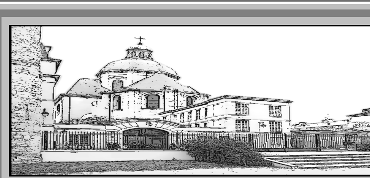
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 14 octobre
M.P.S.I.2



2024 2025

TD05

◁ 0 ▷ ♡ Sachant qu'une des racines cubiques de $46.i - 9$ a pour partie réelle 3, retrouvez les trois racines cubiques.

◁ 1 ▷ x, y et z sont trois réels strictement positifs. On doit montrer $x + y + z \leqslant 2.\Big(\dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y^2}{x+z} + \dfrac{z^2}{x+y}\Big)$.
Il parait que c'est une inégalité de Cauchy-Schwarz avec des $\sqrt{y+z}$ et autres $\sqrt{x+z}$ dans un des vecteurs. Alors ?

◁ 2 ▷ ♡ Le point $M(x, y, z)$ est dans le plan d'équation $2.x + 3.y - z = 5$. Montrez avec l'aide de Cauchy et Schwarz que la distance $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ du point M à l'origine $O(0, 0, 0)$ vaut au moins $\dfrac{5}{\sqrt{14}}$.

◁ 3 ▷ Dans cet établissement, il y a trois cent cinquante élèves et quatre classes : trois classes de 50 élèves et une classe de 100 élèves.
Calculez le nombre moyen d'élèves par classe du point de vue de l'administration.
Interrogez les élèves un par un et demandez à chacun : « combien d'élèves y a-t-il dans ta classe ? », puis faites la moyenne des résultats obtenus.
Pourquoi ne trouvez pas $\dfrac{50 + 50 + 50 + 100}{4}$ comme tout à l'heure.

Existerait il une solution où la moyenne du point de vue de l'administration soit égale à la moyenne obtenue par sondage auprès des élèves ?

Existerait il une solution où la moyenne du point de vue de l'administration soit strictement supérieure à la moyenne obtenue par sondage auprès des élèves ?

Quel rapport avec l'exercice $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leqslant \frac{(a_1)^2+(a_2)^2+\ldots+(a_n)^2}{a_1+a_2+\ldots a_n}$ et avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?

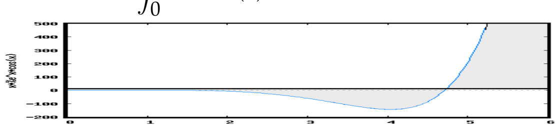
◁ 4 ▷ A est un entier à trois chiffres et B est son renversé exemple : le renversé de 453 est 354. On sait :

A est divisible par 13	B est divisible par 31
A est divisible par 39	B est divisible par 93
A est divisible par 21	B est divisible par 12

Trouvez A (et B) *(expliquez)*.

◁ 5 ▷ ♡ Montrez : $\forall x \in [-1, 1]$, $\cos(Arcsin(x)) = |\cos(Arcsin(x))| = \sqrt{1-x^2}$.
En dérivant l'information $\forall x \in]-1, 1[$, $\sin(Arcsin(x)) = x$, montrez : $Arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Justifiez de même $\forall x$, $Arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Dérivez $x \longmapsto Arcsin\Big(\dfrac{2.x}{1+x^2}\Big)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Expliquez.

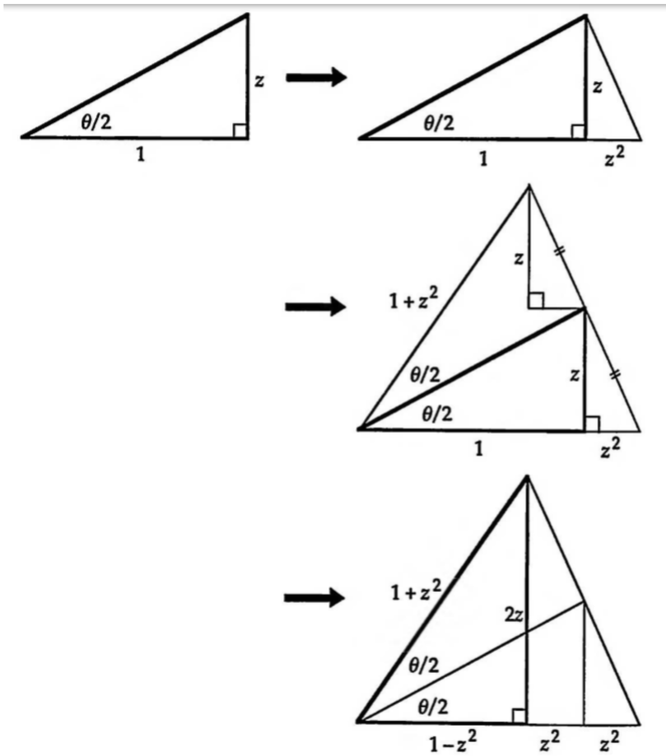
◁ 6 ▷ ♡ Montrez $\displaystyle\int_0^{2.\pi} \cos(t).t.e^t.dt = \pi.e^{2.\pi}$.

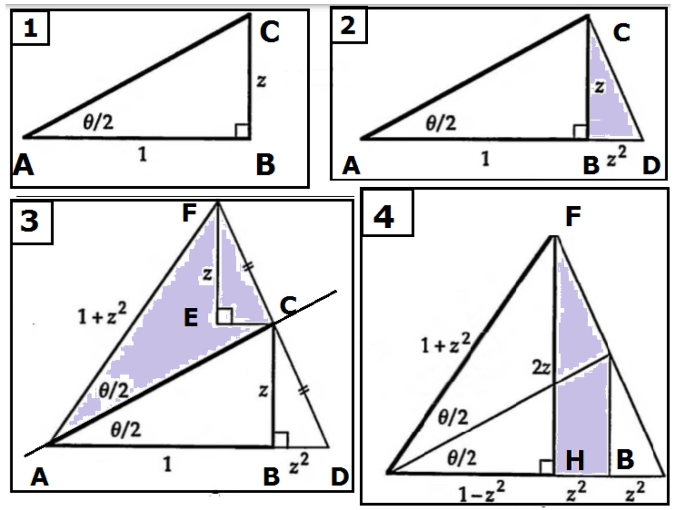


Vous pourrez intégrer par parties, quitte à finir par retomber sur la même fonction au bout d'un moment.
Ou alors, vous pourrez essayer une primitive de la forme $t \longmapsto ((a.t+b).\sin(t) + (c.t+d).\cos(t)).e^t$.
Vous pourrez aussi mettre sous la forme $t.e^{(1+i).t}$ *et intégrer par parties.*

◁ 7 ▷ Calculez $\displaystyle\int_0^1 \sin(Arctan(x)).dx$ (parties ?).

◁ 8 ▷ Prouvez pour tout x de $\mathbb{R}$: $-1 \leqslant \dfrac{2.x}{1+x^2} \leqslant 1$.





◁ 9 ▷

Quelles formules du cours prouve-t-on avec ces dessins ?

◁ 10 ▷ Un exercice d'oral de Polytechnique était posé sous la forme suivante :

soient $(z_0, \dots z_{n-1})$ n complexes non nuls,
alors il existe une partie P de `range(n)` vérifiant $\left|\sum_{p\in P} z_p\right| \geqslant \frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{n-1}|z_k|$

l'exercice était posé tel quel avec une indication que l'on donnera plus loin sur un exemple et pour le traitement général. Mais on commencera ici par quelques cas particuliers.

♠ 0 ♠ Pour $(1,\ i, -1, -i)$, vérifiez : $|1+i| \geqslant \frac{1}{\pi}.(|1|+|i|+|-1|+|-i|)$.

♠ 1 ♠ Pour $(1, -j^2,\ j, -1,\ j^2, -j)$, vérifiez : $|j-1+j^2| \geqslant \frac{1}{\pi}.(|1|+|-j^2|+|j|+|-1|+|j^2|+|-j|)$.

♠ 2 ♠ n est un entier naturel non donné, on pose $z_k = e^{i.k.\pi/n}$ pour k dans $range(2.n)$.
Justifiez : $\left|\sum_{k=0}^{n-1} z_k\right| \geqslant \frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{2.n-1}|z_k|$.

♠ 3 ♠ a et b sont deux réels, vérifiant $a < 0 < b$. Prouvez : $|a| \geqslant \frac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$ ou $|b| \geqslant \frac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$.

♠ 4 ♠ Les z_k sont n réels classés par ordre croissant.
Montrez qu'il existe un entier p vérifiant $\left|\sum_{k=0}^{p-1} z_k\right| \geqslant \frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{n-1}|z_k|$ ou $\left|\sum_{k=p}^{n-1} z_k\right| \geqslant \frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{n-1}|z_k|$.

♠ 5 ♠ On prend cette fois à titre d'exemple $z_0 = 2$, $z_1 = 1+i$, $z_2 = i$, $z_3 = -2+3.i$, $z_4 = -5$ et $z_5 = -3-4.i$.
Pour tout α entre $-\pi$ et π, on note A_α l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |Arg(z.e^{-i.\alpha})| \leqslant \pi/2\}$. Justifiez que A_α est un demi plan.
Pour tout α, on note $f(\alpha)$ la norme de la somme des z_k qui sont dans A_α. Représentez graphiquement l'application f sur $[-\pi,\ \pi]$, et calculez l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha).d\alpha$ [1].

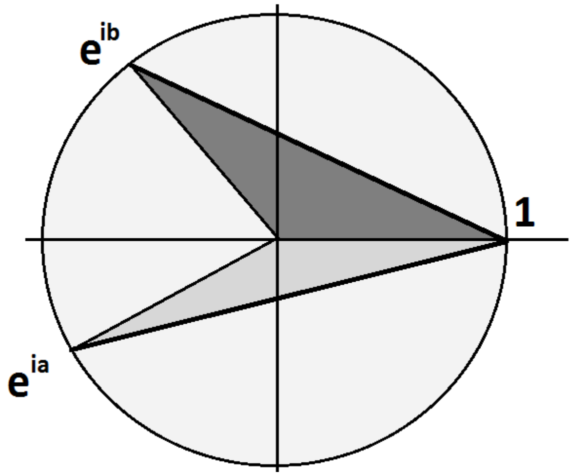
Le cas général repose aussi sur le demi-plan qui tourne. On calcule la valeur moyenne de l'application f, avec des inégalités dans $\mathbb{C}$ et un peu de trigonométrie. Comme cette valeur moyenne dépasse alors la valeur $\sum_{k=0}^{n-1}|z_k|$, c'est que f dépasse cette valeur au moins en un point. On ne le détaillera pas ici.

---

1. on rappelle que l'intégrale d'une fonction est une aire, et ne se calcule pas forcément par des $[F(x)]_{x=a}^{b}$ avec des exigences du type "f doit être dérivable" à cause d'un cours de Terminale dans lequel on confond à tout bout de champ "nécessaire" et "suffisant"

◁11▷ Dans l'ensemble des entiers de 0 à 20 pour l'addition et la multiplication modulo 21, montrez que toute suite arithmétique est périodique.
Déterminez la période de la suite $u_{n+1} = 16.u_n + 1$ (calculez, c'est tout).

◁12▷ Qui est le rationnel d'écriture décimale $3,\overline{14159}14159...$?
Donnez l'écriture décimale de $\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9}}}}}$



◁13▷ ♡ a et b sont deux réels de $]0,\ 2.\pi[$. Calculez module et argument de $1 - e^{i.a}$. Calculez l'argument de $\dfrac{1-e^{i.b}}{1-e^{i.a}}$.
Retrouvez le théorème de l'arc capable *(dit aussi de l'angle au centre)* : si A et B sont deux points d'un cercle Γ de centre O, alors pour tout M de Γ, l'angle $\widehat{AMB}$ est constant *(égal à $\widehat{AMB}/2$)*. Trouvez les points M du plan vérifiant $\widehat{OMI} = \pi/2$ et $\widehat{OMJ} = \pi/4$?

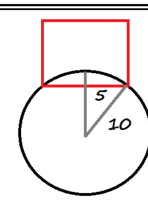
◁14▷ ♡ Simplifiez $\cos\left(Arccos\left(\dfrac{9}{\sqrt{82}}\right) + Arcsin\left(\dfrac{4}{\sqrt{17}}\right)\right)$.

◁15▷ Dérivez $x \longmapsto Arctan\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$ et simplifiez le au maximum.

◁16▷ Résolvez $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}} = 2$ d'inconnue réelle x.

◁17▷ Démontrez : $Arctan(2) + 2.Arctan(3) + Arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) + Arctan\left(\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{5.\pi}{4}$.

◁18▷ ♡ Sucri peut être assimilé à une sphère de rayon 10 centimètres. Je lui ai acheté un chapeau rond (cylindrique, mais j'ai du mal à imaginer la chanson « ils ont des chapeaux cylindriques, vive la Bretagne... ») de diamètre 10 centimètres. Quelle hauteur du crane de Sucri disparaitra sous le chapeau ?



◁19▷ ♣ Ali et Ben sont jumeaux *(indiscernables, c'est le cas de mes deux boulangers Place des Fêtes)*. L'un ment tout le temps. L'autre est toujours sincère.
Lequel ment ? On ne sait pas... Alors, il faut leur poser des questions. En face de vous, un des deux frères. Lequel ? Ali, Ben ? Le menteur, le sincère ?

a – Quelle sera sa réponse à la question "***Es tu menteur ?***"
b – Vous lui demandez "***Es tu Ali ?***". Que déduisez vous si il répond "***Oui***" ?
c – Vous lui demandez "***Ali ment il ?***". Que déduisez vous si il répond "***Oui***" ?
d – Quelle question pouvez vous poser pour qu'il vous réponde assurément "***Oui***".
e – Que pensez vous de la question "***Ton frère s'appelle-t-il Ali ?***".
f – Que pensez vous s'il vous dit "***Mon frère dit qu'il s'appelle Ben***".

◁20▷ Vrai ou faux :

a	$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(2.\theta) \in \mathbb{Q}$
b	$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(\theta/2) \in \mathbb{Q}$
c	$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sin(\theta) \in \mathbb{Z}$
d	$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sin(\theta) \in \mathbb{Q}$
e	$(\forall\theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) \in \mathbb{Q}) \Rightarrow (\forall\theta \in \mathbb{R},\ \sin(\theta) \in \mathbb{Q})$
f	$\forall\theta \in]-\pi/2, \pi/2[,\ \tan(\theta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \tan(n.\theta) \in \mathbb{Q}$

◁21▷ ♡ Sachant $\tan(\theta) = 1/2$, calculez $\tan(2.\theta)$, $\tan(4.\theta)$, $\tan(8.\theta)$, $\tan(16.\theta)$ et enfin $\tan(20.\theta)$.
♣ En combien d'étapes pensez vous accéder à $\tan(2021.\theta)$?

◁22▷ ♡ Exprimez $\tan(7.\theta)$ comme polynôme en $\tan(\theta)$ *(indication développer $(\cos + i.\sin)^7$, identifier, diviser, et simplifier haut et bas pour avoir des tangentes)*.
Déduisez la factorisation de $X^3 - 21.X^2 + 35.X - 7$.

◁23▷ Pour quels complexes le réel $\Re e(\Delta) + |\Delta|$ est il nul ?

Il parait que l'une des racines carrées du complexe Δ est $\dfrac{\Delta + |\Delta|}{\sqrt{2.(\Re e(\Delta) + |\Delta|)}}$. Ne me faites pas confiance, prouvez le.

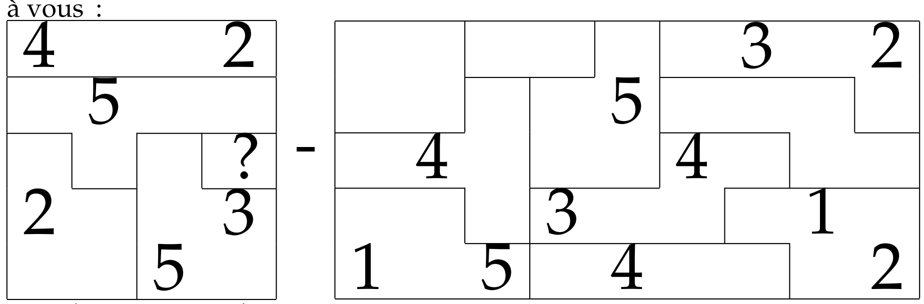
◁24▷ ♡ On sait $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$, $a + b + c = 1$ et $a^2 + b^2 + c^2 = \alpha$ avec α réel.
Pour quelles valeurs de α les trois nombres a, b et c sont ils réels ?

◁25▷ **Rappel des règles :** une maison de n cases contient les nombres de 1 à n, deux nombres égaux ne peuvent pas être côte à côte sur la grille, même en diagonale.

Exemple :

2	1	3	1
5	4	2	4
3	1	5	1
2	4	2	3
1	3	1	5

à vous :



Ou alors `https ://replit.com/@redrapious/TektonikSolver2000#main.py`
Antoine G. propose un solveur de Tektonic, en Python.

◁26▷ Vrai ou faux : $(1 = 0) \Rightarrow \Big((i^2 + 1 = 0) \Rightarrow (1 < 0)\Big)$ puis $\Big((1 = 0) \Rightarrow (i^2 + 1 = 0)\Big) \Rightarrow (1 < 0)$.

◁27▷ ♡ Simplifiez cette petite somme $5.Arctan\left(\dfrac{1}{7}\right) + 2.Arctan\left(\dfrac{3}{79}\right)$.
(situez sommairement sur le cercle trigonométrique, et surtout, calculez sa tangente).

◁28▷ Justifiez que le mot « mot » a 3! anagrammes.
Justifiez que le mot « mélange » a 6! anagrammes si on distingue le *e* et le *é*, et la moitié sinon.
Justifiez que le mot anagramme a $\dfrac{9!}{3!.2!}$ anagrammes.

◁29▷ `Retrouvez les stations de métro (et R.E.R.) dont voici les anagrammes` *(Nord)* :
Mon slip / *Le pédé phallocrate* / Valeur risible : lit pour profane / *Ta roue gauche* / Bachoter sa brochure / *Leur vocabulaire universel* / Nuit à inviter des seins.
Armé est triste / Bachoter sa brochure / Ce condor / Huitre de couloir / Les gaz du traitre / Mon étranger passa / Il est machin / Pas tuer / L'allergique et compétent / Sa chapelière / Pousser le marabout / Aussi pur amour de la voyelle.

◁30▷ ♡ Existe-t-il une homographie *(application de la forme $x \longmapsto \dfrac{a.x + b}{c.x + d}$)* dont les deux points fixes [2] soient 2 et 3 ?
Et si on ajoute valant 4 en 1 ?
Et si on ajoute plutôt « tend vers 5 en $+\infty$" ?

2. point fixe de f : $f(x) = x$

Et si on ajoute plutôt « tendant vers $+\infty$ en 5 ?

◁ 31 ▷ Montrez : $Arctan(k+1) - Arctan(k) = Arctan\Big(\dfrac{1}{1+k+k^2}\Big)$.

Calculez alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Arctan\Big(\frac{1}{1+k+k^2}\Big)$.

◁ 32 ▷ Calculez $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(\ln(x))}{x}.dx$ et $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(\ln(x)).\ln(x)}{x}.dx$.

◁ 33 ▷ Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto Arcsin\Big(\frac{x-3}{.3.x+1}\Big)$.

◁ 34 ▷ ♡ Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto 2.Arcsin(\cos(x))$.
Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto Arcsin(2.\cos(x))$.
Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto Arcsin(2.\cos(2.x))$.

◁ 35 ▷ Pour tout angle θ convenable, exprimez $\tan(2.\theta)$, $\tan(3.\theta)$, $\tan(4.\theta)$ et $\tan(3.\theta)+\tan(4.\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$.

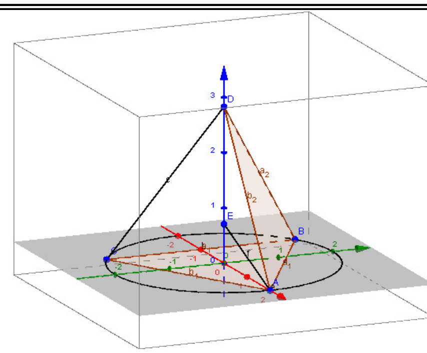
Déduisez que les $\tan(k.\pi/7)$ pour k de 1 à 6 sont les racines du polynôme $\boxed{X^6 - 21.X^4 + 35.X^2 - 7}$ noté P.

Déduisez $\tan\left(\frac{\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{2.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{3.\pi}{7}\right) = \sqrt{7}$.

Déduisez par l'absurde que $\tan(\pi/7)$ est irrationnel.

Le réel $\tan^2(\pi/7)$ est il rationnel ?

◁ 36 ▷ ♡ Résolvez $x^3 - y^3 = 999$ dans $\mathbb{N}^2$.
Qu'est ce qui change dans $\mathbb{Z}^2$?



Les sommets d'un tétraèdre régulier sont $A_0(2,\ 0,\ 0)$, $A_1(-1,\ \sqrt{3},\ 0)$, $A_2(-1,\ -\sqrt{3},\ 0)$ et $A_3(0,\ 0,\ 2.\sqrt{2})$. Vérifiez que les A_iA_k sont tous égaux.
Montrez que A_0A_3 est orthogonale à A_1A_2.

On note

I_0 le milieu de A_0A_1	I_1 le milieu de A_0A_2
I_3 le milieu de A_1A_3	I_4 le milieu de A_2A_3

Montrez que les I_k forment un carré.
◁ 37 ▷ * *(facile si on utilise le théorème des milieux, cas particulier de Thalès)*
Déterminez les coordonnées de G, centre de gravité du tétraèdre.
Déterminez l'angle $\widehat{A_iGA_k}$ pour tout couple $(i,\ k)$.
Montrez que $\overrightarrow{GA_0} + \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3}$ est nul.
Retrouvez la valeur de l'angle $\widehat{A_iGA_k}$ en développant $(\overrightarrow{GA_0} + \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3}).(\overrightarrow{GA_0} + \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3})$.

◁ 38 ▷ Prouvez : $Arctan\Big(\dfrac{1}{3}\Big) + Arctan\Big(\dfrac{1}{8}\Big) + 2.Arctan\Big(\dfrac{1}{7}\Big) + Arctan\Big(\dfrac{1}{\ }\Big) = \dfrac{\pi}{4}$. Pardon ? Il manque un terme ? Oui, c'est à vous de le retrouver.

◁ 39 ▷ Calculez module et argument de $(1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots + (1+i)^{10}$.

◁ 40 ▷ ♡ Calculez module et argument de $\sqrt{2+\sqrt{2}} + i.\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

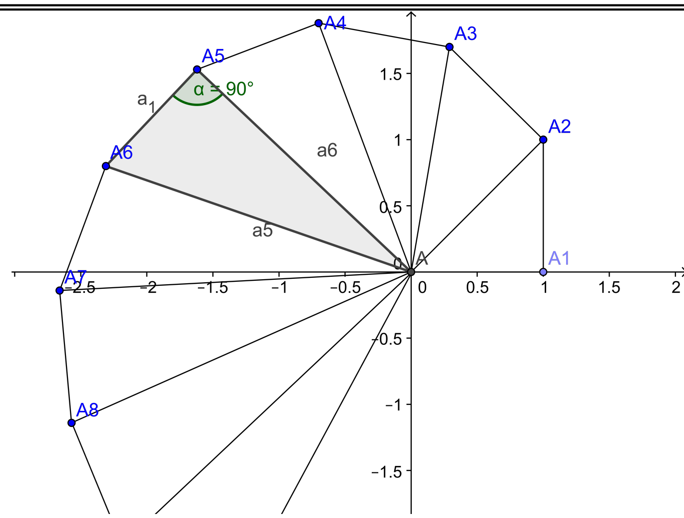
◁ 41 ▷ Calculez module et argument de $2^{i.\pi/3}$. Calculez module et argument de $e^{(e^{i.\pi/3})}$. Calculez module et argument de $(e^e)^{i.\pi/3}$.

◁ 42 ▷ ♡ Calculez module et argument de $(1+2.i).(1+5.i).(1+13.i).(1+21.i)$.

◁43▷

	Un Q.C.M. de Roger Mansuy	Vrai	Faux
a	Soit $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\Re e(\lambda z) = \lambda \Re e(z)$.		
b	Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors, $\Re e(1/z) = -\Re e(z)$.		
c	Soit $z \in \mathbb{C}$. La partie réelle de iz est la partie imaginaire de z.		
d	Soit $x \in \mathbb{R}$. Le conjugué de $\exp(ix)$ est $\exp(-ix)$.		
e	Soit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Le module de $\exp(z)$ est $\exp(\lvert z\rvert)$.		
f	Soit $z \in C$. Le conjugué de l'exponentielle de z est l'exponentielle de $\overline{z}$.		
g	Soit z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$. Alors, $\lvert z_1 - z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert - \lvert z_2\rvert$.		
h	Soit z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$. Alors, $\lvert z_1 - z_2\rvert \leqslant \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$.		
i	Le complexe $-j$ est racine de $X^2 - X + 1$.		
j	Si m ne divise pas n, $U_m \bigcap U_n = \{1\}$.		

Roger Mansuy n'est pas que un auteur de chroniques mathématiques dans La Recherche, n'est pas que l'auteur d'un cahier de vacances entre Sup et Spé, n'est pas que organisateur de Mathématic Park, de « Mathématiques en mouvement », n'est pas que tweeter compulsif en curiosités mathématiques, n'est pas que prof de maths à Saint-Louis et ancien prof d'informatique à Louis-le-Grand... il a aussi été colleur certaines années en MP à Charlemagne... et U_n désigne l'ensemble des racines n^{iemes} de l'unité.*



La construction de l'escargot de Pythagore est visible sur le dessin ci-contre.
Donnez un script **Python** pour en construire les segments avec le module **Turtle**.
Donnez la position du point A_n en coordonnées polaires. Montrez que module et "argument" divergent vers $+\infty$.
Que se passe-t-il si chaque longueur A_nA_{n+1} ne
◁44▷ vaut plus 1 mais $1/(n+1)$?

◁45▷ ♯♡ La liste `L` contient tous les "anagrammes" de `123456789`, c'est à dire les nombres formés de ces neuf chiffres, dans un ordre quelconque, de `123456789` à `987654321` en passant par `354289761`.
On tape le script suivant

```
N, P, T, C, S = 0, 0, 0, 0, 0
for nombre in L :
....N += 1
....P += ((nombre %2)==0)
....T += ((nombre %3)==0)
....C += ((nombre %5)==0)
....S += nombre
....O += ((nombre %11)==0)
print(N, P, T, C, S, O)
```

Que lirez vous ?

♯♠ Écrivez un script qui engendre la liste `L`.

◁46▷ Le nombre d'écriture décimale *abcde* est un multiple de 41 (exemple $A = 43\,542$). Montrez que ses permutations *bcdea* (ici 35 424), *cdeab*, *deabc* et *eabcd* sont aussi des multiples de 41. Indication : $10.A - B$ et $2\,439 \times 41$.

◁47▷ Les A_k d'affixes sont les six sommets d'un hexagone régulier dans le plan complexe (dans l'ordre, de 0 à 5). Calculez $\dfrac{z_4 - z_0}{z_2 - z_0}$, $\dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$, $\dfrac{z_4 - z_0}{z_1 - z_0}$, $\dfrac{z_4 - z_1}{z_0 - z_3}$
Méthode 1 : j'ai mal lu et je crois que c'est l'hexagone de sommets 1, $-j^2$,j et ainsi de suite.
Méthode 2 : je comprends que par une transformation $z \longmapsto \alpha.z + \beta$ je m'y ramène.
Méthode 3 : je calcule module et argument de chacun de ces complexes.

◃48▹

On note $\mathbb{P}$ l'**ensemble des polynômes à coefficients réels dont toutes les racines sont réelles**.

I∼0) Pour quelles valeurs de a le polynôme $X^3 - 6.X^2 + 9.X + a$ est il dans $\mathbb{P}$ *(on pourra étudier les variations de $x \longmapsto x^3 - 6.x^2 + 9.x + 1$).*

I∼1) Montrez que le produit de deux éléments de $\mathbb{P}$ est dans $\mathbb{P}$.

I∼2) Montrez que $X^2 - 3.X + 2$ et $X^2 + 3.X + 2$ sont dans $\mathbb{P}$ mais pas leur somme.

I∼3) Pour quelles valeurs de a le polynôme $X^4 + a.X^2 + (a-1)$ est il dans $\mathbb{P}$? Pour quelles valeurs de a le polynôme $X^4 - a.X^2 + (a-1)$ est il dans $\mathbb{P}$?

Dérivation.

II∼0) Soit P dans $\mathbb{P}$ de racines $(a_k)_{k\leqslant n}$ que l'on suppose distinctes pour l'instant, classées par ordre croissant. Montrez $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{X-a_k}$. En étudiant la fonction rationnelle $x \longmapsto \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ sur chaque intervalle $]a_k,\ a_{k+1}[$ (variations, limites aux bornes), montrez que P' admet une racine et une seule sur $]a_k,\ a_{k+1}[$. Déduisez que P' est aussi dans $\mathbb{P}$.
II∼1) Montrez que le résultat reste valable si l'une des racines de P est une racine double.
II∼2) Déduisez que si P est dans $\mathbb{P}$ alors toutes ses dérivées y sont aussi.

III∼0) Montrez que si $a.X^2 + b.X + c$ est dans $\mathbb{P}$ a lors $3.a.X^2 + 2.b.X + c$ est dans $\mathbb{P}$. Montrez que la réciproque n'est pas valable.

Renversement.

IV∼0) Montrez que si $X^3 - S.X^2 + D.X - P$ est dans $\mathbb{P}$ alors $1 - S.X + D.X^2 - P.X^3$ est aussi dans $\mathbb{P}$ (traiter à part le cas $P = 0$).

IV∼1) Montrez que si P est un polynôme de $\mathbb{P}$, de degré d, alors $X^d.P\Big(\dfrac{1}{X}\Big)$ est aussi un polynôme, et qu'il est dans $\mathbb{P}$.

Log-concavité

IV∼2) Une suite réelle (n'ayant éventuellement qu'un nombre fini de termes) est dite **unimodulaire** si $\exists j \in \mathbb{N},\ \forall k,\ (k < j \Rightarrow a_k \leqslant a_{k+1})$ *et* $(k \geqslant j \Rightarrow a_k \geqslant a_{k+1})$.
Montrez : toute suite unimodulaire est majorée.
IV∼3) Une suite réelle (a_k) (n'ayant éventuellement qu'un nombre fini de termes) est dite **log-concave** si $\forall k > 0,\ (a_k)^2 \geqslant a_{k-1}.a_{k+1}$.
Un élève propose le script suivant pour tester si une suite numérique a (de type `list of float`) est log-concave. Corrigez ses erreurs.

```
def log_concave(a) : #list of float -> boolean
....for k in range(n) :
........if a[k]**2 < a[k-1]*a[k+1] :
............return False
........else :
............return True
```

IV∼4) Pour quelles valeurs de α les suites géométriques de raison α sont elles log-concaves.

IV∼5) Montrez (pour n fixé) que la suite $(\dbinom{n}{k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ est unimodulaire (simplifiez $\dbinom{n}{k+1} - \dbinom{n}{k}$) et log-concave.

IV∼6) Une suite réelle $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ (n'ayant qu'un nombre fini $n+1$ de termes) est dite **ultra log-concave** si $\Bigg(\dfrac{a_k}{\dbinom{n}{k}}\Bigg)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est log-concave. Montrez que toute suite (finie) ultra-log-concave est log-concave.
IV∼7) Montrez que si la suite $(a_k)_{k\leqslant n}$ est ultra-log-concave, alors la suite $(k.a_k)_{k\leqslant n}$ l'est aussi.
IV∼8) Montrez que si $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant 5}$ est strictement positive et log-concave alors elle est unimodulaire.

Ultra-log-concavité et Viète

V∼0) On considère trois réels a, b et c. On prend les notations habituelles $S = a+b+c$, $D = a.b+a.c+b.c$ et $P = a.b.c$. Donnez le signe de $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ et déduisez $S^2 \geqslant 3.D$ puis $D^2 \geqslant 3.S.P$ (pensez aux inverses des racines).
V∼1) Montrez que si $a_0+a_1.X+a_2.X^2+a_3.X^3$ est dans $\mathbb{P}$ alors la suite $[a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3)$ est ultra log-concave.

VI∼0) On prend cette fois quatre réels a, b, c et d. On introduit encore les notations $S = a+b+c+d$, $D = a.b+a.c+a.d+b.c+b.d+c.d$, $T = b.c.d+a.c.d+a.b.d+a.b.c$ et $P = a.b.c.d$. Montrez : $3.S^2 \geqslant 8.D$. Montrez : $4.D^2 \geqslant 9.S.T$.

VI∼1) Montrez que si $\sum\limits_{k=0}^{4} a_k.X^k$est dans $\mathbb{P}$ alors la suite $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$ est ultra log-concave.

Ultra-log-concavité et $\mathbb{P}$

VII∼0) Soit $P = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j.X^j$ dans $\mathbb{P}$ de degré n et k un entier vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

On pose : $Q_1(X) = P^{(k-1)}(X)$, $Q_2(X) = X^{n-k+1}.Q_1\left(\dfrac{1}{X}\right)$ et $Q(X) = (Q_2)^{(n-k-1)}(X)$.
Montrez que ce sont tous des polynômes. Montrez qu'ils sont tous dans $\mathbb{P}$.
Montrez que $Q(X)$ est de degré inférieur ou égal à 2 et donnez ses coefficients en fonction des a_i.

VII∼1) Exemple. On prend $n = 5$ et $P = a_0+a_1.X+a_2.X^2+a_3.X^3+a_4.X^4+a_5.X^5$.
Calculez $Q_1(X)$, $Q_2(X)$ et $Q(X)$ dans le cas $k = 3$. Déduisez $(a_3)^2 \geqslant 2.a_2.a_4$. Montrez que la suite $(a_k)_{k\leqslant 5}$ est ultra-log-concave.

VII∼2) On revient au cas général. Déduisez que la suite $(a_k)_{k\leqslant n}$ est ultra-log-concave.

Exemple

VIII∼0) On définit la suite $(T_n(X))$ par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$ et $T_{n+1}(X) = 2.X.T_n(X) - T_{n-1}(X)$. Calculez $T_n(X)$ pour n de 0 à 5 et montrez qu'ils sont tous dans $\mathbb{P}$.
VIII∼1) Montrez que chaque $T_n(X)$ est un polynôme à coefficients réels de degré n.
VIII∼2) Montrez pour tout n et tout θ : $\cos((n+1).\theta)) + \cos((n-1).\theta) = 2.\cos(\theta).\cos(n.\theta)$. Déduisez $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$.
VIII∼3) Montrez que les réels $\cos\left(\dfrac{2.k+1}{2.n}.\pi\right)$ sont tous racines de T_n (k dans $\mathbb{Z}$). Déduisez que chaque $T_n(X)$ est dans $\mathbb{P}$.
VIII∼4) Montrez : $T_n(T_p(X)) = T_p(T_n(X)) = T_{n.p}(X)$ pour tout couple $(n,\ p)$.

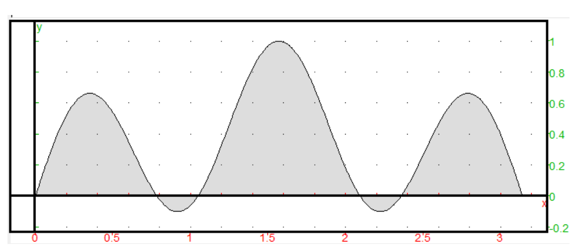
◁ 49 ▷ Ma calculatrice a trouvé $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} \simeq 0,638$ et aussi $\dfrac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}} \simeq 0,638$. Est ce le fruit du hasard si ils ont l'air égaux ? Prouvez moi que non.
Indication : on pourra poser $x = \sqrt[3]{2}$ pour simplifier les calculs.
On pourra aussi multiplier par $\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}+1)^3}$, si si !

◁ 50 ▷ Transformez le produit $\cos(2.t).\sin(3.t)$ en somme de sinus et/ou de cosinus.
Déduisez $\int_0^{\pi} \cos(2.t).\sin(3.t).dt = \dfrac{6}{5}$.

Montrez pur tout x de $]0,\ \pi[$:

$$\cos(x).\cos(2.x).\cos(3.x) = \frac{\sin(4.x).\cos(3.x)}{4.\sin(x)}$$

Déduisez $\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right).\cos\left(\dfrac{2.\pi}{7}\right).\cos\left(\dfrac{3.\pi}{7}\right) = \dfrac{1}{8}$.



◁ 51 ▷ Montrez que l'une des racines du polynôme $X^3+(1-20.i).X^2-(137+15.i).X-50+310.i$ est imaginaire pur (en la trouvant).
Posez la division euclidienne. Trouvez les deux autres racines et montrez que les trois racines forment un triangle isocèle rectangle.