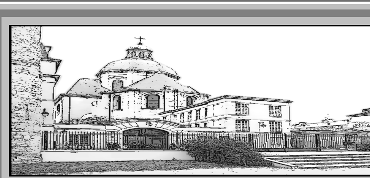
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 7 octobre
$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025

TD04

◃0▹ ♡ Pour tout n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n.e^{-t}.dt$. calculez I_0, I_1 et I_2.

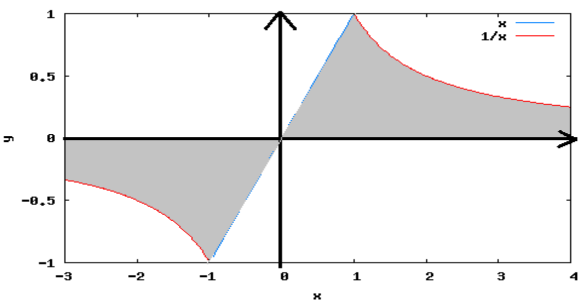
♡ Montrez qu'il existe deux suites d'entiers naturels (a_n) et (b_n) vérifiant $I_n = a_n + b_n.e^{-1}$ (exprimez a_{n+1} et b_{n+1} à l'aide de $a_n$et b_n).

♡Montrez pour tout n : $0 < I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ (surtout pas en calculant l'intégrale, mais en la majorant par une intégrale plus simple, c'est ça l'esprit des maths, on réfléchit avant de calculer, alors que dans les autres matières on vous demande de calculer et réfléchir en même temps).

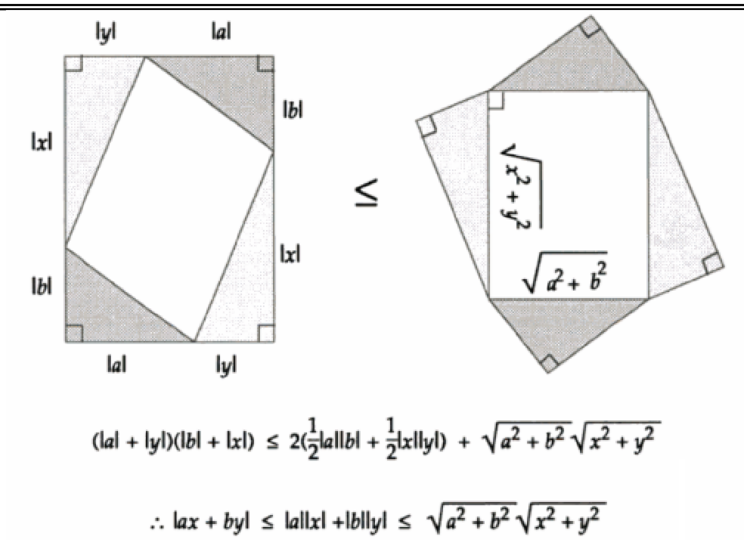
On suppose que e est un rationnel, de la forme $\dfrac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux.

Montrez alors $\forall(a,\ b) \in \mathbb{Z}^2,\ \left(|a.e+b| < \dfrac{1}{q}\right) \Rightarrow (a.e+b=0)$.

Concluez : e est irrationnel.



◃1▹ ♡ On pose $f = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} x & si & |x| \leqslant 1 \\ 1/x & sinon & \end{array} \right|$. Représentez graphiquement.
f est elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Déterminez $f \circ f$. Est elle injective ?



Comparez
$2.\Big(\displaystyle\sum_{i\leqslant n} a_i.b_i\Big)^2 + \sum_{\substack{i\leqslant n \\ j\leqslant n}} (a_i.b_j - a_j.b_i)^2$
et $\Big(\displaystyle\sum_{i\leqslant n}(a_i)^2\Big).\Big(\sum_{j\leqslant n}(b_j)^2\Big)$.
Retrouvez l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Montrez :
$a.\cos(t) + b.\sin(t) \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$.

◃2▹ Montrez : $a.b + b.c + c.a \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.

◃3▹ Soient a, b, c et d quatre réels. Montrez : $(a^5+b^5+c^5+d^5)^2 \leqslant (a^4+b^4+c^4+d^4).(a^6+b^6+c^6+d^6)$.

◃4▹ Montrez : $\displaystyle\int_0^1 |\ln(t)|^n.dt = n!$ pour tout entier naturel n. Montrez alors $(n+m)! \leqslant \sqrt{(2.n)!.(2.m)!}$. Pouvez vous le prouver sans passer par les intégrales ?

◃5▹ Montrez pour α et β réels positifs : $\alpha + \beta \geqslant 2.\sqrt{\alpha.\beta}$. Soient $[a_1, \ldots a_n]$ et $[b_1, \ldots b_n]$ deux listes de réels, on pose $A = \displaystyle\sum_{k=1}^n (a_k)^2$, $B = \displaystyle\sum_{k=1}^n (b_k)^2$ et $P = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k.b_k$ *(supposé non nul)*. Montrez : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \left(\frac{(a_k)^2.B}{P^2} + \frac{(b_k)^2}{B}\right) \geqslant 2.\sum_{k=1}^n \frac{a_k.b_k}{P}$. Retrouvez l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

◁6▷ Un élève affirme pour les applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que c'est faux :

$\left.\begin{array}{ll} f & \textit{injective} \\ g & \textit{injective} \end{array}\right\} \Rightarrow f+g \textit{ injective}$	$f \textit{ injective} \Rightarrow f' \textit{ injective}$	$\left.\begin{array}{ll} f & \textit{injective} \\ g & \textit{injective} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow g \circ f \textit{ bijective}$
$\left.\begin{array}{ll} f & \textit{injective} \\ g & \textit{injective} \end{array}\right\} \Rightarrow f \times g \textit{ injective}$	$f' \textit{ injective} \Rightarrow f \textit{ injective}$	

◁7▷ L'application $(a,\ b) \longmapsto (a+b,\ a^2+b^2,\ 1_{a<b})$ est elle injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$?
Est elle surjective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \{0,\ 1\}$?
Rappel : $1_{a<b} = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & a < b \\ 0 & sinon & \end{array} \right|$.

◁8▷ Vrai ou faux : si f est injective de $]-\infty,\ 0]$ dans $\mathbb{R}$ et de $]0,\ +\infty[$, alors elle est injective de $]-\infty,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$

◁9▷ Montrez que $x \longmapsto x^2 + \pi.x + 2$ est injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser sans preuve que π est irrationnel)..

◁10▷ Montrez que l'application $n \longmapsto [n]$ n'est ni injective ni continue sur $\mathbb{R}^+$.
Montrez que l'application $n \longmapsto (n-[n]).([n]+1-n)$ est continue mais non injective sur $\mathbb{R}^+$.
Montrez $n \longmapsto n.(n-[n]).([n]+1-n)+n^2$ est continue et injective sur $\mathbb{R}^+$.

◁11▷ L'application $x \longmapsto x^x - x$ est elle injective (sur $\mathbb{N}$ ou sur $\mathbb{R}^+$? oui, c'est à la question).

Avouez que la langue française est ambigüe : Les poules du couvent couvent. Il est de l'Est. Nous portions les portions de fils de fer à leurs fils. Les gens au caractère violent violent leur promesses. Dans cet affluent, les poissons affluent. Peut on se fier à un homme fier ?

◁12▷ ♡ Donnez une primitive de $t \longmapsto \sin(\ln(t))$ sur $]0,\ +\infty[$.

◁13▷ En arrivant à la caisse de votre magasin, vous constatez que vous avez deux tickets pour des réductions : l'un d'une valeur de dix euros, et l'autre qui donne droit à dix pour cent de réduction. Dans quel ordre les présentez vous ?

◁14▷ Résolvez le système $\left\{ \begin{array}{lll} 8^x & = & 10.y \\ 2^x & = & 5.y \end{array} \right|$ d'inconnues réelles x et y.

◁15▷ ♣ Une application f de A dans B est dite bibijective si set seulement si chaque élément de B a exactement deux antécédents dans A.
Pourquoi la quantification n'est elle pas $\forall b \in B,\ \exists!(a,\ \alpha) \in A^2,\ f(a) = f(\alpha) = b$.
Un élève dit que la composée de deux application bibijectives ne peut pas être bibijective, car tout élément va avoir quatre antécédents par la composée et non pas deux. Et pourtant, il y a un cas...
Montrez que si f est bibijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors il existe φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $f \circ \varphi = Id_{\mathbb{N}}$.

◁16▷ ♣ Bintou se isiro $n! = 40526 \ldots 481280000000000000$ (o nilo pupo ti akoko lati kọ) ati $(n+1)! = 2350561 \ldots 914240000000000000$.
O ni lati wa nọmba naa n ? Salaye. C'est du yorouba *(langue du Nigeria, Bénin, Togo, Côte d'Ivoire...)*. J'espère que vous comprenez qu'on vous demande de retrouver n à partir de $n!$ et $(n+1)!$.

◁17▷ ♣ Résolvez $\Re e\Big((e^e)^{i.\theta}\Big) \geqslant 0$ d'inconnue réelle θ.

◁18▷ ♣ On définit φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $\varphi(2^a.3^b.5^c.7^d.11^e\ldots) = 2^{-a}.3^b.5^c.7^d.11^e\ldots$ et $\varphi(0) = 0$ puis on définit la relation $\trianglelefteq$ par $a \trianglelefteq b \Leftrightarrow \varphi(a) \leqslant \varphi(b)$.
Montrez que c'est une relation d'ordre et que 0 en est le plus petit élément.
Montrez que la suite $(n!)$ n'est ni croissante ni décroissante pour $\trianglelefteq$.
Montrez que la suite (p_n) des nombres premiers est croissante.
Montrez : $\forall(a,b,c),\ a \trianglelefteq b \Rightarrow a.c \trianglelefteq b.c$.
A-t-on $\forall(a,b,c),\ a \trianglelefteq b \Rightarrow a+c \trianglelefteq b+c$.
Un entier peut il être plus petit que tous ses diviseurs ?
Combien y a-t-il d'entiers entre 2020 et 2021 ?

.	Une relation sur un ensemble est "formellement" une application de $E\times E$ dans $\{Vrai,\ Faux\}$. Pratiquement, on prend deux éléments a et b, et on dit si a est ou non en relation avec b ($a\Re b$).
Réflexive	Tout élément est en relation avec lui même $\forall a\in E,\ a\Re a$
Transitive	Les flèches se mettent bout à bout. $\forall(a,\ b,\ c)\in E^3,\ (a\Re b\ et\ b\Re c)\Rightarrow(a\Re c)$
Antisymétrique	Il ne peut pas y avoir de flèches dans les deux sens $\forall(a,\ b)\in E^2,\ (a\Re b\ et\ b\Re a)\Rightarrow(a=b)$ Ce n'est pas la négation de "symétrique".
Symétrique	Il y a une flèche à l'aller il y a une flèche au retour $\forall(a,\ b)\in E^2,\ (a\Re b)\Rightarrow(b\Re a)$
Ordre $\leqslant, \subset, \Rightarrow$	Relation réflexive, antisymétrique et transitive un ordre peut être total ($\forall(a,b),\ a\ll b\ ou\ b\ll a$) ou partiel ($\exists(a,b),\ a\not\ll b\ et\ b\not\ll a$)
Équivalence $=, \equiv, \Leftrightarrow$	Relation réflexive, symétrique et transitive la classe d'équivalence d'un élément a est l'ensemble des éléments en relation avec a : $Cl(a)=\{\alpha\in E\mid\alpha\Re a\}$

◁19▷ *Dans cinq secondes, tu pourras ignorer cet exercice, mais ce qu'on ne peut pas ignorer, c'est le échauffement climatique.*

Sachant $a+b.\sqrt[3]{5}+c.\sqrt[3]{25}=\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}$ calculez la somme des trois rationnels a, b et c.

◁20▷ ♡ Pour tout n, on pose $a_n=(1+\sqrt{3})^{2.n+1}$ et $b_n=(1-\sqrt{3})^{2.n+1}$.
a - Montrez : $0\geqslant b_n>-1$.
On pose $S_n=a_n+b_n$ pour tout n.
b - Montrez que la suite (S_n) est une suite d'entiers et vérifie $\forall n,\ S_{n+2}=8.S_{n+1}-4.S_n$.
c - Montrez que S_n est toujours divisible par 2^{n+1}.
d - Montrez : $S_n\leqslant a_n<S_n+1$.
e - Déduisez que la partie entière de a_n est toujours divisible par 2^{n+1}.

◁21▷ ♡ Combien l'équation $\cos^2(x)=2.\cos(x)+1$ a-t-elle de solutions dans $[0,\ 4.\pi]$? Quelle est la somme de ces solutions ?
Même question avec $\cos^2(x)=4.\cos(x)+6$.
Même question avec $6.\cos^2(x)=4.\cos(x)+1$.

◁22▷ f est de classe C^2, nulle en a et b. Montrez

$$\int_a^b(f'(t))^2.dt\Big)^2\leqslant\Big(\int_a^b f(t).f''(t).dt\Big)^2\leqslant\int_a^b(f(t))^2.dt.\int_a^b(f''(t))^2.dt.$$

◁23▷ Mettez sous la forme $t\longmapsto A.\cos(t-\varphi)$ la fonction $t\longmapsto a.\cos(t)+\sqrt{1-a^2}).\sin(t)$ sachant que a est un réel de $]-1,\ 1[$.

◁24▷ *Vous jouez contre Guillaume Deslandes*[a]*. Sur la table, il y a neuf plaquettes, numérotées de 1 à 9. Chacun prend à tour de rôle une tablette à la fois. Le premier qui a dans ses tablettes trois tablettes dont la somme vaut 15 a gagné.*

a. ancien élève de MPSI2, ancien colleur de MPSI2, prof de Prépas à Stan, auteur avec son frère (aussi ancien MPSI2) d'un livre d'énigmes chez Ellipses préfacé par Cédric Villani

Vous voulez gagner à tout prix. Vous commencez ou vous laissez Guillaume entamer ?

Indication :

2	9	
	5	
6		8

◁25▷ Voici les notes et totaux de trois élèves au concours de l'**E**cole **N**ationale **F**édérale d'**O**rnithologie et **I**ngénierie **R**obotique **É**voluée :

élève	français	physique	mathématiques	total
Raiman-Phénomélaaaale	5	4	9	120
Décha-Pourléboufai	2	6	8	114
Endual-N'mi	0	10	11	157

Quelle note aurait du avoir l'élève Endual-N'mi en français pour avoir un total de 200 et être admissible ? Quel total aura un élève qui aura vingt en mathématiques et zéro partout ailleurs.

◁26▷ Vous calculez $(4+5)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} \binom{2018}{k}.4^k.5^{2018-k}$. Quel est le plus grand nombre dans le membre de droite ?

	D		A		B	
C	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	B
	.	.	.	.	.	
			C	C		

	A		B		C	
	.	.	.	.	.	D
	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
A	.	.	.	.	.	
	.	.	.	.	.	
		D	D			

Règle du jeu : sur chaque ligne, les lettres de A à D et une case transparente. Et au bout, l'indication de « qui on voit depuis ce bord ».

	A	C		A		
	A	C	D		B	
D	D	B	C	A		A
A		A	B	D	C	
C	C		A	B	D	D
	B	D		C	A	

A vous de jouer :

	D	B		D		
A						D
D						
B						A
					D	

		C		B		
C						
B						D
						A
D						
			B			

	C		A			
B						D
						D
						C
	B					

Tiens, et un programme Python qui vérifie que pour une matrice donnée sous forme de liste de listes comme [[D,B,A,O,C], [A, C, B, D,O], [O,D,C,A,B], [B, O, D, C, A], [C, A, O, B, D]] [a] pour la première
que chaque ligne est chaque colonne est bien formée des cinq symboles ?
Et même qui ensuite vous dit même quelle est la première lettre (autre que O) visible depuis chaque extrémité de ligne et/ou de colonne.

a. convention : lettre O pour la case vide

◁27▷ Vrai ou faux :
Dans $\mathbb{Z}$, pour être un multiple de 12, il faut être un multiple de 4 ou de 3.
Dans le plan, un triangle qui a trois angles droits est équilatéral.
Sur la sphère, un triangle qui a trois angles droits est équilatéral.

◁28▷ ♡ Résolvez $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ d'inconnue complexe z.

◁29▷ ♡ Résolvez le système $\left\{ \begin{array}{ccccc} 2.\cos(x) & + & 2.\cos(y) & = & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 2.\cos(2.x) & + & 2.\cos(2.y) & = & 1 \end{array} \right|$ d'inconnues réelles x et y.

◁30▷ Les élèves doivent résoudre l'équation $\tan(\theta/2) = 2$.
Le premier trouve $\theta = 2.Arctan(2)$.
Le second écrit $\tan(\theta) = \dfrac{2.2}{1-(2)^2}$ par les formules en arc moitié. Il trouve $Arctan(-4/3)$.
Qui a raison ?

◁31▷ ♣ Vous donnez des cours à un élève de Terminale. Il a naïvement écrit $\cos(3.x) = \cos^3(x)$. Prouvez lui qu'il a tort.
Mais tout à coup, vous vous souvenez que ses parents vous payent cher. Trouvez alors toutes les valeurs de x pour lesquelles sa formule est valable, et faites la somme de ces valeurs de x sur $[-13.\pi;\ 13.\pi]$.
La semaine suivante, il a écrit dans un grand effort $\cos(3.x) = 3 \times \cos(x)$. Cette fois encore, pour faire plaisir à sa sœur à qui vous espérez donner des cours de biologie expérimentale, trouvez le nombre de solutions entre 0 et

$6.\pi$, et faites la somme de ces solutions.
Encore une semaine passe, et cette fois, il écrit $3 \times \cos(3.t) = cos^3(t)$. Décidément. Mais son grand frère a des gros muscles et vous regarde avec animosité (ou au contraire avec lubricité), alors faites encore un effort : le nombre de valeurs de t entre 0 et $6.\pi$ pour lesquelles c'est vrai, et leur somme.

◁ 32 ▷ Résolvez $\cos(2.x) = \sin(3.x)$ d'inconnue réelle x.

◁ 33 ▷ Pour un exercice, j'avais besoin de triplets d'entiers $(a,\ b,\ c)$ compris entre 0 et 20 (des notes de colle) tels que la moyenne harmonique et la moyenne arithmétique soient aussi des entiers.

Ecrivez un programme qui cherche ces triplets d'entiers (entre 0 et N, soyons général) tels que $\dfrac{a+b+c}{3}$ et $\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ soient entiers.

Attention, pas de test débile en type(..., int), on est en maths, on connaît % et //.

Et pour quatre notes ?
Et si on veut aussi que la moyenne géométrique soit un entier ?

◁ 34 ▷ On prend les quatre points A, B, C et D par

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2.\sqrt{2}-2 \\ 4.\sqrt{2}+2 \\ 4.\sqrt{2}-1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2.\sqrt{6}-\sqrt{2}-2 \\ \sqrt{6}-2.\sqrt{2}+2 \\ -2.\sqrt{6}-2.\sqrt{2}-1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -2.\sqrt{6}-\sqrt{2}-2 \\ -\sqrt{6}-2.\sqrt{2}+2 \\ 2.\sqrt{6}-2.\sqrt{2}-1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Montrez que ces quatre vecteurs ont la même norme. Montrez que O est le centre de gravité (isobarycentre) du tétraèdre (A, B, C, D).
Calculez $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}$.
Montrez que les angles AOB, AOC, AOD, BOC, BOD et COD sont tous égaux.

◁ 35 ▷ ♡ L'équation $x^2 + b.x + c = 0$ d'inconnue x admet pour racines α et β. Donnez *(sous forme développée)* l'équation polynomiale de racines α^2 et β^2.

L'équation $x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0$ d'inconnue x admet pour racines α, β et γ. Donnez l'équation polynomiale de racines α^2 et β^2 et γ^2. Donnez l'équation polynomiale de racines $\alpha.\beta$, $\alpha.\gamma$ et $\beta.\gamma$.

◁ 36 ▷ Un rectangle a pour périmètre 12 unités. Entre combien et combien peut varier son aire. Quel est celui qui a la plus grande aire ?

◁ 37 ▷ ♡ Résolvez l'équation « $\dfrac{z+i}{z-i}$ est un imaginaire pur » d'inconnue complexe z *(décrire l'ensemble des solutions sous géométrique)*.

◁ 38 ▷ ♡ Sachant $\tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}$, calculez $\tan(5.\pi/12)$.

◁ 39 ▷ Sachant $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$, calculez $\sin(3.\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$

- en appliquant la formule précédente pour $\theta = \dfrac{\pi}{2} - t$
- en dérivant la formule en cosinus
- en revenant aux formules de Moivre et Euler

◁ 40 ▷ Résolvez l'équation $|x + 2.i| = 15$ d'inconnue réelle x.
Résolvez l'équation $|x + 2.i| = 15$ d'inconnue complexe x.

◁ 41 ▷ On se donne deux réels a et b, on veut montrer : $-\sqrt{a^2+b^2} \leqslant a.\cos(x) + b.\sin(x) \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$. Pour cela, exprimez $(a^2+b^2) - (a.\cos(x) + b.\sin(x))^2$ à l'aide de $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, et montrez que le numérateur de cette fraction en t est un carré parfait. Concluez.

◁42▷ On pose $\alpha = Arccos\left(\dfrac{16}{65}\right)$, $\beta = Arcsin\left(\dfrac{11}{61}\right)$. Montrez que $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, , $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha+\beta)$ sont rationnels.

◁43▷ Trouvez les six solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^6 + z^3.(z+1)^3 + (z+1)^6 = 0$ *(il n'y a que si vous êtes masochiste que vous développerez tout ! trouvez le changement de variable)*. Calculez leur somme.

◁44▷ ♡ j est le complexe $e^{2.i.\pi/3}$. Calculez j^{2019} et $(1+j)^{2019}$ et $(1-j)^{2019}$.

Calculez

$A = \sum_{k=0}^{2019} j^k$	$B = \sum_{k=0}^{2019} \binom{2019}{k}.j^k$	$C = \sum_{k=0}^{2019} \binom{2019}{p}.j^k$
$D = \sum_{p=0}^{2019} \binom{2019}{p}.j^k$	$E = \sum_{k=0}^{2019} \binom{2019}{p}.j^p$	$F = \sum_{\substack{0\leq k\leq 2019\\ 0\leq p\leq 2019}} \binom{2019}{p}.j^k$

◁45▷ Oui, ce sont des exposants :

$$1^{\left(\sum_{k=0}^{2018} k\right)} + j^{\left(\sum_{k=0}^{2018} k^2\right)} + (j^2)^{\left(\sum_{k=0}^{2018} k^3\right)}.$$

◁46▷ On veut résoudre $160.X^3 - 240.X + 90.X - 9 = 0$ d'inconnue réelle X.
En étudiant les variations de l'application $x \longmapsto 160.x^3 - 240.x + 90.x - 9$, montrez que les trois solutions sont réelles. calculez leur somme, la somme de leurs carrés et la somme de leurs inverses.
Montrez que par une translation de $1/2$, l'équation devient $160.Y^3 - 30.Y - 4 = 0$ d'inconnue Y.
Posez alors $Y = \alpha.\cos(\theta)$ et ajustez α pour que l'équation prenne la forme $4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta) =$.
Déterminez alors $3.\theta$ *(modulo $2.\pi$)* et déduisez les valeurs de θ *(modulo $2.\pi/3$)* puis les trois valeurs de $\cos(\theta)$. Indiquez la forme des trois solutions réelles de l'équation initiale.

◁47▷ Le polynôme $X^4 + a.X^3 + b.X^2 + c.X + d$ a pour racines r_1 à r_4. Combien de valeurs peut prendre $(r_1 - r_2).(r_1 - r_3).(r_1 - r_4).(r_2 - r_3).(r_2 - r_4).(r_3 - r_4)$ sous l'action des 4! permutations de la liste d'indices $[1, 2, 3, 4]$? Combien de valeurs peut prendre $r_1 + 2.r_2 + 3.r_3 + 4.r_4$ sous l'action des 4! permutations de la liste d'indices $[1, 2, 3, 4]$? Même question avec $r_1 + 2.r_2 + 3.r_3$.

◁48▷ Montrez par récurrence sur n plus grand que 5 : $3^n \leqslant \dfrac{(2.n)!}{(n!)^2} \leqslant 4^n$.

Vous êtes peut-être un mathématicien si...
– Vous ne pouvez pas vous empêcher de lâcher des contre-exemples dès que quelqu'un soutient une impossibilité,
– À 19 ans vos années les plus productives sont déjà derrière vous,
– Votre résultat majeur est nommé d'après le nom de quelqu'un d'autre,
– Vous faites des erreurs... mais ce sont des erreurs très intéressantes,
– Vous vous demandez comment Euler prononçait « Euclide »,
– Vous avez déjà souri pendant 10 secondes à la fin d'une preuve,
– Vous comprenez toutes les mathématiques que Gauss a manipulées... jusqu'à ses 13 ans,
– Votre matière principale était les mathématiques, la seconde la caféine,
– Vous connaissez tout l'alphabet grec, sans connaitre un seul mot de grec,
– La solution à tout problème passe par le décompte de balles dans des boîtes,
– Faire plus d'une chose à la fois est ennuyeux,
– Vous savez compter jusqu'à 32 avec les doigts de la main (en binaire),
– Vous pensez aux mathématiques en tant qu'art, pas (forcément) en tant que science...
– Vous trouvez que les blagues mathématiques sont drôles,
– Vous vous surprenez en train de dire « il existe » au lieu de « il y a »,
– Vous avez déjà eu des débats virulents autour de 0, 999 . . . = 1,
– Ou des débats virulents autour de la différence entre « Deux pièces sont lancées et l'une d'elles tombe sur face » et « Deux pièces sont lancées. Cette pièce donnée tombe sur face »,
– Vous trouvez ça cool, des nouvelles formules dont la somme donne e,
– Vous passez votre temps à faire de l'aide aux devoirs pour des inconnus,
– Vous écrivez des e mails en LATEX, [1]
– Vous prouvez votre innocence lors d'un interrogatoire en commençant par « Supposez en effet que je sois coupable... », point à partir duquel vous êtes arrêté,
– Mélanger un jeu de cartes vous fait penser au groupe symétrique S_n,
– Vous savez que 1+1 ne fait pas toujours 2,

1. *il y en a déjà parmi vous !*

– *Vous grimacez chaque fois que vous lisez ou entendez quelqu'un dire « et réciproquement » incorrectement,*
– *Vous étiez allé voir le film Matrix parce que vous vous attendiez à des mathématiques...*

◁49▷ Une liste de phrases, une liste de permutations. Appariez les :

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$	

Les philanthropies des ouvriers charpentiers. *Tu me paraissais bien câline.* Le boutre du Sultan coulait au confluent de la Garonne. *Tu danses comme un beau ballot.* Ce cas de Corée me turlupine. *L'aspirant habite Javel.* Le capitaine a enfumé sa cale. *Les mutins ont passé la berge du ravin.*

◁50▷ Dans cette famille, tous les enfants *(Prof, Atchoum, Dormeur, Fouad, Grincheux, Timide et Joyeux)* sont nés un 7 juillet *(07/07, oui)*. Le jour de l'anniversaire, chacun a un gâteau avec autant de bougies que son âge. Tiens, il y a cinq ans, il y avait autant de gâteaux, mais deux fois moins de bougies que cette année. Alors, combien de bougies ?

◁51▷ ♡ t est un réel fixé, θ est un réel de $]-\pi/2,\ \pi/2[$. Montrez : $\dfrac{1+i.\tan(\theta)}{1-i.\tan(\theta)} = e^{2.i.\theta}$.

Déterminez partie réelle et partie imaginaire de $\dfrac{1+i.t}{1-i.t}$ en utilisant la quantité conjuguée. Retrouvez les formules en arc moitié.

◁52▷ u et v sont deux applications de classe C^2 de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ *(deux fois dérivables, de plus u'' et v'' sont continues)*. Montrez : $\displaystyle\int_a^b u''.v = [u'.v - u.v'] + \int_a^b u.v''$.

Montrez sous hypothèse C^3 : $\displaystyle\int_a^b u^{(3)}v = [u''.v - u'.v' + u.v''] - \int_a^b u.v^{(3)}$.

Donnez la formule à l'ordre n *(et démontrez la)*.

◁53▷ Calculez $\displaystyle\int_1^2 t^2.\log_2(t).dt$.

◁54▷ n est un entier naturel qu'on choisira convenablement à la fin.

On définit $f = x \longmapsto \dfrac{x^n.(1-x)^n}{n!}$. Montrez pour tout x de $]0,\ 1[$: $0 < f(x) < \dfrac{1}{n!}$.

Montrez que chaque $f^{(k)}(0)$ et $f^{(k)}(1)$ est un entier.

On suppose que π^2 est un rationnel de la forme $\dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels.

Quel type de raisonnement se prépare-t-on à faire ?

On définit : $F = (x \longmapsto b^n.(\pi^{2.n}.f(x) - \pi^{2.n-2}.f''(x) + \pi^{2.n-4}.f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n.f^{(2.n)}(x))$ *(écrivez proprement avec un $\sum$)*.

Montrez que $F(0)$ et $F(1)$ sont deux entiers.

Montrez : $(x \longmapsto F'(x).\sin(\pi.x) - \pi.F(x).\cos(\pi.x))' = (x \longmapsto \pi^2.a^n.f(x).\sin(\pi.x))$.

Déduisez : $\displaystyle\pi.\int_0^1 a^n.f(x).\sin(\pi.x).dx = F(0) + F(1)$.

Montrez aussi $\displaystyle 0 < \pi.\int_0^1 a^n.f(x).\sin(\pi.x).dx \leqslant \frac{\pi.a^n}{n!}$.

Choisissez maintenant n pour avoir $\dfrac{\pi.a^n}{n!} < 1$.

Aboutissez à la contradiction attendue.

π est il rationnel ? Et $\sqrt{\pi}$?

◁55▷ Un triangle équilatéral et un hexagone régulier ont le même périmètre ; dans quel rapport sont leurs aires ?

◁56▷ Vous tirez au hasard uniforme un entier entre 1 et 2019. Quelle est la probabilité qu'il soit multiple de 7 ou de 13 (ou inclusif).

Vous tirez au hasard uniforme un entier entre 1 et 2019. Quelle est la probabilité qu'il soit multiple de 7 ou de 13 (ou exclusif).

◃57▹ Trouvez a et b sachant : $a+b=15$ et $a^2+b^2=30$.

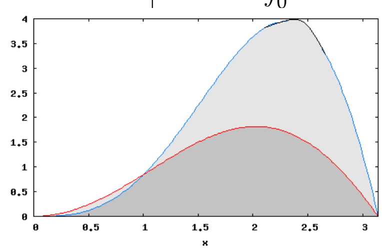
◃58▹ ♡ On définit $ch = x \longmapsto \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$. Montrez que ch est strictement croissante sur $[0,\ +\infty[$.
Montrez pour tout x : $ch(3.x) = 4.ch^3(x) - 3.ch(x)$.
Montrez que l'équation $ch(t) = \alpha$ d'inconnue t et de paramètre α plus grand que 1 admet pour solution $t = \ln(\sqrt{\alpha^2-1}+\alpha)$.

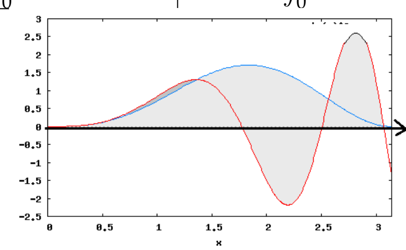
On veut résoudre $4.x^3 - 3.x = a$ (notée E) d'inconnue réelle x avec a plus grand que 1. Montrez grâce à un tableau de variations que l'équation admet une unique solution et que cette solution est plus grande que 1.
On pose alors $T = \ln(\sqrt{x^2-1}+x)$ et $t = \ln(\sqrt{a^2-1}+a)$ (existences ?). Montrez que l'équation E est équivalente à $ch(3.T) = ch(t)$ puis $T = t/3$.
Exprimez alors la solution x_0 de E à l'aide de ch, ln et $\sqrt{\ }$.
Retrouvez les formules de Cardan (ou plutôt, trouvez » puisque vous n'avez pas à les connaître).

On veut résoudre $z^3 - 6.z^2 + 9.z = 6$. Commencez par éliminer le terme $6.z^2$ par une translation.
Montrez que par une homothétie, on se ramène à l'équation $4.x^3 - 3.x = 2$.
Résolvez par la méthode du cosinus hyperbolique.

◃59▹ Montrez : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos^3(\theta) = \dfrac{\cos(3.\theta) + 3.\cos(\theta)}{4}$.
Exprimez $\theta \longmapsto \cos(8.\theta)$ comme combinaison linéaire de $\theta \longmapsto \cos^k(\theta)$ pour θ de 0 à 8.

◃60▹ ♡ Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi} t.\sin(t).dt$ $\displaystyle\int_0^{\pi} t^2.\sin(t).dt$ $\displaystyle\int_0^{\pi} t.\sin^2(t).dt$ $\displaystyle\int_0^{\pi} t.\sin(t^2).dt$





◃61▹ ♡ a - Sans calculatrice : prouvez $(1,01)^{100} > 2$.
b - Sans calculatrice, prouvez : $\dfrac{100\,001}{1\,000\,001} > \dfrac{1\,000\,001}{10\,000\,001}$.
c - Sans calculatrice, prouvez : $4^{53} > 5^{45}$ (idée : 125 et 128).
d - Sans calculatrice, donnez les vingt premiers chiffres de l'écriture décimale de $(\sqrt{1\,001} - \sqrt{1\,000})^{12}$.

◃62▹ ♡ Donnez l'intervalle le plus grand possible contenant 0 sur lequel $x \longmapsto \cos(x) + 2.\sin(x)$ est injective.

◃63▹

Combien l'équation $a.b = 10!$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

Il y a un proverbe chinois qui ne dit rien.
J'aime bien le citer quand je n'ai rien à dire.
Philippe GELUCK (le Chat)

◃64▹ ♡ Bintou vient d'avoir un 20. Sa moyenne est donc passée de 13,5 à 14. Elle vous demande quelle note elle doit avoir à l'I.S. suivante pour que sa moyenne passe à 14,3 ?

◃65▹ Où est l'erreur dans le raisonnement suivant : « on sait $\begin{array}{lcl} x=1 & \Rightarrow & x+2=3 \\ x=3 & \Rightarrow & 2.x+2=8 \end{array}$ on déduit en additionnant $(2.x=4) \Rightarrow (3.x+4=11)$ ».

◃66▹ ♡ A est un ensemble. Que signifient :

$\forall (a,\ b) \in A^2,\ a = b$	$\exists (a,\ b) \in A^2,\ a = b$
$\exists (a,\ b) \in A^2,\ \forall x \in A,\ x = a \text{ ou } x = b$	$\forall (a,\ b) \in A^2,\ a \neq b$
$\exists (a,\ b) \in A^2,\ \forall x \in A,\ x \neq a \Rightarrow x = b$	$\exists (a,\ b) \in A^2,\ a \neq b$
$\exists (a,\ b) \in A^2,\ \forall x \in A,\ x \neq a \Leftrightarrow x = b$	

◃67▹ ♡ Calculez $\sum_{k=0}^{n} \frac{k-1}{k!}$ en y trouvant la somme télescopique cachée.

◃68▹ Le polynôme complexe P de degré 4 a pour racines a, b, c et d. P' a pour racines α, βet γ.
Montrez pour z dans $\mathbb{C} - \{a, b, c, d\}$:

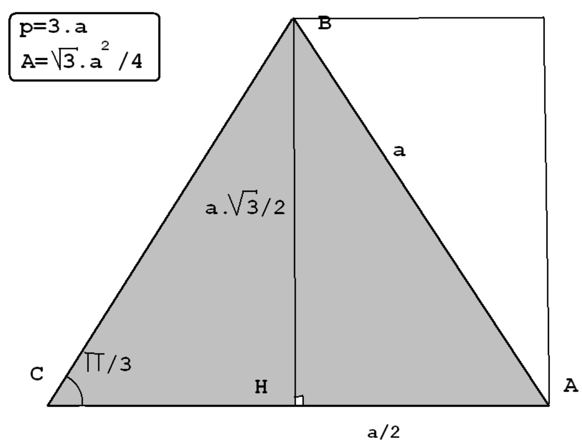
$$\overline{\frac{P'(z)}{P(z)}} = \overline{\left(\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b} + \frac{1}{z-c} + \frac{1}{z-d}\right)} = \frac{z-a}{|z-a|^2} + \frac{z-d}{|z-b|^2} + \frac{z-c}{|z-c|^2} + \frac{z-d}{|z-a|^2}$$

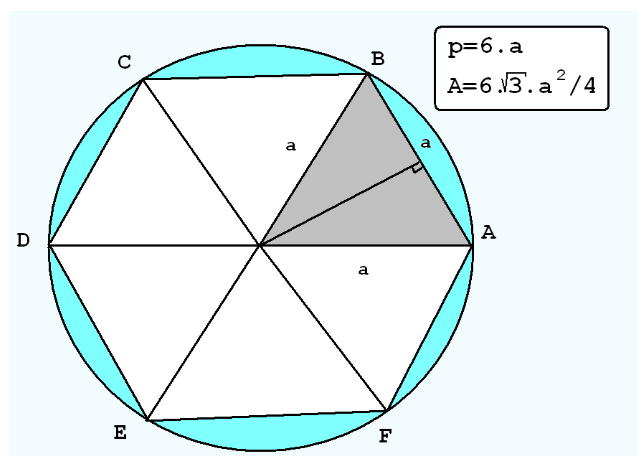
Déduisez qu'il existe quatre réels positifs λ_1 à λ_4 vérifiant $\alpha = \frac{\lambda_1.a + \lambda_2.b + \lambda_3.c + \lambda_4.d}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}$.
Déduisez que le triangle de sommets α, β et γ est inscrit dans le quadrilatère de sommets a, b, c et d.
Montrez que les deux racines de P'' et la racine de $P^{(3)}$ sont aussi dans ce triangle.

◃69▹ ♡ Augustin-Louis, Hermann-Amandus ! Montrez que $a.\cos(\theta) + b.\sin(\theta)$ est toujours entre $-\sqrt{a^2+b^2}$ et $\sqrt{a^2+b^2}$.

◃70▹ Soit P un polynôme de degré n, de racines r_1 à r_n. On note ρ_1 à ρ_{n-1} les racines de P'. Montrez que la moyenne des $r_i$est égale à la moyenne des ρ_j.

◃71▹ Mon fils a tracé un carré, puis a calculé son périmètre et son aire. Et il a trouvé le même nombre. Quelle est la longueur du côté de ce carré.
∼0) Il me demande alors si il existe un triangle équilatéral dont l'aire est égale au périmètre. Je lui réponds oui. Mais quelle est cette valeur ?
∼1) N'y tenant plus, je me pose la question : quelle est la taille d'un hexagone régulier dont le périmètre et l'aire sont égaux ?





∼2) Tenant à généraliser *(tendance naturelle pour un matheux)*, je note, pour tout n, a_n la longueur du côté du polygone régulier à n côtés dont l'aire est égale au périmètre. Donnez moi la formule pour a_n, ainsi que pour le périmètre p_n associé.
∼3) Formé à bonne école, un élève généralise la question : pour quel rayon le périmètre du cercle égale-t-il l'aire du disque ? Et il y répond. Cette valeur commune du périmètre et de l'aire du cercle/disque est elle d'ailleurs la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

Ayant constaté que a_4 *(cas du carré)* est rationnel, tandis que a_3 et a_6 *(cas du triangle et de l'hexagone)* sont irrationnels, j'en viens à me demander pour quelles valeurs de n le réel a_n est rationnel. Regardons le cas $n = 5$. Montrez que $\cos(\pi/5)$ est racine de l'équation $(4.X^3 - 3.X) + (2.X^2 - 1) = 0$ d'inconnue réelle X. Calculez alors $\cos(\pi/5)$ et $\tan(\pi/5)$. Déduisez que a_5 est irrationnel.

∼4) Exprimez $\tan(a+b)$ à l'aide de $\tan(a)$ et $\tan(b)$ pour tout couple $(a,\ b)$ de réels convenables *(ni a, ni b, ni $a+b$ n'est dans $\{\frac{2.k+1}{2}.\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$)*.
∼5) Exprimez $\tan(2.\theta)$, $\tan(3.\theta)$ et $\tan(4.\theta)$ à l'aide de $\tan(\theta)$, pour θ convenable *(par exemple compris entre 0 et $\pi/8$)*.
∼6) Montrez que pour tout n, il existe deux polynômes P_n et Q_n vérifiant $\tan(n.\theta) = \frac{P_n(\tan(\theta))}{Q_n(\tan(\theta))}$. Montrez qu'on peut écrire $P_{n+1}(X) = P_n(X) + X.Q_n(X)$ et exprimez alors Q_{n+1} à l'aide de $P_n$et Q_n.

∼7) Montrez que P_n et Q_n sont toujours à coefficients entiers.
∼8) Quel est leur degré ?
∼9) Exprimez P_{2n} et Q_{2n} à l'aide de $P_n$et Q_n.
∼10) Exprimez P_{2n+1} à l'aide de P_{2n-1} et Q_{2n-1}. Montrez que dans $P_{2n+1}(X)$ le terme en X^{2n+1} a pour coefficient $(-1)^n$.
∼11) On suppose qu'un rationnel α/β (α et β entiers sans diviseur commun) vérifie $P_{2n+1}(\alpha/\beta) = 0$. En multipliant par β^{2n+1} montrez que β divise α^{2n+1}.
∼12) Déduisez que les racines rationnelles de P_{2n+1} sont des entiers. Déduisez que a_{2n+1} est irrationnel.

◃72▹

1	3	2					4
		1	4	3	2		1
1	4		4	1		4	3
	1	5		5	5	3	
		1	5				
4	3	3			5	5	5
2	4	3			9	3	
			4	1	3		

3	1	2	1		4	3	
					2		
1	4	3		3	1	4	
4			2	1	3	3	
4			1			3	4
2	3		2		4	2	1
	1	4	1	3			5
				3			

La grille doit être découpée en « maisons » (suites des cases contigües par au moins un côté. Dans une maison de taille n toutes les cases sont marquées « n ». Deux maisons de même taille ne peuvent pas avoir de côté commun. Complétez.

◃73▹ Est il vrai que la consommation en essence d'une voiture est une aire ?

◃74▹ ♡ On note T_n le n^{ieme} polynôme de Tchebychev. Calculez $T_{12}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$.

◃75▹ ♡ Résolvez $T_n\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{1}{2}$ d'inconnue n *(polynômes de Tchebychev)*.