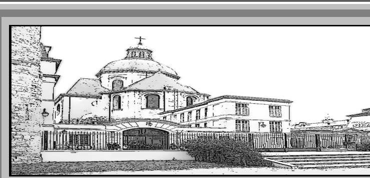
LYCEE CHARLEMAGNE

Mercredi 25 septembre

M.P.S.I.2



2024 2025

IS02

♡ 0 ♡ On prend f de E dans F et g de F dans G. Montrez que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. [1 pt.]

◇ 0 ◇ Montrez que si $g \circ f$ est injective et f surjective de E sur F, alors g est injective. [2 pt.]

◇ 1 ◇ Montre que $x \longmapsto \ln(1+|x|)$ (notée g) n'est pas injective, mais que $g \circ \exp$ est injective. [1 pt.]

♡ 1 ♡ Quelles sont les deux racines carrées de $24.i - 7$? Et ses racines quatrièmes ? Calculez la somme de ses racines huitièmes. [4 pt.]

♡ 2 ♡ Donnez module et argument de $\dfrac{1+i.\tan(\pi/7)}{1-i.\tan(\pi/7)}$ et $\left(\dfrac{1+i.\tan(\pi/7)}{1-i.\tan(\pi/7)}\right)^{2024}$. [3 pt.]

◇ 2 ◇ Trouvez a et b pour que $t \longmapsto a.\cos(t) + b.\sin(t)$ ait pour amplitude 7 et soit nulle en $\pi/6$ (il y aura peut être plusieurs solutions). [2 pt.]

♡ 3 ♡ a, b et c sont les racines de $x^3 + 3.x^2 + 2.x + 1$. Calculez $a^2 + b^2 + c^2$. [2 pt.]

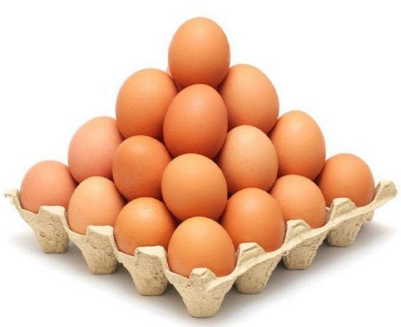
Calculez $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a} + \dfrac{a^2}{c} + \dfrac{c^2}{a} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{b}$. [2 pt.]

◇ 3 ◇ Calculez

$I_0 = \displaystyle\int_2^3 \frac{x.dx}{\log_x(2)}$	$I_1 = \displaystyle\int_2^3 \frac{\log_2(x).dx}{\log_x(2)}$	$I_2 = \displaystyle\int_2^3 \frac{\log_2(x).dx}{x}$
$I_3 = \displaystyle\int_2^3 \frac{\log_x(x).dx}{x}$	$I_4 = \displaystyle\int_2^3 \frac{\log_x(2).dx}{x}$	[9 pt.]

◇ 4 ◇ Calculez $i^{\sum_{k=0}^{2024} k!}$. [2 pt.] Le complexe $(1+i)^{\sum_{k=0}^{2024} 2^k}$ est il réel ? [2 pt.]

◇ 5 ◇ A l'issue d'un exercice un peu long et sans intérêt, l'élève a trouvé $t = \dfrac{1 - \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{3.\sqrt{10}}{20}}}{\sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{3.\sqrt{10}}{20}}}$. Il lit dans le corrigé qu'il fallait trouver $t = \sqrt{20 + 6.\sqrt{10}} - (3 + \sqrt{10})$. Il déprime. Il a donc tout faux. Rassure la et montre lui qu'elle a raison en dépit des apparences. [3 pt.]

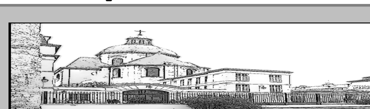


Combien d'œufs sur ce plateau si ils sont placés « logiquement » ? [1 pt.] Et avec 2024 œufs, combien d'étages ? [2 pt.]

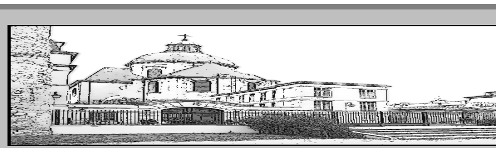
Pour avoir un logiciel qui chasse les contrepétries, j'ai besoin de petites procédures. La première va prendre en entrée deux chaines de caractères (def test(mot1, mot2) :) et regarde si l'un est une copie de l'autre, à exactement une lettre près (la réponse sera donc un booléen). [3 pt.]

Par exemple : `test("bise", "bite") -> True`

```
test("violette", "violente") -> True
test("pierre", "piece") -> False
test("timothee", "timothee") -> False
test("contrepetrie", "escalator") -> False
```

LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 25 septembre
M.P.S.I.2



2024 2025
IS02
CORRECTION

IS02 Questions de cours.

On suppose $g \circ f$ injective (et on va s'en servir à un moment).
On veut montrer que f est injective.
On se donne donc deux éléments u et v dans E et on suppose $f(u) = f(v)$ (objectif : $u = v$).
On applique g : $g(f(u)) = g(f(v))$. On reconnaît $g \circ f(u) = g \circ f(v)$ et on utilise l'hypothèse $g \circ f$ injective. On aboutit à $u = v$.

On suppose cette fois $g \circ f$ injective et f surjective.
On veut montrer que g est injective. On se donne deux éléments a et b dans F et on suppose $g(a) = g(b)$.
Comment faire intervenir $g \circ f$? En écrivant a sous la forme $f(u)$ pour au moins un u de E.
Puis en écrivant b sous la forme $f(v)$ pour au moins un v de E (c'est la surjectivité de f qui sert).
L'hypothèse $g(a) = g(b)$ devient alors $g(f(u)) = g(f(v))$.
Par injectivité de $g \circ f$ on a cette fois encore $a = b$.

Variante. Avec $g \circ f$ injective, la première question donne f injective.
Mais comme f est aussi surjective, la voilà bijective.
Elle admet donc une réciproque f^{-1} de F dans E, bijective aussi.
On compose alors $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$. Et cette composée d'injection est injective.
Et c'est fini.

L'application $x \longmapsto \ln(1 + |x|)$ n'est pas injective, puisque 1 et -1 ont la même image (en toute généralité x et $-x$ ont la même image, mais il vaut mieux donner une valeur à x sinon un prof mal luné dira « tu me laisses choisir x comme je veux alors je prends $x = 0$ et ton contre-exemple n'en est plus un »).

La composée $g \circ \exp$ est $x \longmapsto \ln(1 + e^x)$ sa,s valeur absolue puisque e^x est positif.
Et cette application est injective :

$$\ln(1 + e^x) = \ln(1 + e^y) \Rightarrow (1 + e^x = 1 + e^y) \Rightarrow e^x = e^y \Rightarrow x = y$$

C'est donc bien l'application de droite (f) qui hérite de l'injectivité quand une compose ($g \circ f$) est injective.

IS02 Nombres complexes.

Pour les racines carrées de $24.i - 7$ (racines qu'on va noter $x + i.y$ avec x et y réels), on résout

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & - & y^2 & = & -7 \\ x^2 & + & y^2 & = & \sqrt{24^2 + 7^2} \quad = \sqrt{625} = 25 \\ 2.x & \times & y & = & 24 \end{array}$$

On résout et on trouve deux solutions : $3 + 4.i$ et $-3 - 4.i$ (on peut vérifier).

On recommence avec la même méthode et autant de chance dans $x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2}$

<table>
<tr><td colspan="4" align="center">$-7 + 24.i$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$3 + 4.i$</td><td colspan="2" align="center">$-3 - 4.i$</td></tr>
<tr><td>$2 + i$</td><td>$-2 - i$</td><td>$1 - 2.i$</td><td>$-1 + 2.i$</td></tr>
</table>

On peut évidemment recommencer avec les racines de $2 + i$, moins agréables :

$\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}} + i.\sqrt{\dfrac{-2+\sqrt{5}}{2}}$	$-\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}} - i.\sqrt{\dfrac{-2+\sqrt{5}}{2}}$

Et l'élève masochiste calcule ses huit complexes. Puis il somme en les groupant deux à deux. Et il trouve 0.
Normal, il y a à chaque fois un complexe et son opposé.

Sinon, ces huit nombres sont les racines du polynôme $X^8 - (-7 + 24.i)$ dont la somme des racines est le coefficient de x^7 c'est à dire 0.

On suit les méthodes du cours

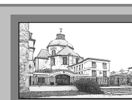
$$\frac{1+i.\tan(\pi/7)}{1-i.\tan(\pi/7)} = \frac{1+i.\dfrac{\sin(\pi/7)}{\cos(\pi/7)}}{1-i.\dfrac{\sin(\pi/7)}{\cos(\pi/7)}} = \frac{\cos(\pi/7)+i.\sin(\pi/7)}{\cos(\pi/7)-i.\sin(\pi/7)} = \frac{e^{i.\pi/7}}{e^{-i.\pi/7}} = e^{2.i.\pi/7}$$

On peut conclure sans effort

	module	argument	
$\dfrac{1+i.\tan(\pi/7)}{1-i.\tan(\pi/7)}$	1	$2.\dfrac{\pi}{7}$	
$\left(\dfrac{1+i.\tan(\pi/7)}{1-i.\tan(\pi/7)}\right)^{2024}$	1	$2024.2.\dfrac{\pi}{7}$	$2.\dfrac{\pi}{7}$

car $2024 = 289\times 7+1$.

IS02 Amplitude, déphasage.



Pour annuler $a.\cos(t)+b.\sin(t)$ en $\dfrac{\pi}{6}$ on demande $a.\frac{\sqrt{3}}{2}+b.\frac{1}{2}=0$ soit $b=-\sqrt{3}.a$.
Et pour que l'amplitude soit de 7, on demande $\sqrt{a^2+b^2}=7$.
En reportant (condition nécessaire) : $\sqrt{a^2+3.a^2}=7$. On trouve a au signe près $|a|=7/2$.
On a donc deux solutions (opposées)

$$x \longmapsto \frac{7}{2}.\cos(t) - \frac{7.\sqrt{3}}{2}.\sin(t) \ et\ x \longmapsto -\frac{7}{2}.\cos(t) + \frac{7.\sqrt{3}}{2}.\sin(t)$$

On pouvait partir aussi de $t \longmapsto 7.\sin\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right)$ et développer directement.

IS02 Formules de Viète.

Si a,b et c sont racines de $X^3+3.X^2+2.X+1$ alors on a $\begin{array}{cccc} a & +b & +c & = -3 \\ a.b & +a.c & +b.c & = 2 \\ a & \times b & \times c & = -1 \end{array}$.

Le cours nous donne tout de suite

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2.(a.b+a.c+b.c) = (-3)^2 - 2.2 = 5$$

On tente ensuite notre chance avec $(a^2+b^2+c^2).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b} = (a^2+b^2+c^2).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - \left(\frac{a^2}{a}+\frac{b^2}{b}+\frac{c^2}{c}\right)$$

et on trouve $5.\left(\frac{2}{-1}\right) - (-3)$ ce qui donne -7.

IS02 Nombres complexes.

Pour $i^{\sum_{k=0}^{2024} k!}$ il n'y a pas besoin de calculer l'exposant. Ce qui compte c'est « combien vaut il modulo 4 ? » puisque i^4 vaut 1.
Et dans la somme à partir de 4!, tous les $k!$ sont des multiples de 4.
Le nombre $i^{\sum_{k=4}^{2024} k!}$ vaut 1.

$$\textit{Certains l'écrivent} \prod_{k=4}^{2024} i^{k!} = \prod_{k=4}^{2024} i^{24.\prod_{p=5}^{k} p} = \prod_{k=4}^{2024} (i^{24})^{\prod_{p=5}^{k} p} = \prod_{k=4}^{2024} 1^{\prod_{p=5}^{k} p} = 1$$

Il reste donc juste $i^{0!+1!+2!+3!} = i^{1+1+2+6} = i^{10} = i^4.i^4.i^2 = -1$

La question portant sur $(1+i)^{\sum_{k=0}^{2024} 2^k}$ s'intéresse juste à son argument. Écrivons donc $(1+i) = \sqrt{2}.e^{i.\pi/4}$.

L'argument de $(1+i)^N$est alors $N.\dfrac{\pi}{4}$. Et ici, $N = \displaystyle\sum_{k=0}^{2024} 2^k = 1+2+4+8+16+\ldots+2^{2024}$.

A partir de 8 ce sont tous des multiples de 8. Et il reste un 7 devant.

$$Arg\Big((1+i)^{\sum_{k=0}^{2024} 2^k}\Big) = \frac{7.\pi}{4}$$

IS02 Calculs d'intégrales.

Toutes ces intégrales existent, par continuité de la fonction sous le signe intégrale (les dénominateurs ne s'annulent pas, même les logarithmes, car c'est en 1 que les logarithmes s'annulent).

On revient pour chacune à la définition, et on regarde si on a une forme agréable à intégrer, en $\dfrac{u'}{u}$ ou $u'.u$ ou si on s'en sort en intégrant par parties.

$I_0 = \displaystyle\int_2^3 \frac{x.dx}{\log_x(2)}$	$\dfrac{1}{\ln(2)}.\displaystyle\int_2^3 x.\ln(x).dx$	IPP	$\dfrac{1}{\ln(2)}.\Big[\dfrac{x^2.\ln(x)}{2} - \dfrac{x^2}{4}\Big]_2^3$	$\dfrac{18.\ln(3) - 8.\ln(2) - 5}{4.\ln(2)}$
$I_1 = \displaystyle\int_2^3 \frac{\log_2(x).dx}{\log_x(2)}$	$\dfrac{1}{(\ln(2))^2}\displaystyle\int_2^3 (\ln(x))^2.dx$	IPP	$\dfrac{1}{(\ln(2))^2}.\Big[x.(\ln(x))^2 - 2.x.\ln(x) + 2.x\Big]_2^3$	
$I_2 = \displaystyle\int_2^3 \frac{\log_2(x).dx}{x}$	$\dfrac{1}{\ln(2)}.\displaystyle\int_2^3 \frac{\ln(x)}{x}.dx$	u'.u	$\dfrac{1}{\ln(2)}.\Big[\dfrac{(\ln(x))^2}{2}\Big]_2^3$	$\dfrac{(\ln(3))^2 - (\ln(2))^2}{2.\ln(2)}$
$I_3 = \displaystyle\int_2^3 \frac{\log_x(x).dx}{x}$	$\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x}.dx$		$\Big[\ln(2)\Big]_2^3$	$\ln(3/2)$
$I_4 = \displaystyle\int_2^3 \frac{\log_x(2).dx}{x}$	$\ln(2).\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x.\ln(x)}.dx$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(2).[\ln(\ln(x))]_2^3$	$\ln(2).\ln\Big(\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}\Big)$

Expliquons les intégrations par parties

$\displaystyle\int_2^3 x.\ln(x).dx$	x	$\hookleftarrow$	$x^2/2$	$[\ldots] - \displaystyle\int \frac{x}{2}.dx$
	$\ln(x)$	$\hookrightarrow$	$1/x$	
$\displaystyle\int_2^3 (\ln(x))^2.dx$	1	$\hookleftarrow$	x	$[\ldots] - 2.\displaystyle\int \ln(x).dx$
	$(\ln(x))^2$	$\hookrightarrow$	$2.\ln(x)/x$	

Sinon, la forme $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ se lit $x \longmapsto \ln(x).\ln'(x)$ et est bien à intégrer en $x \longmapsto \dfrac{(\ln(x))^2}{2}$.

De même, la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{x.\ln(x)}$ se lit $x \longmapsto \dfrac{\ln'(x)}{\ln(x)}$ et est bien à intégrer en $x \longmapsto \ln((\ln(x))$.

IS02 Deux nombres tous les deux très moches.

Si on regarde bien, la question demande juste de montrer

$$\sqrt{20+6.\sqrt{10}} - (3+\sqrt{10}) = \frac{1 - \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{3.\sqrt{10}}{20}}}{\sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{3.\sqrt{10}}{20}}}$$

Quitte à multiplier haut et bas par $\sqrt{20}$, le membre de droite vaut même $\dfrac{\sqrt{20}-\sqrt{10+3.\sqrt{10}}}{\sqrt{10-3.\sqrt{10}}}$.

Pour avoir une ressemblance avec le membre de gauche, je multiplie même en haut et en bas par $\sqrt{2}$ et je dois établir

$$\sqrt{20+6.\sqrt{10}}-(3+\sqrt{10})=\frac{\sqrt{40}-\sqrt{20+6.\sqrt{10}}}{\sqrt{20-6.\sqrt{10}}}$$

On va donc passer par un produit en croix. On va calculer le produit de deux quantités moches

$$\left(\sqrt{20+6.\sqrt{10}}-(3+\sqrt{10})\right).\sqrt{20-6.\sqrt{10}}=\sqrt{(20+6.\sqrt{10}).(20-6.\sqrt{10})}-(3+\sqrt{10}).\sqrt{20-6.\sqrt{10}}$$

On fusionne en une seule racine ce qui traine au début $\sqrt{(20+6.\sqrt{10}).(20-6.\sqrt{10})}=\sqrt{400-36.10}=\sqrt{40}$

$$\left(\sqrt{20+6.\sqrt{10}}-(3+\sqrt{10})\right).\sqrt{20-6.\sqrt{10}}=\sqrt{40}-(3+\sqrt{10}).\sqrt{20-6.\sqrt{10}}$$

On approche de $\sqrt{40}-\sqrt{20+3.\sqrt{10}}$. Il nous manque juste $(3+\sqrt{10}).\sqrt{20-6.\sqrt{10}}=\sqrt{20+6.\sqrt{10}}$ pour conclure. Comparons donc leurs carrés

$$\left((3+\sqrt{10}).\sqrt{20-6.\sqrt{10}}\right)^2=(9+10+6.\sqrt{10}).(20-6.\sqrt{10})$$

$$\left((3+\sqrt{10}).\sqrt{20-6.\sqrt{10}}\right)^2=(19+6.\sqrt{10}).(20-6.\sqrt{10})$$

$$\left((3+\sqrt{10}).\sqrt{20-6.\sqrt{10}}\right)^2=(19.20-36.10)+\sqrt{10}.(20.6-19.6)$$

$$\left((3+\sqrt{10}).\sqrt{20-6.\sqrt{10}}\right)^2=(20)+6.\sqrt{10}$$

On remonte aux carrés (de réels positifs)

$$(3+\sqrt{10}).\sqrt{20-6.\sqrt{10}}=\sqrt{20+6.\sqrt{10}}$$

On détricote les produits en croix pour aller de ce qu'on sait vers ce qu'on cherche et on a l'égalité demandée.

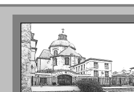
IS02 Test pour contrepétries.

On reçoit deux chaines de caractères `mot1` et `mot2`.
Déjà, ont elles la même longueur ? Si non, autant sortir tout de suite avec `return False`.
Si les deux ont la même longueur (comme ça, pas de risque de lire des lettres qui n'existent pas), on les lit toutes deux au même rythme avec `mot1[k]` et `mot2[k]` pour un même indice `k` dans `range(len(mot1))`.
On a pris la peine de créer un `compteur` qu'on incrémente si les deux lettres ne coïncident pas.

Une fois le parcours des deux listes fini, on regarde si le `compteur` vaut exactement 1.

```
def test(mot1, mot2) : #string, string -> boolean
....if len(mot1) != len(mot2) :
........return False
....compteur = 0
....for k in range(len(mot1)) :
........if mot1[k] != mot2[k] :
............compteur += 1
....return compteur == 1
```

IS02 Des œufs sur un plateau.



A la base : 16 œufs.
Juste au dessus : 9 œufs.
Encore au dessus : 4 œufs, et enfin un dernier.

Résultat suivant votre approche

16+9+4+1 = 30	$\sum_{k=1}^{4} k^2$	$\sum_{k=1}^{n} k^2$ avec $n=4$	$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$ avec $n=4$

Et avec 2024 œufs : une base de côté 44 sur 44. En effet, $44^2 = 1936 \leqslant 2024 < 45^2 = 2025$.
Et il nous reste 88 œufs. On ne remplit même pas le premier niveau. Décevant.
C'est une pyramide de hauteur 2 ?

Plus judicieux, on se demande quand $\sum_{k=1}^{n^2 k^2}$ atteint 2024.
Et on commence plutôt avec 18 sur 18 et il reste 1700 œufs.
Cette fois on crée l'étage 17 sur 17 et il en reste 1411.
Puis l'étage 16 sur 16 et il reste 1155 œufs.
Et ainsi de suite.

étage 0	18 sur 18	utilise 324 œufs	il reste 1700 œufs
etage 1	17 sur 17	utilise 289 œufs	il reste 1411 œufs
étage 2	16 sur 16	utilise 256 œufs	il reste 1155 œufs
étage 3	15 sur 15	utilise 225 œufs	il reste 930 œufs
étage 4	14 sur 14	utilise 196 œufs	il reste 734 œufs
étage 5	13 sur 13	utilise 169 œufs	il reste 565 œufs
étage 6	12 sur 12	utilise 144 œufs	il reste 421 œufs
étage 7	11 sur 11	utilise 121 œufs	il reste 300 œufs
étage 8	10 sur 10	utilise 100 œufs	il reste 200 œufs
étage 9	9 sur 9	utilise 81 œufs	il reste 119 œufs
étage 10	8 sur 8	utilise 64 œufs	il reste 55 œufs
étage 11	7 sur 7	utilise 49 œufs	il reste 6 œufs
étage 12	incomplet		

Mais peut on faire plus joli ?