LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 9 octobre
$\mathcal{M.P.S.I.}2$

2024 2025

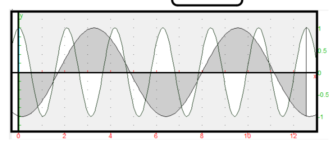
IS04

♡ 0 ♡ Donnez module et argument de $1 + e^{i.\theta}$ pour θ dans $]-\pi,\ \pi[$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

♡ 1 ♡ Résolvez $(5 - 5.i).z = (7 + i).\bar{z}$ d'inconnue complexe z. $\boxed{\text{2 pt.}}$

♡ 2 ♡ $a = \sqrt{13} + \sqrt{29}$ et $b = \sqrt{17} + \sqrt{24}$. Qui est le plus grand ? Non, pas de calculatrice ! On est en maths. $\boxed{\text{2 pt.}}$

♡ 3 ♡ θ est un réel fixé. On doit dériver $x \longmapsto e^{e^{i.\theta}.x}$ (notée f). Un élève écrit $f = x \longmapsto e^{\alpha.x}$ avec $\alpha = e^{i.\theta}$ et déduit $f'(x) = \alpha.e^{\alpha.x} = e^{i.\theta}.e^{e^{i.\theta}.x} = e^{e^{i.\theta}.x+i.\theta}$. Mais c'est quand même louche. Retrouvez la partie réelle φ de f et sa partie imaginaire ϕ. Dérivez φ et ϕ et en fusionnant $\varphi' + i.\phi'$, indiquez si finalement il avait raison. $\boxed{\text{2 pt.}}$



$\approx\!\!\approx_1$ Un élève a confondu $\cos(3.x) =$ et $\cos(3 + x)$. Il n'y a pas égalité, mais quand même, en quelques points c'est vrai. Lesquels ? $\approx\!\!\approx_2$ Combien de solutions sur $[0,\ 4.\pi]$? $\approx\!\!\approx_3$ Et quelle est la somme des solutions sur $[0,\ 4.\pi]$? $\boxed{\text{4 pt.}}$

◇ 0 ◇ Justifiez : $T_{4.n}(0) = 1$, $T_{4.n+2}(0) = -1$ et $T_{2.n+1}(0) = 0$ où T_n est le n^{ieme} polynôme de Tchebychev. $\boxed{\text{2 pt.}}$
Justifiez $T_{2.n}(X) = 2.(T_n(X))^2 - 1$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

♠ 0 ♠ J'ai trouvé $T_7(X) = 64.X^7 - 112.X^5 + \ldots - 7.X$, $T_{12}(X) = (2048.x^{12} - 6144.X^{10} + 6912.x^8 - \ldots)$
$T_{13}(X) = 4096.x^{13} - \ldots + 16640.x^9 - 9984.x^7 + \ldots$ Donnez moi $T_{14}(X)$ ou du moins, le maximum de coefficients. $\boxed{\text{4 pt.}}$

〰$_1$ On doit résoudre deux équations : $(E)\ :\ (z^3 = -13.\sqrt{2} - i.\sqrt{5})$ mais aussi $(Q)\ :\ (z^4 = -31 + 12.i.\sqrt{10})$. Les deux sont moches ? Donnez moi le module des solutions de (E) et le module des solutions de (Q). $\boxed{\text{2 pt.}}$

〰$_2$ Mais j'ai une information : il y a un complexe z_0 qui est à la fois solution de (E) et de (Q). Saurez vous le retrouver ? $\boxed{\text{2 pt.}}$ 〰$_3$ Et maintenant que vous avez z_0, pouvez vous donner la liste des solutions de (E) et la liste des solutions de (Q) ? $\boxed{\text{2 pt.}}$

---

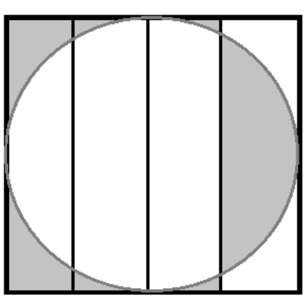
§$_1$ On définit $f = x \longmapsto x^3 - 12.x^2 + 45.x - 58$. Donnez le tableau de variations de f et montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle, et que cette solution est entre 6 et 7. $\boxed{\text{3 pt.}}$

§$_2$ On veut résoudre l'équation $x^3 - 12.x^2 + 45.x - 58 = 0$ d'inconnue réelle x. Faites le bon changement de variable de la forme $y = x - \alpha$ pour que y soit solution d'une équation polynomiale sans y^2 que vous donnerez. $\boxed{\text{1 pt.}}$

§$_3$ Faites le bon changement de variable de la forme $y = \beta.z$ pour que z soit solution d'une équation polynomiale de la forme $4.z^3 - 3.z = s$ avec s que vous préciserez (quitte à avoir $\lambda.(4.z^3 - 3.z \ldots)$). $\boxed{\text{2 pt.}}$ Vérifiez que le z cherché sera plus grand que 1. $\boxed{\text{1 pt.}}$

§$_4$ On pose alors $z = \dfrac{1}{2}.\Big(t + \dfrac{1}{t}\Big)$ avec t plus grand que 1. Exprimez t à l'aide de z. $\boxed{\text{1 pt.}}$

§$_5$ Montrez alors $4.z^3 - 3.z = \dfrac{1}{2}.\Big(T + \dfrac{1}{T}\Big)$ avec $T = t^3$. $\boxed{\text{2 pt.}}$ En reportant dans l'équation $4.z^3 - 3.z = s$, exprimez T puis t à l'aide de s et finalement retrouvez la solution x. $\boxed{\text{2 pt.}}$



Sur le drapeau (carré et aussi atroce que le site de Sorbonne-Université) du pays des Sucri, les quatre bandes ont la même largeur. Quel pourcentage de la tête (circulaire) de Sucri est grisé ? $\boxed{\text{3 pt.}}$

♣ 0 ♣ $\dfrac{3}{10} + \dfrac{10}{65} + \dfrac{65}{3} + \dfrac{3}{65} + \dfrac{65}{10} + \dfrac{10}{3}$ est un entier (pour un point : prouvez le).

Je veux les triplets d'entiers avec $0 < a < b < c < 1000$ vérifiant $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{a} \in \mathbb{N}$. Un script Python ? $\boxed{\text{4 pt.}}$

LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 9 octobre
M.P.S.I.2

2024 2025
IS04
CORRECTION

IS04 Questions rapides.

On trouve que $1+e^{i.\theta}$a pour module $2.\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ (positif) et pour argument $\dfrac{\theta}{2}$ (entre $-\pi$ et π), en écrivant

$$1+e^{i.\theta}=e^{i.\frac{\theta}{2}}.(e^{i.\frac{\theta}{2}}+e^{-i.\frac{\theta}{2}})=e^{i.\frac{\theta}{2}}.2.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

On résout $(5-5.i).z=(7+i).\overline{z}$ en écrivant $z=a+i.b$ avec a et b réels. On trouve un système

$$(5-5.i).(x+i.y)=(7+i).(x-i.y)\Leftrightarrow \begin{array}{rrcrr} 5.x & +5.y & = & 7.x & +y \\ -5.x & +5.y & = & x & -7.y \end{array}\Leftrightarrow x=2.y$$

On trouve tout une droite de complexes, de la forme $y.(2+i)$ avec y décrivant $\mathbb{R}$.

Posons $e^{i.\theta}=c+i.s$ avec c et s égaux au cosinus et au sinus de θ.
On a alors pour tout réel $x f(x)=e^{c.x+i.s.x}=e^{c.x}.e^{i.s.x}=e^{c.x}\cos(s.x)+i.e^{c.x}.\sin(s.x)$. Ceci permet d'identifier les parties réelles et imaginaires

$$\varphi=x\longmapsto e^{c.x}.\cos(s.x)\ et\ \phi=x\longmapsto e^{c.x}.\sin(s.x)$$

On peut alors dériver ces produits

$$\varphi'=x\longmapsto c.e^{c.x}.\cos(s.x)+e^{c.x}.(-s.\sin(s.x))$$

$$\phi'=x\longmapsto c.e^{c.x}.\sin(s.x)+e^{c.x}.(s.\cos(s.x))$$

On combine avec un facteur i entre les deux pour avoir $f'=(\varphi+i.\phi)'=\varphi'+i.\phi'$ par linéarité et on factorise

$$\forall x,\ f'(x)=e^{c.x}.\Big((c.\cos(s.x)-s.\sin(s.x))+i.(c.\sin(x)+s.\cos(s.x))\Big)$$

Mais si on détaille $\begin{array}{rrcrrcr} c.\cos(s.x) & -s.\sin(s.x) & = & \cos(\theta).\cos(s.x) & -\sin(\theta).\sin(s.x) & = & \cos(\theta+s.x) \\ c.\sin(s.x) & +s.\cos(s.x) & = & \cos(\theta).\sin(s.x) & +\sin(\theta).\cos(s.x) & = & \sin(\theta+s.x) \end{array}$.
On reconnaît : $f'=x\longmapsto e^{c.x}.e^{i.(\theta+s.x)}$ qu'on compacte en $x\longmapsto e^{\cos(\theta).x+i.\theta+i.\sin(\theta).x}$ et même en $x\longmapsto e^{i.\theta+e^{i.\theta}.x}$.
L'élève avait raison. Mais suivant le niveau du concours, vous pourrez ou non dériver directement $x\longmapsto e^{\alpha.x}$ en $x\longmapsto \alpha.e^{\alpha.x}$ pour α complexe.

$a=\sqrt{13}+\sqrt{29}$ et $b=\sqrt{17}+\sqrt{24}$. Pour les comparer, comme ils sont positifs, comparons leurs carrés.
$a^2=13+29+2.\sqrt{13.29}$ et $b^2=17+24+2.\sqrt{17.24}$.
Et même, calculons la différence de leurs carrés : $a^2-b^2=1+\sqrt{377}-\sqrt{408}$.
Et pour avoir le signe de ceci, regardons si on a $(1+\sqrt{377})\geqslant\sqrt{408}$ encore une fois en comparant les carrés : $378+2.\sqrt{377}$ contre 408 , ce qui nous amène à comparer $2.\sqrt{377}$ et 30 . Et encore une fois, on compare les carrés (après une division par 2) : 377 face à 15^2. C'est 377 qui l'emporte, donc au final, c'est b qui l'emporte.

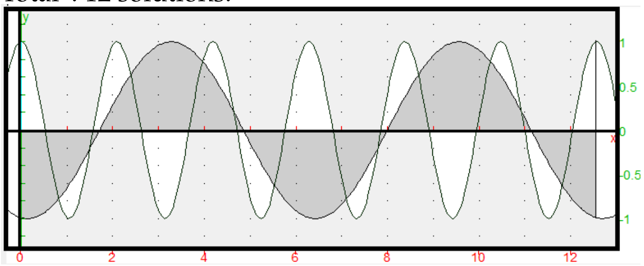
Et avec la calculatrice : $a=\sqrt{13}+\sqrt{29}\simeq 8.99$ à 10^{-2} près et $b=\sqrt{17}+\sqrt{24}\simeq 9.02$ à 10^{-2} près.

IS04 Trigonométrie.

On résout l'équation $\cos(3.x)=\cos(x+3)$ par les cas d'égalité des cosinus (et pas en développant le membre de droite par $\cos.\cos-\sin.\sin$ car l'arrivé des sinus complique d'avantage qu'elle ne simplifie).
On trouve deux familles de solutions $\begin{array}{lrcrrr} \exists p\in\mathbb{Z}, & 3.x & = & x & +3 & +2.p.\pi \\ \exists p\in\mathbb{Z}, & 3.x & = & -x & -3 & +2.q.\pi \end{array}$.
On trouve deux ensembles, plus ou moins « touffus »

$$S_x=\left\{\frac{3}{2}+p.\pi\mid p\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{-\frac{3}{4}+\frac{q.\pi}{2}\mid q\in\mathbb{Z}\right\}$$

Pour les solutions dans $[0,\ 4.\pi]$, on prend $p \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ et $q \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ et toutes ces solutions sont distinctes.
Total : 12 solutions.



On les explicite même et on somme « à la main »
$\frac{3}{2} + 0.\pi + \frac{3}{2} + 1.\pi + \frac{3}{2} + 2.\pi + \frac{3}{2} + 3.\pi$
$-\frac{3}{4} + \frac{1.\pi}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1.\pi}{2} + \ldots + -\frac{3}{4} + \frac{8.\pi}{2}$
Le total donne $4.\frac{3}{2} + \pi.(1+2+3) + 8.\frac{-3}{4} + \frac{\pi}{2}.(1+2+\ldots+8)$
Les rationnels s'en vont et il reste $24.\pi$.

IS04 Polynômes de Tchebytchev.

On rappelle leur caractérisation : $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$. On veut calculer $T_n(0)$? On prend $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$T_{4.n}(0)$	$T_{4.n+2}(0)$	$T_{2.n+1}(0)$
$\cos\left(4n\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2n\pi\right) = 1$	$\cos\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left((2n+1)\pi\right) = -1$	$\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$

Pour la relation $T_{2.n}(X) = 2.(T_n(X))^2 - 1$, il suffit d'écrire

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \cos(2.n.\theta) = \cos(2.(n.\theta)) = 2.(\cos(n.\theta))^2 - 1$$

On a alors $T_{2.n}(c) = 2.(T_n(c))^2 - 1$ pour tout c de $[-1,\ 1]$. Et quand deux polynômes coïncident sur tout $[-1,\ 1]$, alors ils sont égaux.

En effet, le polynôme différence $T_{2.n} - 2.(T_n)^2 + 1$ a une infinité de racines. Il est donc nul.
On parle de « rigidité des polynômes ». Quand on tient un polynôme en assez de points, on le tient partout.

On cherche le polynôme T_{14} ? On sait déjà $T_{14}(X) = 2.X.T_{13}(X) - T_{12}(X)$.
Ceci permet d'extraire les premier coefficients :

$$T_{14}(X) = 2.X.(4096.X^{13} - \ldots + 16640.X^9 - 9984.X^7 + \ldots) - (2048.x^{12} - 6144.X^{10} + 6912.x^8 - \ldots)$$
$$T_{14}(X) = (8192.X^{14} - \ldots + 16640.X^{10} - 9984.X^8 + \ldots) - (2048.x^{12} - 6144.X^{10} + 6912.x^8 - \ldots)$$

$$T_{14}(X) = 8192.X^{14} - \ldots + 39424.X^{10} - 26880.X^8 + \ldots$$

Mais on a aussi

$$T_{14}(X) = 2.(T_1(X))^2 - 1 = 2.(64.X^7 - 112.X^5 + \ldots - 7.X).(64.X^7 - 112.X^5 + \ldots - 7.X) - 1$$

On reconfirme le terme en X^{14} avec coefficient $2.64.64 = 2^1.2^6.2^6 = 2^{13} = 8192$.
Mais on a aussi le terme constant : -1. Et le terme en X^2 : $2.7.7.X^2$.
On tient aussi le terme en X^{12} issu de double-produits : $2.2.(-112).64 = 28672$. Bref, à ce stade

$$T_{14}(X) = 8192.X^{14} - 28672.X^{12} + 39424.X^{10} - 26880.X^8 + \ldots + 98.X^2 - 1$$

Il ne nous manque que deux termes : celui en X^6 et celui en X^4.

Peut on retrouver le terme qui manque dans $T_7(X)$? Car après tout, il n'en manquait qu'un

Mais je sais une chose : $T_7(1) = T_7(\cos(0)) = \cos(7.0) = 1$.
Je complète donc $64.X^7 - 112.X^5 + 56.X^3 - 7.X$ (pas de terme en X^2 ni X^4 pour des raisons de parité).
Je pouvais donc même tout trouver en une seule fois

	$64.X^7$	$-112.X^5$	$+56.X^3$	$-7.X$
$64.X^7$	$64^2.X^{14}$	$-64.112.X^{12}$	$+64.56.X^{10}$	$-64.7.X^8$
$-112.X^5$	$-112.64.X^{12}$	$+112^2.X^{10}$	$-112.56.X^8$	$+112.7.X^6$
$+56.X^3$	$+56.64.X^{10}$	$-56.112.X^8$	$+(56)^2.X^6$	$-56.7.X^4$
$-7.X$	$-7.64.X^8$	$+7.112.X^6$	$-7.56.X^4$	$+7^2.X^2$

$\swarrow$ $\swarrow$

$-13440.X^8$ $+4704.X^6$

Évidemment, la question était lourde en calculs.

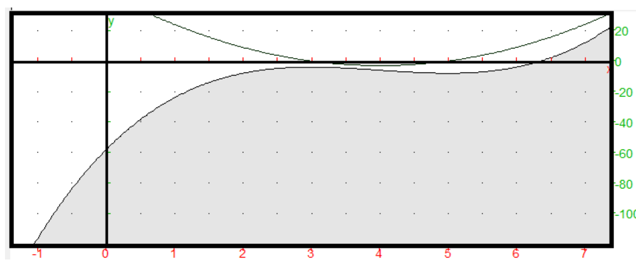
IS04 Troisième degré.

On dérive le polynôme f pour avoir son sens de variations : $f' = x \longmapsto 3.x^2 - 24.x + 45$. Incroyable, le discriminant $576 - 12.45$ est un carré parfait : 6^2. On trouve les deux racines de f' : 3 et 5 (d'ailleurs, on aurait pu écrire $f'(x) = 3.(x^2 - 8.x + 15)$ avec des racines encore plus visibles.

On peut dresser le tableau de variations et avoir les extrema locaux (on dit extrémums, mais je suis resté vieux jeu).

L'application reste négative sur $]-\infty,\ 3[$ (et même plus petite que -4). Entre 3 et 5 elle redescend et est encore négative. En revanche, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une solution entre 5 (puisque $f(5) = -8$) et l'infini.

Le calcul $f(6) = -4$ et $f(7) = 12$ dit que la racine est entre 6 et 7.



La somme des racines de $x^3 - 12.x^2 + 45.x - 58 = 0$ vaut 12, leur moyenne vaut 4, on va donc naturellement poser $y = x - 4$ soit $x = y + 3$.

$$\text{On développe}\quad \begin{array}{rcrrrr} x^3 & & y^3 & +12.y^2 & +48.y & +64 \\ -12.x^2 & = & & -12.y^2 & -96.y & -192 \\ +45.x & & & & +45.y & +180 \\ -58 & & & & & -58 \\ & = & y^3 & & -3.y & -6 \end{array}.$$

La forme n'est pas encore digne de Tchebychev. On veut $4.z^3 - 3.z$. On pose donc $y = \alpha.z$ et l'équation devient $\alpha^3.z^3 - 3.\alpha.z - 6 = 0$.

On ne peut pas exiger à la fois $\alpha^3 = 4$ et $-3.\alpha = 3$. Alors c'est un échec ?

Non, car on peut factoriser

$$\frac{\alpha^3}{4}.\Big(4.z^3 - \frac{12.\alpha}{\alpha^3}.z - \frac{24}{\alpha^3}\Big) = 0$$

et cette fois, on va exiger $\dfrac{12}{\alpha^2} = 3$. On trouve $\alpha^2 = 4$. On choisit $\alpha = 2$ (la valeur -2 donnera la même chose à la fin).
On pose donc $y = 2.z$ et l'équation devient $8.z^3 - 6.z - 6 = 0$ soit effectivement $4.z^3 - 3.z - 3 = 0$.

On a donc pose $x = y + 3$ et $y = 2.z$ d'où $z = \dfrac{x-3}{2}$.

Or, le x qu'on cherche est entre 6 et 7, donc z est entre $\dfrac{3}{2}$ et 2.

On pose donc $z = \dfrac{t + \frac{1}{t}}{2} = \dfrac{t^2+1}{2.t}$ avec t non nul.
C'est jouable en prenant t solution de l'équation du second degré $t^2 - 2.z.t + 1 = 0$.
Le discriminant $4.(z^2 - 1)$ est positif puisque z est entre $3/2$ et 2.
On a deux racines : $t = z + \sqrt{z^2 - 1}$ et $t = z + \sqrt{z^2 - 1}$.
Mais laquelle garder ? Au hasard ? Non ! On est en maths. Il faut en garder une seule.
L'énoncé demande plus grande que 1. Or, le produit des racines vaut 1. Il y en a donc une plus petite que 1 et une plus grande que 1. C'est donc la plus grande des deux qui sera plus grande que 1.
On choisit donc $t = z + \sqrt{z^2 - 1}$.

Si on a posé $z = \dfrac{1}{2}.\Big(t + \dfrac{1}{t}\Big)$ on peut calculer $z^3 = \dfrac{1}{8}.\Big(t + \dfrac{1}{t}\Big)^3$ puis

$$4.z^3 - 3.z = \frac{1}{2}.\Big(t^3 + 3.t + 3.\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3}\Big) - 3.\Big(t + \frac{1}{t}\Big) = \frac{1}{2}.\Big(T + \frac{1}{T}\Big)$$

en posant donc $T = t^3$.

Avec notre nouvelle inconnue, l'équation initiale devient $\dfrac{T^2+1}{2.T} = 3$.
On résout alors $T^2 - 6.T + 1 = 0$ et on trouve $T = 3 + \sqrt{8}$ (on élimine $3 - \sqrt{8}$ car T est plus grand que 1).
On remonte alors à t avec une racine cubique (tiens tiens) : $T = \sqrt[3]{3+\sqrt{8}}$.

On remonte alors pas à pas : $z = \dfrac{1}{2}.\Big(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}}\Big)$ puis on trouve y et enfin

$$x = \sqrt[3]{3+\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}} + 4$$

Voyez vous pourquoi on a même $x = \sqrt[3]{3+\sqrt{8}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{8}} + 4$

IS04 Une équation c'est bien, deux équations c'est mieux.

Le complexe z_0 vérifie à la fois $(z_0)^4 = -31 + 12.i.\sqrt{10}$ et $(z_0)^3 = -13.\sqrt{2} - i.\sqrt{5}$.
Le module de z_0 se calcule alors par exemple par

$$|z_0|^3 = |-13.\sqrt{2} - i.\sqrt{5}| = |169.2 + 5| = \sqrt{143} = \sqrt{7^3} = 7.\sqrt{7}$$

On passe à la racine cubique et $|z_0|$ vaut $\sqrt{7}$.

L'autre nombre conduisait à $|z_0|^4 = \sqrt{31.31 + 12.12.10} = \sqrt{2401} = 49$.

Il devient alors aisé de récupérer z_0 par un simple quotient, avec quantité conjuguée si nécessaire

$$z_0 = \frac{(z_0)^4}{(z_0)^3} = \frac{-31 + 12.i.\sqrt{10}}{-13.\sqrt{2} - i.\sqrt{5}} = \frac{(-31 + 12.i.\sqrt{10}).(-13.\sqrt{2} + i.\sqrt{5})}{7^3}$$

et si on développe avec courage le numérateur en utilisant $\sqrt{10}.\sqrt{2} = 2.\sqrt{5}$ et $\sqrt{10}.\sqrt{5} = 5.\sqrt{2}$, on a à la fin $\boxed{z_0 = \sqrt{2} - i.\sqrt{5}}$

Ceci permet il de résoudre (E) ? Oui, car les trois solutions sont alors z_0, $z_0.j$ et $z_0.j^2$.

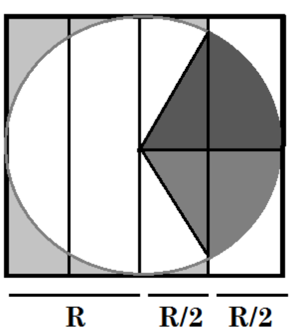
$$(E)\ :\ \sqrt{2} - i.\sqrt{5},\ \frac{\sqrt{15}-\sqrt{2}}{2} + i.\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{2},\ \frac{-\sqrt{15}-\sqrt{2}}{2} + i.\frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{2}$$

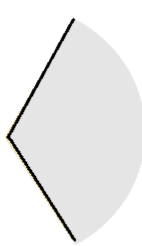
Et pour (Q) c'est plus direct, en multipliant par 1, i, -1 et $-i$

$$(Q)\ :\ \sqrt{2} - i.\sqrt{5},\ \sqrt{5} + i.\sqrt{2},\ -\sqrt{2} + i.\sqrt{5},\ -\sqrt{5} - i.\sqrt{2}$$

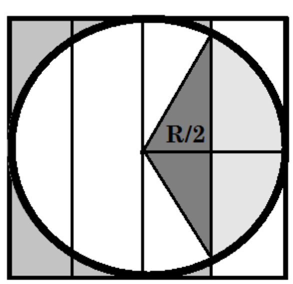
IS04 Le drapeau du pays des Sucris.

Notons R le rayon de Sucri (on pourrait poser $R = 1$ pour l'homogénéité.
L'aire du disque Sucri est $\pi.R^2$.
On commence par mettre en valeur l'angle au centre, égal à $\pi/3$ car son cosinus vaut $1/2$.
La portion marquée sur le schéma en gris très foncé est donc faite de deux portions de disque avec angle au centre $2.\pi/3$ (oh, finalement, il y a j dans cet exercice).





Un tiers de l'aire du disque



Deux triangles à soustraire.

Comme l'aire est proportionnelle à l'angle au centre, la part de Sucri est $\pi.R^2/3$. On reconnaît un tiers de Sucri.

Mais il y a deux triangles rectangle en trop dans cette part.
Il faut enlever ce double triangle dont la largeur est $R/2$ et la hauteur $R.\sqrt{3}/2$ par sinus et cosinus de $\pi/3$.

Bref, le morceau grisé a pour aire $\dfrac{\pi.R^2}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}.R.\dfrac{R}{2}$.

Quand on calcule le pourcentage à l'aire total, les R^2 se simplifient $\boxed{\dfrac{\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}}{\pi}}$

IS04 Python et les entiers.

$$\frac{3}{10} + \frac{10}{65} + \frac{65}{3} + \frac{3}{65} + \frac{65}{10} + \frac{10}{3} = \frac{68}{10} + \frac{75}{3} + \frac{13}{65} = \frac{34}{5} + 25 + \frac{1}{5} = \frac{35}{5} + 25 = 7 + 25 = 32$$

On va créer une liste des triplets solutions `L`.
On va imbriquer trois boucles. La première sera `c in range(1, 1001)`.
La seconde imposera `b in range(1, c)` (comme ça, `b` n'atteint pas `c`) et la dernière se devine.
Le test « le rationnel est entier » va consister à l'écrire sous forme d'un quotient $\dfrac{a^2.b + a^2.c + b^2.a + b^2.c + c^2.a + c^2.b}{a.b.c}$ et à tester si le dénominateur divise le numérateur
dans le cas favorable, on allonge la liste.

```
L = [ ]
for c in range(1, 1001) :
....for b in range(1, c) :
........for a in range(1, b) :
............numer = a*a*(b+c) + b*b*(a+c) + c*c*(a+b)
............denom = a*b*c
............if (numer % denom) == 0 :
................L.append([a, b, c])
```

J'ai quand même 1452 solutions.
En voici quelques unes [122, 610, 915], [183, 610, 915], [305, 610, 915], [153, 306, 918], [153, 459, 918], [306, 459, 918], [306, 612, 918], [184, 276, 920], [307, 614, 921], [12, 44, 924], [56, 120, 924], [44, 154, 924], [66, 154, 924], [12, 252, 924], [44, 264, 924], [154, 308, 924], [66, 396, 924], [154, 462, 924], [308, 462, 924], [308, 616, 924], [309, 618, 927], [124, 186, 930], [186, 279, 930], [155, 310, 930], [155, 465, 930], [310, 465, 930], [124, 620, 930], [186, 620, 930], [310, 620, 930], [311, 622, 933], [22, 165, 935], [156, 312, 936], [4, 360, 936], [156, 468, 936], [312, 468, 936], [312, 624, 936], [67, 402, 938], [313, 626, 939], [188, 282, 940], [157, 314, 942], [157, 471, 942], [314, 471, 942], [314, 628, 942], [126, 189, 945], [45, 270, 945], [27, 378, 945], [5, 513, 945], [126, 630, 945], [189, 630, 945], [315, 630, 945], [158, 316, 948], [158, 474, 948], [316, 474, 948], [316, 632, 948], [190, 285, 950], [4, 300, 950], [317, 634, 951], [28, 40, 952], [68, 408, 952], [159, 318, 954], [159, 477, 954], [318, 477, 954], [318, 636, 954], [319, 638, 957], [128, 192, 960], [192, 288, 960], [160, 320, 960], [160, 480, 960], [320, 480, 960].

LYCEE CHARLEMAGNE M.P.S.I.2 2024 2025
IS04
34- points