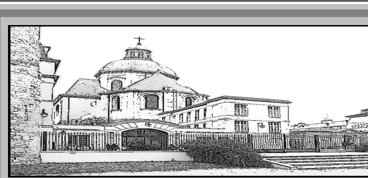
LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 2 octobre
M.P.S.I.2



2024 2025

IS03

♡ 0 ♡ En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz vectorielle, démontrez l'inégalité $E(X^2) \geqslant (E(X))^2$ pour une variable aléatoire X. 2 pt.

♡ 1 ♡ Montrez pour u et v de classe C^3 de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$: 2 pt.

$$\int_a^b u^{(3)}(t).v(t).dt = \Big[u''(t).v(t) - u'(t).v'(t) + u(t).v''(t)\Big]_{t=a}^{b} - \int_a^b u(t).v^{(3)}(t).dt$$

♡ 2 ♡ Montrez pour a, b, c et d réels : 2 pt.

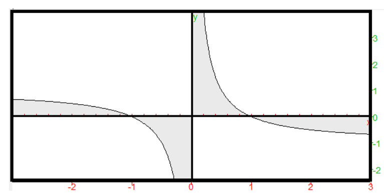
$$\frac{\frac{a+b+|a-b|}{2} + \frac{c+d+|c-d|}{2} + \left|\frac{a+b-c-d}{2} + \frac{|a-b|-|c-d|}{2}\right|}{2} = \frac{\frac{a+c+|a-c|}{2} + \frac{b+d+|b-d|}{2} + \left|\frac{a-b+c-d}{2} + \frac{|a-c|-|b-d|}{2}\right|}{2}$$

♡ 3 ♡ On définit $a_n = \dfrac{1}{n.n!} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ (pour $n \geqslant 1$). Montrez que (a_n) est décroissante. 2 pt.

♡ 4 ♡ Montrez que toute application strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est injective. 2 pt.

⧈$_1$ Montrez que $x \longmapsto \dfrac{1-|x|}{x}$ décroit strictement sur $]-\infty,\ 0[$ et sur $]0,\ +\infty[$ mais n'est pas injective sur $\mathbb{R}^*$. 3 pt.

⧈$_2$ L'application s associe à un entier naturel non nul la somme de ses diviseurs (exemple : $s(12) = 28$ et $s(23) = 24$). Montrez que s n'est pas injective sur $\mathbb{N}^*$. 1 pt.



⧈$_3$ Montrez que s n'est pas croissante de $(\mathbb{N}^*,\ \leqslant)$ dans $(\mathbb{N}^*,\ \leqslant)$. 1 pt.

⧈$_4$ Montrez que s est croissante de $(\mathbb{N}^*,\ |)$ dans $(\mathbb{N}^*,\ \leqslant)$. 1 pt.

⧈$_5$ Montrez que s n'est pas croissante de $(\mathbb{N}^*,\ |)$ dans $(\mathbb{N}^*,\ |)$. 1 pt.

Rappels : | est la relation « divise » : par exemple $3|12$ mais 5 ne divise pas 12. Une application f est croissante de $(E, \lhd)$ dans $(F, \blacktriangleleft)$ (ensembles munis de deux relations d'ordre) si $\forall (a, b) \in E^2,\ (a \lhd b) \Rightarrow (f(a) \blacktriangleleft f(b))$.

⧈$_6$ Montrez que l'application qui, à une partie de la MPSI2 associe son nombre d'éléments est strictement croissante (ordre au départ : « $\subset$ », ordre à l'arrivée : « $\leqslant$ »), mais pas injective. 1 pt.

♢ 0 ♢ a et b sont deux complexes, montrez : $-|a|.|b| \leqslant\leqslant \Re e(a.\bar{b}) \leqslant |a|.|b| \leqslant \dfrac{|a|^2 + |b|^2}{2}$. 2 pt.

♢ 1 ♢ λ est un réel strictement positif, montrez : $|\Re e(a.\bar{b})| \leqslant |a|.|b| \leqslant \dfrac{\lambda.|a|^2 + \lambda^{-1}.|b|^2}{2}$. 1 pt.

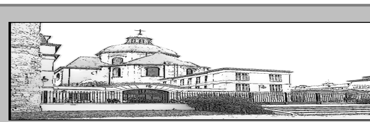
♢ 2 ♢ $(a_1, \dots a_n)$ et $(b_1, \dots b_n)$ sont deux vecteurs non nuls dans $\mathbb{C}^n$. On pose $\lambda = \sqrt{\Big(\displaystyle\sum_{p=1}^{n} |b_p|^2\Big) / \Big(\displaystyle\sum_{p=1}^{n} |a_p|^2\Big)}$; montrez que c'est un réel strictement positif. 1 pt.

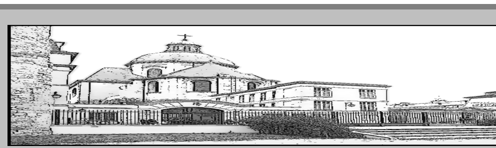
♢ 3 ♢ Déduisez : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k.\overline{b_k}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda.|a_k|^2 + \lambda^{-1}.|b_k|^2}{2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}.\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2}$. 3 pt.

♮ 0 ♮ Qui est l'entier r d'écriture binaire $(10110101)_2$? Quelle est l'écriture binaire de son carré r^2 ? Montrez : $2^{15} - r^2 = 7$, déduisez $\dfrac{r}{2^7} - \sqrt{2} = \dfrac{7.2^{-7}}{r.2^{-7} + \sqrt{2}}$. Donnez la valeur binaire de $\sqrt{2}$ avec sept chiffres exacts derrière la virgule. 5 pt.

♣ 0 ♣ Arthur, Arthur et Arthur ont passé leur colle (note entière de 0 à 20). Je leur demande leur note, mais Arthur me donne sa note, Arthur me donne la moyenne (arithmétique) du trinôme et enfin Arthur me donne la moyenne (harmonique) du trinôme. Et ça donne 8, 11 et 20 (mais qui a dit quoi ?). Retrouvez les notes. 3 pt.

♡ 5 ♡ Pouvez vous ajuster a pour que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ fassent entre eux un angle de $\pi/3$? 3 pt.



LYCEE CHARLEMAGNE		2024 2025
Mercredi 2 octobre M.P.S.I.2		IS03 CORRECTION

IS03 Questions de cours.

On se donne une variable aléatoire dont les valeurs et probabilités sont tabulés

valeur	x_1	x_2	$\dots$	x_n
probabilité	p_1	p_2	$\dots$	p_n

les p_k sont des réels positifs de somme 1.
On considère alors deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ de composantes $x_k.\sqrt{p_k}$ et $\overrightarrow{a}$ de composantes $\sqrt{p_k}$.

On calcule les trois quantités utiles

produit scalaire	$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$	$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k.\sqrt{p_k}.\sqrt{p_k}\right)$	$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k.p_k\right) = E(X)$
norme	$\vert\overrightarrow{a}\vert$	$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k.\sqrt{p_k})^2}$	$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k)^2.p_k} = \sqrt{E(X^2)}$
norme	$\vert\overrightarrow{b}\vert$	$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{p_k})^2}$	$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} p_k} = 1$

La forme $(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})^2 \leqslant |\overrightarrow{a}|^2 \times |\overrightarrow{b}|^2$ donne ce qu'on voulait.

Sans trop réfléchir, j'intègre trois fois par parties

$\int_a^b u^{(3)}.v$	$= \left[u''.v\right] - \int_a^b u''.v'$	$= \left[u''.v\right] - \left(\left[u'.v'\right]_a^b - \int_a^b u'.v''\right)$	$= \left[u''.v\right] - \left(\left[u'.v'\right]_a^b - \left(\left[u.v''\right] - \int_a^b u.v^{(3)}\right)\right)$

$u^{(3)}$	$\hookleftarrow$	u''
v	$\hookrightarrow$	v'

u''	$\hookleftarrow$	u'
v'	$\hookrightarrow$	v''

u'	$\hookleftarrow$	u
v''	$\hookrightarrow$	$v^{(3)}$

En réfléchissant, je pose $f = u''.v - u'.v' + u.v''$. J'écris $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t).dt$ par théorème fondamental du calcul intégral.
Je dérivé : $f' = (u^{(3)}.v + u''.v') - (u''.v' + u'.v'') + (u'.v'' + u.v^{(3)}) = u^{(3)}.v + u.v^{(3)}$.
J'ai alors $[u''.v - u'.v' + u.v'']_a^b = \int_a^b f'(t).dt = \int_a^b u^{(3)}.v + u.v^{(3)} = \int_a^b u^{(3)}.v + \int_a^b u.v^{(3)}$.
Il n'y a plus qu'à faire passer un terme de l'autre côté.

La formule contenant $\dfrac{\frac{a+b+|a-b|}{2} + \frac{c+d+|c-d|}{2} + \left|\frac{a+b-c-d}{2} + \frac{|a-b|-|'c-d|}{2}\right|}{2}$ n'est pas une horreur.
On rappelle $Max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ et $Max(c,\ d) = \dfrac{c+d+|c-d|}{2}$.
Le membre de gauche de la formule est alors $Max\Big(Max(a,\ b),\ Max(c,\ d)\Big)$.
Et le membre de droite est cette fois $Max\Big(Max(a,\ c),\ Max(b,\ d)\Big)$.
Ces deux membres sont égaux, puisque c'est $Max(a,\ b,\ c,\ d)$. Et si on y tient, on étudie les 24 cas, de $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ et $d \leqslant c \leqslant b \leqslant a$ en passant par $a \leqslant d \leqslant c \leqslant b$ et autres.

IS03 Une suite croissante.

On pose $a_n = \dfrac{1}{n!.n} + \sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$ et donc $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!.(n+1)} + \sum_{k=0}^{n+1}\dfrac{1}{k!}$.

On se donne n et on calcule

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!.(n+1)} + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n!.n} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

On regroupe les deux fractions simples, et on simplifie $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}$ car il y a juste un terme de plus.
On peut regrouper et chercher le dénominateur commun

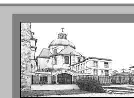
$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!.(n+1)} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!.n}$$

Pour les factorielles, on a juste besoin de $(n+1)!$ (qui contient $n!$) et pour les autres termes, on a besoin de $n+1$ et n.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n}{(n+1)!.(n+1).n} + \frac{(n+1).n}{(n+1)!.(n+1).n} - \frac{(n+1).(n+1)}{(n+1)!.(n+1).n}$$

Seul nous importe le signe, et c'est celui du numérateur $n + (n+1).n - (n+1)^2 = -1$.
Ayant $a_{n+1} - a_n = \frac{-1}{(n+1)!.n.(n+1)} < 0$ pour tout n, la suite (a_n) décroit (avec des parenthèses autour de a_n puisque c'est la suite).

IS03 Croissance stricte et injectivité.



On suppose f strictement croissante et on montre alors qu'elle est injective en établissant l'implication

$$\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \neq b) \Rightarrow (f(a) \neq f(b))$$

On se donne a différent de b. Comme l'ordre sur $\mathbb{R}$est total, la disjonction de cas donne $a < b$ ou $a > b$.
Par croissance stricte, on aboutit à $f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$. On reconnaît $f(a) \neq f(b)$.

On doit étudier l'application $x \longmapsto \frac{1-|x|}{x}$ une fois sur $]-\infty,\ 0[$ et une fois sur $]0,\ +\infty[$.
Contentons nous d'effacer les valeurs absolues, et de dériver comme une brute l'application

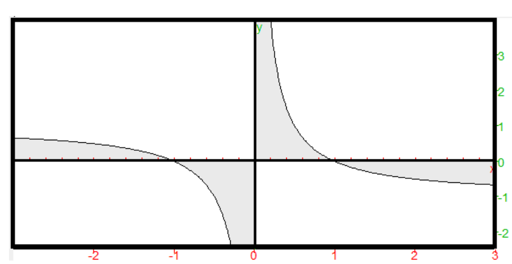
intervalle	sur $]-\infty,\ 0[$	sur $]-\infty,\ 0[$
fonction	$f(x) = \frac{1+x}{x}$	$f(x) = \frac{1-x}{x}$
dérivée	$f'(x) = \frac{1.(x)-(1+x).1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$	$f'(x) = \frac{(-1).(x)-(1-x).1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$

La dérivée est toujours négative, l'application décroit sur chaque intervalle (théorème admis à ce stade de l'année).

On peut aussi étudier le signe des taux d'accroissement.

Mais on ne peut pas déduire que f décroit sur tout son domaine de définition. Celui ci est en deux morceaux.
On regarde le graphe (peut on faire confiance ?). On cherche un contre-exemple
Et on a sans effort $\boxed{f(-1) = 0 = f(1)}$

Et pour nier la décroissance, on montre $f(-2) = \frac{1}{2} > 0 = f(1)$.



Calculons les premières images de l'application f pour trouver deux entiers différents ayant la même image

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	s(6)=s(11)=12
1	1+2	1+3	1+2+4	1+5	1+2+3+6	1+7	1+2+4+8	1+3+9	1+2+5+10	1+11	

On tient notre défaut d'injectivité par un contre-exemple.

Si on est plus tordu : s(1296) = 3751 = s(2025). Si si (avec Python évidemment !) :
1+2+3+4+6+8+9+12+16+18+24+27+36+48+54+72+81+108+144+162+216+324+432+648+1296
1+3+5+9+15+25+27+45+75+81+135+225+405+675+2025

Pour montrer qu'elle n'est pas croissante pour l'ordre usuel, on montre un contre-exemple où l'on a $a \leqslant b$ et pourtant $s(a) > s(b)$.

$$s(4) = 1 + 2 + 4 = 7 \text{ et } s(5) = 1 + 5 = 6$$

Pour la croissance, on prend au départ a et b avec « $a|b$ » (a divise b). Et on doit montrer à l'arrivé $s(a) \leqslant s(b)$.

Comme a divise$b$,tous les diviseurs de a sont aussi des diviseurs de b (transitivité).
Dans la somme $s(b)$ il y a au moins tous les termes de $s(a)$.
Mais il y a aussi le terme b lui même.
Et d'autres termes positifs éventuellement.
Bref, $s(b)$ est supérieur (et pas égal) à $s(a)$.

Pour nier la croissance avec la relation divise au départ et à l'arrivée, on doit montrer

$$\overline{\forall (a,\ b) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ (a \text{ divise } b) \Rightarrow (s(a) \text{ divise } s(b)}$$

On tient un contre-exemple : 2 divise 4 mais $s(2)$ ne divise pas $s(4)$ ($s(2) = 3$ et $s(4) = 7$).

L'application cardinal est croissante. Si A est inclus dans B alors le cardinal de A est plus petit que le cardinal de B

$$\forall (A,\ B),\ (A \subset B) \Rightarrow (Card(A) \leqslant Card(B))$$

et même (en écrivant $A \subsetneq B$ pour dire l'inclusion stricte $(A \subset B)$ *et* $(A \neq B)$)

$$\forall (A,\ B),\ (A \subsetneq B) \Rightarrow (Card(A) < Card(B))$$

IS03 Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{C}$.

Comme proposé, on passe en polaires. On va donc poser $a = \rho.e^{i.\alpha}$et $b = \rho'.e^{i.\beta}$ et calculer

$$a.\overline{b} = \rho.e^{i.\alpha}.\rho'.e^{-i.\beta} = \rho.\rho'.e^{i.(\alpha-\beta)}$$

La partie réelle de ce complexe est $\rho.\rho'.\cos(\alpha - \beta)$. On l'encadre par $\rho.\rho'$ et $-\rho.\rho'$ c'est à dire par $|a|.|b|$ et son opposé.

On tient $-|a|.|b| \leqslant \Re e(a.\overline{b}) \leqslant |a|.|b|$. Il manque $|a|.|b| \leqslant \dfrac{|a|^2 + |b|^2}{2}$.
Mais on n'a rien à dire. C'est du cours. C'est la comparaison des moyennes $\sqrt{x.y} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$ pour $x = |a|^2$ et $y = |b|^2$.

On continue avec un λ qui traine en plus ? On a déjà $|\Re e(a.\overline{b})| \leqslant |a|.|b|$ (c'est l'encadrement au dessus).

Mais comment avoir $|a|.|b| \leqslant \dfrac{\lambda.|a|^2 + \dfrac{|b|^2}{\lambda}}{2}$? C'est encore notre inégalité $\sqrt{x.y} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$ mais avec $x = \lambda.|a|^2$ et $y = \dfrac{|b|^2}{\lambda}$ qui ne change rien au produit $a.b$.

On l'a aussi avec les variations de l'application $\lambda \longmapsto \lambda.|a|^2 + \dfrac{|b|^2}{\lambda}$ *sur* $]0,\ +\infty[$. *Le minimum est justement* $2.|a|.|b|$, *atteint en* $|b|/|a|$.

On a maintenant n couples. La somme $\sum_{p=1}^{n} |a_p|^2$ est un réel strictement positif puisque on a des carrées de modules et un vecteur non nul.
De même pour $\sum_{p=1}^{n} |b_p|^2$. Et pour le quotient.

Le nombre λ de l'énoncé est bien un réel strictement positif.

Pour chaque k on peut écrire le résultat $|a_k.\overline{b_k}| \leqslant \dfrac{\lambda.|a_k|^2 + \dfrac{|b_k|}{\lambda}}{2}$.
Il ne reste plus qu'à sommer de 1 à n. On tient bien

$$|a_k.\overline{b_k}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda.|a_k|^2 + \dfrac{|b_k|}{\lambda}}{2}$$

Notre travail n'est pas fini, il faut simplifier le membre de droite.
On sépare en deux sommes (linéarité) et on sort λ qui ne dépend pas de k (tout est là dans l'intérêt de lui avoir donné un nom) :

$$\sum_{k=1}^{n} |\Re e(a_k.\overline{b_k})| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda.|a_k|^2 + \dfrac{|b_k|}{\lambda}}{2} = \frac{1}{2}.\Big(\lambda.\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + \frac{1}{\lambda}.\sum_{p=1}^{n} |b_k|^2\Big)$$

Mais qui est λ ? $\lambda = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{p=1}^{n} |b_p|^2}{\sum\limits_{p=1}^{n} |b_p|^2}}$ Et donc $\lambda = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2.\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{p=1}^{n} |b_p|^2}{\sum\limits_{p=1}^{n} |b_p|^2}} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2..\sqrt{\sum\limits_{p=1}^{n} |b_p|^2}}{\sqrt{\sum\limits_{p=1}^{n} |b_p|^2}}$

Ce réel est de la forme $\dfrac{A.\sqrt{B}}{\sqrt{A}}$(les variables p et k sont muettes), et il se simplifie en $\sqrt{A}.\sqrt{B}$ et même $\sqrt{A.B}$.

De même, $\dfrac{1}{\lambda}.\sum\limits_{p=1}^{n} |b_k|^2$ est de la forme $\dfrac{1}{\sqrt{B}/\sqrt{1}}.B$ et donne $\sqrt{A.B}$ aussi.
Bref, tout se simplifie à droite

$$\sum_{k=1}^{n} |\Re e(a_k.\overline{b_k})| \leqslant \frac{1}{2}.\Big(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2.\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2.\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2}\Big)$$

En simplifient les 2 on a $\sum\limits_{k=1}^{n} |\Re e(a_k.\overline{b_k})| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2.\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^2}$.

Et si on nous demande $\Big|\sum\limits_{k=1}^{n} \Re e(a_k.\overline{b_k})\Big| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2.\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^2}$ on sort l'inégalité triangulaire $\Big|\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\Big| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|$ et on met tout bout à bout.

IS03 Binaire.

1	0	1	1	0	1	0	1	binaire
128	64	32	16	8	4	2	1	
128		+32	+16		+4		+1	181

Le nombre r est égal à 181.

On peut l'élever au carré à la main $r^2 = 32\,761$ et le reconvertir en binaire (mais tu te crois où mon pote ? au rez de chaussée).
Tant qu'on y est, comme un gros bourrin, on calcule 2^{15} (après tout, on tient déjà $2^{10} = 1024$ par habitude).
On trouve $2^{15} = 32\,768$ et la différence vaut bien 7.
On renverse alors l'ordre des question. En binaire, on a $2^{15} - 7 = 1000000000000000 - 111 = 111111111111001$.

On peut aussi poser la multiplication binaire (mais avec de sacrées retenues)

$$
\begin{array}{c|cccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & \times & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
\textit{retenue} & & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & o & o & o & o & o & o & o & o & \\
 & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & o & o & o & o & o & o & o & o & & & \\
 & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & o & o & o & o & o & o & o & o & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & & & \\
\hline
= & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

On tient notre écriture binaire de r^2 et on compare avec celle de 2^{15}

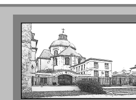
2^{15}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
r^2		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
$2^{15}-r^2$														1	1	1

Bref, $2^{15}-r^2=7$.
On divise par 2^{14} : $\left(\frac{r}{2^7}\right)^2-2=7.2^{-7}$. On factorise $\left(\frac{r}{2^7}-\sqrt{2}\right).\left(\frac{r}{2^7}+\sqrt{2}\right)=7.2^{-7}$ puis on déduit

$$\frac{r}{2^7}-\sqrt{2}=\frac{7.2^{-7}}{r.2^{-7}+\sqrt{2}}\leqslant\frac{2^{-7}}{2}=2^{-8}$$

Ceci permet de dire que $r.2^{-7}$ est une approximation de $\sqrt{2}$.

IS03 Trois notes et deux moyennes.



On note a, b et c les trois notes. La moyenne arithmétique est $m=\frac{a+b+c}{3}$, la moyenne harmonique (après simplification) est $h=\frac{3.a.b.c}{a.b+b.c+c.a}$.
Et l'une des notes vaut a.
Mais, des trois nombres 20, 11 et 8, qui est quoi ?

Par définition même, les moyennes sont entre la note extrême plus et la note extrême moins. Avec des notes entre 0 et 20, si la moyenne vaut 20, c'est que toutes les notes valent 20.
Mais c'est ici impossible.
C'est donc que le 20 de la liste $[8,\ 11,\ 20]$ est la note de l'élève.
Ensuite, on sait que la moyenne harmonique est plus petite que l'arithmétique. On sait donc déjà distribuer les rôles :

$$a=20,\ \frac{a+b+c}{3}=11,\ \frac{3.a.b.c}{a.b+a.c+b.c}=8$$

On extrait alors après deux produits en croix $b+c=3.11-20=13$ puis $20.b.c=8.(20.(b+c)+b.c)$.
On connaît alors $b+c$ et $b.c$, on sait que b et c sont les deux racines du polynôme$X^2-13.X+40$
On trouve le discriminant $(\Delta=9)$, sa racine positive $(\delta=3)$ et les deux racines : 5 et 8.

Les notes du trinôme sont donc $\boxed{\text{20, 5 et 8}}$

IS03 Un angle entre deux vecteurs.

$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ forment entre eux un angle $\pi/3$ si et seulement si on a

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|$$

On traduit : $2 + a = \frac{1}{2}.\sqrt{2}.\sqrt{4 + a^2 + 1}$. On élève au carré pour avoir une équation du second degré :

$$2.(2 + a)^2 = a^2 + 5$$

a vaut $-4 + \sqrt{13}$ ou $-4 - \sqrt{13}$.

Mais quand on a élevé au carré, on a ajouté une solution en trop.
En effet, on a bien $\frac{1}{2}.\sqrt{2}.\sqrt{4 + (-4 + \sqrt{13})^2 + 1} = 2 + (-4 + \sqrt{13})$
mais on n'a pas $\frac{1}{2}.\sqrt{2}.\sqrt{4 + (-4 - \sqrt{13})^2 + 1} = 2 + (-4 - \sqrt{13})$. En effet, le membre de droite est négatif.
En fait, on a $\frac{1}{2}.\sqrt{2}.\sqrt{4 + (-4 - \sqrt{13})^2 + 1} = -(2 + (-4 - \sqrt{13}))$.