise à n égal à 0 : $F_0\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ *(produit vide)* et $\frac{W_0}{2.\pi.W_1} = \frac{\pi/2}{2.\pi.1} = \frac{1}{4}$.

On peut regarder pour n égal à 1 : $F_1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{(4-1).(4+1)}{4.4^2}$ et $\frac{W_2}{2.\pi.W_5} = \frac{\pi/4}{2.\pi.8/15} = \frac{15}{64}$.

Ça ne sert pas forcément, ça fait perdre un peu de temps, mais ça permet de comprendre ce qu'il va se passer.

On suppose la formule vraie au rang n et on passe au rang $n+1$.

La clef est $F_{n+1}\left(\frac{1}{4}\right) = F_n\left(\frac{1}{4}\right).\left(1 - \frac{1}{4^2.(n+1)^2}\right) = F_n\left(\frac{1}{4}\right).\frac{(4.(n+1)-1).(4.(n+1)+1)}{2^4.(n+1)^2}$

On exploite l'hypothèse de rang n : $F_{n+1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{W_{2.n}}{2.\pi.W_{4.n+1}}.\frac{(4.n+3).(4.n+5)}{2^4.(n+1)^2}$.

On essaye d'y voir plus clair, avec des relations telles que $\frac{2.n+1}{2.n+2}.W_{2.n} = W_{2.n+2}$, ainsi que

$$\frac{4.n+2}{4.n+3}.W_{4.n+1} = W_{4.n+3} \ et \ \frac{4.n+4}{4.n+5}.W_{4.n+3} = W_{4.n+5}$$

On remplace, tout se simplifie miraculeusement bien, et on trouve effectivement $F_{n+1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{W_{2.n+2}}{2.\pi.W_{4.n+5}}$.

La formule est établie pour tout entier naturel n.

On fait tendre n vers l'infini. Le membre de gauche tend vers $F\left(\frac{1}{4}\right)$ (existence prouvée dès le I et nom donné à cette occasion).

Pour le membre de droite, on utilise l'équivalent trouvé $W_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4.n}}$ qui donne ici $W_{2.n} \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{8.n}}$ et $\frac{1}{W_{4.n+1}} \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{8.n+2}{\pi}}$. Les équivalents passent aux produits et $\sqrt{\frac{8.n+2}{8.n}}$ est équivalent à 1.

$F_n(1/4)$ est équivalent finalement à un réel, il tend vers ce réel qui vaut ici $\frac{1}{\pi.\sqrt{2}}$.

On peut donc écrire $\boxed{F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2.\pi}}$ *ce qui confirme* $F(x) = \frac{\sin(\pi.x)}{\pi}$ *en* $x = 1/4$.

Pour ce qui est de $F(1/3)$, on doit donc trouver $\frac{\sin(\pi/3)}{\pi}$ c'est à dire $\frac{\sqrt{3}}{2.\pi}$.

Je ne vous donne pas tous les éléments. On calcule $F_n\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{3^2.k^2}\right)$.

On a au dénominateur un produit : $3.\prod_{k=1}^{n} 3^2.k^2$ qu'on écrit donc $3^{2.n+1}.(n!)^2$, pour l'instant tout va bien.

Au numérateur, on factorise en $\prod_{k=1}^{n}(3.k-1).(3.k+1)$.

On l'écrit pour comprendre : $(2.4).(5.7).(8.10)\ldots(3.n-1).(3.n+1)$.

C'est presque une factorielle, mais il lui manque des termes. C'est $\frac{(3.n+1)!}{3.6.9\ldots(3.n)}$. On reconnaît $\frac{(3.n+1)!}{3^n.n!}$.

On a finalement $\boxed{F_n\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{(3.n+1)!}{3^{3.n+1}.(n!)^3}}$

Pour passer à la limite, il suffit de connaître son cours. Ou celui de Spé : $n! \sim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n.\sqrt{2.n.\pi}$ qui donne $(3.n+1)! \sim_{n\to+\infty} \left(\frac{3.n+1}{e}\right)^{3.n+1}.\sqrt{-.n.\pi}$ et $(n!)^3 \sim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^{3.n}.2.n.\pi.\sqrt{2.n.\pi}$.

On simplifie ce qu'on peut, on utilise que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge vers e et on trouve la limite demandée.

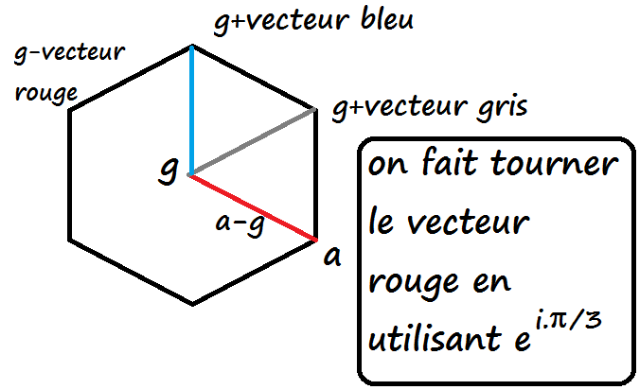
Et si on ne connaît pas la formule de Stirling, que fait on ? Les intégrales de Wallis ne sont pas utilisables car elles donnent des formules explicites pour $W_{2.p}$ et $W_{3.p+1}$ mais pas pour $W_{3.n+1}$.
Oui, mais si $F_n(1/3)$ converge vers $F(1/3)$, on sait aussi que $F_{2.n}(1/3)$ converge vers $F(1/3)$.

On va donc étudier $F_{2.n}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{(6.n+1)!}{3^{6.n+1}.((2.n)!)^3}$ et tenter d'y retrouver entre autre $W_{6.n}$.

Il y a aussi la solution du futur adjoint d'ingénieur qui a lu l'énoncé, a décidé qu'il faisait confiance à Euler et utilisait directement la formule $F(x) = \frac{\sin(\pi.x)}{\pi}$ pour x égal à $1/3$.
Mais celui là ne sera jamais ingénieur, juste assistant d'ingénieure, car il fait confiance à ce qui a été écrit par d'autres sans se l'approprier ni le prouver lui même... ou au moins sans comprendre les grandes lignes de la démonstration. Il sera prisonnier des logiciels et de leurs concepteurs...

◁38▷ Un hexagone régulier a pour centre de gravité A d'affixe $2+i$ et pour sommet A d'affixe $2+3.i$. Trouvez les autres sommets.

On fait des rotations d'angle $\pi/3$ autour du centre dont l'affixe sera notée plus généralement g, tandis que celle de A sera notée a :



point	A	B	C
affixe	a	$g+e^{\frac{i.\pi}{3}}.(a-g)$	$g+j.(a-g)$

point	D	E	F
affixe	$g-(a-g)$	$g+j^2.(a-g)$	$g+e^{-\frac{i.\pi}{3}}.(a-g)$

Pour ce type d'exercices, la clef est bien de faire de la géométrie dynamique (« je passe d'un sommet à l'autre par une rotation donc par multiplication par un complexe de module 1 bien choisi »),
et surtout pas de la géométrie à la française de collège mal foutu (« je mets tout en équation pour dire que des longueurs sont égales »).

◁39▷ Calculez $\cos(\pi/12)$ et ensuite prouvez $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{16}+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\sqrt{8}}$.

On écrit $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

La formule de duplication $\cos(2.\theta) = \cos^2(\theta)-1$ donne $\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{2} = \frac{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$.
Comme $\cos(\pi/24)$ est positif, on a juste à passer à la racine, sans signe moins. Et on rappelle $\sqrt{16}=4$, si si !

◁40▷ On définit : $f = x \longmapsto \frac{x^2}{x^2-x}+\frac{x^3}{x^3+x^2}-\frac{2.x^2}{x^3-x}$. Représentez la graphiquement, après l'avoir simplifiée...
Représentez aussi le graphe de $f\circ f\circ f\circ f$.

On définit $f = x \longmapsto \frac{x^2}{x^2-x}+\frac{x^3}{x^3+x^2}-\frac{2.x^2}{x^3-x}$ sur un domaine convenable :
éviter 0, 1 et -1 puisque $x^2-x = x.(x-1)$
$x^3+x^2 = x^2.(x+1)$
$x^3-x = x.(x-1).(x+1)$

Cette recherche permet de trouver un dénominateur commun autre que le gros produit[3], et aussi de simplifier par x

$$f(x) = \frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{2.x}{(x-1).(x+1)} = \frac{(x^2+x)+(x^2-x)-2.x}{(x-1).(x+1)} = \frac{2.x^2-2.x}{(x-1).(x+1)} = \frac{2.x}{x+1}$$

Bref, une simple homographie $\boxed{x \longmapsto \frac{2.x}{x+1} \text{ à représenter sur }]-\infty,\ -1[\cup]-1,\ 0[\cup]0,\ 1[\cup]1,\ +\infty[}$ car il reste des contraintes de la forme initiale.

3. une fois de plus, on est en maths, on réfléchit avant de calculer

Mais alors f se représente par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (vous comprenez le 0 ?).

Composer les homographies, c'est multiplier les matrices : $f \circ f$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2$ qui fait $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$(f \circ f) \circ (f \circ f)$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^2$: $\begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$

On peut même émettre une conjecture pour la forme générale. Mais ensuite, on n'oublie qu'il faut éviter toutes les valeurs hors du domaine initial de f comme -1, 0 et 0, puis du domaine de $f \circ f$ et ainsi de suite.

◃41▹ **Résolvez : les deux derniers chiffres de $n + n!$ sont 2 suivi de 5.**

Les deux derniers chiffres de $n + n!$ viennent de n et de $n!$ avec d'éventuelles retenues lors du calcul.
Mais qui sont les deux derniers chiffres de $n!$:

1	1	2	6	24	120	720	40320	362880	3628800	39916800

En fait, à partir de $n = 10$, l'entier $n!$ est un multiple de 100.
Donc, dès que n a dépasse 10, les deux derniers chiffres de $n + n!$ sont les deux derniers chiffres de n.
La question se réduit alors à « les deux derniers chiffres de n sont 2 suivi de 5 ».
On traduit : $S \cap [10, +\infty[= \{25 + 100.p \mid p \in \mathbb{N}\}$

On cherche à la main les racines avant 10 : $S = \{4\} \cup \{25 + 100.p \mid p \in \mathbb{N}\}$

◃42▹ **♡ Comparez $Arcsin(1/3)$ et $Arccos(1/6)$ pour l'ordre usuel** *(pensez à comparer les sinus de ces deux angles ou insérez une mesure classique entre les deux).*

	$Arcsin(1/3)$	$Arccos(1/6)$
sin	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{35}}{6}$
cos	$\frac{\sqrt{8}}{3}$	$\frac{1}{6}$

On a $\sin(Arcsin(1/3)) \leqslant \sin(Arccos(1/6))$.
Comme les deux angles sont entre 0 *et* $\frac{\pi}{2}$, *ils sont classés dans le même ordre que leurs sinus :* $\sin(Arcsin(1/3)) \leqslant \sin(Arccos(1/6))$

Par croissance d'Arcsinus :

$$Arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant Arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Par décroissance d'Arccosinus :

$$\frac{\pi}{6} = Arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leqslant Arccos\left(\frac{1}{6}\right)$$

◃43▹ **Vrai ou faux : $\cos(x) = 1 \Rightarrow x = 0\ [\pi]$?**

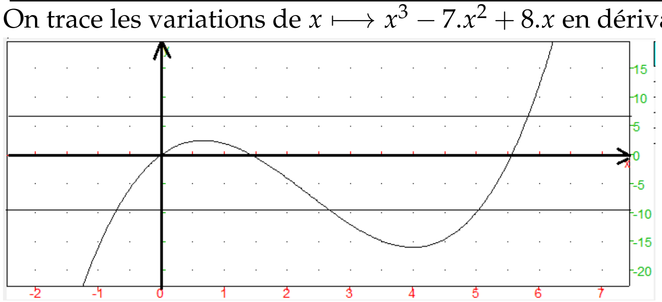
Vrai.

On a en fait $\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0\ [2.\pi]$.

Mais ici, on a juste $\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0\ [2.\pi] \Rightarrow x = 0\ [\pi]$.
En effet, si x s'écrit $2.k.\pi$ avec k entier, il s'écrit $p.\pi$ avec p entier (pair).
On n'a évidemment pas une équivalence ici.

◃44▹ **Indiquez suivant la valeur de λ le nombre de racines réelles du polynôme $X^3 - 7.X^2 + 8.X + \lambda$.**

On trace les variations de $x \longmapsto x^3 - 7.x^2 + 8.x$ en dérivant déjà (4 et 2/3) :



x	$]-\infty, 2/3]$	$[2/3, 4]$	$[4, +\infty[$	
$f'(x)$	⊕	⊖	⊕	
	$-\infty \nearrow 68/27$	$\searrow -16$	$\nearrow +\infty$	

λ	$\left]-\infty, -\frac{68}{27}\right[$	$\frac{-68}{27}$	$\left]\frac{-68}{27}, 16\right[$	16	$]16, +\infty[$
	une racine	deux racines dont une double	trois racines	deux racines dont une double	une racine

◁45▷ ♡ Classez les en fonction de leur argument :

3+4.i	34+45.i	346+443.i	512+641.i	100+127.i

(calculatrice interdite, quand même !)

Les quatre sont dans le même quart de plan « x et y positifs ».
Il suffit de calculer les tangentes de leurs arguments.
Rappelons en effet que (pour x et y positifs en tout cas), e, posant $x + i.y = \rho.\cos(\theta) + \rho.\sin(\theta)$, on atan$(\theta) = \frac{y}{x}$.
Sur l'intervalle de travail, la tangente est croissante. Les arguments seront donc dans le même ordre que les tangentes.

complexe	3+4.i	34+45.i	346+443.i	512+641.i	100+127.i
tangente	$\frac{4}{3}$	$\frac{45}{34}$	$\frac{443}{346}$	$\frac{641}{512}$	$\frac{127}{100}$
tangente à 10^{-3} près	$1,333$	$1,323$	$1,280$	$1,252$	$1,270$

Certes la calculatrice est interdite, mais elle permet au moins d'avoir une idée du classement. Reste ensuite à prouver :

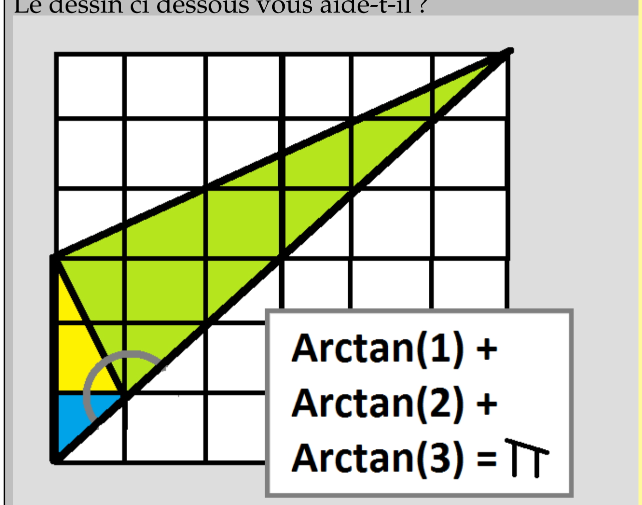
complexe	512+641.i	100+127.i	346+443.i	34+45.i	3+4.i
tangente	$\frac{641}{512}$	$\frac{127}{100}$	$\frac{443}{346}$	$\frac{45}{34}$	$\frac{4}{3}$
tangente à 10^{-3} près	$1,252$	$1,270$	$1,280$	$1,323$	$1,333$

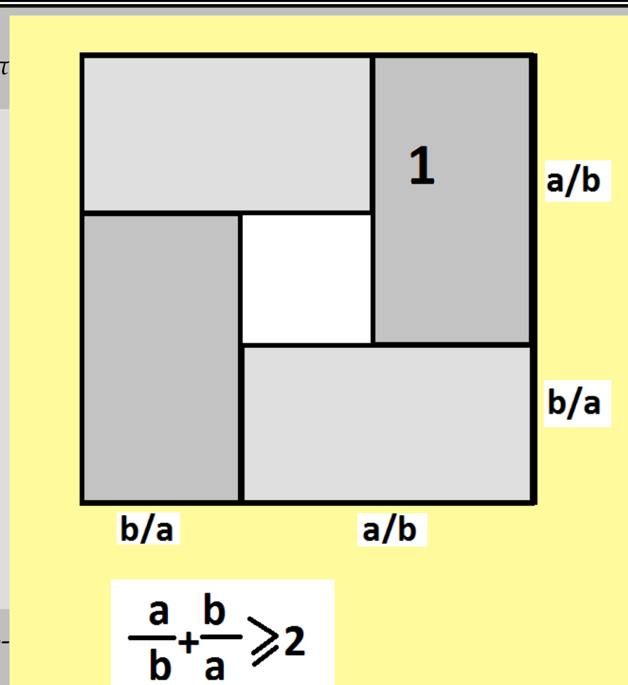
On le fait par produits en croix :

complexe	512+641.i	100+127.i	346+443.i	34+45.i	3+4.i
tangente	$\frac{641}{512}$	$\frac{127}{100}$	$\frac{443}{346}$	$\frac{45}{34}$	$\frac{4}{3}$
preuve	$641 \times 100 < 127 \times 512$	$127 \times 346 < 443 \times 100$	$443 \times 34 < 45 \times 346$	$45 \times 3 \leqslant 34 \times 4$	
détail	$64100 < 65024$	$43942 < 44300$	$15062 < 15570$	$135 < 136$	

L'usage de la calculatrice a permis de n'avoir que ces tests à faire, et à ne pas se lancer dans la comparaison de $\frac{45}{34}$ et $\frac{641}{512}$ par exemple.

◁46▷ ♡ Montrez : $Arctan(1) + Arctan(2) + Arctan(3) = \pi$
Le dessin ci dessous vous aide-t-il ?





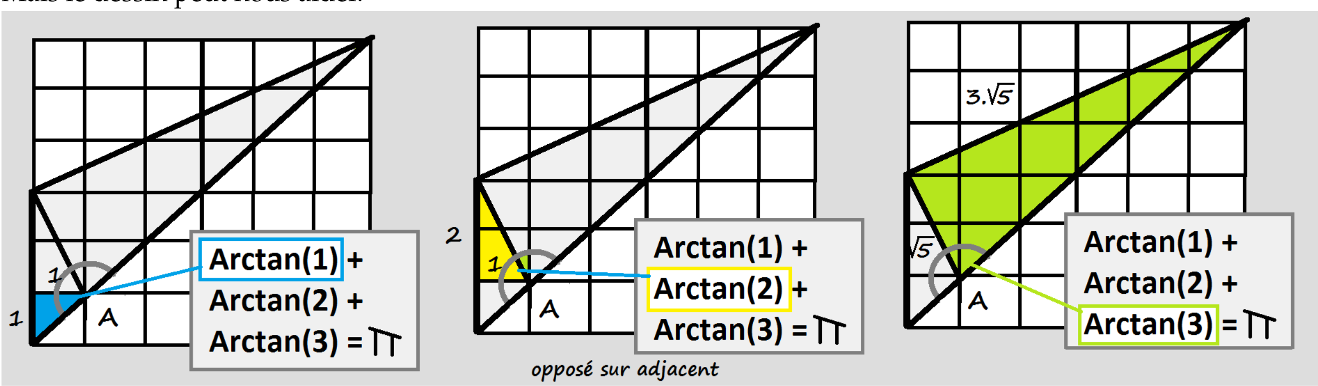
Vous connaissez $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ pour a et b réels strictement positifs.
Il faut la démontrer : il y a une preuve qui par de $(a-b)^2 \geqslant 0$. Il y en a une autre qui étudie $x \longmapsto x + \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, et il y en a une qui utilise un dessin.

Deux exercices distincts, le seul rapport est dans la mise en page des dessins.

Pour le premier, la démarche mathématique (mais indigne d'une vrai matheuse) consiste à dire qu'on a la somme de trois angles entre 0 et $\pi/2$ (donc un angle entre 0 et $3.\pi/2$), dont on connaît les tangentes.
On va calculer sa tangente pour le reconnaître.
La formule à utiliser est dans le cours (donc par cœur pour certains, retrouvée d'instinct pour d'autres en divisant haut et base de $\dfrac{\cos.\sin+\sin.\cos}{\cos.\cos-\sin.\sin}$ par le produit $\cos.\cos$) : $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}$.
Ici : $\tan(Arctan(1)+Arctan(2))=\dfrac{1+2}{1-1.2}=-3$,
puis $\tan(Arctan(1)+Arctan(2)+Arctan(3))=\dfrac{-3+3}{1-(-3).3}=0$.
Le seule angle dans notre intervalle $\left]0,\ 3.\dfrac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente soit nulle est π (la somme des trois angles ne pouvait pas valoir 0) : $Arctan(1)+Arctan(2)+Arctan(3)$.

Ce qui ne serait même pas digne d'un cours de maths, c'est d'arriver à $\tan(Arctan(1)+Arctan(2)+Arctan(3))=0$ *et de dire « je passe à l'arctangente, donc* $Arctan(a)+Arctan(b)+Arctan(c)=Arctan(0)=0$.
C'est comme d'arriver à $x^2=(1+\sqrt{5})^2$ *et de conclure* $x=1+\sqrt{5}$ *sans voir qu'il y a une histoire de signe.*

Mais le dessin peut nous aider.



La somme des trois angles en A fait un angle plat, de mesure π.

Et ça, c'est la preuve qui réjouit le matheux.

Passons au carré à droite.
Ses quatre côtés ont pour longueur $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$.
Son aire est donc $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2$.

Mais on y trouve quatre rectangles ayant tous pour aire 1 : $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{a}$.
Plus un carré au centre, dont je ne calculerai même pas l'aire.

En écrivant de deux façons l'aire du carré, on a $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2=1\times 4+(petit\ carre)$.
On a donc $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^2\geqslant 1\times 4$ puis $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\geqslant 2$.

◁ 47 ▷ Posez les opérations suivantes (on est en base 8) :

2 4 7	2 4 7	1 2 4 7	5 2 4 7	2 4 7
+ 1 3 5 7	× 4 2 2 1	× 3 6 0 1	- 1 7 5 7	- 1 7 5 7
+ 6 1 5 3	= ?	= ?	= ?	= ?
+ 1 2 1 1				
= ?				

Rappel : $7+7=8+6$ donc, je pose 6 et je retiens une huitaine.
$7+7+3+1=8+6+3+1=8+8+2$ je pose 2 et je retiens deux huitaines.

		1	2	2	
			2	4	7
+		1	3	5	7
+		6	1	5	3
+		1	2	1	1
=	1	1	2	1	2

A continuer.

◁48▷ ♡ Démontrez $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$ et calculez $\tan(3.\pi/8)$.
♡ Démontrez $\tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}$ et calculez $\tan(k.\pi/12)$ pour k de 0 à 12 (tableau).

Il y a deux sortes de professeurs :
- ceux qui posent plusieurs fois la même question
- et ceux qui posent plusieurs fois la même question.

◁49▷ Regroupez en trois familles :

p implique q	p donc q	p est condition nécessaire et suffisante de q
si p alors q	il faut avoir q pour avoir p	p est une condition suffisante pour q
p car q	il suffit d'avoir q pour avoir p	p est une condition nécessaire pour q
p donc q	les solutions de l'équation p sont des solutions de q	pour avoir p il faut avoir q
sans p, pas de q	pour avoir p il fait et il suffit d'avoir q	p seulement si q
p si q	p si et seulement si q	p a besoin de q

p implique q	p donc q	
si p alors q	il faut avoir q pour avoir p	p est une condition suffisante pour q
		pour avoir p il faut avoir q
p donc q	les solutions de l'équation p sont des solutions de q	
		p seulement si q
		p a besoin de q

ensuite

q implique p		
p car q	il suffit d'avoir q pour avoir p	p est une condition nécessaire pour q
sans p, pas de q		
p si q		

et enfin

p équivalent à q		p est condition nécessaire et suffisante de q
	pour avoir p il fait et il suffit d'avoir q	
	p si et seulement si q	

◁50▷ Démontrez par récurrence : $\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$ pour tout n.
Et sans récurrence ?

On note P_n la propriété $\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$.
On initialise avec P_0 : d'un côté un produit vide et de l'autre $(0!)^1$: il y a égalité.
Et même avec P_1 : d'un côté le produit vaut juste 1 et de l'autre $(1!)^2$ n'en est pas loin non plus.

Supposons, pour un entier n donné, qu'on a bien

$$\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$$

On passe au rang $n+1$ dans le membre de gauche, puisque c'est lui le plus compliqué :

$$\prod_{k=1}^{n+1} k^k.k! = \Big(\prod_{k=1}^{n+1} k^k.k!\Big).(n+1)^{n+1}.(n+1)!$$

On remplace par hypothèse de rang n :

$$\prod_{k=1}^{n+1} k^k.k! = \Big((n!)^{n+1}\Big).(n+1)^{n+1}.(n+1)!$$

On fait entrer $(n+1)^{n+1}$ dans la grande parenthèse :

$$\prod_{k=1}^{n+1} k^k.k! = \Big((n!).(n+1)\Big)^{n+1}.(n+1)! = \Big((n+1)!)\Big)^{n+1}.(n+1)!$$

et on retrouve bien $\Big((n+1)!\Big)^{n+1+1}$.

Sinon, je vous laisse réfléchir à l'explication ci dessous

					5
				4	4
			3	3	2
		2	2	2	2
.	1	1	1	1	1

5	5	5	5	5	.
4	4	4	4		
3	3	3			
2	2				
1					

5	**5**	**5**	**5**	**5**	5
4	**4**	**4**	**4**	4	4
3	**3**	**3**	3	3	2
2	**2**	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1

là, c'est $\prod_{k=1}^{n} k!$ en colonnes	et là $\prod_{k=1}^{n} k^k$ en lignes	et là, finalement $(n!)^{n+1}$

◁51▷ ♡ Sachant que $273+736.i$ a pour racine $23+16.i$, donnez les racines carrées de $273.i+736$. Même question pour $273-736.i$.

On peut vérifier quand même : $(23+16.i)^2 = 23^2-16^2+2.23.16.i = (23+16).(23-16)+32.23.i = 273+736.i$.
Les deux racines de $273+736.i$ sont donc $23+16.i$ et son opposé $-23-16.i$.

On écrit ensuite

$$273-736.i = \overline{273+736.i} = \overline{(23+16.i)^2} = \Big(\overline{23+16.i}\Big)^2$$

Les deux racines de $273-736.i$ sont donc $23-16.i$ et son opposé $-23+16.i$.

On écrit ensuite $273.i+736 = i.(273-736.i) = i.(23-16.i)^2$
Il serait bon d'écrire i comme carré de quelqu'un à son tour.
En passant par la forme polaire : $i = e^{i.\pi/2} = (e^{i.\pi/4})^2$.
On a donc $273.i+736 = (e^{i.\pi/4})^2.(23-16.i)^2$.
On tient donc une de ses racines carrées : $e^{i.\pi/4}.(23-16.i)$.
On peut l'écrire $\dfrac{\sqrt{2}+i.\sqrt{2}}{2}.(23-16.i)$.
Et on sort aussi son opposé.

◁52▷ ♡ Résolvez $\Big(\dfrac{1+i.t}{1-i.t}\Big)^4 - 2.\cos(\theta).\Big(\dfrac{1+i.t}{1-i.t}\Big)^2 + 1 = 0$ d'inconnue réelle t *(indication : posez $t=\tan(\alpha)$)*.

On pose déjà $X = \Big(\dfrac{1+i.t}{1-i.t}\Big)^2$ et on résout donc $T^2 - 2.\cos(\theta).T + 1 = 0$.

On trouve deux solutions à séparer : $X = e^{i.\theta}$ | $X = e^{-i.\theta}$

On remonte

$X = e^{i.\theta}$		$X = e^{-i.\theta}$	
$\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = e^{i.\theta/2}$	$\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = -e^{i.\theta/2}$	$\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = e^{-i.\theta/2}$	$\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = -e^{-i.\theta/2}$

On pourra même écrire

$X = e^{i.\theta}$		$X = e^{-i.\theta}$	
$\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = e^{i.\theta/2}$	$\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = e^{i.\theta/2+i.\pi}$	$\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = e^{-i.\theta/2}$	$\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = e^{-i.\theta/2+i.\pi}$

On résout ensuite des choses comme $\dfrac{1+i.t}{1-i.t} = e^{i.\alpha}$.
On trouve $t = \dfrac{e^{i.\alpha}-1}{i.(1+e^{i.\alpha})}$ dont on peut se contenter.
Mais pourquoi ne pas multiplier haut et bas par $e^{i.\alpha/2}$?

$$t = \frac{e^{i.\alpha/2}-e^{-i.\alpha/2}}{i.(e^{i.\alpha/2}+e^{-i.\alpha/2})}$$

Mieux encore : $t = \dfrac{e^{i.\alpha/2}-e^{-i.\alpha/2}}{2.i}.\dfrac{2}{e^{i.\alpha/2}+e^{-i.\alpha/2}} = \sin(\alpha/2).\dfrac{1}{\cos(\alpha/2)}$.

On résume : $\boxed{S = \Big\{ \tan\Big(\dfrac{\theta}{4}\Big),\ \tan\Big(\dfrac{\theta}{4}+\dfrac{\pi}{2}\Big),\ \tan\Big(-\dfrac{\theta}{4}\Big),\ \tan\Big(-\dfrac{\theta}{4}+\dfrac{\pi}{2}\Big)\Big\}}$

On note que c'est un ensemble de a forme $\Big\{t,\ \dfrac{-1}{t},\ -t,\ \dfrac{1}{t}\Big\}$.

◃53▹ ♡ "$(p \Rightarrow q)$ *et* $(\overline{p} \Rightarrow q)$" est il bien équivalent à q ?
De "$(p \Rightarrow q)$ *et* $(q \Rightarrow \overline{p})$", que pouvez vous déduire sur p et sur q ?

On prend "$(p \Rightarrow q)$ *et* $(\overline{p} \Rightarrow q)$" qu'on met sous forme disjonctive "$(\overline{p}$ *ou* $q)$ *et* $(p$ *ou* $q)$".
On factorise en "$(\overline{p}$ *et* $p)$ *ou* q".
Mais on ne peut pas avoir une chose et son contraire : $\overline{p}$ *ou* p est Faux.
Et *Faux ou* q ne laisse plus le choix : c'est q.

"$(p \Rightarrow q)$ *et* $(q \Rightarrow \overline{p})$" semble louche.
Si on a p, alors par transitivité, on n'a pas p. Contradiction.
C'est donc que p est impossible.
En revanche, maintenant qu'on a $\overline{p}$, on n'a pas d'information sur q.

◃54▹ ♣ Les chiffres du digicode (de 1 à 9) sont mis dans le désordre (comme pour les sites Internet qui veulent vérifier que vous n'êtes pas un bot). Exemple :

1	3	8
2	4	7
5	6	9

Montrez qu'il existe au moins une ligne où le produit des trois termes vaut au moins 72.
Donnez une situation où chacun des produits vaut au plus 72.

On part de

a	b	c
d	e	f
g	h	i

sans savoir autre chose de plus que les lettres de a à i représentent les entiers de 1 à 9.
Il faut prouver $a.b.c \geqslant 72$ ou $d.e.f \geqslant 72$ ou $g.h.i \geqslant 72$.
On va le faire par l'absurde.
Si tel n'était pas le cas, on aurait $a.b.c < 72$ et $d.e.f < 72$ et $g.h.i < 72$.
Et on veut aboutir à une contradiction.
L'idée naturelle est d'effectuer le produit des trois lignes positives : $(a.b.c).(d.e.f).(g.h.i) < 72^3$.

Or, le produit de ces neuf entiers est égal à 9! (qu'importe l'ordre dans lequel on les a cités).
On aboutit à $9! < 72^3$ et on tient notre contradiction.

En effet, on compare

$9!$	face à	72^3
$2^7.3^4.5.7$	face à	$2^9.3^6$
5.7	face à	$2^3.3^2$
35	face à	36

Oh non ! Déception. Il n'y a pas de contradiction !

Pourtant, la piste semble bonne. Reprenons la, en tenant compte du fait qu'on a des entiers.
Il faut prouver $a.b.c \geqslant 72$ ou $d.e.f \geqslant 72$ ou $g.h.i \geqslant 72$.
On va le faire par l'absurde.
Si tel n'était pas le cas, on aurait $a.b.c < 72$ et $d.e.f < 72$ et $g.h.i < 72$.
et donc $a.b.c \leqslant 71$ et $d.e.f \leqslant 71$ et $g.h.i \leqslant 71$.
En multipliant, on trouve $(a.b.c).(d.e.f).(g.h.i) \leqslant 71^3$.

Et cette fois, c'est bien contradictoire.

Pour un exemple où on les produits sont inférieur ou égaux à 72, on en rend un (au moins) égal à 72, avec $8 \times 9 \times 1$. Il reste la possibilité de jouer avec $3 \times 6 \times 4$.

Et pour le reste 5, 7 et 2 de produit 70 :

9	8	1
3	6	4
5	7	2