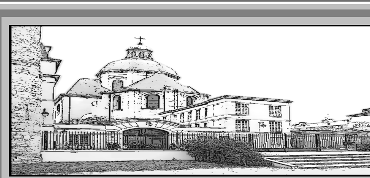
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 14 octobre
M.P.S.I.2



2024 2025

TD05

◁0▷ Sachant qu'une des racines cubiques de $46.i-9$ a pour partie réelle 3, retrouvez les trois racines cubiques.

Merci pour l'indice. On résout donc $(3+i.y)^3=-9+46.i$.
On obtient $27-9.y^2=-9$ et $27.y-y^3=46$.
La première équation donne $y=2$ ou $y=-2$.
La seconde ne valide que 2.
La racine cubique cherchée est donc $3+2.i$ (on vérifie).
Et les deux autres sont $(3+2.i).j$ et $(3+2.i).j^2$.

Si on y tient : $\dfrac{-3-2.\sqrt{3}+i.(-2+3.\sqrt{3})}{2}$ *et* $\dfrac{-3+2.\sqrt{3}+i.(-2-3.\sqrt{3})}{2}$.

◁1▷ x, y et z sont trois réels strictement positifs. On doit montrer $x+y+z\leqslant 2.\Big(\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{x+z}+\dfrac{z^2}{x+y}\Big)$.
Il parait que c'est une inégalité de Cauchy-Schwarz avec des $\sqrt{y+z}$ et autres $\sqrt{x+z}$ dans un des vecteurs. Alors ?

On nous donne trois réels. On rappelle : $(a.\alpha+b.\beta+c.\gamma)^2\leqslant(a^2+b^2+c^2).(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$.

Géométriquement, c'est le produit scalaire des deux vecteurs $(a,\ b,\ c)$ *et* $(b,\ c,\ a)$ *plus petit que le produit des normes.*

Ce n'est pas moi qui le dis, c'est Cauchy et Schwarz.
Mais ce qui est étrange c'est que notre premier membre ne contient pas de carré. Et on a des carrés incomplets dans le second.
Si on prenait $a=\dfrac{x}{\sqrt{y+z}}$ on aurait bien $a^2=\dfrac{x^2}{y+z}$(rappelons que tout le monde est positif).
Et l'énoncé nous pousse à prendre $\alpha=\sqrt{y+z}$. On a alors $\alpha^2=y+z$ dont on ne sait pas quoi faire, mais ça va venir.

Ensuite, $a.\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{y+z}}.\sqrt{y+z}=x$. C'est bon signe. Je signe :

$a=\dfrac{x}{\sqrt{y+z}}$	$b=\dfrac{y}{\sqrt{x+y}}$	$\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x+y}}$
$\alpha=\sqrt{y+z}$	$\beta=\sqrt{x+z}$	$\gamma=\sqrt{x+y}$

L'inégalité nous donne $(x+y+z)^2\leqslant\Big(\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{x+z}+\dfrac{z^2}{x+y}\Big).\Big((y+z)+(x+z)+(x+y)\Big)$

On simplifie : $(x+y+z)^2\leqslant\Big(\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{x+z}+\dfrac{z^2}{x+y}\Big).2.(x+y+z)$.
Il ne reste qu'à simplifier par $x+y+z$ strictement positif.

◁2▷ Le point $M(x,y,z)$ est dans le plan d'équation $2.x+3.y-z=5$. Montrez avec l'aide de Cauchy et Schwarz que la distance $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ du point M à l'origine $O(0,0,0)$ vaut au moins $\dfrac{5}{\sqrt{14}}$.

Le point M vérifie $2.x+3.y-z=5$.
On veut estimer $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Et on nous dit qu'on peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Mais appliquée à qui ?
On prend $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$. Le produit scalaire vaut $2.x+3.y-z$ ce qui fait 5. Et le produit des normes vaut $\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{14}$.

L'inégalité nous dit alors

$$5 = 2.x + 3.y - z \leqslant \sqrt{x^2+y^2+z^2}.\sqrt{14}$$

En faisant passer le $\sqrt{14}$ de l'autre côté, on a la minoration demandée, et on a même le cas d'égalité : $\overrightarrow{OM}$ colinéaire à $\overrightarrow{n}$.

◃3▹ Dans cet établissement, il y a trois cent cinquante élèves et quatre classes : trois classes de 50 élèves et une classe de 100 élèves.
Calculez le nombre moyent d'élèves par classe du point de vue de l'administration.
Interrogez les élèves un par un et demandez à chacun : « combien d'élèves y a-t-il dans ta classe ? », puis faites la moyenne des résultats obtenus.
Pourquoi ne trouvez pas $\dfrac{50+50+50+100}{4}$ comme tout à l'heure.

Existerait il une solution où la moyenne du point devue de l'administration soit égale à la moyenne obtenue par sondage auprès des élèves ?

Existerait il une solution où la moyenne du point devue de l'administration soit strictement supérieure à la moyenne obtenue par sondage auprès des élèves ?

Quel rapport avec l'exercice $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leqslant \dfrac{(a_1)^2+(a_2)^2+\ldots+(a_n)^2}{a_1+a_2+\ldots a_n}$ et avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?

Point de vue de l'adminstration : quatre calsses de volume respectif 50, 50, 50 et 100

$$moyenne = \frac{50+50+50+100}{4} = \frac{250}{4} = \frac{125}{2} = 62,5$$

Point de vue des élèves : deuxcent cinquante réponses ainsi réparties :

réponse	on est cinquante	on est cent
effectif	150	100

$$moyenne = \frac{50\times 150 + 100\times 100}{250} = 70$$

Ce n'est pas la même moyenne. Mais ce n'est pas la même définition.
Nombre moyen d'élève dans chaque classe.
Nombre moyen de camarades de classe d'un élève.

Si il n'y a qu'une classe faite de 250 élèves, les deux moyennes vont coïncider.
Ou si on a cinq classes de 50 élèves.
Mais sinon, les moyennes ne seront pas les mêmes.

Pour sentir venir la réponse, on prend la situation extrême : une classe de un élève et une classe de $N-1$ élèves.
On calcule la moyenne admnistrative :

$$\frac{1+(N-1)}{2} = \frac{N}{2}$$

puis la moyenne élèves :

$$\frac{1.1+(N-1).(N-1)}{N} = \frac{N^2-2.N+2}{N}$$

On a $\dfrac{N}{2} \leqslant \dfrac{N^2-2.N+2}{N}$.
On pouvait même aller encore plus loin avec une classe de N élèves et une classe vide.
L'adminstration dit $\dfrac{N}{2}$ élkèves par classe, et les élèves disent N élèves par classe.

On va supposer qu'on a n classes d'effectifs a_1 à a_n.
La moyenne administrative est

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

On pose ensuite la questions aux élèves

réponse	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
nombre de réponses	a_1	a_2	$\ldots$	a_n

et on calcule la moyenne de camarades de classe

$$\frac{(a_1)^2+(a_2)^2+\ldots+(a_n)^2}{a_1+a_2+\ldots a_n}$$

On va comparer et montrer que la première est toujours plus petite que la seconde

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leqslant \frac{(a_1)^2+(a_2)^2+\ldots+(a_n)^2}{a_1+a_2+\ldots a_n}$$

C'est un cas particulier de l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 \leqslant \big((a_1)^2+(a_2)^2+\ldots+(a_n)^2\big).(1^2+1^2+\ldots+1^2)$$

entre les deux vecteurs $(1,\ 1,\ \ldots 1)$ et $(a_1, a_2, \ldots a_n)$.

Et le résultat est même valable avec des classes à effectif négatif !

◁4▷ A est un entier à trois chiffres et B est son renversé exemple : le renversé de 453 est 354. On sait :

A est divisible par 13	B est divisible par 31
A est divisible par 39	B est divisible par 93
A est divisible par 21	B est divisible par 12

Trouvez A (et B) *(expliquez)*.

On veut que A soit divisible par 13, 39 et 21. Ceci revient à dire que A est divisible par 13.3.7 *(le plus petit commun multiple)*. On veut un multiple de 273 à trois chiffres 273, 546 et 819.

Quant à B il est divisible par 31.12. pas le choix : 372 ou 744. Finalement $\boxed{A = 273}$

273 est divisible par 13	quotient 21	372 est divisible par 31	quotient 12
273 est divisible par 39	quotient 7	372 est divisible par 93	quotient 4
273 est divisible par 21	quotient 13	372 est divisible par 12	quotient 31

◁5▷ Montrez : $\forall x \in [-1,\ 1]$, $\cos(Arcsin(x)) = |\cos(Arcsin(x))| = \sqrt{1-x^2}$.
En dérivant l'infotmation $\forall x \in]-1,\ 1[$, $\sin(Arcsin(x)) = x$, montrez : $Arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Justifiez de même $\forall x$, $Arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Dérivez $x \longmapsto Arcsin\left(\dfrac{2.x}{1+x^2}\right)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Expliquez.

Pour x donné entre -1 et 1, on doit montrer deux égalités : $cos(Arcsin(x)) = |\cos(Arcsin(x))| = \sqrt{1-x^2}$
La première dit juste : « $\cos(Arcsin(x))$ » est positif. Et c'est le cas, car $Arcsin(x)$ est entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, et sur cette zone, le cosinus est positif.

Dans la seconde, on reconnaît $\cos^2+\sin^2 = 1$ et évidemment $\sin(Arcsin(x)) = x$.

On repart justement de $\sin(Arcsin(x)) = x$ et on dérive (puisque c'est une égalité valable pour tout x). On trouve

$$\cos(Arcsin(x)).Arcsin'(x) = 1$$

(à droite, c'est la dérivée de l'identité). Il ne reste qu'à diviser et remplacer $\cos(Arcsin(x))$ par ce qu'on a trouvé.

On fait évidemment de même ave $\tan(Arctan(x)) = x$ qui donne cette fois $(1+\tan^2)(Arctan(x)).Arctan'(x) = 1$ et enfin $Arctan' = x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sans problème de domaine d'ailleurs.

On dérive déjà $x \longmapsto \dfrac{2.x}{1+x^2}$ (notée f) comme un quotient : $x \longmapsto \dfrac{2.(1+x^2)-2.x.(2.x)}{(1+x^2)^2}$.
On compose avec $Arcsin$?

x	$\longmapsto$	$\dfrac{2.x}{1+x^2}$	$\longmapsto$	$Arcsin\Big(\dfrac{2.x}{1+x^2}\Big)$
	f		$Arcsin$	
	$\dfrac{2-2.x^2}{(1+x^2)^2}$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-(\dots)^2}}$	

On obtient

$$\frac{2-2.x^2}{(1+x^2)^2}.\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2.x}{1+x^2}\right)^2}}$$

On simplifie

$$\frac{2.(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.\frac{1}{\sqrt{\dfrac{(1+x^2)^2-4.x^2}{(1+x^2)^2}}}$$

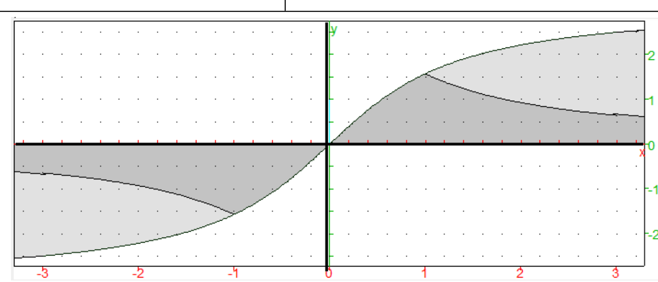
puis

$$\frac{2.(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.\frac{(1+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2-4.x^2}}$$

(sans valeur absolue pour le dé-dénominateur ; il est positif).
Il reste $\dfrac{2.(1-x^2)}{(1+x^2).\sqrt{(1-x^2)^2}}$.
On va simplifier $1-x^2$ en haut et en bas.
Il reste $\dfrac{2}{1+x^2}$!
En fait, non. Il y a une valeur absolue en bas : $\sqrt{1-2.x^2+x^4} = |1-x^2|$.

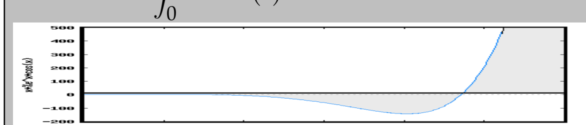
	$x<-1$	$-1<x<1$	$1<x$
dérivée	$-\dfrac{2}{1+x^2}$	$\dfrac{2}{1+x^2}$	$-\dfrac{2}{1+x^2}$

Notre fonction serait donc $2.Arctan(x)$ au signe près et aux constantes près !
Sur ce graphe, reconnaissez notre fonction (qui reste entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ comme tout arcsinus) et $2.Arctan$ (qui peut monter plus haut).



La clef de l'exercice : $\sin(2.\theta) = \frac{2.x}{1+x^2}$ *si on a pose* $x = \tan(\theta)$.

♡ Montrez $\displaystyle\int_0^{2.\pi} \cos(t).t.e^t.dt = \pi.e^{2.\pi}$.



Vous pourrez intégrer par parties, quitte à finir par retomber sur la même fonction au bout d'un moment.
Ou alors, vous pourrez essayer une primitive de la forme $t \longmapsto ((a.t+b).\sin(t)+(c.t+d).\cos(t)).e^t$.
Vous pourrez aussi mettre sous la forme $t.e^{(1+i).t}$ *et intégrer par parties.*

◁ 6 ▷

On note J l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2.\pi} \cos(t).t.e^t.dt$ et on intègre par parties, sachant qu'il n'existe pas de formule géniale pour $\displaystyle\int u.v.w'$.

$\cos(t)$	$\hookleftarrow$	$\sin(t)$
$t.e^t$	$\hookrightarrow$	$e^t + t.e^t$

: $J = \Big[t.\sin(t).e^t\Big]_0^{2.\pi} - \int_0^{2.\pi} e^t.\sin(t).dt - \int_0^{2.\pi} t.e^t.\sin(t).dt.$

Le terme crochet est nul.

On note K le terme $\int_0^{2.\pi} e^t.\sin(t).dt$ qu'on sait pouvoir calculer assez rapidement.

On intègre par parties la dernière intégrale :

$\sin(t)$	$\hookleftarrow$	$-\cos(t)$
$t.e^t$	$\hookrightarrow$	$e^t + t.e^t$

$J = -K - \Big[\cos(t).t.e^t\Big]_0^{2.\pi} - \int_0^{2.\pi} t.e^t.\cos(t).dt$ (comptez bien les signes moins).

On fait passer de l'autre côté et on a exprimé $2.J$ à l'aide d'intégrales qui doivent subir le même sort.

Bref, calculable.

La méthode a priori sera ici la plus efficace.

On se dit qu'une primitive va rester dans le monde des exponentielles, des polynômes et des lignes trigonométriques.

On tente sa chance avec une chose comme $t \longmapsto ((a.t+b).\sin(t) + (c.t+d).\cos(t)).e^t$.

Il suffit de la dériver et de demander les bonnes conditions aux coefficients pour que ça marche.

fonction	$(a.t+b).\sin(t).e^t$	$(c.t+d).\cos(t).e^t$
dérivée	$(a).\sin(t).e^t$	$(c).\cos(t).e^t$
	$(a.t+b).\cos(t).e^t$	$-(c.t+d).\sin(t).e^t$
	$(a.t+b).\sin(t).e^t$	$(c.t+d).\cos(t).e^t$
total	$((a-c).t+b+a-d).\sin(t).e^t$	$((c+a).t+d+c+b).\cos(t).e^t$

Pour que tout marche bien, on va poser quatre conditions : $\begin{array}{ccccc} a & & -c & & = 0 \\ a & +b & & -d & = 0 \\ a & & +c & & = 1 \\ & b & +c & +d & = 0 \end{array}$.

On résout et on trouve $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$ et $d = 0$.

> *Mais attention, on est matheux. On réfléchit au sens des implications et on fout à la poubelle les réflexes de Terminable. Ceux qui vous valaient des points non pas parce que vous raisonniez, mais parce que vous pensiez qu'il y avait des mots à écrire toujours pour avoir l'air d'un matheux et pour faire plaisir au prof.*
> *Disons le tout de suite, l'élève qui rédige ici dans le sens des implications*
> *« on identifie »,* $\begin{array}{ccccc} a & & -c & & = 0 \\ a & +b & & -d & = 0 \\ a & & +c & & = 1 \\ & b & +c & +d & = 0 \end{array} \Rightarrow a = c = \frac{1}{2} = -b$
> *a perdu.*
> *Le seul sens utile est* $(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, , \frac{1}{2}, , 0\right) \Rightarrow systeme \Rightarrow fonction.$
> *Bref, c'est du « on se démerde pour que ça marche, et on propose et vérifie ».*
> *Ce que 'on ne vous a jamais appris à faire en maths.*
> *Alors que c'est ce que vous faites dans la vie.*
> *Comme si des crétins avaient figé les maths et les avaient désolidarisées du raisonnement logique pour en faire un cercueil devant lequel on s'agenouille bêtement.*

On reprend donc le seul sens intelligent une fois les calculs faits au brouillon :

fonction	$\frac{t-1}{2}.\sin(t).e^t$	$\frac{t}{2}.\cos(t).e^t$
dérivée	$\frac{1}{2}.\sin(t).e^t$	$\frac{1}{2}.\cos(t).e^t$
	$\frac{t-1}{2}.\cos(t).e^t$	$-\frac{t}{2}.\sin(t).e^t$
	$\frac{t-1}{2}.\sin(t).e^t$	$\frac{t-1}{2}.\cos(t).e^t$
total	0	$t.\cos(t).e^t$

Il ne reste plus qu'à calculer en 0 et en π.

> *L'effort est moins visible dans la rédaction « on propose/on vérifie » que dans la double intégration par parties.*
> *Mais l'intelligence est apparente.*

Sinon, on peut aussi passer par les complexes.
$\int_0^{2.\pi} \cos(t).t.e^t.dt$ est la partie réelle de $\int_0^{2.\pi} e^{i.t}.t.e^t.dt$.

On va donc calculer $\int_0^{2.\pi} t.e^{(1+i).t}.dt$ par parties

$e^{(1+i).t}$	$\hookleftarrow$	$\frac{e^{(1+i).t}}{(1+i)}$
t	$\hookrightarrow$	1

puis directement.

$$\int_0^{2.\pi} t.e^{(1+i).t}.dt = \left[\frac{e^{(1+i).t}.t}{1+i}\right]_0^{2.\pi} - \frac{1}{1+i}.\int_0^{2.\pi} e^{(1+i).t}.dt = \left[\frac{e^{(1+i).t}.t}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^2}.e^{(1+i).t}\right]_0^{2.\pi}$$

On a la change d'avoir $\frac{1}{(1+i)^2} = -\frac{i}{2}$, et ensuite, on utilise la quantité conjuguée.
Le reste n'est que calcul.

◁7▷ Calculez $\int_0^1 \sin(Arctan(x)).dx$ (parties ?).

L'intégrale $\int_0^1 \sin(Arctan(x)).dx$ existe, tout est continu sous le signe somme, par composition. Ensuite, une formule du cours dit :

$$\sin(Arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

D'où vient elle ? De $\tan(Arctan(x)) = x$, $1+\tan^2(Arctan(x)) = 1+x^2$,

$$\cos^2(Arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(Arctan(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Il ne reste plus qu'à dire que $\cos(Arctan(x))$ est bien positif ($Arctan(x)$ est entre $-\pi/2$ et $\pi/2$), et à multiplier : $\sin = \tan.\cos$.
Mais alors, on calcule juste $\int_0^1 \frac{x.dx}{\sqrt{1+x^2}}$ dans laquelle on identifie une forme en $u'.u^\alpha$. On a un terme crochet assez simple : $\left[\sqrt{1+x^2}\right]_{x=0}^{x=1}$ ou $\left[(1+x^2)^{1/2}\right]_{x=0}^{x=1}$ si on préfère. La valeur cherchée est donc $\boxed{\sqrt{2}-1}$

◁8▷ Prouvez pour tout x de $\mathbb{R}$: $-1 \leqslant \frac{2.x}{1+x^2} \leqslant 1$.

L'élève qui n'a rien compris part de $-1 \leqslant \frac{2.x}{1+x^2} \leqslant 1$ et essaye d'arriver à quelquechose. Ce qui ne prouve strictement rien, ou en tout cas ne prouve pas que $-1 \leqslant \frac{2.x}{1+x^2} \leqslant 1$ est vrai.

L'élève qui a appris son cours dit qu'il va calculer $1-\dfrac{2.x}{1+x^2}$ puis $\dfrac{2.x}{1+x^2}+1$.
Il trouve après des calculs évidents $\dfrac{(1-x)^2}{1+x^2}$ et $\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$.
Dans $\mathbb{R}$ ces quantités sont positives, c'est bien ce qu'on voulait.

Si il pense avoir compris les maths, il écrit alors $\begin{array}{lcl} \dfrac{(1-x)^2}{1+x^2}\geqslant 0 & \Rightarrow & \dfrac{2.x}{1+x^2}\leqslant 1 \\ \dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}\geqslant 0 & \Rightarrow & -1\leqslant \dfrac{2.x}{1+x^2} \end{array}$.

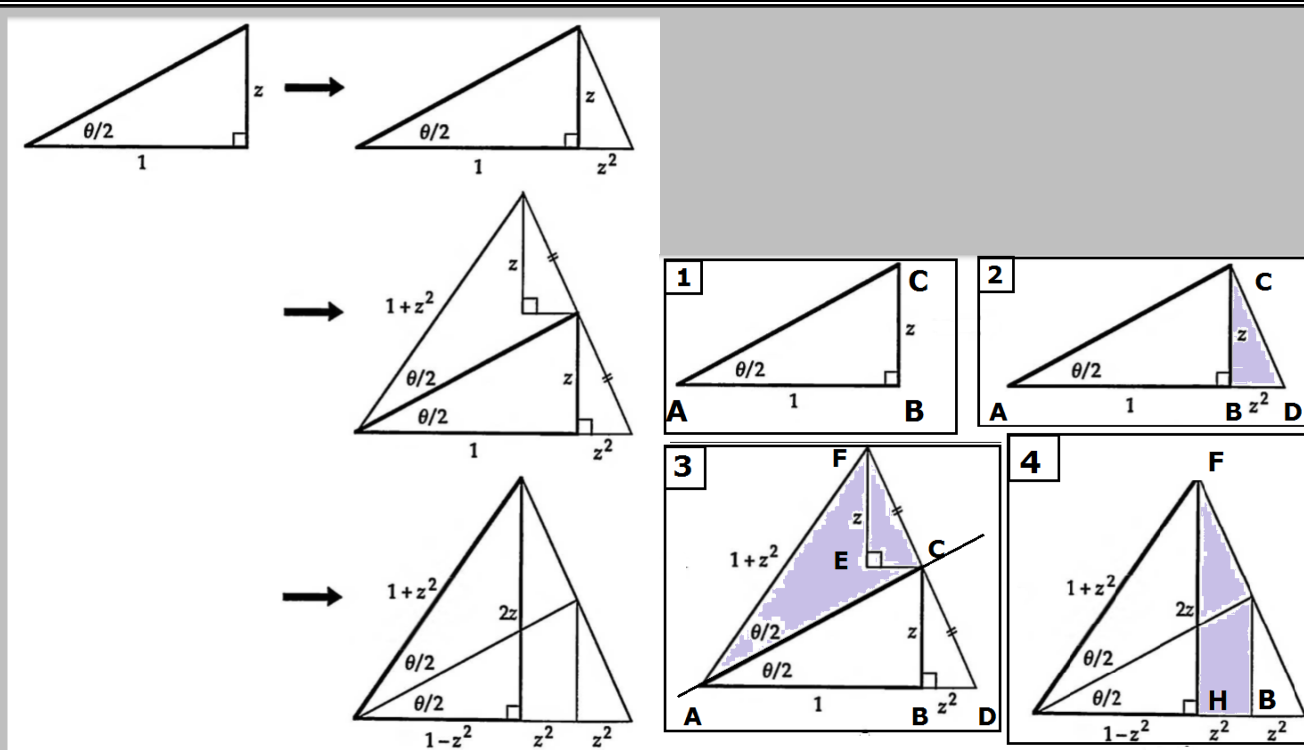
Si il a comprids les maths, il écrit $\dfrac{(1-x)^2}{1+x^2}\geqslant 0$ donc $\dfrac{2.x}{1+x^2}\leqslant 1$.

Enfin, l'élève encore plus efficace montre juste

$$1-\Big(\frac{2.x}{1+x^2}\Big)^2=\frac{(1+x^2)^2-4.x^2}{(1+x^2)^2}=\ldots=\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}\geqslant 0$$

Il déduit $\Big(\dfrac{2.x}{1+x^2}\Big)^2\leqslant 1$ et interprête que $\dfrac{2.x}{1+x^2}$ est entre -1 et 1.

Et celui qui connaît son cours dit que c'est un sinus et il a fini.



◁9▷

Quelles formules du cours prouve-t-on avec ces dessins ?

Ah, il y a quand même donc aussi une preuve purement géométrique des formules en arc moitié !

◃10▹ Un exercice d'oral de Polytechnique était posé sous la forme suivante :

soient $(z_0, \dots z_{n-1})$ n complexes non nuls,
alors il existe une partie P de `range(n)` vérifiant $\Big|\sum\limits_{p\in P} z_p\Big| \geqslant \frac{1}{\pi}.\sum\limits_{k=0}^{n-1}|z_k|$

l'exercice était posé tel quel avec une indication que l'on donnera plus loin sur un exemple et pour le traitement général. Mais on commencera ici par quelques cas particuliers.

♠0♠ Pour $(1,\ i, -1, -i)$, vérifiez : $|1+i| \geqslant \frac{1}{\pi}.(|1|+|i|+|-1|+|-i|)$.

♠1♠ Pour $(1, -j^2,\ j, -1,\ j^2, -j)$, vérifiez : $|j-1+j^2| \geqslant \frac{1}{\pi}.(|1|+|-j^2|+|j|+|-1|+|j^2|+|-j|)$.

♠2♠ n est un entier naturel non donné, on pose $z_k = e^{i.k.\pi/n}$ pour k dans $range(2.n)$.
Justifiez : $\Big|\sum\limits_{k=0}^{n-1} z_k\Big| \geqslant \frac{1}{\pi}.\sum\limits_{k=0}^{2.n-1}|z_k|$.

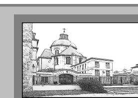
♠3♠ a et b sont deux réels, vérifiant $a < 0 < b$. Prouvez : $|a| \geqslant \frac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$ ou $|b| \geqslant \frac{1}{\pi}.(|a|+|b|)$.

♠4♠ Les z_k sont n réels classés par ordre croissant.
Montrez qu'il existe un entier p vérifiant $\Big|\sum\limits_{k=0}^{p-1} z_k\Big| \geqslant \frac{1}{\pi}.\sum\limits_{k=0}^{n-1}|z_k|$ ou $\Big|\sum\limits_{k=p}^{n-1} z_k\Big| \geqslant \frac{1}{\pi}.\sum\limits_{k=0}^{n-1}|z_k|$.

♠0♠ On prend cette fois à titre d'exemple $z_0 = 2$, $z_1 = 1+i$, $z_2 = i$, $z_3 = -2+3.i$, $z_4 = -5$ et $z_5 = -3-4.i$.
Pour tout α entre $-\pi$ et π, on note A_α l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |Arg(z.e^{-i.\alpha})| \leqslant \pi/2\}$. Justifiez que A_α est un demi plan.
Pour tout α, on note $f(\alpha)$ la norme de la somme des z_k qui sont dans A_α. Représentez graphiquement l'application f sur $[-\pi,\ \pi]$, et calculez l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha).d\alpha$[1].

Le cas général repose aussi sur le demi-plan qui tourne. On calcule la valeur moyenne de l'application f, avec des inégalités dans $\mathbb{C}$ et un peu de trigonométrie. Comme cette valeur moyenne dépasse alors la valeur $\sum\limits_{k=0}^{n-1}|z_k|$, c'est que f dépasse cette valeur au moins en un point. On ne le détaillera pas ici.

TD05 Cas particuliers de l'inégalité dans $\mathbb{C}$.



On commence par quatre complexes de module 1 : $(1,\ i, -1, -i)$. La somme du membre de droite

$$\frac{1}{\pi}.(|1|+|i|+|-1|+|-i|)$$

vaut $\frac{4}{\pi}$. On ne garde que deux des quatre complexes : 1 et i , on effectue la somme : $1+i$, on en prend le module : $\sqrt{2}$ (calcul direct).
On se dont donc juste de vérifier $\sqrt{2} \geqslant \frac{4}{\pi}$, c'est à dire $\sqrt{2}.\pi \geqslant 4$. On le joue à la physicienne en comparant les carrés car tout est positif : $2.\pi^2 \simeq 2.10$ et $4^2 = 16$. C'est rapide.

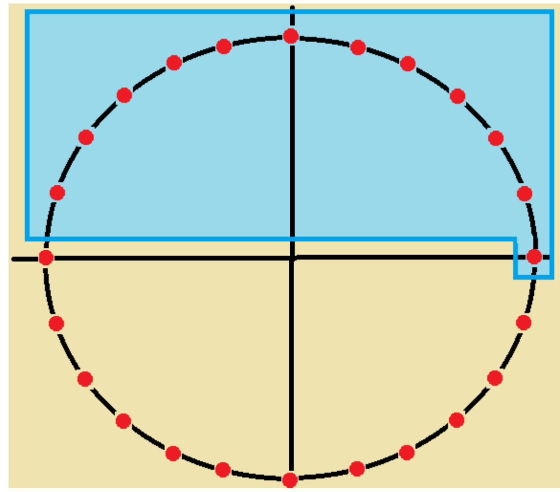
Pour $(1, -j^2,\ j, -1,\ j^2, -j)$ *(sommets de l'hexagone régulier)*, le membre de droite se calcule

$$\frac{1}{\pi}.(|1|+|-j^2|+|j|+|-1|+|j^2|+|-j|+|-i|) = \frac{6}{\pi}$$

(un peu moins que 2).
Des six complexes, on n'en garde que trois : -1, j et j^2. On calcule leur somme : $-1+j+j^2 = -1-1$ car $1+j+j^2 = 0$. On passe au module : $|j-1+j^2| = 2 \geqslant \frac{6}{\pi}$.

---

1. on rappelle que l'intégrale d'une fonction est une aire, et ne se calcule pas forcément par des $[F(x)]_{x=a}^{b}$ avec des exigences du type "f doit être dérivable" à cause d'un cours de Terminale dans lequel on confond à tout bout de champ "nécessaire" et "suffisant"



On prend cette fois $2.n$ nombres notés z_k. Dans $e^{i.k.\pi/n}$ on reconnait une racine d'ordre $2.n$ de l'unité. Nos $2.n$ points sont répartis régulièrement sur le cercle unité. La somme du membre de droite $\frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{2.n-1}|z_k|$vaut $\frac{2.n}{\pi}$ puisqu'ils sont tous de module 1.
Avec $\sum_{k=0}^{n-1} z_k$, on ne garde visiblement que les n premiers. La somme $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i.k.\pi/n}$ est alors simplement une série géométrique de premier terme 1 ($k=0$), de raison $e^{i.\pi/n}$ et de terme à venir $e^{i.n.\pi/n}$ ($k=n$). Cette somme se simplifie :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i.k.\pi/n} = \frac{1-e^{i.\pi}}{1-e^{i.\pi/n}} = \frac{1-(-1)}{1-e^{i.\pi/n}}$$

On doit en prendre le module. Il y a des façons plus ou moins rusées de le faire.

• La pire : virer le dénominateur par quantité conjuguée *(même si c'est souvent un bon réflexe)*, et s'empêtrer dans des cosinus et sinus partout.

• La méthode du bon élève de Terminale : le module de l'inverse est l'inverse du module. On va donc juste calculer le module de $1-e^{i.\pi/n}$. Celui ci vaut $\sqrt{(1-\cos(\pi/n))^2+\sin^2(\pi/n)}$. On développe, on simplifie et on arrive à $\sqrt{2}.\sqrt{1-\cos(\pi/n)}$. On a donc

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{i.k.\pi/n}\right| = \left|\frac{2}{1-e^{i.\pi/n}}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}.\sqrt{1-\cos(\pi/n)}}$$

et on est déjà content.
Si on va plus loin : $1-\cos(\theta) = 2.\sin^2(\theta/2)$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{i.k.\pi/n}\right| = \left|\frac{2}{1-e^{i.\pi/n}}\right| = \frac{2}{2.\left|\sin\left(\frac{\pi}{2.n}\right)\right|}$$

• *Mais en fait, il y avait plus rusé* (et classique à connaitre) *:*
$|1-e^{i.\theta}| = |e^{i.\theta/2}.(e^{-i.\theta/2}-e^{i.\theta/2})| = |e^{i.\theta/2}|\times|e^{-i.\theta/2}-e^{i.\theta/2}| = 1.2.\sin(\theta/2)$ *puisque* $\sin(\theta/2) = \frac{e^{i.\theta/2}-e^{-i.\theta/2}}{2.i}$ *! On en reparlera en cours avec le "noyau de Dirichlet".*

Bref, on est arrivé à $\left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{i.k.\pi/n}\right| = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2.n}\right)}$ et $\frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{2.n-1}|z_k| = \frac{2.n}{\pi}$. Ce serait idiot de ne pas voir un air de famille !

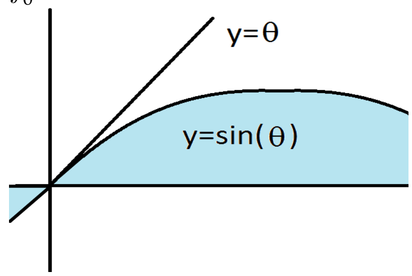
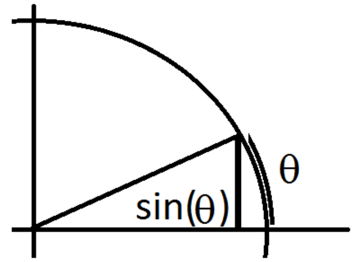
On doit prouver $\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2.n}\right)} \geqslant \frac{2.n}{\pi}$, ce qui se ramène à $\sin\left(\frac{\pi}{2.n}\right) \leqslant \frac{\pi}{2.n}$ car tout est positif.

Le physicien dira que pour n petit, on a $\sin(\theta)\simeq\theta$. *mais le mathématicien ne s'en contentera jamais. D'autant qu'un symbole* $\simeq$ *ne devient un* $\leqslant$ *que par tricherie doublée de nécessité de "je veux conclure" du mauvais élève qui est prêt à tout pour aboutir à ce qu'on lui demande.*

On doit montrer $\boxed{\sin(\theta)\leqslant\theta \text{ pour } \theta \text{ entre } 0 \text{ et } \pi/2}$

C'est du classique qu'on obtient de multiples façons.

<table>
<tr>
<td>Variation de fonction :

l'application $\theta \longmapsto \theta - \sin(\theta)$ a une dérivée positive *(*$1 - \cos$ *avec* $\cos$ *entre* -1 *et* 1*)*, elle est donc croissante. Et comme elle est nulle en 0, elle est positive après 0.</td>
<td>Intégrale :
$\sin(\theta) = \int_0^\theta \cos(\alpha).d\alpha \leqslant \int_0^\theta 1.d\alpha = \theta.$

</td>
<td>Géométrie :
le sinus est un trait vertical, l'angle est la mesure d'un arc de cercle "un peu plus long".

</td>
</tr>
</table>

Toute preuve à la physicienne avec un développement limité ou autre sera une arnaque.

Si on met tout bout à bout, on a bien $\Big|\sum_{k=0}^{n-1} e^{i.k.\pi/n}\Big| = \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2.n}\right)} \geqslant= \dfrac{2.n}{\pi} = \dfrac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{2.n-1} |z_k|$.

Une question où il suffit/faut d'être méthodique. Et qui prend plusieurs arguments les uns après les autres.

---

a est un réel négatif et b un réel positif. On doit prouver $|a| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a| + |b|)$ ou $|b| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a| + |b|)$.

On peut traiter différents cas suivant qui de a et b est le plus grand en valeur absolue.
Mais le mieux est de faire des maths, en raisonnant par l'absurde, avec les et et les ou.

Si on n'avait pas "$|a| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a| + |b|)$ ou $|b| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a| + |b|)$", on aurait "$|a| < \dfrac{1}{\pi}.(|a| + |b|)$ et $|b| < \dfrac{1}{\pi}.(|a| + |b|)$".
En additionnant les deux, on aurait alors $|a| + |b| \leqslant \dfrac{1}{\pi}(|a| + |b|)$. En simplifiant car la somme $|a| + |b|$ est non nulle, on aurait $\pi < 1$, ce qui est faux. Fin du raisonnement par l'absurde, qui ne dit évidemment pas qui de $|a| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a| + |b|)$ ou $|b| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a| + |b|)$ est vraie *(il est d'ailleurs possible que les deux le soient...)*.

On notera qu'on a prouvé ici notre résultat dans le cas où on a deux complexes particuliers du plan : un réel négatif et un réel positif, appelés ici a et b au lieu de z_0 et z_1. Quoi qu'il en soit, en les appelant z_0 et z_1 au lieu de a et b, on a prouvé qu'une des deux sommes $|z_0|$ ou $|z_1|$ dépasse $\dfrac{1}{\pi}.(|z_0| + |z_1|)$. On va généraliser à plusieurs termes.
Il est bon quand on traite un problème de comprendre un peu où on va et de ne pas se contenter de croire qu'on traite une série d'exercices comme dans un sujet du bac.

Les z_k sont n réels classés par ordre croissant. Il y a donc un moment où on bascule du négatif au positif. On note p cet indice *(le plus petit indice k tel que z_k soit un élément de $\mathbb{R}^+$)* :

$$z_0 \leqslant z_1 \leqslant \ldots \leqslant z_{p-1} < 0 < z_p \leqslant \ldots \leqslant z_{n-1}$$

On va alors poser "tout naturellement" : $a = z_0 + z_1 + \ldots + z_{p-1}$ et $b = z_p + z_{p+1} + \ldots + z_{n-1}$. On a bien $a \leqslant 0 \leqslant b$ *(inégalités larges, car a est peut être nul, si il n'y a aucun réel négatif en début de liste)*.

Par la question précédente, on a donc $|a| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a| + |b|)$ ou $|b| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a| + |b|)$.
Et qui est $|a| + |b|$?
Comme a est négatif, on a $|a| = -z_0 - z_1 - \ldots - z_{p-1}$. Comme chaque z_i de cette formule est négatif, on a $|a| = |z_0| + |z_1| + \ldots + |z_{p-1}|$.
Comme b est négatif, on a $|b| = z_p + z_{p+1} + \ldots + z_{n-1}$. Comme chaque z_j de cette formule est positif, on a $|b| = |z_p| + |z_{p+1}| + \ldots + |z_{n-1}|$.

Le membre de droite $\dfrac{1}{\pi}.(|a| + |b|)$ devient donc $\dfrac{1}{\pi}.(|z_0| + \ldots + |z_p| + \ldots + |z_{n-1}|)$.

L'assertion $|a| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a| + |b|)$ ou $|b| \geqslant \dfrac{1}{\pi}.(|a| + |b|)$ devient donc

$$\Big|\sum_{k=0}^{p-1} z_k\Big| \geqslant \frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$$

ou

$$\Big|\sum_{k=p}^{n-1} z_k\Big| \geqslant \frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{n-1} |z_k|$$

comme attendu.

On a donc répondu à la question $\left|\sum_{i\in P} z_i\right| \geqslant \frac{1}{\pi}.\sum_{k=0}^{n-1}|z_k|$ en prenant comme partie P les premiers indices de la liste ou les derniers *(en séparant en fait les réels z_i selon leur signe)*. On note qu'un facteur $\frac{1}{2}$ ferait l'affaire ici à la place du facteur $\frac{1}{\pi}$.Mais on est sur $\mathbb{R}$ et pas sur $\mathbb{C}$.

TD05 — Exemple avec quelques points dans le plan complexe.

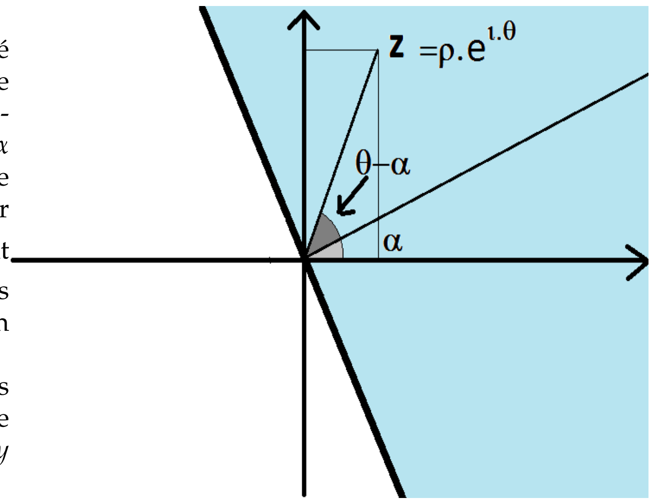
On trace un dessin pour localiser les points de l'énoncé. Et on calcule les normes demandées pour les sommer :

$z_0 = 2$	$z_1 = 1+i$	$z_2 = i$	$z_3 = -2+3.i$	$z_4 = -5$	$z_5 = -3-4.i$
$\lvert z_0\rvert = 2$	$\lvert z_1\rvert = \sqrt{2}$	$\lvert z_2\rvert = 1$	$\lvert z_3\rvert = \sqrt{13}$	$\lvert z_4\rvert = 5$	$\lvert z_0\rvert = 5$

La somme des modules est laide, elle vaut $13+\sqrt{2}+\sqrt{13}$ et ne se simplifie.

Et la somme des complexes vaut $-7+i$, même si ça ne sert à rien.

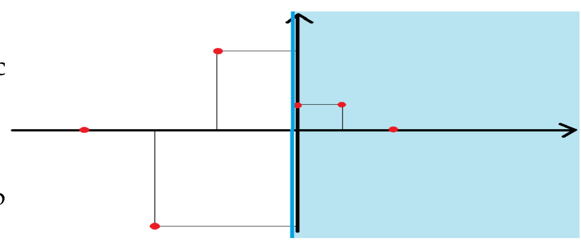
Un ensemble $\{z\in\mathbb{C} \mid |Arg(z.e^{-i.\alpha})| \leqslant \pi/2\}$ est formé de complexes obéissant effectivement à une contrainte d'angle. Écrivons $z=\rho.e^{i.\theta}$ comme souvent. La condition porte sur $Arg(\rho.e\hat{\imath}.(\theta-\alpha)$. Cet argument vaut $\theta-\alpha$ (après réduction si nécessaire). On demande donc que $\theta-\alpha$ soit entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, ce qui revient à bloquer θ entre $\alpha-\frac{\pi}{2}$ et $\alpha+\frac{\pi}{2}$. Les deux valeurs extrêmes sont distantes de π, la limite est faite de deux demi droites alignées, c'est une droite. Et on est dans le demi plan "du côté de α".

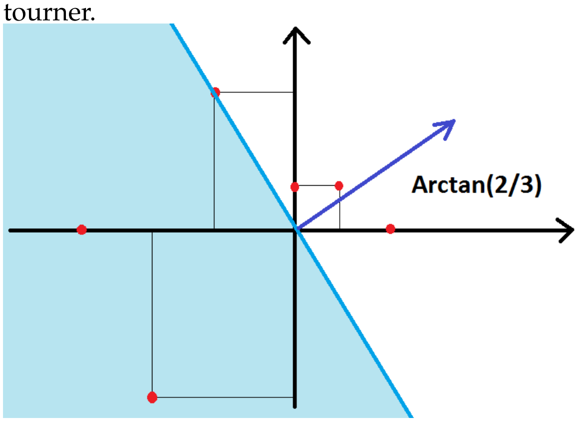


Il fallait encore une fois travailler en polaires. Quels professeurs de Terminale vous ont fait croire que le plan complexe était fait d'éléments de la forme $x+i.y$ et pas d'éléments de la forme $\rho.e^{i.\theta}$?

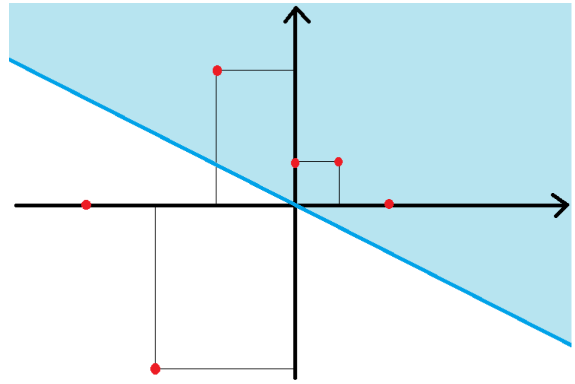
La fonction f va donc compter des sommes comme $|z_1+z_2+z_3|$ si z_1, z_2 et z_3 sont dans le demi plan A_α. On va donc faire une étude à la main *(il ne faut pas espérer des formules toutes prêtes, il faut mettre les mains dans le cambouis, et accepter de travailler avec des définition)*.

Le premier demi plan (pour α nul) est l'Est de la carte, avec les arguments entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.
On prend trois des complexes : $z_0=2$, $z_1=1+i$ et $z_2=i$.
La somme vaut $3+2.i$ et a pour module $\sqrt{13}$: $f(0)=\sqrt{13}$.
On va rester avec cette valeur tant que le plan ne va pas trop tourner.





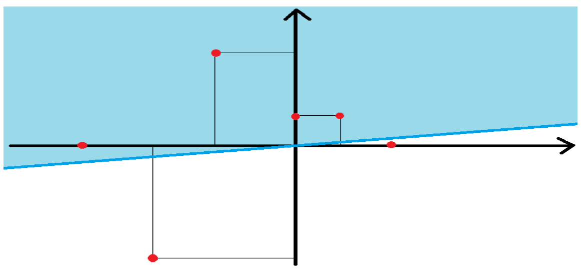
Le premier changement va se faire quand la demi droite va contenir le point z_3.
« A cet instant », le point z_3 s'ajoute à la somme :
$z_0+z_1+z_2+z_3 = 2+(1+i)+i+(-2+3.i) = 1+5.i$.
Le module vaut $\sqrt{26}$.
On déduit donc que de 0 à $Arctan(2/3)$, f vaut $\sqrt{13}$.
En $Arctan(2/3)$, la fonction saute à la valeur $\sqrt{26}$ (elle augmente).
Pourquoi $Arctan(2/3)$? C'est la direction orthogonale à cette droite.



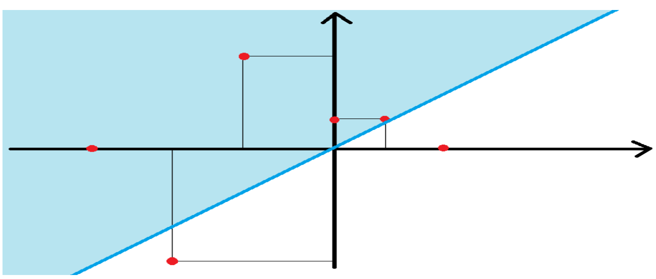
On va pouvoir continuer, jusqu'à ce que le demi plan gagne un nouveau point.
Ou en perde un.

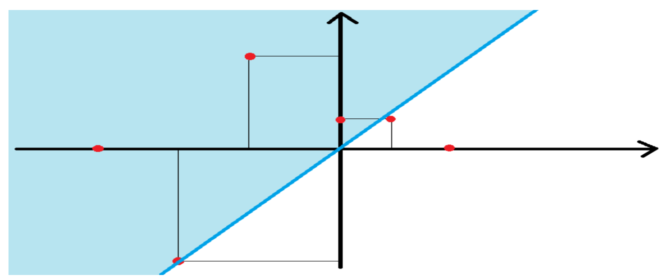
Quand α va atteindre la valeur $\pi/2$, l'axe de découpe sera horizontal. La somme complexe sera faite de z_0, z_1, z_2, z_3 et z_4. Elle vaudra $-4+5.i$. $f(\pi/2)$ vaut alors $\sqrt{41}$.

Mais ça ne dure pas. Dès que α augmente, on perd le point z_0.



Maintenant, la somme vaut
$(1+i)+i+(-2+3.i)-5$, et la fonction vaut $\sqrt{61}$.
Elle reste constante égale à cette valeur. Le prochain changement va se faire quand on va perdre z_1 (égal à $1+i$). On aura alors pour somme complexe $i+(-2+3.i)-5$ puis pour module $\sqrt{65}$.
L'étape suivante sera l'arrivée de z_5 (égal à $-3-4.i$) dans la somme.

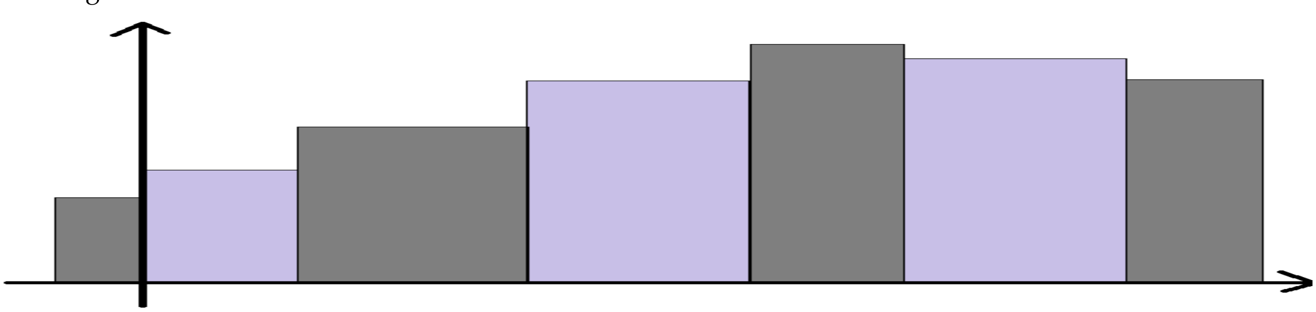




On se dit que pour avoir les valeurs prises par la fonction en escalier, il va falloir dresser un tableau. Comme les z_k sont classés par ordre croissant d'argument, les familles de points dans les demi plans A_α seront faites d'indices consécutifs.

angle α	avant 0	0	$Arctan(2/3)$	$\pi/2$		$3.\pi/4$		après π
z_0	2	2	2	2				
z_1	$1+i$	$1+i$	$1+i$	$1+i$	$1+i$			
z_2		i	i	i	i	i	i	
z_3			$-2+3.i$	$-2+3.i$	$-2+3.i$	$-2+3.i$	$-2+3.i$	$-2+3.i$
z_4				-5	-5	-5	-5	-5
z_5							$-3-4.i$	$-3-4.i$
somme	$3+i$	$3+2.i$	$1+5.i$	$-4+5.i$	$-6+5.i$	$-7+4.i$	-10	$-10-i$
$f(\alpha)$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{41}$	$\sqrt{61}$	$\sqrt{65}$	10	$\sqrt{101}$

C'est long et laborieux.



Pour le calcul de l'intégrale, on additionne des aires de rectangles comme $\sqrt{26}.\left(\frac{\pi}{2}-Arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right)$.

◃11▹ Dans l'ensemble des entiers de 0 à 20 pour l'addition et la multiplication modulo 21, montrez que toute suite arithmétique est périodique.
Déterminez la période de la suite $u_{n+1}=16.u_n+1$ (calculez, c'est tout).

Si la suite est arithmétique de raison r, alors pour tout n, $u_{n+1}=u_n+r$.
Mais de plus, $u_{n+21}=u_n+21.r=u_n$. C'est tout.
Une période est 21, et il y a peut être plus petit.

N'ayant pas de belle idée, on regarde

$$u_1=16.u_0+1$$

puis

$$u_2=16.(16.u_0+1)+1=4.u_0+17$$

et enfin

$$u_2=16.(4.u_0+17)+1=u_0+0$$

La suite est périodique de période 3.

◁ 12 ▷ Qui est le rationnel d'écriture décimale $3,\overline{14159}14159...$?
Donnez l'écriture décimale de $\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9}}}}}$

On le note $a=3,\overline{14159}1415914159....$
On calcule $10^5.a=3\overline{14159},1415914159....$
On soustrait : $10^5.a-a=314159-3$ et tout le reste s'en va.
$a=\dfrac{314\,156}{99\,999}$

Sinon, pour information
$\pi\simeq\dfrac{22}{7}$, $\pi\simeq\dfrac{333}{106}$, $\pi\simeq\dfrac{355}{113}$ et $\pi\simeq\dfrac{103\,993}{33\,102}$

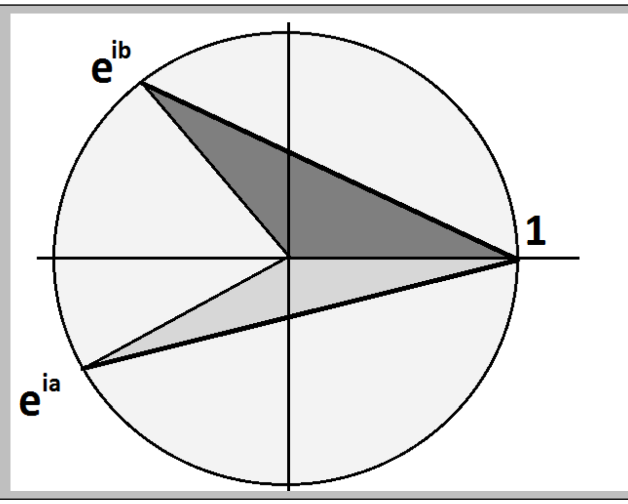
A chaque fois, ce sont des réduites de π, c'est à dire des approximations optimales « à dénominateur imposé/majoré ».
Par exemple, de tous les rationnels de la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $q\leqslant 113$, celui qui est le plus proche de π est $\dfrac{355}{113}$.

$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}$ et $\pi=3+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{\dots}}}}$ et $\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\dots}}}}$

D'ailleurs,

$$\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9}}}}}=\frac{1744}{555}=3.142\overline{31}\overline{423}\dots$$

◁13▷ ♡ a et b sont deux réels de $]0,\ 2.\pi[$. Calculez module et argument de $1-e^{i.a}$. Calculez l'argument de $\dfrac{1-e^{i.b}}{1-e^{i.a}}$. Retrouvez le théorème de l'arc capable *(dit aussi de l'angle au centre)* : si A et B sont deux points d'un cercle Γ de centre O, alors pour tout M de Γ, l'angle $\widehat{AMB}$ est constant *(égal à $\widehat{AMB}/2$)*. Trouvez les points M du plan vérifiant $\widehat{OMI}=\pi/2$ et $\widehat{OMJ}=\pi/4$?



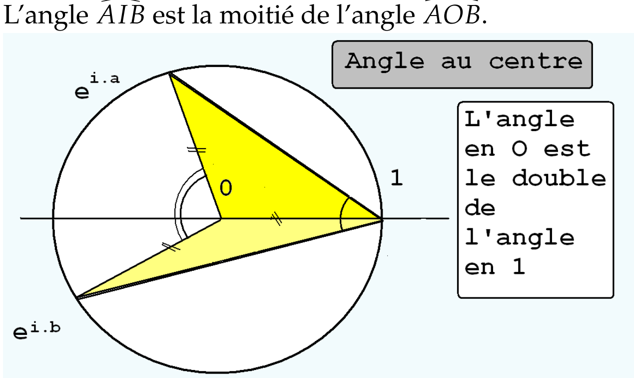
Que du calcul algébrique (bien conduit) dans un premier temps.

$$1-e^{i.a}=e^{\frac{i.a}{2}}.(e^{-\frac{i.a}{2}}-e^{\frac{i.a}{2}})=e^{\frac{i.a}{2}}.(-2.i.\sin(a/2))=e^{\frac{i.a}{2}}.(-i).(2.\sin(a/2))=e^{\frac{i.a}{2}-\frac{i.\pi}{2}}.(2.\sin(a/2))$$

Le réel $(2.\sin(a/2))$ est un réel positif.
Le complexe $e^{i.\frac{a-\pi}{2}}$ est de module 1 et a justement un argument entre $-\pi$ et π. On ne peut demander mieux.
$1-e^{i.a}$ a pour module $2.\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)$ et pour argument $\dfrac{a-\pi}{2}$.

Le quotient $\dfrac{1-e^{i.a}}{1-e^{i.b}}$ a pour module $\dfrac{\sin(a/2)}{\sin(b/2)}$ (quotient des modules)
a pour argument $\dfrac{a-b}{2}$ (différence des arguments, entre $-\pi$ et π justement)

Si A et B sont sur le cercle trigonométrique, on les écrit $e^{i.a}$ et $e^{i.b}$. a et b désignent es angles $\widehat{IOA}$ et $\widehat{IOB}$.
Le quotient $\dfrac{1-e^{i.a}}{1-e^{i.b}}$ a pour module un truc sans intérêt
a pour argument l'angle entre AI (affixe $1-e^{ia}$) et BI (affixe $1-e^{i.b}$).
L'argument de $\dfrac{1-e^{i.a}}{1-e^{i.b}}$ est la moitié de l'argument de $\dfrac{e^{i.a}}{e^{i.b}}$.
L'angle $\widehat{AIB}$ est la moitié de l'angle $\widehat{AOB}$.



Ensuite, il y a plein de choses à raconter sur ce théorème. Par exemple son usage en marine pour se situer sur la mer en relevant juste quelques angles entre vous et des points de référence à l'horizon.
Ou même comment un G.P.S. vous localise (précision grossière si on ne joue pas sur les longueurs d'ondes et déphasages) à l'intersection de trois cercles.

◁14▷ ♡ Simplifiez $\cos\left(Arccos\left(\dfrac{9}{\sqrt{82}}\right)+Arcsin\left(\dfrac{4}{\sqrt{17}}\right)\right)$.

$\alpha = Arccos(9/\sqrt{82})$	$\cos(\alpha) = \dfrac{9}{\sqrt{82}}$	$\cos^2(\alpha) = \dfrac{81}{82}$	$\sin^2(\alpha) = \dfrac{1}{82}$	$\sin(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{82}}$
$\beta = Arcsin(4/\sqrt{17})$	$\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$	$\cos^2(\alpha) = \dfrac{1}{17}$	$\sin^2(\alpha) = \dfrac{16}{17}$	$\sin(\alpha) = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$

La première ligne se lit de gauche à droite, a seconde de droite à gauche.

On justifie par exemple le passage de $\sin^2(\alpha) = \dfrac{1}{82}$ à $\sin(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{82}}$ par le fait que α est entre 0 et π ; son sinus est bien positif, et cen'est pas $\sin(\alpha) = -\dfrac{1}{\sqrt{82}}$.

On utilise la formule $\cos.\cos - \sin.\sin$: $\cos\left(Arccos\left(\dfrac{9}{\sqrt{82}}\right) + Arcsin\left(\dfrac{4}{\sqrt{17}}\right)\right) = \dfrac{5}{\sqrt{82.17}}$ et c'est moche.

◁15▷ **Dérivez $x \longmapsto Arctan\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)$ et simplifiez le au maximum.**

On décompose la composée, et on calcule les dérivées, aux points convenables :

fonction	exp		homographie		$Arctan$	
x	$\longrightarrow$	e^x	$\longrightarrow$	$\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$	$\longrightarrow$	$Arctan\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)$
	exp en x		$\dfrac{2}{(.+1)^2}$ en e^x		$\dfrac{1}{1+.^2}$ en $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$	
	e^x		$\dfrac{2}{(e^x+1)^2}$		$\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2}$	

On trouve donc $e^x.\dfrac{2}{(e^x+1)^2}.\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2} = \dfrac{2.e^x}{(e^x+1)+(e^x-1)^2} = \dfrac{2.e^x}{2+2e^{2.x}}$ et on encadre sous forme de fonction $\boxed{x \longmapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2.x}}}$

◁16▷ **Résolvez $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}} = 2$ d'inconnue réelle x.**

On commence par dire $\sqrt{x} = x^{1/2}$ puis $\sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt{x^{1/2}} = x^{1/4}$ et enfin $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = x^{1/8}$.

On passe au quotient pour x non nul (et positif) : $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}} = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{8}}} = x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{8}} = x^{\frac{5}{24}}$.

On résout $x^{\frac{5}{24}} = 2$ et on trouve $\boxed{x = 2^{24/5}}$

◁17▷ **Démontrez : $Arctan(2) + 2.Arctan(3) + Arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) + Arctan\left(\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{5.\pi}{4}$.**

On nomme α, β, γ et δ les quatre angles de $Arctan(2) + 2.Arctan(3) + Arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) + Arctan\left(\dfrac{1}{8}\right)$.

Ils sont entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ et caractérisés par leurs tangentes. En utilisant $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}$ on complète :

$\tan(\alpha) = 2$	$\tan(\beta) = 3$	$\tan(\gamma) = \dfrac{1}{5}$	$\tan(\gamma) = \dfrac{1}{8}$
$\tan(\alpha) = 2$	$\tan(2.\beta) = \dfrac{3+3}{1-3.3} = -\dfrac{3}{4}$	$\tan(\gamma+\delta) = \dfrac{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{5}.\frac{1}{8}} = \dfrac{13}{39} = \dfrac{1}{3}$	
$\tan(\alpha+2.\beta) = \dfrac{1}{2}$		$\tan(\gamma+\delta) = \dfrac{1}{3}$	
$\tan(\alpha+2.\beta+\gamma+\delta) = 1$			

Ceci caractérise presque $\alpha+2.\beta+\gamma+\delta$: $\alpha+2.\beta+\gamma+\delta = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$.

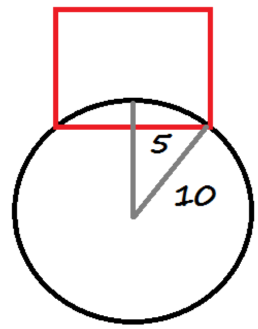
Dans quel intervalle se trouve $\alpha+2.\beta+\gamma+\delta$?

Chacun des angles est positif, et plus petit que $\frac{\pi}{2}$. On est donc dans $\left[0, \frac{5.\pi}{2}\right[$. Trop large. dans cet intervalle, il y a $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5.\pi}{4}$ et $\frac{9.\pi}{4}$ qui ont la bonne tangente. Il faut encadrer plus finement. On va donc comparer à $\frac{\pi}{4}$ (c'est à dire à $Arctan(1)$) :

$\frac{\pi}{4} \leqslant Arctan(2) < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4} \leqslant Arctan(3) < \frac{\pi}{2}$	$0 \leqslant Arctan\left(\frac{1}{5}\right) \leqslant \frac{\pi}{4}$	$0 \leqslant Arctan\left(\frac{1}{8}\right) \leqslant \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha + 2.\beta + \gamma + \delta \leqslant \frac{3.\pi}{2}$

Cette fois, on n'a plus le choix : notre angle vaut $\pi + \frac{\pi}{4}$.

◁18▷ ♡ Sucri peut être assimilé à une sphère de rayon 10 centimètres. Je lui ai acheté un chapeau rond (cylindrique, mais j'ai du mal à imaginer la chanson « ils ont des chapeaux cylindriques, vive la Bretagne... ») de diamètre 10 centimètres. Quelle hauteur du crane de Sucri disparaitra sous le chapeau ?



On fait une coupe (ouille).
On a un triangle rectangle d'hypoténuse 10, de petit côté 5.
Son grand côté vaut $5.\sqrt{3}$ (Pythagore).
La hauteur qui reste sous le chapeau vaut $10 - 5.\sqrt{3}$.
Application numérique : $1,34$ centièmtre à 10^{-2} près.

◁19▷ ♣ Ali et Ben sont jumeaux *(indiscernables, c'est le cas de mes deux boulangers Place des Fêtes)*. L'un ment tout le temps. L'autre est toujours sincère.
Lequel ment ? On ne sait pas... Alors, il faut leur poser des questions. En face de vous, un des deux frères. Lequel ? Ali, Ben ? Le menteur, le sincère ?

a – Quelle sera sa réponse à la question "***Es tu menteur ?***"
b – Vous lui demandez "***Es tu Ali ?***". Que déduisez vous si il répond "***Oui***" ?
c – Vous lui demandez "***Ali ment il ?***". Que déduisez vous si il répond "***Oui***" ?
d – Quelle question pouvez vous poser pour qu'il vous réponde assurément "***Oui***".
e – Que pensez vous de la question "***Ton frère s'appelle-t-il Ali ?***".
f – Que pensez vous s'il vous dit "***Mon frère dit qu'il s'appelle Ben***".

a - Menteur ou sincère, nul ne dira « je suis menteur ». Il dira toujours « non »

b - On ne saura pas si c'est Ali. On saura juste que Ali est sincère. mais celui en face de nous peut être Ali le sincère ou Ben le menteur.

c - Celui qui est en face de nous est Ben (menteur ou sincère).

d - Demandez lui si il est sincère.

e - Ton frère s'appelle Ali ?

	Ali	Ben	interlocutteur
sincère	Non	Oui	
menteur	Oui	Non	
statut			

On ne sait pas qui est en face de nous, ni si il ment. Mais on sait suivant sa réponse qui est le menteur et qui est le sincère.

f - Mon frère dit s'appeler Ben. Le frère énonce une phrase. Puis votre interlocuteur la retransmet. Comme un et un seul ment, la phrase est fausse. le frère ne s'appelle pas Ben. C'est donc que le frèere est Ali. Et votre interlocuteur Ben. Mais qui ment ? Qui est sincère ?

◃20▹ Vrai ou faux :

a	$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(2.\theta) \in \mathbb{Q}$
b	$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos(\theta/2) \in \mathbb{Q}$
c	$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sin(\theta) \in \mathbb{Z}$
d	$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sin(\theta) \in \mathbb{Q}$
e	$(\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(\theta) \in \mathbb{Q}) \Rightarrow (\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin(\theta) \in \mathbb{Q})$
f	$\forall \theta \in]-\pi/2, \pi/2[,\ \tan(\theta) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \tan(n.\theta) \in \mathbb{Q}$

a vrai, utiliser $\cos(2.\theta) = 2.\cos^2(\theta) - 1$ et les stabilités de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

b faux : donner un contre-exemple tel que $\pi/2$.

c vrai : passer par $(\cos(\theta) \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (\cos(\theta) \in \{-1, 0, 1\}) \Rightarrow (|\sin(\theta)| \in \{0,\ 1\})$.

d faux : contre-exemple avec $\pi/3$.

e vrai : du type Faux implique ce qu'on veut.

f vrai : on se donne θ, on suppose que $\tan(\theta)$ est rationnelle, et on montre par récurrence sur n que chaque $\tan(n.\theta)$ l'est aussi, en utilisant $\tan((n+1).\theta) = \dfrac{\tan(\theta) + \tan(n.\theta)}{1 - \tan(\theta).\tan(n.\theta)}$.
Mais il reste un problème d'existence. Si on part de $\tan(\theta) = 1$ (rationnel), on arrive à $\tan(2.\theta)$ n'existe même pas...

◃21▹ ♡ Sachant $\tan(\theta) = 1/2$, calculez $\tan(2.\theta)$, $\tan(4.\theta)$, $\tan(8.\theta)$, $\tan(16.\theta)$ et enfin $\tan(20.\theta)$.
♣ En combien d'étapes pensez vous accéder à $\tan(2021.\theta)$?

En utilisant la formule $\tan(2.x) = \dfrac{2.\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$ autant de fois qu'il faut, on trouve

$\tan(\theta)$	$\tan(2.\theta)$	$\tan(4.\theta)$	$\tan(8.\theta)$	$\tan(16.\theta)$	$\tan(20.\theta)$
$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{4}{3}$	$\dfrac{-24}{7}$	$\dfrac{336}{527}$	$\dfrac{354144}{164833}$	$\dfrac{-1476984}{9653287}$

Pour $\tan(20.\theta)$ on passe par $\tan(4.\theta + 16.\theta)$.

Pour $\tan(2021.\theta)$, on peut monter pas à pas avec $\tan((n+1).\theta) = \dfrac{\frac{1}{2} + \tan(n.\theta)}{1 - \frac{\tan(n.\theta)}{2}}$

$\tan(\theta)$	$\tan(2.\theta)$	$\tan(3.\theta)$	$\tan(4.\theta)$	$\tan(5.\theta)$	$\dots$	$\tan(2020.\theta)$	$\tan(2021.\theta)$

C'est long.

En utilisant $\tan(2^{n+1}.\theta) = \dfrac{2.\tan(2^n.\theta)}{1 - \tan^2(2^n.\theta)}$, on trouve les valeurs de

$\tan(\theta)$	$\tan(2.\theta)$	$\tan(4.\theta)$	$\tan(8.\theta)$	$\tan(16.\theta)$	$\dots$	$\tan(512.\theta)$	$\tan(1024.\theta)$

Il suffit ensuite d'applier la formule $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a).\tan(b)}$ pour obtenir

avec	$\tan(36.\theta)$	et	$\tan(\theta)$	on a	$\tan(37.\theta)$
avec	$\tan(64.\theta)$	et	$\tan(37.\theta)$	on a	$\tan(101.\theta)$
avec	$\tan(128.\theta)$	et	$\tan(101.\theta)$	on a	$\tan(229.\theta)$
avec	$\tan(256.\theta)$	et	$\tan(229.\theta)$	on a	$\tan(485.\theta)$
avec	$\tan(512.\theta)$	et	$\tan(485.\theta)$	on a	$\tan(997.\theta)$
avec	$\tan(1024.\theta)$	et	$\tan(997.\theta)$	on a	$\tan(2021.\theta)$

Aurez vous un chemin plus rapide ?

◃22▹ ♡ Exprimez $\tan(7.\theta)$ comme polynôme en $\tan(\theta)$ *(indication développer $(\cos + i.\sin)^7$, identifier, diviser, et simplifier haut et bas pour avoir des tangentes)*.
Déduisez la factorisation de $X^3 - 21.X^2 + 35.X - 7$.

On développe : $e^{7.i.\theta} = (e^{i.\theta})^7 = (c + i.s)^7 = c^7 + 7.c^6.i.s - 21.c^5.s^2 - 35.c^4.i.s^3 + 35.c^3.s^4 + 21.c^2.i.s^5 - 7.c.s^6 - i.s^7$.
On identifie partie réelle et partie imaginaire :

$\Re e$	$\cos(7.\theta)$	$=$	$\cos^7(\theta)$		$-21.\cos^5(\theta).\sin^2(\theta)$		$+35.\cos^3(\theta).\sin^4(\theta)$		$-7.\cos(\theta).\mathrm{si}$
$\Im m$	$\sin(7.\theta)$	$=$		$7.\cos^6(\theta).\sin(\theta)$		$-35.\cos^4(\theta).\sin^3(\theta)$		$+21.\cos^2(\theta).\sin^5(\theta)$	

On effectue le quotient : $\tan(7.\theta) = \dfrac{7.c^6.s - 35.c^4.s^3 + 21.c^2.s^5 - s^7}{c^7 - 21.c^5.s^2 + 35.c^3.s^4 - 7.c.s^6}$ avec toujours notre notation.
On divise haut et bas par c^7 :

$$\tan(7.\theta) = \frac{\dfrac{7.c^6.s - 35.c^4.s^3 + 21.c^2.s^5 - s^7}{c^7}}{1 - 21.\dfrac{s^2}{c^2} + 35.\dfrac{s^4}{c^4} - 7.\dfrac{s^6}{c^6}} = \frac{7.T - 35.T^3 + 21.T^5 - T^7}{1 - 21.T^2 + 35.T^4 - 7.T^6}$$

avec $T = \tan(\theta)$.

On y parvient aussi en itérant l'idée de $\tan(2.\theta) = \dfrac{2.T}{1-T^2}$ puis $\tan(3.\theta) = \dfrac{\dfrac{2.T}{1-T^2} + T}{1 - \dfrac{2.T}{1-T^2}.T}$ et ainsi de suite.

Pour l'équation $x^7 - 21.x^5 + 35.x^3 - 7.x = 0$, on se pose finalement la question « pour quelles valeurs de $\tan(\theta)$ est ce que $\tan(7.\theta)$ soit nul !

Pour l'équation $x^6 - 21.x^4 + 35.x^2 - 7 = 0$, on se pose finalement la question « pour quelles valeurs non nulles de $\tan(\theta)$ est ce que $\tan(7.\theta)$ n'existe pas !

Pour l'équation $x^3 - 21.x^2 + 35.x - 7 = 0$, on se pose finalement la question « pour quelles valeurs non nulles de $(\tan(\theta))^2$ est ce que $\tan(7.\theta)$ n'existe pas !

On a nos trois racines : $\tan^2\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$, $\tan^2\left(\dfrac{2.\pi}{7}\right)$ et $\tan^2\left(\dfrac{4.\pi}{7}\right)$, il n'y a plus qu'à factoriser

$$X^3 - 21.X^2 + 35.X - 7 = \left(X - \tan^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\right).\left(X - \tan^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\right).\left(X - \tan^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$$

◃23▹ Pour quels complexes le réel $\Re e(\Delta) + |\Delta|$ est il nul ?
Il parait que l'une des racines carrées du complexe Δ est $\dfrac{\Delta + |\Delta|}{\sqrt{2.(\Re e(\Delta) + |\Delta|)}}$. Ne me faites pas confiance, prouvez le.

$\Re e(\Delta) + |\Delta|$ est nul si et seulement si Δ est un réel négatif.

Ensuite, on élève au carré le membre de droite. Est il égal à Δ ?

◃24▹ ♡ On sait $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$, $a + b + c = 1$ et $a^2 + b^2 + c^2 = \alpha$ avec α réel.
Pour quelles valeurs de α les trois nombres a, b et c sont ils réels ?

On crée le polynôme $X^3 - S.X^2 + D.X - P$.
On nous livre : $S = 1$, $\dfrac{D}{P} = 1$ et enfin $S^2 - 2.D = \alpha$.
Le polynôme devient $X^3 - X + D.X - D$ avec $D = \dfrac{1-\alpha}{2}$.
On a une racine évidente : 1 : $X^3 - X + D.X - D = (X-1).(X^2 + D)$.
On a une racine réelle, et ensuite tout dépend de D.
On aura trois racines réelles si et seulement si D est négatif. Condition : $\alpha \geqslant 1$.

◃25▹ **Rappel des règles :** une maison de n cases contient les nombres de 1 à n, deux nombres égaux ne peuvent pas être côte à côte sur la grille, même en diagonale.

Exemple :

2	1	3	1
5	4	2	4
3	1	5	1
2	4	2	3
1	3	1	5

à vous :

4			2
	5		
			?
2			3
		5	

-

						3		2
				5				
	4				4			
			3				1	
1		5		4				2

Au choix :

4	3	1	2
2	5	4	3
4	1	2	1
2	3	4	3
5	1	5	1

-

						3		2
		3		5				
	4				4			
2	3		3		1		1	
1	4	5	1	4				2

◃26▹ Vrai ou faux : $(1=0) \Rightarrow \Big((i^2+1=0) \Rightarrow (1<0)\Big)$ puis $\Big((1=0) \Rightarrow (i^2+1=0)\Big) \Rightarrow (1<0)$.

$Faux \Rightarrow (qu'importe)$: c'est vrai.

$(Faux \Rightarrow Vrai)$ est vrai. Et $Vrai \Rightarrow Faux$ est faux.

Finalement, l'implication n'est pas associative.

◃27▹ ♡ Simplifiez cette petite somme $5.Arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2.Arctan\left(\frac{3}{79}\right)$.

Voici un angle pas très grand (c'est vague mais ça va servir), dont on peuyt calculer la tangente.
On pose $\alpha = Arctan(1/7)$ et $\beta = Arctan - 3/79)$.

On calcule $\tan(2.\alpha) = \dfrac{2.\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}.\frac{1}{7}} = \dfrac{2.7}{48} = \dfrac{7}{24}$.

On poursuit : $\tan(4.\alpha) = \dfrac{2.\frac{7}{24}}{1-\frac{7}{24}.\frac{7}{24}} = \dfrac{336}{527}$.

Et même $\tan(5.\alpha) = \dfrac{2879}{3353}$.

De même : $\tan(2.\gamma) = \dfrac{237}{3116}$.

Et c'est magique : $\tan(5.\alpha + 2.\gamma) = 1$.

Plus rapide peut-être : $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{2}{11}$.

$$\tan(\alpha+\beta+\alpha) = \frac{1}{3}$$
$$\tan(2.(2.\alpha+\beta)) = \frac{3}{4}$$
$$\tan(\alpha + 2.(2.\alpha+\beta)) = 1$$

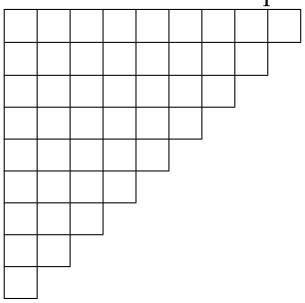
La tangente de notre angle ne dit pas tout. Encore faut il qu'il soit dans le bon intervalle.
Mais on a $\alpha \leqslant Arctan(1/\sqrt{3})$ et $\beta \leqslant Arctan(1/\sqrt{3})$.
Ceci permet d'avoir α et β entre 0 et $\dfrac{\pi}{6}$.
La somme $4.\alpha + 2.\beta$ est entre 0 et $\dfrac{7.\pi}{6}$.
Et sur cet intervalle, seul $\dfrac{\pi}{4}$ a pour tangente 1.

$\boxed{5.Arctan\left(\frac{1}{7}\right)+2.Arctan\left(\frac{3}{79}\right)=\frac{\pi}{4}}$ encore une fois.

◁ 28 ▷

Justifiez que le mot « mot » a 3! anagrammes.
Justifiez que le mot « mélange » a 6! anagrammes si on distingue le *e* et le *é*, et la moitié sinon.
Justifiez que le mot anagramme a $\frac{9!}{3!.2!}$ anagrammes.

Le mot a neuf lettres. Si elles étaient toutes distinctes, il aurait 9! anagrammes. En effet, il faut choisir la première lettre du mot parmi neuf. Une fois ce choix fait, il reste 8 choix pour la seconde, et ainsi de suite



Mais il y a des lettres identiques

a	a	a	m	m	n	g	r	e

Plaçons les trois *a* dans 9 emplacements	$\binom{9}{3}=\frac{9!}{3!.6!}$	a	-	-	a	-	a	-	-	-
Plaçons ensuite les deux *m* sur deux des six cases qui restent	$\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!.4!}$	a	-	m	a	-	a	-	m	-
Plaçons le *n* parmi les quatre cases qui restent	4	a	-	m	a	-	a	-	m	n
Plaçons le *g* parmi les trois cases qui restent	3	a	-	m	a	g	a	-	m	n
Il reste deux cases pour le *r*	2	a	-	m	a	g	a	r	m	n
Et le *e* est forcé	1	a	e	m	a	g	a	r	m	n

On effectue le produit des possibilités :

$$\frac{9!}{3!.6!}.\frac{6!}{2!.4!}.4!=\frac{9!}{3!.2!}$$

On peut aussi partir des 9! anagrammes de

a_1	n	a_2	g	r	a_3	m_1	m_2	e

Les neuf lettres étant marquées distinctes, il y en a bien 9!.
Mais ensuite, si on permute m_1 et m_2 on trouve finalement le même anagramme.
Il y en a donc deux fois moins.
Et si on permute a_1, a_2 et a_3 (et il y a six façons de le faire), on obtient le même anagramme.
Finalement, il faut diviser 9! par 2!.3!.

◁ 29 ▷

`Retrouvez les stations de métro (et R.E.R.) dont voici les anagrammes` *(Nord)* :
Mon slip / *Le pédé phallocrate* / Valeur risible : lit pour profane / *Ta roue gauche* / Bachoter sa brochure / *Leur vocabulaire universel* / Nuit à inviter des seins.
Armé est triste / Bachoter sa brochure / Ce condor / Huitre de couloir / Les gaz du traitre / Mon étranger passa / Il est machin / Pas tuer / L'allergique et compétent / Sa chapelière / Pousser le marabout / Aussi pur amour de la voyelle.

Simplon. Porte de la Chapelle. Château Rouge. Barbès-Rochechouard. La Courneuve-Aubervilliers. Saint-Denis Université.

Arts et métiers. Concorde. Richelieu-Drouot. Gare d'Austerlitz. Saint-Michel. Pasteur. La Motte-Picquet-Grenelle. Père Lachaise. Réaumur Sébastopol. Palais Royal-Musée du Louvre.

◁ 30 ▷

◁ 31 ▷

♡ Existe-t-il une homographie *(application de la forme $x \longmapsto \frac{a.x+b}{c.x+d}$)* dont les deux points fixes soient 2 et 3 ?
Et si on ajoute valant 4 en 1 ?
Et si on ajoute plutôt « tend vers 5 en $+\infty$" ?
Et si on ajoute pltôt « tendant vers $+\infty$ en 5 ?

La condition est juste $\frac{2.a+b}{2.c+d} = 2$ et $\frac{3.a+b}{3.c+d} = 3$.
Ce système d'inconnues a, b, c et d a des solutions.
Par exemple $x \longmapsto \frac{5.x-6}{x+0}$.

Dans la suite de l'exercice, on ajoute des conditions.

On définit : $h = x \longmapsto \frac{(2+\sqrt{2}).x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}.x+2+\sqrt{2}}$. Déterminez $h \circ h$, $h \circ h \circ h \circ h$ et $h \circ h \circ h \circ h \circ h \circ h \circ h \circ h$ (multipliez des matrices, S.V.P.).

◁ 32 ▷

Montrez : $Arctan(k+1) - Arctan(k) = Arctan\Big(\frac{1}{1+k+k^2}\Big)$.
Calculez alors $\sum_{k=1}^{n} Arctan\Big(\frac{1}{1+k+k^2}\Big)$.

On calcule

$$\tan\big(Arctan(k+1) - Arctan(k)\big) = \frac{k+1-k}{1+k.(k+1)} = \frac{1}{1+k+k^2}$$

Les deux angles $Arctan(k+1) - Arctan(k)$ et $Arctan\Big(\frac{1}{1+k+k^2}\Big)$ ont la même tangente.

Et ils sont entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.
Ils sont donc égaux.

Ensuite, la somme $\sum_{k=1}^{n} Arctan\Big(\frac{1}{1+k+k^2}\Big)$ s'écrit $\sum_{k=1}^{n} Arctan(k+1) - Arctan(k)$.
Elle télescope et il reste $Arctan(n+1) - Arctan(1)$.

Proprement

$$\sum_{k=1}^{n}(Arctan(k+1) - Arctan(k)) = \sum_{k=1}^{n} Arctan(k+1) - \sum_{k=1}^{n} Arctan(k)$$

puis

$$\sum_{k=1}^{n}(Arctan(k+1) - Arctan(k)) = \sum_{p=1}^{n+1} Arctan(p) - \sum_{k=1}^{n} Arctan(k)$$

et même

$$\sum_{k=1}^{n}(Arctan(k+1) - Arctan(k)) = Arctan(n+1) + \sum_{k=2}^{n} Arctan(k) - \sum_{k=2}^{n} Arctan(k) - Arctan(1)$$

◁ 33 ▷

Calculez $\int_1^2 \frac{\ln(\ln(x))}{x}.dx$ et $\int_1^2 \frac{\ln(\ln(x)).\ln(x)}{x}.dx$.

Facile *(une fois qu'on a compris)*.
On change de variable dans la première : $u = \ln(x)$

$$\int_1^2 \ln(\ln(x)).\frac{dx}{x} = \int_0^{\ln(2)} \ln(u).du$$

On a une primitive classique en $u \longmapsto u.\ln(u) - u$.

$$\int_1^2 \frac{\ln(\ln(x))}{x}.dx = \big(\ln(\ln(2)) - 1\big).\ln(2)$$

Le même changement ramène l'autre intégrale à $\int_0^{\ln(2)} u.\ln(u).du$.

On intègre cette fois par parties :

u	$\hookleftarrow$	$\frac{u^2}{2}$
$\ln(u)$	$\hookrightarrow$	$\frac{1}{u}$

On a une primitive en $\frac{u^2.\ln(u)}{2} - \frac{u^2}{4}$ et la valeur est $\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)^2.\left(2.\ln(\ln(2)) - 1\right)$

L'essentiel est la méthode, pas la valeur *(ici négative)*.

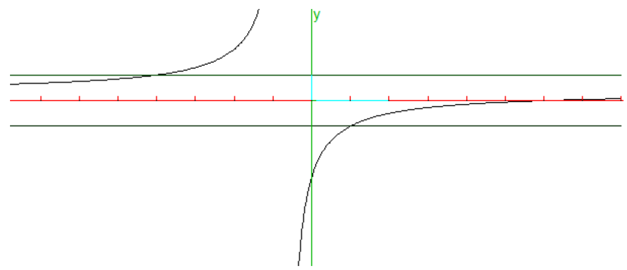
◁34▷ Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto Arcsin\left(\frac{x-3}{3.x+1}\right)$.

On doit déjà éviter $-1/3$.

Ensuite, on veut $\frac{x-3}{3.x+1} \in [-1,\ 1]$, ce qui se lit $\left(\frac{x-3}{3.x+1}\right)^2 \leqslant 1$.

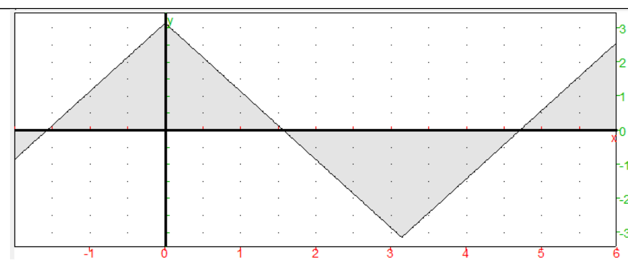
On résout donc $9.x^2 + 6.x + 1 \geqslant x^2 - 6.x + 9$ en se plaçant à l'extérieur des racines -2 et $\frac{1}{2}$.

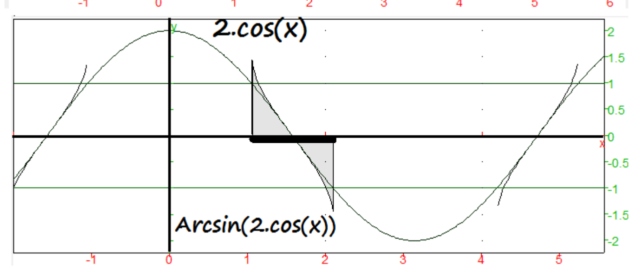
On a donc $\boxed{D_f =]-\infty,\ -2] \cup [0.5,\ +\infty[}$



◁35▷ ♡ Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto 2.Arcsin(\cos(x))$.
Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto Arcsin(2.\cos(x))$.
Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto Arcsin(2.\cos(2.x))$.

$x \longmapsto 2.Arcsin(\cos(x))$ est définie sur $\boxed{\mathbb{R}}$





$x \longmapsto Arcsin(2.\cos(x))$ exige que $\cos(x)$ reste entre $-1/2$ et $1/2$.

Intervalle fondamental : $\left[\frac{\pi}{3},\ \frac{2.\pi}{3}\right]$.

Domaine véritable : $\boxed{\bigcup_{jk\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + k.\pi,\ \frac{2.\pi}{3} + k.\pi\right]}$

$x \longmapsto Arcsin(2.\cos(2.x))$ repose sur la même exigence mais cette fois, c'est $2.x$ qui doit être dans cet ensemble.

$\boxed{\bigcup_{jk\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + k.\frac{\pi}{2},\ \frac{2.\pi}{6} + k.\frac{\pi}{2}\right]}$

◁36▷ Pour tout angle θ convenable, exprimez $\tan(2.\theta)$, $\tan(3.\theta)$, $\tan(4.\theta)$ et $\tan(3.\theta) + \tan(4.\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$.

On utilise la formule $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a).\tan(b)}$ pour obtenir nos résultats :

$a=b=\theta$	$a=\theta$ et $b=2.\theta$	$a=b=2.\theta$
$\tan(2.\theta)=\dfrac{2.\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}$	$\tan(2.\theta)=\dfrac{\tan^3(\theta)-3.\tan(\theta)}{3.\tan^2(\theta)-1}$	$\tan(2.\theta)=\dfrac{4.\tan(\theta)-4.\tan^3(\theta)}{\tan^4(\theta)-6.\tan^2(\theta)+1}$

sous conditions d'existences.

On somme et réduit au dénominateur commun :

$$\boxed{\tan(3.\theta)+\tan(4.\theta)=\frac{\tan^7(\theta)-21.\tan^5(\theta)+35.\tan^3(\theta)-7.\tan(\theta)}{(3.\tan^2(\theta)-1).(\tan^4(\theta)-6.\tan^2(\theta)+1)}}$$

Si on y tient, le dénominateur est $3.\tan^6(\theta)-19.\tan^4(\theta)+9.\tan^2(\theta)-1$.

Déduisez que les $\tan(k.\pi/7)$ pour k de 1 à 6 sont les racines du polynôme $\boxed{X^6-21.X^4+35.X^2-7}$ noté P.

On veut résoudre l'équation $x^6-21.x^4+35.x^2-7=0$ d'inconnue x. Elle est équivalente à "$x^7-21.x^5+35.x^3-7.x=0$ et $x\neq 0$".
En posant $x=\tan(\theta)$ et même $\theta=Arctan(x)$ pour rendre le changement bijectif, c'est équivalent à $\tan(3.\theta)+\tan(4.\theta)=0$.
On résout $\tan(3.\theta)=-\tan(4.\theta)$ et même $\tan(3.\theta)=\tan(-4.\theta)$.
On trouve le cas d'égalité des tangentes $\exists k\in\mathbb{Z},\ 3.\theta=-4.\theta+k.\pi$.
Les solutions en θ sont de la forme $\dfrac{k.\pi}{7}$ avec k décrivant $\mathbb{Z}$.
On revient à x : $\tan\left(\dfrac{k.\pi}{7}\right)$ avec k décrivant $\mathbb{Z}$.

Mais il faut exiger $x\neq 0$, ce qui élimine les k multiples de 7.
Par périodicité, k et $k+7$ donnent la même valeur de x.
On peut donc demander à k d'aller de 1 à 6 pour avoir toutes les racines.

$\tan\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$	$\tan\left(\dfrac{2.\pi}{7}\right)$	$\tan\left(\dfrac{3.\pi}{7}\right)$
$\tan\left(\dfrac{6.\pi}{7}\right)$	$\tan\left(\dfrac{5.\pi}{7}\right)$	$\tan\left(\dfrac{4.\pi}{7}\right)$

On pouvait aussi partir de "je résous l'équation $\tan(3.\theta)+\tan(4.\theta)=0$ *et montrer que je trouvais les racines du polynômes* $X.P(X)$.

Déduisez $\tan\left(\dfrac{\pi}{7}\right).\tan\left(\dfrac{2.\pi}{7}\right).\tan\left(\dfrac{3.\pi}{7}\right)=\sqrt{7}$.

Le polynôme unitaire $X^6-21.X^4+35.X^2-7$ a pour liste les six réels indiqués plus haut. Comme 6 est pair, on a exactement : le produit des racines vaut -7 ($(-1)^6=1$).
On a donc

$$\tan\left(\frac{\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{2.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{3.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{4.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{5.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{6.\pi}{7}\right).=-7$$

On regroupe deux à deux et on utilise $\tan(\pi-\theta)=-\tan(\theta)$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{6.\pi}{7}\right)=-\tan^2\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

$$\tan\left(\frac{2.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{5.\pi}{7}\right)=-\tan^2\left(\frac{2.\pi}{7}\right)$$

$$\tan\left(\frac{3.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{4.\pi}{7}\right)=-\tan^2\left(\frac{3.\pi}{7}\right)$$

Les signes moins finissent par se compenser : $\left(\tan\left(\frac{\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{2.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{3.\pi}{7}\right)\right)^2 = 7$.

Or, chaque terme du produit $\tan\left(\frac{\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{2.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{3.\pi}{7}\right)$ est positif (angle entre 0 et $\pi/2$). On passe à la racine : $\tan\left(\frac{\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{2.\pi}{7}\right).\tan\left(\frac{3.\pi}{7}\right) = \sqrt{7}$.

Déduisez par l'absurde que $\tan(\pi/7)$ est irrationnel.

On va bâtir un raisonnement **par l'absurde**.
Supposons que $\tan(\pi/7)$ soit rationnelle *(de la forme p/q). Objectif : une contradiction.*
On écrit : $\tan\left(\frac{2.\pi}{7}\right) = \frac{2.p/q}{1-(p/q)^2}$; c'est un rationnel.

En remplaçant dans $\frac{\tan^3 - 3.\tan}{3.\tan^2 - 1}$, le réel $\tan(3.\pi/7)$ est rationnel.

Le produit des trois rationnels est aussi un rationnel *(inutile de le mettre sous une forme $\frac{p'}{q'}$ explicite ; il suffit de dire "somme/produit/quotient de rationnels").*
Or, $\sqrt{7}$ n'est pas rationnel. On tient notre contradiction.

Si nécessaire, on fait la démonstration de l'irrationnalité de $\sqrt{7}$ par l'absurde.

On suppose que $\sqrt{7}$ s'écrit a/b sous forme irréductible. Il s'ensuite : $a^2 = 7.b^2$. L'entiers a^2 est un multiple de 7, a l'est donc aussi (écrire $a = 7.k + r$ avec r entre 0 et 6, élever au carré et voir que seul le cas $r = 0$ donne que $49.k^2 + 14.r.k + r^2$ soit un multiple de 7). *Mais alors, en remplaçant a par $7.k$ dans $a^2 = 7.b^2$, on obtient $b^2 = 7.k^2$. Le même raisonnement que précédemment permet d'affirmer que b est aussi multiple de 7, ce qui contredit que la fraction initiale soit irréductible.*

Le réel $\tan^2(\pi/7)$ est il rationnel ?

> *Le fait que* $\tan(\pi/7)$ *soit irrationnel ne nous dit pas que son carré le soit forcément. On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel, mais que son carré est rationnel.*
> *Le sens utile est $(x$ rationnel$) \Rightarrow (x^2$ rationnel$)$ avec sa contraposée $(a^2$ irrationnel$) \Rightarrow (a$ irrationnel$)$.*
> *ici, il faut donc une autre preuve* (par l'absurde).

Supposons que $\tan^2(\pi/7)$ soit rationnel de la forme p/q, d'écriture irréductible.
Comme $\tan(\pi/7)$ est racine de $X^6 - 21.X^4 + 35.X^2 - 7$, on déduit que $\tan^2(\pi/7)$ est racine de $X^3 - 21.X^2 + 35.X - 7$ (déjà, pour certains, il n'est pas évident que ce soit dans ce sens, mais repensez aux équations "bicarrées" de Terminale en $a.X^4 + b.X^2 + c$).
On reporte :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 21.\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 35.\left(\frac{p}{q}\right) - 7 = 0$$

On revient dans $\mathbb{N}$:

$$p^3 - 21.p^2.q + 35.p.q^2 - 7.q^3 = 0$$

On bascule et factorise :

$$p^3 = q.(21.p^2 - 35.p.q + 7.q^2)$$

Le membre de droite est multiple de q, celui de gauche l'est aussi.
C'est louche que q divise p^3, alors que p et q n'ont pas de diviseur commun !

> *Quitte à faire appel à Gauss : q divise p^3, et q est premier avec p, donc q divise p^2. Mais q est premier avec p. Il divise donc $p.1$. Mais étant toujours premier avec p, il divise donc 1.*
> *Finalement, on a cette sortie de secours : p et q n'ont aucun diviseur commun "à part 1".*

L'entier q vaut 1.
Mais alors le rationnel p/q est un entier.
Or, $\tan(\pi/7)^2$ est strictement entre 0 et 1.
On tient là notre contradiction.
Le nombre $\tan^2(\pi/7)$ n'est pas rationnel.

> *On notera qu'ayant prouvé* $\tan^2(\pi/7) \notin \mathbb{Q}$, *on retrouve* $\tan(\pi/7) \notin \mathbb{Q}$ *par la contraposée déjà évoquée.*

◁ 37 ▷ ♡ Résolvez $x^3 - y^3 = 999$ dans $\mathbb{N}^2$.
Qu'est ce qui change dans $\mathbb{Z}^2$?

La clef :
$$x^3 - y^3 = (x - y).(x^2 + x.y + y^2)$$

Et
$$999 = 3^3.37 = 1 \times 999 = 3 \times 333 = 9 \times 111 = 27 \times 37$$

On disjoncte les cas

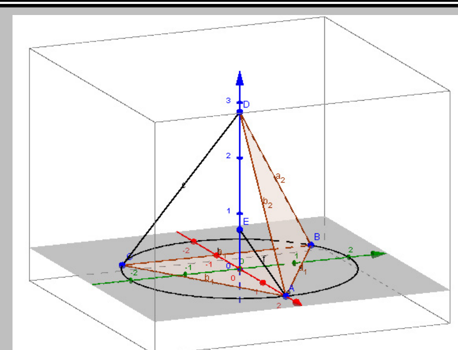
$x - y = 1$	$x - y = 3$	$x - y = 9$	et	ainsi	de	suite
$x^2 + x.y + y^2 = 999$	$x^2 + x.y + y^2 = 333$	$x^2 + x.y + y^2 = 111$				

On reporte la première équation dans la seconde, on cherche des solutions entières.

Sinon
```
for x in range(1000) :
....for y in range(1000) :
........if x*x*x - y*y*y == 999 :
............print(x, y)
print('Fini')
```
Cette version n'est pas du tout optimisée de par le `range` choisi pour `x` et `y`. Et il faut être sûr d'avoir pris un `range` assez grand pour ne pas en rater...

On note que si un couple $(x,\ y)$ convient dans $\mathbb{N}$, le couple $(-y,\ -x)$ conviendra dans $\mathbb{Z}$.

Les sommets d'un tétraèdre régulier sont $A_0(2,\ 0,\ 0)$, $A_1(-1,\ \sqrt{3},\ 0)$, $A_2(-1,\ -\sqrt{3},\ 0)$ et $A_3(0,\ 0,\ 2.\sqrt{2})$. Vérifiez que les A_iA_k sont tous égaux.
Montrez que A_0A_3 est orthogonale à A_1A_2.



On note

I_0 le milieu de A_0A_1	I_1 le milieu de A_0A_2
I_3 le milieu de A_1A_3	I_4 le milieu de A_2A_3

Montrez que les I_k forment un carré.
◁ 38 ▷ * *(facile si on utilise le théorème des milieux, cas particulier de Thalès)*
Déterminez les coordonnées de G, centre de gravité du tétraèdre.
Déterminez l'angle $\widehat{A_iGA_k}$ pour tout couple $(i,\ k)$.
Montrez que $\overrightarrow{GA_0} + \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3}$ est nul.
Retrouvez la valeur de l'angle $\widehat{A_iGA_k}$ en développant $(\overrightarrow{GA_0} + \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3}).(\overrightarrow{GA_0} + \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3})$.

◁ 39 ▷ Prouvez : $Arctan\left(\frac{1}{3}\right) + Arctan\left(\frac{1}{8}\right) + 2.Arctan\left(\frac{1}{7}\right) + Arctan\left(\frac{1}{-}\right) = \frac{\pi}{4}$. Pardon ? Il manque un terme ? Oui, c'est à vous de le retrouver.

On nomme α, β, γ et δ les trois arctangentes en jeu.
Les formules habituelles donnent $\tan(\alpha + \beta) = \frac{11}{23}$ et $\tan(2.\gamma) = \frac{7}{24}$ et même $\tan(\alpha + \beta + 2.\gamma) = \frac{17}{19}$.

On poursuit : $\tan\left(\frac{\pi}{4} - (\alpha + \beta + 2.\gamma)\right) = \frac{1}{18}$.

On résume :
$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - Arctan\left(\frac{1}{3}\right) + Arctan\left(\frac{1}{8}\right) + 2.Arctan\left(\frac{1}{7}\right)\right) = \frac{1}{18}$$

On va donc (pro)poser naturellement $Arctan\left(\frac{1}{18}\right)$.

On prouve proprement maintenant (synthèse) :
$$Arctan\left(\frac{1}{3}\right) + Arctan\left(\frac{1}{8}\right) + 2.Arctan\left(\frac{1}{7}\right) + Arctan\left(\frac{1}{18}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Le second membre a pour tangente 1.

Le premier membre a pour tangente $\dfrac{\dfrac{17}{19}+\dfrac{1}{18}}{1-\dfrac{17}{19}.\dfrac{1}{18}}$, ce qui fait 1.

Les deux mesures angulaires ont la même tangente. Elles sont égales... modulo π.

Mais chaque terme de la somme $Arctan\Big(\dfrac{1}{3}\Big)+Arctan\Big(\dfrac{1}{8}\Big)+2.Arctan\Big(\dfrac{1}{7}\Big)+Arctan\Big(\dfrac{1}{18}\Big)$ se majore par $\dfrac{\pi}{6}$.

La somme est entre 0 et $\dfrac{5.\pi}{6}$.

Et sur cet intervalle, un seul angle a pour tangente 1.

◃ 40 ▹ **Calculez module et argument de $(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+\ldots+(1+i)^{10}$.**

On calcule ce nombre, somme d'une série géométrique

$$\sum_{k=1}^{10}(1+i)^k=\frac{(1+i)-(1+i)^{11}}{1-(1+i)}=\frac{(1+i)-(1+i)^{11}}{-i}=i.((1+i)-(1+i)^{11})$$

Mais on simplifie encore :

$$(1+i)^{11}=(\sqrt{2}.e^{i.\pi/4})^{11}=2^5.\sqrt{2}.e^{i.11.\pi/4}=32.\sqrt{2}.e^{3.i.\pi/4}=32.\sqrt{2}.\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i.\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$$

Tous calculs faits : $31+33.i$.

Oui, il ne faut pas se précipiter sur la formule du binôme.

◃ 41 ▹ **Calculez module et argument de $\sqrt{2+\sqrt{2}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2}}$.**

Son module vaut $\sqrt{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}$ c'est à dire 2.

Et son argument est un angle de $]0,\ \pi/2[$ dont la tangente se calcule

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}}=\sqrt{2}-1$$

On connait : $\pi/8$ et donc : $\boxed{\sqrt{2+\sqrt{2}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2}}=2.e^{i.\pi/8}}$

◃ 42 ▹ **Calculez module et argument de $2^{i.\pi/3}$. Calculez module et argument de $e^{(e^{i.\pi/3})}$. Calculez module et argument de $(e^e)^{i.\pi/3}$.**

$2^{i.\pi/3}$	$e^{i.\ln(2).\pi/3}$	1	$\dfrac{\ln(2).\pi}{3}$
$e^{(e^{i.\pi/3})}$	$e^{\frac{1+i.\sqrt{3}}{2}}$	$e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$(e^e)^{i.\pi/3}$	$e^{i.e.\pi/3}$	1	$\dfrac{e.\pi}{3}$

Aucun de ces angles n'est sympathique ni classique.

L'exercice devrait être un classique en Terminale, pour vous habituer à manipuler l'exponentielle complexe...

◃ 43 ▹ **♡ Calculez module et argument de $(1+2.i).(1+5.i).(1+13.i).(1+21.i)$.**

On calcule : $2210-2210.i$! Incroyable.

Mais écrivons le $2210.(1-i)$.

Le module vaut $2210.\sqrt{2}$ et l'argument $-\dfrac{\pi}{4}$.

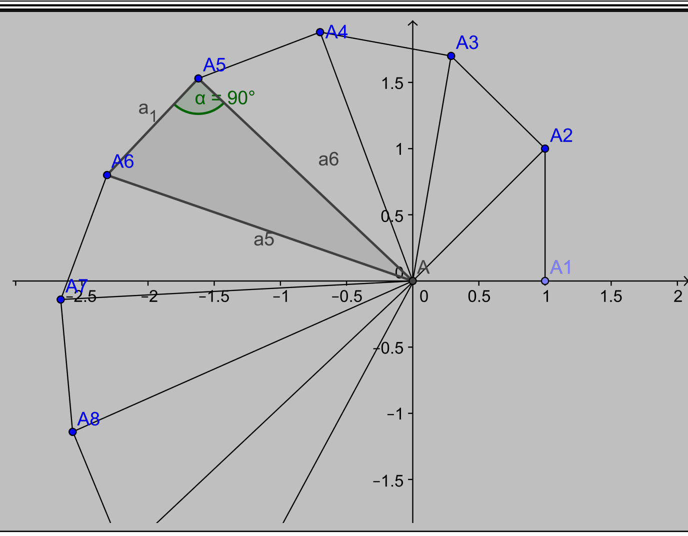
◁ 44 ▷

	Un Q.C.M. de Roger Mansuy	Vrai	Faux
a	Soit $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\Re e(\lambda z) = \lambda \Re e(z)$.		
b	Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors, $\Re e(1/z) = -\Re e(z)$.		
c	Soit $z \in \mathbb{C}$. La partie réelle de iz est la partie imaginaire de z.		
d	Soit $x \in \mathbb{R}$. Le conjugué de $\exp(ix)$ est $\exp(-ix)$.		
e	Soit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Le module de $\exp(z)$ est $\exp(\|z\|)$.		
f	Soit $z \in C$. Le conjugué de l'exponentielle de z est l'exponentielle de $\overline{z}$.		
g	Soit z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$. Alors, $\|z_1 - z_2\| \le \|z_1\| - \|z_2\|$.		
h	Soit z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$. Alors, $\|z_1 - z_2\| \leqslant \|z_1\| + \|z_2\|$.		
i	Le complexe $-j$ est racine de $X^2 - X + 1$.		
j	Si m ne divise pas n, $U_m \bigcap U_n = \{1\}$.		

Roger Mansuy n'est pas que un auteur de chroniques mathématiques dans La Recherche, n'est pas que l'auteur d'un cahier de vacances entre Sup et Spé, n'est pas que organisateur de Mathématic Park, de « Mathématiques en mouvement », n'est pas que tweeter compulsif en curiosités mathématiques, n'est pas que prof de maths à Saint-Louis et ancien prof d'informatique à Louis-le-Grand... il a aussi été colleur certaines années en MP à Charlemagne... et U_n désigne l'ensemble des racines n^{iemes} de l'unité.*

A part ça, on pose $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{e^{2.i.k.\pi/n} \mid k \in range(n)\}/$

	Un Q.C.M. de Roger Mansuy
a	Vrai
b	Faux, avec $z = 2$ déjà !
c	Non. Signe !
d	Oui
e	Non, $e^z = e^x.e^{i.y}$ et son module est $e^{\Re e(z)}$!
f	$\overline{e^{x+i.y}} = \overline{e^x.e^{i.y}} = e^x.e^{-i.y}$ donc oui.
g	Avec un majorant qui pourrait être négatif ? Ça va pas !
h	Oui
i	Oui.
j	$U_6 \bigcap U_9 = \{1,\ j,\ j^2\}$ et pourtant aucun ne divise l'autre



La construction de l'escargot de Pythagore est visible sur le dessin ci-contre.
Donnez un script **Python** pour en construire les segments avec le module **Turtle**.
Donnez la position du point A_n en coordonnées polaires. Montrez que module et "argument" divergent vers $+\infty$.
Que se passe-t-il si chaque longueur A_nA_{n+1} ne
◁ 45 ▷ vaut plus 1 mais $1/(n+1)$?

◁46▷ ♯♡ La liste `L` contient tous les “anagrammes” de `123456789`, c'est à dire les nombres formés de ces neuf chiffres, dans un ordre quelconque, de `123456789` à `987654321` en passant par `354289761`.
On tape le script suivant

```
N, P, T, C, S = 0, 0, 0, 0, 0
for nombre in L :
....N += 1
....P += ((nombre %2)==0)
....T += ((nombre %3)==0)
....C += ((nombre %5)==0)
....S += nombre
....O += ((nombre %11)==0)
print(N, P, T, C, S, O)
```

Que lirez vous ?

♯♠ Écrivez un script qui engendre la liste `L`.

On parcourt la liste des anagrammes, et N est un compteur, initialisé à 0.
Pour chaque anagramme lu, le compteur augmente d'une unité. A la fin, il vaut 9! (nombre de termes de la liste).

Quant à P, il augmente de la valeur du booléen « `nombre%2 == 0` ».
Ce booléen réagit suivant que `Nombre` est multiple de `2` ou pas.
Il vaut `False` pour un impair (et `False`, c'est 0[2]).
Il vaut `True` pour un pair (et `True`, c'est 1).

L'accumulateur `P` compte le nombre d'entiers pairs dans la liste L.
Et il y a en a à peu près la moitié.

Comment distinguer les multiples de `2` ? A leur chiffres des unités : 2, 4, 6, 8 (par opposition aux impairs, un peu plus nombreux).
Il y a 8! entiers finissant par *é* dans notre liste (autant que d'entiers finissant par 3, par 4 et ainsi de suite).
Le compteur P va donc donner $4 \times 8!$.

C est plus simple à lire. Il compte les multiples de 5.
Mais les seuls multiples de 5 sont ceux qui se terminent par 0 (impossible ici) ou 5.
Ce sont donc des nombres de la forme $abcdefgh5$ où les lettres de a à h désignent les entiers de 1 à 8 dans un ordre quelconque.
Il y a donc 8! possibilités.
Le compteur$C$ affichera 8! (en fait 40320, car il calcule vraiment).

Pour T, ce sont les multiples de 3.
Et quel est le critère : la somme des chiffres doit être multiple de 3.
Mais la somme des chiffres est toujours la même : $1+2+3+\ldots+9$. Et ceci vaut 45.
Tous les anagrammes sont multiples de 3. La réponse sera 9!.

La somme S est la somme de tous nos entiers.

Aurez vous le courage de poser une grand addition généralisant $\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ + & 2 & 1 \end{array}$, $\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 \\ + & 3 & 2 & 1 \\ + & 1 & 3 & 2 \\ + & 3 & 1 & 2 \\ + & 2 & 1 & 3 \\ + & 2 & 3 & 1 \end{array}$ et même la somme

$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ + & 4 & 3 & 2 & 1 \\ + & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ + & 4 & 2 & 3 & 1 \\ + & 1 & 3 & 2 & 4 \\ + & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$ avec ses 24 termes.

Toute l'astuce consiste à dire que dès qu'il y a un nombre dans la liste, il y a son « complément ».

2. je sais, là, je triche, et O.Brunet va protester et dire que Python accepte de confobndre le type booleen et le type entier, ce qui n'est pas bien, et que je profite là d'une malformation de Python

Additionnez les deux à deux dans les deux premières : $\begin{array}{cccccccccc} & & & & 1 & 2 & 3 & & & \\ & 1 & 2 & + & 3 & 2 & 1 & \rightarrow & 4 & 4 & 4 \\ + & 2 & 1 & + & 1 & 3 & 2 & & & & \\ - & - & - & + & 3 & 1 & 2 & \rightarrow & 4 & 4 & 4 \\ & 3 & 3 & + & 2 & 1 & 3 & & & & \\ & & & + & 2 & 3 & 1 & \rightarrow & 4 & 4 & 4 \end{array}$.

Dans la troisième, chaque somme de deux termes vaut 5555. Et il y a 12 sommes.
Dans notre problème à 9 chiffres, on regroupe des 9! éléments deux à deux

123456789	123456798	...	143 597 682	...
987654321	987654312	...	967 513 418	...

A chaque fois, la somme vaut 1111111110 (cette fois, on a un paquet de retenues à propager).
La somme vaut donc $\frac{9!}{2} \times 1111111110$.
La valeur est 201599999798400

Avec O, on chasse les multiples de 11.
Le critère : $abcdefg$ est un multiple de 11 si et seulement si la somme alternée $a - b + c - d + e - f + g$ est multiple de 11.

Les scripts qui engendrent les permutations d'une liste sont des classiques... de l'option informatique.

Mais ils ne sont pas simples.

Ici, on va y aller à la force brute.
On veut des nombres à 9 chiffres, donc des nombres entre 10^8 et 10^9. On va utiliser un range.
Mais on est loin de les vouloir tous. On en veut que ceux dont les neuf chiffres sont tous distincts.
La solution : tester si chaque chiffre de 1 à 9 (un `range(1, 10)`) est présent dans l'écriture de l'entier.

```
L = [ ]
for n in range(10**8, 10**9) :
....if Test(n) :
........L.append(n)
```

```
def Test(n) :
....Mot = str(n) #conversion enchaine de
caractères
....for k in range(1, 10) : #test de 1 à 9 inclus
........if not(str(k) in Mot) :
............return False
....return True
```

Horriblement long.

Ou alors des boucles for avec des exclusions :

```
for i in range(10) :
....for j in range(10) :
........if j != i :
............for k in range(10) :
................if k != i and k != j :
....................for l in range(10) :
........................if l !=....
```

C'est long aussi.

Le plus court (pour construire la liste des permutations au rang n, on prend celle au rang $n-1$ et à chaque permutation de $[1, \ldots n-1]$, on vient insérer n dedans, à chacun des n emplacements possibles :

```
def permutation(n) :
....if n == 0 :
........return [[]]
....L = permutation(n-1)
....LL = []
....for k in range(n) :
........Lk = [lis[ :] for lis in L]
........for lis in Lk :
............lis.insert(k,n)
............LL.append(lis)
....return LL
```

```
for Perm in permutation(5) :
....print(Perm)
```

```
#création des permutations d'une liste par méthode de Lehmer
#on crée la pyramide [0]x[0,1]x[0,1,2]...[0,1,..n-1]
#qui représente les suites de Lehmer
#pour chaque suite de Lehmer, on crée la permutation associée
#on choisit ici de travailler sur des listes de lettres, afin de pouvoir créer tous les anagrammes
d'un mot
#de plus, même si il y a des lettres doubles dans le mot, on s'arrange pour ne pas citer plusieurs
fois le même anagramme
```

```
def Pyramide(n) :
....if n == 1 :
........return [[0]]
....L = []
....for k in range(n) :
........for element in Pyramide(n-1) :
............L.append(element+[k])
....return L

def decode(Lehmer, Liste) :
....L = ""
....Cop = Liste[ : ]
....Lehmer.reverse()
....for index in Lehmer :
........L+=Cop.pop(index)
....return L
```

```
Permut = list(input('Tapez un mot (sans guillemets) : '))
ListePerm=[]
for Lehm in Pyramide(len(Permut)) :
....nouv = decode(Lehm,Permut)
....if not(nouv in ListePerm) :
........ListePerm.append(nouv)

print(len(ListePerm),ListePerm)
```

```
#generateur de permutations par methode de Steinhaus
from tkinter import *
from time import sleep
```

```
def Refresh(L) :#rafraichit les autorisations de deplacements
....for k in range(len(L)) :
........if k==0 :
............if L[0][1]==+1 :
................L[0][2]=L[0][0]>L[1][0]
........elif k==n-1 :
............if L[n-1][1]==-1 :
................L[n-1][2]=L[n-1][0]>L[n-2][0]
........else :
............L[k][2]=L[k][0]>L[k+L[k][1]][0]
....return L
```

```
def CanMove(L) : #indique qui peut bouger vraiment et le plus grand indice autorise
....kmax=-1
....indexk=-1
....for k in range(len(L)) :
........if k==0 :
............if L[0][1]==+1 :
................L[0][2]=L[0][0]>L[1][0]
........elif k==n-1 :
............if L[n-1][1]==-1 :
................L[n-1][2]=L[n-1][0]>L[n-2][0]
........else :
............L[k][2]=L[k][0]>L[k+L[k][1]][0]
........if L[k][2] :
.............if L[k][0]>kmax :
................kmax=L[k][0]
................indexk=k
....return(L, kmax !=-1, indexk)
```

```
#initialisation des variables
n = 6 #ne jamais depasser 8 ou 9
etat = [[k, -1, k !=0] for k in range(n)]
Tout=[[k for k in range(n)]] #la permutation identite
WeMove = True
index=0
```

```
#initialisation graphique
Fen=Tk()
Can=Canvas(Fen,width=450,height=300,bg='blue')
Can.pack()
couleur=['red','green','grey','yellow','cyan','lightblue','black','white']
dessin=[None for k in range(n)]
texte=Can.create_text(200,100,text='Steinhaus',font='Arial 30')
compteur=Can.create_text(250,150,text='generateur de permutations',font='Arial 30')
for k in range(n) :
....dessin[k]=Can.create_oval(50+50*k-5*k,30-5*k,50+50*k+5*k,40+5*k,fill='cyan')
Can.update()
sleep(1.7)
```

```
def swap(i,j) : #echange deux elements et memorise la permutation
....etat[i], etat[j] = etat[j], etat[i]
....memoire=[etat[k][0] for k in range(n)]
....Tout.append(memoire) for k in range(n) :
.......kk=n-memoire[k]
.......Can.coords(dessin[k],50+50*k-5*kk,30-5*kk,55+50*k+5*kk,40+5*kk)
....Can.itemconfig(texte,text=str(memoire))
....Can.itemconfig(compteur,text=str(len(Tout)))
....Can.update()
....sleep(0.1)
```

```
#programme proprement dit
while WeMove : #tant qu'on peut permuter
....etat, WeMove, index = CanMove(etat)
....if WeMove :
.......WhoMoves=etat[index][:] #copie de la liste
.......sens=WhoMoves[1]
.......voisin=index+sens
.......swap(index,voisin)
.......index=voisin
....ContinueMouvement=True
....for individu in etat :
.......if individu[0]>WhoMoves[0] :
...........individu[1]=-individu[1]
...........ContinueMouvement=False
....etat=Refresh(etat)
....if ContinueMouvement :
.......while index in range(1,n-1) and etat[index][0]>etat[index+sens][0] :
...........voisin=index+sens
...........swap(index,voisin)
...........index=voisin
.......etat[voisin][2]=False
```

```
for memo in Tout :
....if Tout.count(memo)>1 :
.......print('Bug')
....print(memo)
print(len(Tout))
Fen.mainloop()
```

◁47▷ Le nombre d'écriture décimale *abcde* est un multiple de 41 (exemple $A = 43\,542$). Montrez que ses permutations *bcdea* (ici 35 424), *cdeab*, *deabc* et *eabcd* sont aussi des multiples de 41. Indication : $10.A - B$ et $2\,439 \times 41$.

Comment passe-t-on de $A = 43\,542$ à $B = 35\,424$ et plus généralement de *abcde* à *bcdea* ?
On multiplie A par 10 : $10.A = 435\,420$ ou $10.A = abcde0$.
On lui ajoute l'entier a : $10.A + 4 = 435\,424$ ou $10.A + a = abcdea$.
On efface le chiffre de tête qui est $10^5.a$: $10.A + 4 - 10^5.4 = 35\,424$ ou $10.A + a - 10^5.a = bcdea$.

On passe d'un nombre au suivant par $A \longmapsto 10.A + (1 - 10^5).a$ avec a entier.

Si A est multiple de 41, alors $10.A$ l'est aussi.
Et $10^5 - 1$ est « comme par hasard » un multiple de 41 (voir indication de l'énoncé).
Par combinaison, $10.A + (1 - 10^5).a$ est un multiple de 41.

On met en boucle pour passer aux entiers suivants (54 243, 42 435, 24 354, 43 542), qui sont alors encore tous multiples de 41.

Une remarque : les résultat qui disent « si A est multiple de 41, alors $10 \times A$ est multiple de 41 »
« si A et B sont multiples de 41, alors $A + B$ est multiple de 41 »

sont à énoncer sans s'encombrer de démonstrations. ce sont, à votre niveau, des évidences mathématiques.

Alourdir votre copie avec des $A = 41.k$ et autres, c'est passer pour un individu qui a encore besoin de poser sur sa copie une addition telle que $17 + 43 = 60$. Vous devez faire de l'arithmétique élémentaire, sans remettre des $\times k$ partout.

Ou alors c'est comme face à $x^2 + 3.x + 5 = 0$ écrire noir sur blanc : $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$, donc $\Delta = b - 4.a.c = 9 - 4.5 = \dots$.

Avouez qu'en première ça fait sérieux, mais qu'en Sup ça fait gros bourrin.

◁ 48 ▷ Les A_k d'affixes sont les six sommets d'un hexagone régulier dans le plan complexe (dans l'ordre, de 0 à 5).
Calculez $\dfrac{z_4 - z_0}{z_2 - z_0}$, $\dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$, $\dfrac{z_4 - z_0}{z_1 - z_0}$, $\dfrac{z_4 - z_1}{z_0 - z_3}$
Méthode 1 : j'ai mal lu et je crois que c'est l'hexagone de sommets 1, $-j^2$,j et ainsi de suite.
Méthode 2 : je comprends que par une transformation $z \longmapsto \alpha.z + \beta$ je m'y ramène.
Méthode 3 : je calcule module et argument de chacun de ces complexes.

Evidemment, l'hexagone de sommets

z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
1	$-j^2$	j	-1	j^2	$-j$

n'est qu'un exemple.

Mais tout hexagone s'y ramène. On se place au centre qu'on appelle c, on avance de $\rho.e^{i.\theta}$ en direction du premier sommet, puis on passe aux sommets suivants en remplaçant θ par $\theta + \pi/3$.

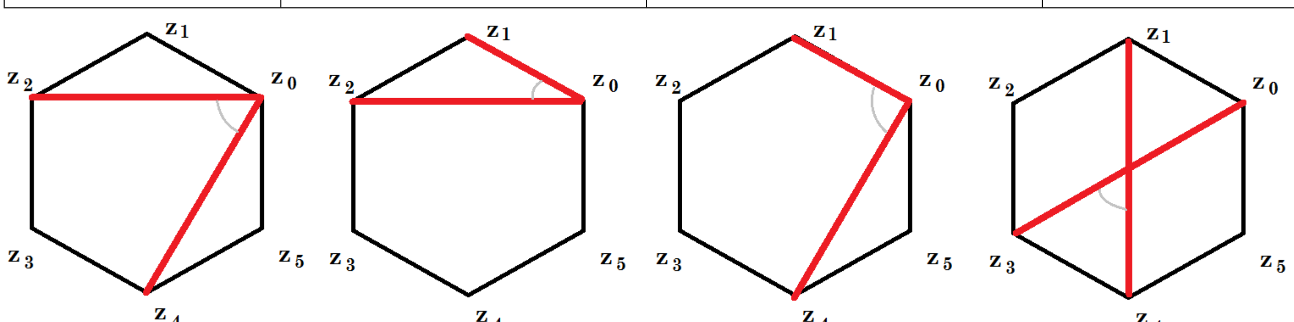
z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
$c + \rho.e^{i.\theta}$	$c + \rho.e^{i.\theta+i.\pi/3}$	$c + \rho.e^{i.\theta+2.i.\pi/3}$	$c + \rho.e^{i.\theta+3.i.\pi/3}$	$c + \rho.e^{i.\theta+4.i.\pi/3}$	$c + \rho.e^{i.\theta+5.i.\pi/3}$
$c + \rho.e^{i.\theta}$	$c + \rho.e^{i.\theta}.(-j^2)$	$c + \rho.e^{i.\theta}.j$	$c + \rho.e^{i.\theta}.(-1)$	$c + \rho.e^{i.\theta}.j^2$	$c + \rho.e^{i.\theta}.(-j)$

Tout le reste n'est plus que calcul, mais on note que quand on effectue par exemple

$$\frac{z_4 - z_0}{z_2 - z_0} = \frac{(c + \rho.e^{i.\theta}.j^2) - (c + \rho.e^{i.\theta})}{(c + \rho.e^{i.\theta}.j) - (c + \rho.e^{i.\theta})} = \frac{\rho.e^{i.\theta}.j^2 - \rho.e^{i.\theta}}{\rho.e^{i.\theta}.j - \rho.e^{i.\theta}} = \frac{j^2 - 1}{j - 1}$$

les c partent tout de suite de même que les $\rho.e^{i.\theta}$.
On est donc bien ramené à l'hexagone « de base ». ALors autant le faire tout de suite.

$\dfrac{z_4 - z_0}{z_2 - z_0}$	$\dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$	$\dfrac{z_4 - z_0}{z_1 - z_0}$	$\dfrac{z_4 - z_1}{z_0 - z_3}$
$\dfrac{j^2 - 1}{j - 1} = j + 1 = -j^2$	$\dfrac{j - 1}{-j^2 - 1} = \dfrac{j - 1}{j} = 1 - j^2$	$\dfrac{j^2 - 1}{(-j^2) - 1} = \dfrac{j^2 - 1}{j} = j - j^2$	$\dfrac{j^2 - 1}{1 - (-1)} = \dfrac{j^2 - 1}{2}$
$1.e^{i.\pi/3}$	$\sqrt{3}.e^{i.\pi/6}$	$\sqrt{3}.e^{i.\pi/2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}.e^{7.i.\pi/6}$



mêmes modules
angle $\pi/3$

modules dans un rapport $\sqrt{3}$
angle $\pi/6$

modules dans un rapport $\sqrt{3}$
angle droit

Sur ces schémas (légèrement tournés par rapport à l'hexagone « de base », mais ça ne change rien), on peut aussi calculer les quotients de complexes :
- quotient des modules (et dans plusieurs cas, les modules sont égaux)
- différence des arguments (de combien on tourne).

◃49▹

On note $\mathbb{P}$ l'**ensemble des polynômes à coefficients réels dont toutes les racines sont réelles**.

Dans les livres, on parlera de « polynômes scindés sur $\mathbb{R}$.

I∼0) Pour quelles valeurs de a le polynôme $X^3 - 6.X^2 + 9.X + a$ est il dans $\mathbb{P}$ *(on pourra étudier les variations de $x \longmapsto x^3 - 6.x^2 + 9.x + 1$).*

On étudie l'application $x \longmapsto x^3 - 6.x^2 + 9.x + a$ de dérivée $x \longmapsto 3.x^2 - 12.x + 9$ (qui s'annule et change de signe en 1 et 3).

On calcule alors les extrema $f(1)$ et $f(3)$ pour tracer un tableau de variations

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$3.(x^2 - 4.x + 3)$		positif	0	négatif	0	positif	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

On a la forme classique d'un polynôme de degré 3. Par stricte monotonie, on a au plus une racine sur chaque intervalle : $]-\infty,\ 1]$, $[1,\ 3]$ et $[3,\ +\infty[$.

On veut exactement trois racines. Il faut donc qu'il y en ait une sur chacun.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit : $f(1)$ positif et $f(3)$ négatif.

Et il nous assure alors d'une racine dans la phase ascendante $]-\infty,\ 1]$
une racine dans la phase descendante $[1,\ 3]$
une racine dans la phase ascendante $[3,\ +\infty[$
C'est nécessaire et suffisant.

La condition nécessaire et suffisante est donc $\boxed{4 + a \geqslant 0 \geqslant a}$ ou si vous préférez : $S_a = [-4,\ 0]$

Les inégalités sont larges car par exemple pour a égal à -4, on a une racine double égale à 1 (et l'autre racine réelle est 4).

I∼1) Montrez que le produit de deux éléments de $\mathbb{P}$ est dans $\mathbb{P}$.

La question est très simple si on la prend par la bonne extrémité : la forme factorisée.

$P(X)$ est dans $\mathbb{P}$ si et seulement il s'écrit $\lambda.\prod_{k=1}^{d}(X - r_k)$ où les r_k sont les racines réelles de P (et λ son coefficient dominant).

$Q(X)$ est dans $\mathbb{P}$ si et seulement il s'écrit $\mu.\prod_{k=1}^{d'}(X - \rho_k)$ où les ρ_k sont les racines réelles de Q.

Mais alors $P(X).Q(X)$ s'écrit $\lambda.\mu.\prod_{k}(X - r_k).\prod_{j}(X - \rho_j)$ et ses racines sont réelles.

Réciproquement, si les racines de $P(X).Q(X)$ sont réelles, celles de P et celles de Q le sont aussi, puisque ce sont certaines des racines de $P.Q$.

Clef : $P(x).Q(x) = 0 \Leftrightarrow (P(x) = 0$ *ou* $Q(x) = 0)$

Rapport du jury : la question a trop souvent été abordée par l'écriture additive $P(X).Q(X) = \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k.X^k\Big).\Big(\sum_{k=0}^{d'} b_k.X^k\Big)$ et n'a pas donné de résultats.

Ce sujet est inspiré du début d'un sujet de Mines-Ponts (Maths 2, filière PC 2021)

Dans le sujet de Mines Ponts, on étudiait le critère de Schur.

On regardait les suites (u_k) telles que

« si $P = \sum_{j=0}^{n} a_j.X^j$ est dans $\mathbb{P}$ alors $P = \sum_{j=0}^{n}(u_j.a_j).X^j$ est aussi dans $\mathbb{P}$ ».

I∼2) Montrez que $X^2 - 3.X + 2$ et $X^2 + 3.X + 2$ sont dans $\mathbb{P}$ mais pas leur somme.

$X^2 - 3.X + 2$	a pour racines 1 et 2	il est dans $\mathbb{P}$
$X^2 + 3.X + 2$	a pour racines -1 et -2	il est dans $\mathbb{P}$
$2.X^2 + 0.X + 4$	a pour racines $i.\sqrt{2}$ et $-i.\sqrt{2}$	il n'est pas dans $\mathbb{P}$

L'ensemble $\mathbb{P}$ n'est pas stable par addition alors qu'il est stable par multiplication.

I∼3) Pour quelles valeurs de a le polynôme $X^4 + a.X^2 + (a-1)$ est il dans $\mathbb{P}$? Pour quelles valeurs de a le polynôme $X^4 - a.X^2 + (a-1)$ est il dans $\mathbb{P}$?

Les racines de $X^4 + a.X^2 + (a-1)$ sont les racines carrées des racines de $Y^2 + a.Y + (a-1)$ (en posant malproprement $Y = X^2$).
Il faut que les racines de $Y^2 + a.Y + (a-1)$ soient réelles (carrés de réelles).
Et il faut aussi qu'elles soient positives (pour qu'on puisse en extraire les racines).
C'est d'ailleurs nécessaire et suffisant, puisque si α et β vérifient $\alpha^2 + a.\alpha + (a-1) = 0$ et $\beta^2 + a.\beta + (a-1) = 0$ et sont positives, alors les quatre racines de $X^4 + a.X^2 + (a-1)$ sont $\sqrt{\alpha}$, $-\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$ et $-\sqrt{\beta}$.

Or, les racines de $Y^2 + a.Y + (a-1)$ sont -1 et $1-a$ (somme et produit, sans passer par des $\sqrt{a^2 - 4.a + 4} = \sqrt{(a-2)^2}$).

Et -1 n'a pas de racine carrée dans $\mathbb{R}$. Donc $\boxed{S_a = \emptyset}$

Pour $X^4 - a.X + (a-1)$, on a cette fois $x^2 = 1$ ou $x^2 = a-1$.
La condition nécessaire et suffisante est $a - 1 \geqslant 0$: $\boxed{S_a = [1,\ +\infty[}$ et $S_x = \{1,\ -1,\ \sqrt{a-1},\ -\sqrt{a-1}\}$ pour chaque a convenable.

Dérivation.

II∼0) Soit P dans $\mathbb{P}$ de racines $(a_k)_{k\leqslant n}$ que l'on suppose distinctes pour l'instant, classées par ordre croissant.
Montrez $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - a_k}$. En étudiant la fonction rationnelle $x \longmapsto \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ sur chaque intervalle $]a_k,\ a_{k+1}[$ (variations, limites aux bornes), montrez que P' admet une racine et une seule sur $]a_k,\ a_{k+1}[$. Déduisez que P' est aussi dans $\mathbb{P}$.

On écrit P sous forme factorisée $P(X) = \lambda.(X-a_1).(X-a_2)\dots(X-a_n)$ (oublier le coefficient dominant λ ne change rien pour la suite, mais c'est une faute).
On dérive avec la formule $(u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$ et sa généralisation $\Big(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k\Big)' = \sum_{i=1}^{n}\Big((u_i)'.\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} u_k\Big)$.

$$P'(X) = \lambda.1.(X-a_2)\dots(X-a_{n-1}).(X-a_n) + \lambda.(X-a_1).1\dots(X-a_{n-1}).(X-a_n) + \dots$$
$$\dots + \lambda.(X-a_1).(X-a_2)\dots 1.(X-a_n) + \lambda.(X-a_1).(X-a_2)\dots(X-a_{n-1}).1$$

$$P(X) = \lambda.(X-a_1).(X-a_2)\dots(X-a_n)$$

A chaque fois, un terme a été dérivé et a donné 1. Il manque donc un terme à chaque fois. Quand on divise par le produit de tous, il reste à chaque fois au dénominateur le terme qu'on avait dérivé. Il reste donc n termes de la forme $\dfrac{1}{X-a_k}$.

Proprement avec de beaux sigmas :

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1.\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} (X-a_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} (X-a_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X-a_i}$$

Je verrai sur vos copies si les adeptes de la récurrence s'en sortent, avec

$$P_{n+1}(X) = P_n(X).(X-a_{n+1})$$

$$(P_{n+1})'(X) = (P_n)'(X).(X-a_{n+1}) + P_n(X)$$

$$\frac{(P_{n+1})'(X)}{P_{n+1}(X)} = \frac{(P_n)'(X).(X-a_{n+1})+P_n(X)}{P_n(X).(X-a_{n+1})} = \frac{(P_n)'(X)}{P_n(X)} + \frac{1}{X-a_{n+1}} = \Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-a_k}\Big) + \frac{1}{X-a_{n+1}}$$

Chaque application $x \longmapsto \dfrac{1}{x-a_k}$ qui constitue $\dfrac{P'}{P}$ est décroissante par intervalle.

La somme $x \longmapsto \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ est donc décroissante sur chaque intervalle de son domaine.
Plaçons nous sur $]a_k,\ a_{k+1}[$. L'application décroit.

Étudions sa limite à droite en a_k : $\dfrac{1}{x-a_k}$ tend vers $+\infty$

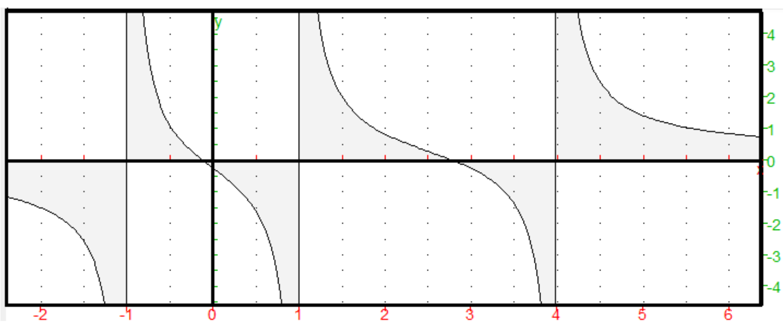
chaque $\dfrac{1}{x-a_i}$ (i différent de k) tend vers une limite finie $\dfrac{1}{a_k-a_i}$

La somme tend vers $+\infty$.

Étudions sa limite à gauche en a_{k+1} : $\dfrac{1}{x-a_{k+1}}$ tend vers $-\infty$

chaque $\dfrac{1}{x-a_i}$ (i différent de k) tend vers une limite finie $\dfrac{1}{a_{k+1}-a_i}$

La somme tend vers $-\infty$.



Par théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\dfrac{P'(x)}{P(x)}$ admet une solution.

Par stricte monotonie, elle en admet une seule.

On a combien d'intervalles de ce type $]fa_k,\ a_{k+1}[$? On en a $n-1$ (`k in range(1, n)`).

On a donc détecté $n-1$ racines pour P' . Une par intervalle.
P' étant de degré $n-1$, il ne peut pas en avoir plus.
On a donc toutes les racines de P'. Et elles sont toutes réelles.

Bilan : si P est dans $\mathbb{P}$ avec que des racines simples, alors sa dérivée y est aussi.

On notera que l'on pouvait aussi utiliser le théorème de Rolle. Comme P prend la même valeur en a_k et a_{k+1} alors sa dérivée P' s'annule au moins une fois entre les deux.

II∼1) Montrez que le résultat reste valable si l'une des racines de P est une racine double.

Que se passe-t-il si P admet une racine double ? Supposons $a_k = a_{k+1}$ quelquepart.
La décomposition de $\dfrac{P'}{P}$ reste valable.
L'existence d'une racine sur chaque intervalle reste valable.
Mais il y a moins d'intervalles.

Imaginons $a_1 < a_2 < a_3 = a_4 < a_5$. On a alors seulement trois intervalles $]a_1,\ a_2[$, $]a_2,\ a_3[$, et $]a_3,\ a_5[$.

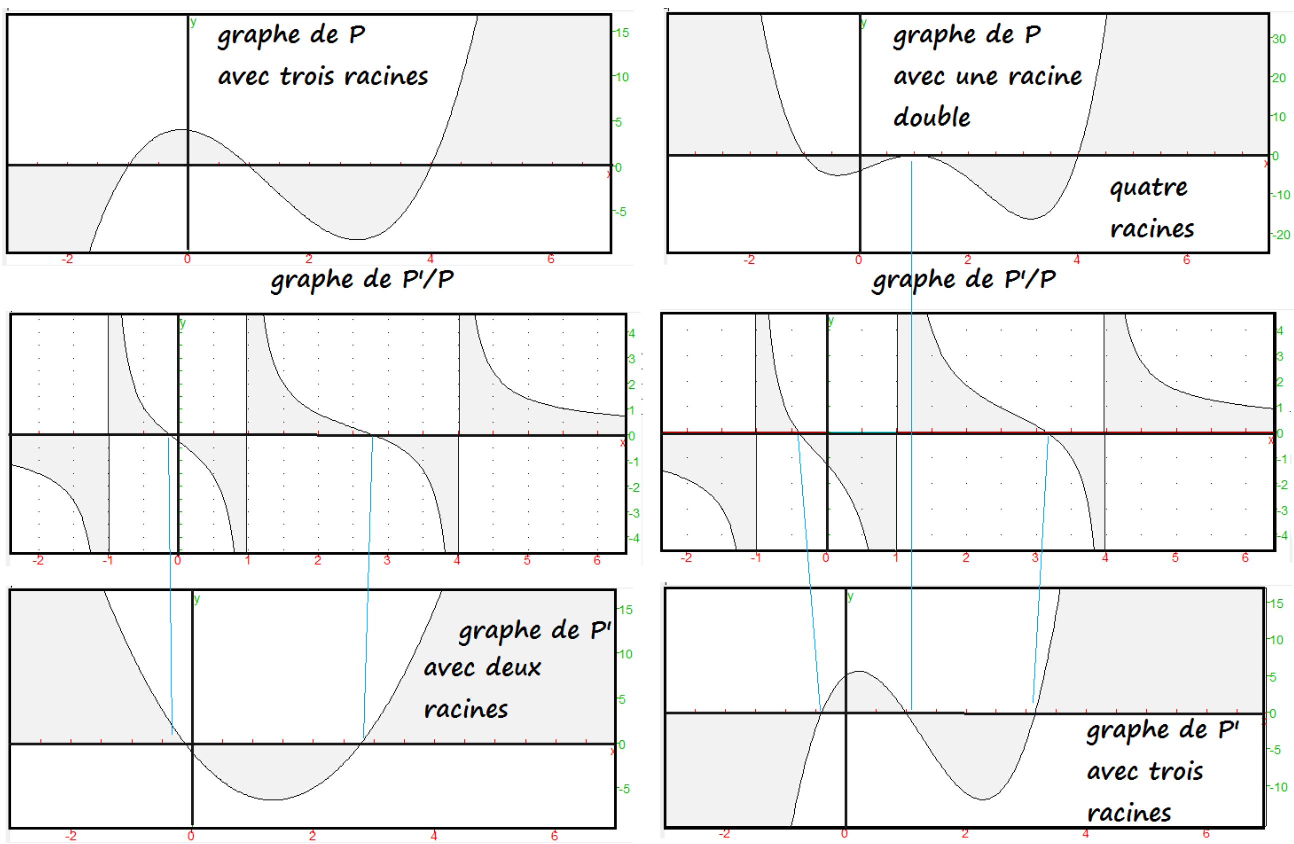
Mais comme $a_k$est une racine double de P, c'est encore une racine de P'.
On a donc une racine de plus. Et on a toutes les racines de P'.

Sur l'exemple $a_1 < a_2 < a_3 = a_4 < a_5$, on a $P = \lambda.(X-a_1).(X-a_2).(X-a_3)^2.(X-a_5)$,

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{X-a_1} + \frac{1}{X-a_2} + \frac{2}{X-a_3} + \frac{1}{X-a_5}$$

trois racines (entre a_1 et a_2 puis entre a_2 et a_3 et entre a_3 et a_5)
mais en même temps : $P' = \lambda.(X-a_3).\Big((X-a_2).(X-a_3)^2.(X-a_5) + (X-a_1).(X-a_3)^2.(X-a_5) +$
$$(X-a_1).(X-a_2).2.(X-a_5) + (X-a_1).(X-a_2).(X-a_3)\Big)$$
et donc a_3 est aussi racine de P'.

On généralise à plusieurs racines multiples.



Rapport du jury : Les multiplicités n'ont été étudiées que dans la moitié des copies. Les autres se contentent de construire les racines données par le théorème de Rolle.

Pour moi, c'est là qu'on détecte le matheux (et physicien) : j'applique le théorème de Rolle, je trouve des racines pour P'.
Et qu'on détecte le vrai matheux : oui, mais si il y a des racines multiples, je fais quoi ?
Et le grand pro : je compte en rajoutant ce qu'il faut comme racines à P'.

II$\sim$2) Déduisez que si P est dans $\mathbb{P}$ alors toutes ses dérivées y sont aussi.

On a prouvé que si P est dans $\mathbb{P}$ alors P' y est aussi.
On applique alors ce résultat à P' et on déduit que P'' y est aussi.

On met le résultat en boucle : P', P'', $P^{(3)}$ et ainsi de suite (les $P^{(k)}$ sont dans $\mathbb{P}$).

III$\sim$0) Montrez que si $a.X^2 + b.X + c$ est dans $\mathbb{P}$ a lors $3.a.X^2 + 2.b.X + c$ est dans $\mathbb{P}$. Montrez que la réciproque n'est pas valable.

On suppose que les racines de $a.X^2 + b.X + c$ sont réelles.
Avec le cours de Terminale et de Sup : $b^2 - 4.a.c$ (noté Δ) est positif ou nul.

On étudie alors $3.a.X^2 + 2.b.X + c$. On calcule son discriminant $\Delta' = 4.b^2 - 12.a.c$.
Est il positif ? Le terme gênant est $12.a.c$ avec son signe moins. Je l'écris $3.(4.a.c)$.
On a alors $\Delta' = 4.b^2 - 3.(b^2 - \Delta) = 3.\Delta + b^2$ (bon, $4.b^2 - 12.a.c = b^2 + 3.(b^2 - 4.a.c)$ c'est évident).
Comme Δ et b^2 sont positifs, le nouveau discriminant est positif.
Les deux racines sont réelles.

Doit on traiter à part le cas $a = 0$ pour lequel la théorie du discriminant s'efface ?
Normalement oui. Il faut penser à tout, c'est ça la démarche des maths.
Mais dans le cas $a = 0$, les polynômes sont de degré 1. Il n'y a qu'une racine (oui, bon, je laisse à part $b = c = 0$) et elle est réelle, qu'il s'agisse de $b.X + c$ ou de $2.b.X + c$.

Mais la réciproque.
La question est « peut on passer de $4.b^2 - 12.a.c \geqslant 0$ à $b^2 - 4.a.c \geqslant 0$.
Mais voilà, l'hypothèse dit $b^2 + 3.(b^2 - 4.a.c) \geqslant 0$.
Et si b^2 est assez grand, $b^2 - 4.a.c$ peut être négatif.

On va donc construire un contre-exemple à partir de cette idée.
On va prendre $b^2 = 4$ et $b^2 - 4.a.c = -1$.
On choisit donc $b = 2$ et $a = 1$ et $c = 5/4$.

On constate alors

$X^2 + 2.X + 5/4$	$\Delta = -1$	pas de racine réelle
$3.X^2 + 4.X + 5/4$	$\Delta = 1$	deux racines réelles $-1/2$ et $-5/6$

Résumé : $(a.X^2 + b.X + c \in \mathbb{P}) \Rightarrow (3.a.X^2 + 2.b.X + c \in \mathbb{P})$ mais $(3.a.X^2 + 2.b.X + c \in \mathbb{P}) \not\Rightarrow (a.X^2 + b.X + c \in \mathbb{P})$.

Renversement.

IV∼0) Montrez que si $X^3 - S.X^2 + D.X - P$ est dans $\mathbb{P}$ alors $1 - S.X + D.X^2 - P.X^3$ est aussi dans $\mathbb{P}$ (traiter à part le cas $P = 0$).

On part de « les racines de $X^3 - S.X^2 + D.X - P$ est dans $\mathbb{P}$ ». On traduit : ses quatre racines sont réelles.

Que dire du polynôme $P.X^3 - D.X^2 + S.X - 1$? Qu'il est aussi de degré 3 et qu'il a trois racines.
L'une est réelle (valeurs intermédiaires). Mais que dire des deux autres ?

On traite à part le cas $P = 0$ qui conduit à un polynôme de degré seulement 2 voire moins.

Mais en fait, il suffit de lire la question suivante et de particulariser au degré 3.

Si a est racine (non nulle) de $X^3 - S.X^2 + D.X - P$, alors on a $a^3 - S.a^2 + D.a - P = 0$ puis $a^3.(1 - S.a^{-1} + D.a^{-2} - P.a^{-3}) = 0$.
Par intégrité, on a $1 - S.a^{-1} + D.a^{-2} - P.a^{-3} = 0$. On reconnaît que a^{-1} est racine de $1 - S.X + D.X^2 - P.X^3$.

Et comme on a raisonné par équivalence :
les racines de $1 - S.X + D.X^2 - P.X^3$ sont les inverses des racines de $X^3 - S.X^2 + D.X - P$.

Et comme l'application $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ va de $\mathbb{R}^*$ dans lui même, on déduit que les r_k sont réelles si et seulement si les $\dfrac{1}{r_k}$ le sont aussi.

IV∼1) Montrez que si P est un polynôme de $\mathbb{P}$, de degré d, alors $X^d.P\left(\dfrac{1}{X}\right)$ est aussi un polynôme, et qu'il est dans $\mathbb{P}$.

C'est la même histoire qu'au dessus, au degré n.

Log-concavité

IV∼2) Une suite réelle (n'ayant éventuellement qu'un nombre fini de termes) est dite **unimodulaire** si $\exists j \in \mathbb{N},\ \forall k,\ (k < j \Rightarrow a_k \leqslant a_{k+1})$ *et* $(k \geqslant j \Rightarrow a_k \geqslant a_{k+1})$.
Montrez : toute suite unimodulaire est majorée.

Qu'est ce qu'une suite uni modale ? C'est une suite d'abord croissante puis décroissante.

Elle est croissante jusqu'au rang j puisque $(k < j) \Rightarrow (a_k \leqslant a_{k+1})$,
puis décroissante au delà de ce rang.

Conséquence : une suite unimodulaire est majorée par son plus grand terme, là où elle change de sens de variation.

Proprement. On prend une suite unimodulaire, qu'on note (a_n).
On sait qu'il existe un indice j vérifiant une certaine propriété. On montre alors que tous les termes de la suite sont

plus petits que a_j.
Soit en effet un indice k quelconque (plus petit que le nombre de termes de la suite si celui ci est fini).
On a alors deux possibilités (disjonction de cas).
k est plus petit que j : $a_k \leqslant a_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant a_{j-1} \leqslant a_j$
k est plus grand que j : $a_j \geqslant a_{j+1} \geqslant \ldots \geqslant a_{k-1} \geqslant a_k$.
On a donc $\forall k,\ a_k \leqslant a_j$. C'est bon.

IV$\sim$3) Une suite réelle (a_k) (n'ayant éventuellement qu'un nombre fini de termes) est dite **log-concave** si $\forall k > 0,\ (a_k)^2 \geqslant a_{k-1}.a_{k+1}$.
Un élève propose le script suivant pour tester si une suite numérique a (de type `list of float`) est log-concave. Corrigez ses erreurs.

```
def log_concave(a) : #list of float -> boolean
....for k in range(n) :
........if a[k]**2 < a[k-1]*a[k+1] :
............return False
........else :
............return True
```

Pour tester si une suite est unimodulaire, on va regarder ses termes les uns après les autres et obéir à la contrainte.
Le test `a[k]**2 < a[k-1]*a[k+1]` correspond au critère de « non log-concavité ». Il doit donc retourner une erreur.

Mais quelles valeurs peut prendre `k` ? Il ne peut pas commencer à `0`, mais à `1`, sinon l'élément `a[0-1]` est étrange (il existe mais ne correspondant pas à ce qu'on doit tester).
Et où s'arrête `k` ? Qui est ce n du programme proposé ? L'indice du dernier terme de la suite c'est à dire len(L).
Sauf qu'il n'y a pas de terme d'indice `n` . Et même si le dernier `k` testé est `len(L)-1`, on ne doit pas regarder `a[len(L)-1+1]`. On s'arrêtera donc un temps plus tôt.
On attend donc un `range(1, len(L)-1)`.

```
def log_concave(a) : #list of float -> boolean
....n = len(a)
....for k in range(1,n-1) :
........if a[k]**2 < a[k-1]*a[k+1] :
............return False
....return True
```

Attention, la proposition

```
def log_concave(a) : #list of float -> boolean
....n = len(a)+1
....for k in range(n) :
........if a[k]**2 < a[k-1]*a[k+1] :
............return False
........else :
............return True
```

est une erreur. En effet, dès le premier test (`k=1`), on retourne `True` ou `False`, sans même tester les suivants.
Ce qu'il faut, c'est « si il y a une erreur détectée, on sort tout de suite (pas la peine de vérifier si on s'est trompé plusieurs fois, une erreur suffit) » et « si on est allé jusqu'au bout sans erreur alors c'est bon on répond `True` ».

IV$\sim$4) Pour quelles valeurs de α les suites géométriques de raison α sont elles log-concaves.

On se donne un réel α et on définit une suite (a_n), géométrique de raison α. Son terme général est donc $a_n = a_0.\alpha^n$ (le réel a_0 n'aura aucun rôle, même si ce n'est pas une évidence).
On veut $(a_0.\alpha^n)^2 \geqslant (a_0.\alpha^{n-1}).(a_0.\alpha^{n+1})$ pour tout n.
Or, ceci est toujours vrai (il y a égalité, donc inégalité).
Toutes les suites géométriques sont log-concaves. Et pour répondre à la question de l'énoncé $\boxed{S_\alpha = \mathbb{R}}$

Irai-je jusqu'à dire que les suites géométriques sont log-constantes ?

On part maintenant d'une suite log-concave (u_k). On traduit pour tout k : $(u_k)^2 \geqslant u_{k-1}.u_{k+1}$.
On multiplie la suite par son index. Le terme général devient $k.u_k$.
On se donne un entier k et on doit prouver $(k.u_k)^2 \geqslant (k-1).u_{k-1}.(k+1).u_{k+1}$.
On sent qu'il va y avoir un $k^2 \geqslant k^2 - 1 = (k-1).(k+1)$.

Mais on calcule une différence, c'est tout

$$(k.u_k)^2 - (k-1).u_{k-1}.(k+1).u_{k+1} = k^2.(u_k)^2 - (k^2-1).u_{k-1}.u_k$$

Si on l'écrit $k^2.((u_k)^2 - u_{k-1}.u_{k+1}) + u_{k-1}.u_{k+1}$ on est embêté car on ignore le signe de $u_{k-1}.u_{k+1}$.

Je m'attends à des raisonnements faux multipliant par $u_{k-1}.u_{k+1}$ la relation $k^2 \geqslant k^2-1$ alors même qu'on ignore le signe de $u_{k-1}.u_{k+1}$.

On factorise mieux :

$$(k.u_k)^2 - (k-1).u_{k-1}.(k+1).u_{k+1} = (k^2-1).((u_k)^2 - u_{k-1}.u_k) + (u_k)^2$$

Le produit $(k^2-1).((u_k)^2 - u_{k-1}.u_k)$ est fait de deux termes positifs. Le carré ajouté est positif, la différence $(k.u_k)^2 - (k-1).u_{k-1}.(k+1).u_{k+1}$ est positive.

On a donc prouvé (u_k) est log-convexe implique $(k.u_k)$ est log-convexe.

Rien ne dit que la réciproque soit vraie, d'ailleurs, la question n'est pas posée.

IV∼5) Montrez (pour n fixé) que la suite $(\binom{n}{k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ est unimodulaire (simplifiez $\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k}$) et log-concave.

La suite des coefficients le long d'une ligne du triangle de Pascal est bien croissante puis décroissante

1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

On fixe n. On étudie les variations de $k \longmapsto \binom{n}{k}$ en étudiant la différence

$$\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k-1)!.(k+1)!} - \frac{n!}{(n-k)!.k!}$$

Allez, quel est le dénominateur commun ? Si vous y tenez et ne réfléchissez pas : $(n-k-1)!.(k+1)!.(n-k)!.k!$. Mais quand même : $(k+1)! = k!.(k+1)$ et $(n-k)! = (n-k-1)!.(n-k)$. C'est visible non ? C'est la factorielle qui fait ça.

$$\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k-1)!.(k+1)!} - \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \frac{(n-k).n!}{(n-k)!.(k+1)!} - \frac{n!.(k+1)}{(n-k)!.(k+1)!}$$

On factorise et on cherche le signe

$$\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.(k+1)!}.\Big((n-k)-(k+1)\Big)$$

Le signe est donné par $n-2.k-1$.

Pour k de 0 à $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ la suite $k \longmapsto \binom{n}{k}$ est croissante.

Pour k de $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ à n la suite $k \longmapsto \binom{n}{k}$ est décroissante.

Pour la log-concavité, n est fixé, et on se donnek entre 1 et $n-1$ pour que les trois termes existent.

On doit comparer $\binom{n}{k}^2$ et $\binom{n}{k-1}.\binom{n}{k+1}$.

On va calculer la différence et factoriser tout ce qu'on peut

$$\binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k+1}.\binom{n}{k-1} = \frac{(n!)^2}{(k!)^2.((n-k)!)^2} - \frac{n!}{(k+1)!.(n-k-1)!}.\frac{n!}{(k-1)!.(n-k+1)!}$$

$$\binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k+1}.\binom{n}{k-1} = \frac{(n!)^2}{k!.(n-k)!.k!.(n-k)!}.\Big(1 - \frac{(n-k)}{(k+1)}.\frac{k}{(n-k+1)}\Big)$$

$$\binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k+1}.\binom{n}{k-1} = \frac{(n!)^2}{(k!)^2.((n-k!)^2}.\Big(\frac{(n-k+1).(k+1)-(n-k).k}{(n-k+1).(k+1)}\Big)$$

$$\binom{n}{k}^2 - \binom{n}{k+1}.\binom{n}{k-1} = \frac{(n!)^2}{(k!)^2.((n-k!)^2}.\Big(\frac{n+1}{(n-k+1).(k+1)}\Big)$$

Cette différence est positive, c'est bon !

D'autres chemins sont possibles, comme le calcul du quotient :

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}.\binom{n}{k+1}} = \frac{\frac{n!}{k!.(n-k)!}.\frac{n!}{k!.(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!.(n-k+1)!}.\frac{n!}{(k+1)!.(n-k-1)!}}$$

$$= \frac{(k-1)!.(n-k+1)!.(k+1)!.(n-k-1)!}{k!.(n-k)!.k!.(n-k)!} = \frac{1}{k}.\frac{(n-k+1)}{1}.\frac{k+1}{1}.\frac{1}{(n-k)}$$

et il ne reste qu'à comparer à 1. C'est la même chose, mais c'est moins lourd.

On peut aussi remplacer $\binom{n}{k}$ *par* $\binom{n}{k-1}.\frac{n-k}{k}$ *par des formules de dénombrement que vous connaissez peut être.*
Ce qu'il ne faut pas faire en tout cas : tenter une récurrence (et sur qui d'ailleurs ? Sur n ou sur k ?).

IV∼6) Une suite réelle $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ (n'ayant qu'un nombre fini $n+1$ de termes) est dite **ultra log-concave** si $\Big(\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\Big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est log-concave. Montrez que toute suite (finie) ultra-log-concave est log-concave.

On prend une suite finie de n termes qu'on suppose ultra-log-concave. Il faut montrer qu'elle est log-concave.

a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{k-1}	a_k	a_{K+1}	$\dots$	a_n
1	n	$\frac{n.(n-1)}{2}$	$\dots$	$\binom{n}{k-1}$	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$	$\dots$	1

On écrit l'hypothèse (pour tout k) :

$$\Big(\frac{a_k.k!.(n-k)!}{n!}\Big)^2 \geqslant \Big(\frac{a_{k-1}.(k-1)!.(n-k+1)!}{n!}\Big).\Big(\frac{a_{k+1}.(k+1)!.(n-k-1)!}{n!}\Big)$$

On garde à l'esprit notre objectif pour tout k : $(a_k)^2 \geqslant a_{k-1}.a_{k+1}$.
Simplifions quand même notre hypothèse (par $(n!)^2$ puis par $(k-1)!$) :

$$\Big(a_k\Big)^2.\Big(k!.(n-k)!.k!.(n-k)!\Big) \geqslant \Big(a_{k-1}.(k-1)!.(n-k+1)!\Big).\Big(a_{k+1}.(k+1)!.(n-k-1)!\Big)$$

$$\Big(a_k\Big)^2.\Big(k!.(n-k)!.(n-k)!\Big) \geqslant \Big(a_{k-1}.(k-1)!.(n-k+1)!\Big).\Big(a_{k+1}.(k+1).(n-k-1)!\Big)$$

Simplifions ensuite par $(k-1)!$ et aussi $(n-k-1)!$ et $(n-k)!$, tous positifs, ce qui ne change pas le sens des inégalités

$$\Big(a_k\Big)^2.\Big(k.1.(n-k)\Big) \geqslant \Big(a_{k-1}.1.(n-k+1)\Big).\Big(a_{k+1}.(k+1).1\Big)$$

A ce stade, on a obtenu $(a_k)^2 \geqslant \frac{(n-k+1).(k+1)}{k.(n-k)}.a_{k-1}.a_{k+1}$.

Et si on redisait : $\frac{(n-k+1).(k+1)}{k.(n-k)} \geqslant 1$ par calcul de la différence $\frac{(n-k+1).(k+1)}{k.(n-k)} - 1 = \frac{n+1}{k.(n-k)}$?

L'hypothèse d'ultra log-concavité donne (le facteur $a_{k-1}.a_{k+1}$ est positif, l'inégalité $\frac{(n-k+1).(k+1)}{k.(n-k)} \geqslant 1$ ne change pas de sens) :

$$(a_k)^2 \geqslant \frac{(n-k+1).(k+1)}{k.(n-k)}.a_{k-1}.a_{k+1} \geqslant 1.a_{k-1}.a_{k+1}$$

pour tout k . Et c'est la log-concavité simple.

IV∼7) Montrez que si la suite $(a_k)_{k\leqslant n}$ est ultra-log-concave, alors la suite $(k.a_k)_{k\leqslant n}$ l'est aussi.

IV∼8) Montrez que si $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant 5}$ est strictement positive et log-concave alors elle est unimodulaire.

Ultra-log-concavité et Viète

V∼0) On considère trois réels a, b et c. On prend les notations habituelles $S = a+b+c$, $D = a.b+a.c+b.c$ et $P = a.b.c$. Donnez le signe de $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ et déduisez $S^2 \geqslant 3.D$ puis $D^2 \geqslant 3.S.P$ (pensez aux inverses des racines).

Évidemment la quantité $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ est positive en tant que somme de carrés de réels.

Mais si on étudie ceci c'est sans doutes parce qu'il y a un lien avec la suite.
Calculons $S^2-3.D$ pour voir si cette différence est bien positive.

$$S^2-3.D = (a+b+c)^2-3.(a.b+b.c+c.a) = (a^2+b^2+c^2+2.a.b2.a.c+2.a.d)-3.(a.b+b.c+c.a)$$

$$S^2-3.D = a^2+b^2+c^2-(a.b+b.c+c.a)$$

Et là, on prend le temps de revenir au premier calcul :

$$0 \leqslant (a-b)^2+(b-)^2(c-a)^2 = (a^2-2.a.b+b^2)+(b^2-2.b.c+c^2)+(c^2-2.c.a+c^2)$$

$$0 \leqslant (a-b)^2+(b-)^2(c-a)^2 = (2.a^2+2.b^2+2.c^2-2.a.b-2.b.c-2.c.a)$$

La positivité de cette chose répond exactement à la question osée.

On est moins aidé pour $D^2 \geqslant 3.S.P$.
On calcule quand même

$$D^2-3.S.P = (a.b+a.c+b.c)^2-3.(a+b+c).(a.b.c) = a^2.b^2+a^2.c^2+b^2.c^2+2.a^2.b.c+2.a.b^2.c+2.a.b.c^2-3.(a+b+c).a.b.c$$

$$D^2-3.S.P = a^2.b^2+a^2.c^2+b^2.c^2-.a^2.b.c-.a.b^2.c-2.a.b.c^2$$

Et cette fois, on reconnaît $\dfrac{(a.b-a.c)^2+(a.c-c.b)^2+(c.b-b.a)^2}{2}$.

Oui, j'avoue, c'est moins évident. Mais sinon, c'est le résultat précédent applique à $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$ et $\dfrac{1}{c}$:
En effet $(S')^2 \geqslant 3.D'$ pour les inverses donne

$$\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)^2 \geqslant 3.\Big(\frac{1}{a}.\frac{1}{b}+\frac{1}{b}.\frac{1}{c}+\frac{1}{c}.\frac{1}{a}\Big)$$

et en revenant aux notations S, D et P pour les trois racines :

$$\frac{D^2}{P^2} = \Big(\frac{b.c+c.a+a.b}{a.b.c}\Big)^2 = \Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)^2 \geqslant 3.\frac{a+b+c}{a.b.c} = 3.\frac{S}{P}$$

V∼1) Montrez que si $a_0+a_1.X+a_2.X^2+a_3.X^3$ est dans $\mathbb{P}$ alors la suite $[a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3)$ est ultra log-concave.

On prend un polynôme $a_0+a_1.X+a_2.X^2+a_3.X^3$ qu'on suppose être dans $\mathbb{P}$. Il a donc trois racines a, b et c et on peut écrire les formules de Viète $a+b+c = -\dfrac{a_2}{a_3}$,$D = \dfrac{a_1}{a_3}$et $P = -\dfrac{a_0}{a_3}$.

On veut étudier l'ultra-log-concavité de la suite :

coefficient	a_0	a_1	a_2	a_3
binomial	1	3	3	1
quotient	a_0	$a_1/3$	$a_2/3$	a_3
test à faire	$\Big(\frac{a_1}{3}\Big)^2 \geqslant (a_0.\frac{a_2}{3}\Big)$			
	$\Big(\frac{a_2}{3}\Big)^2 \geqslant (\frac{a_1}{3}.a_3\Big)$			

Or, le test $\Big(\dfrac{a_1}{3}\Big)^2 \geqslant (a_0.\dfrac{a_2}{3}\Big)$ se ramène à $\Big(\dfrac{a_3.D}{3}\Big)^2 \geqslant (-a_3.P.\dfrac{-a_3.S}{3}\Big)$ c'est à dire $\dfrac{D^2}{9} \geqslant \dfrac{P.S}{3}$. Déjà prouvé.

Le second test $\left(\frac{a_2}{3}\right)^2 \geqslant (\frac{a_1}{3}.a_3\Big)$ se ramène à $\left(\frac{a_0.S}{3}\right)^2 \geqslant -\frac{a_3.D}{3}.(-a_3)$ c'est à dire $S^2 \geqslant 3.D$. Déjà prouvé.

Il suffit de bien regarder ce qu'on doit prouver. Juste avec les relations coefficients racines.

VI∼0) On prend cette fois quatre réels a, b, c et d. On introduit encore les notations $S = a+b+c+d$, $D = a.b+a.c+a.d+b.c+b.d+c.d$, $T = b.c.d+a.c.d+a.b.d+a.b.c$ et $P = a.b.c.d$. Montrez : $3.S^2 \geqslant 8.D$. Montrez : $4.D^2 \geqslant 9.S.T$.

Le polynôme $a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + a_3.X^3 + a_4.X^4$ va avoir cette fois quatre racines a, b, c et d.
On écrira les relations coefficients racines et on testera l'ultra-log-concavité

coefficient	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
binomial	1	4	6	4	1
quotient	a_4	$\frac{a_3}{4} = -\frac{S.a_4}{4}$	$\frac{a_2}{6} = \frac{D.a_4}{6}$	$\frac{a_1}{4} = -\frac{T.a_4}{4}$	$a_0 = P.a_4$

test à faire

$$\left(-\frac{a_4.S}{4}\right)^2 \geqslant a_4.\frac{D.a_4}{6}$$
$$\left(\frac{a_4.D}{6}\right)^2 \geqslant \frac{-a_4.S}{4}.\frac{-a_4.T}{4}$$
$$\left(-\frac{a_4.T}{4}\right)^2 \geqslant \frac{D.a_4}{6}.P.a_4$$

On a donc trois tests à faire (`range(1, 4)`) : $3.S^2 \geqslant 8.D$, $4.D^2 \geqslant 9.S.T$ et enfin $3.T^2 \geqslant 8.D.P$. On dirait bien que ce sont celles que l'énoncé demande.

Calculons comme demandé

$$3.S^2 - 8.D = 3.(a+b+c+d)^2 - 8.D = 3.(a^2+b^2+c^2+d^2+2.D) - 8.D = 3.(a^2+b^2+c^2+d^2) - 2.D$$

Comment prouver que cette différence est positive ?
Calculons comme par hasard

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 = (a^2 - 2.a.b + b^2) + \ldots$$

On a douze carrés, à regrouper trois à trois. Et les double produits.

$$\begin{array}{lllllllllll}
(a-b)^2 = & a^2 & +b^2 & & & -2.a.b & & & & & \\
(a-c)^2 = & a^2 & & +c^2 & & & -2.a.c & & & & \\
(a-d)^2 = & a^2 & & & +d^2 & & & -2.a.d & & & \\
(b-c)^2 = & & b^2 & +c^2 & & & & & -2.b.c & & \\
(b-d)^2 = & & b^2 & & +d^2 & & & & & -2.b.d & \\
(c-d)^2 = & & & c^2 & +d^2 & & & & & & -2.c.d
\end{array}$$

On a bien

$$0 \leqslant (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 = 3.(a^2+b^2+c^2+d^2) - 2.D = 3.S^2 - 8.D$$

C'est une des trois formules attendues.

On applique ce résultat aux inverses des racines : $3.(S')^2 - 8.D' \geqslant 0$.

$$3.\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\Big)^2 \geqslant 8.\Big(\frac{1}{a}.\frac{1}{b}+\frac{1}{a}.\frac{1}{c}+\frac{1}{a}.\frac{1}{d}+\frac{1}{b}.\frac{1}{c}+\frac{1}{b}.\frac{1}{d}+\frac{1}{c}.\frac{1}{d}\Big)$$

On reconnaît $3.\left(\frac{T}{P}\right)^2 \geqslant 8.\frac{D}{P}$ puis $3.T^2 \geqslant 8.D.P$. Trop fort, c'est la troisième.
Et sans effort !

Il nous manque quand même celle du milieu : $4.D^2 \geqslant 9.S.T$ (formule homogène effectivement).
On calcule la différence $4.(a.b+a.c+a.d+b.c+b.d+c.d)^2 - 9.(a+b+c+d).(b.c.d+a.c.d+a.b.d+a.b.c)$.
Les développement de $(a.b+a.c+a.d+b.c+b.d+c.d)^2$ donne six termes comme $(a.b)^2$
Des double produits totalement panachés comme $(a.b).(c.d)$ (il y en a trois en fonction de qui était marié avec a par exemple).
Des double produits mal équilibrés comme $(a.b).(a.c)$ (il y en a

	$a.b$	$a.c$	$a.d$	$b.c$	$b.d$	$c.d$
$a.b$	$(a.b)^2$	$a^2.b.c$	$a^2.b.d$	$a.b^2.c$	$a.b^2.d$	$a.b.c.d$
$a.c$	$a^2.b.c$	$(a.c)^2$	$a^2.c.d$	$a.b.c^2$	$a.b.c.d$	$a.c^2.d$
$a.d$	$a^2.b.d$	$a^2.c.d$	$(a.d)^2$	$a.b.c.d$	$a.b.d^2$	$a.c.d^2$
$b.c$	$a.b^2.c$	$a.b.c^2$	$a.b.c.d$	$(b.c)^2$	$b^2.c.d$	$b.c^2.d$
$b.d$	$a.b^2.d$	$a.b.c.d$	$a.b.d^2$	$a.b^2.d$	$(b.d)^2$	$b.c.d^2$
$c.d$	$a.b.c.d$	$a.c^2.d$	$a.c.d^2$	$b.c^2.d$	$b.c.d^2$	$(c.d)^2$

à multiplier par 4

et

	$b.c.d$	$a.c.d$	$a.b.d$	$a.b.c$
a	$a.b.c.d$	$a^2.c.d$	$a^2.b.d$	$a^2.b.c$
b	$b^2.c.d$	$a.b.c.d$	$a.b^2.d$	$a.b^2.c$
c	$b.c^2.d$	$a.c^2.d$	$a.b.c.d$	$a.b.c^2$
d	$b.c.d^2$	$a.c.d^2$	$a.b.d^2$	$a.b.c.d$

à multiplier par 9

On soustrait et il reste $4.((a.b)^2 + (a.c)^2 + (a.d)^2 + (b.c)^2 + (b.d)^2 + (c.d)^2)$
mais aussi $-(a^2.b.c + a^2.c.d + a^2.b.d + b^2.a.c + b^2.a.d + b^2.c.d + c^2.a.b + c^2.a.d + c^2.b.d + d^2.a.b + d^2.a.c + d^2.b.c)$
et enfin $-12.a.b.c.d$.

Que faire de ceci ? Comment montrer que c'est positif ?

J'ai envie de développer ce qui suit :

$(a.b-a.c)^2$	$(a.b-a.d)^2$	$(a.b-b.c)^2$	$(a.b-b.d)^2$	$(a.b-c.d)^2$
	$(a.c-a.d)^2$	$(a.c-b.c)^2$	$(a.c-b.d)^2$	$(a.c-c.d)^2$
		$(a.d-b.c)^2$	$(a.d-b.d)^2$	$(a.d-c.d)^2$
			$(b.c-b.d)^2$	$(b.c-c.d)^2$
				$(b.d-c.d)^2$

Mais ça ne permet pas de conclure.
Je continue à chercher et me demande si j'aurais dû poser cette question.

VI∼1) Montrez que si $\sum_{k=0}^{4} a_k.X^k$ est dans $\mathbb{P}$ alors la suite $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$ est ultra log-concave.

Ultra-log-concavité et $\mathbb{P}$

VII∼0) Soit $P = \sum_{j=0}^{n} a_j.X^j$ dans $\mathbb{P}$ de degré n et k un entier vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
On pose : $Q_1(X) = P^{(k-1)}(X)$, $Q_2(X) = X^{n-k+1}.Q_1\Big(\dfrac{1}{X}\Big)$ et $Q(X) = (Q_2)^{(n-k-1)}(X)$.
Montrez que ce sont tous des polynômes. Montrez qu'ils sont tous dans $\mathbb{P}$.
Montrez que $Q(X)$ est de degré inférieur ou égal à 2 et donnez ses coefficients en fonction des a_i.

Si P est un polynôme de degré n, alors ses dérivées successives sont des polynômes.
Et $P^{(k-1)}(X)$ est de degré $n-(k-1)$.
On peut même donner son terme dominant $n.(n-1)\ldots(n-k+2).a_n.X^{n-(k-1)}$.

En tant que dérivée d'un élément de $\mathbb{P}$, il est dans $\mathbb{P}$ (partie « dérivation »).

Il est de degré $n-k+1$. La transformation de $Q(X)$ en $X^{n-k+1}.Q\Big(\dfrac{1}{X}\Big)$ redonne bien un polynôme, et ce polynôme est dans $\mathbb{P}$ (partie « renversement »).

Le polynôme $Q_2(X)$ a gardé le même degré et peut même avoir perdu un ou deux degrés comme déjà mentionné.

On le dérivé $n-k-1$ fois. On a toujours un polynôme, et on reste dans $\mathbb{P}$ (partie « dérivation »).

A ce stade, on a donc un élément de $\mathbb{P}$, de degré $(n-k+1)-(n-k-1)$ ou même moins.

Application numérique : $\big(n-(k-1)\big)-(n-k-1)=2$.

$Q_2(X)$ est au maximum de degré 2 et est dans $\mathbb{P}$. Son discriminant est donc positif.

VII∼1) Exemple. On prend $n=5$ et $P = a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + a_3.X^3 + a_4.X^4 + a_5.X^5$.
Calculez $Q_1(X)$, $Q_2(X)$ et $Q(X)$ dans le cas $k=3$. Déduisez $(a_3)^2 \geqslant 2.a_2.a_4$. Montrez que la suite $(a_k)_{k\leqslant 5}$ est ultra-log-concave.

On traite donc un exemple avec $n=5$ et $k=3$.
On part de $a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + a_3.X^3 + a_4.X^4 + a_5.X^5$.
On le dérive deux fois : $Q_1(X) = 0 + 0 + 2.a_2 + 6.a_3.X + 12.a_4.X^2 + 20.a_5.X^3$.

On calcule $X^3.Q_1\left(\frac{1}{X}\right) = X^3.\left(2.a_2 + 6.a_3.\frac{1}{X} + 12.a_4.\frac{1}{X^2} + 20.a_5.\frac{1}{X^3}\right) = 2.a_2.X^3 + 6.a_3.X^2 + 12.a_4.X + 20.a_5)$.
On dérive $5-3-1$ fois : $\boxed{Q_2(X) = 6.a_2.X^2 + 12.a_3.X + 12.a_4}$

Comme ce polynôme est dans $\mathbb{P}$, son discriminant est positif ou nul. mais je l'écris déjà $6.(a_2 + 2.a_3.X + 2.a_4.X^2)$.
On a donc $4.(a_3)^2 - 8.a_2.a_4 \geqslant 0$.

Et pour l'ultra log-concavité de la suite $(a_j)_{j\leqslant 5}$? Quel rapport avec ce qu'on a prouvé ?

Regardons

coefficient	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
binomial	1	5	10	10	5	1
quotient	a_0	$\frac{a_1}{5}$	$\frac{a_2}{10}$	$\frac{a_3}{10}$	$\frac{a_4}{5}$	1
à prouver	$\left(\frac{a_1}{5}\right)^2 \geqslant a_0.\frac{a_2}{10}$					
	$\left(\frac{a_2}{10}\right)^2 \geqslant \frac{a_1}{5}.\frac{a_3}{5}$					
	$\left(\frac{a_3}{10}\right)^2 \geqslant \frac{a_2}{10}.\frac{a_4}{5}$					$\star$
	$\left(\frac{a_4}{5}\right)^2 \geqslant \frac{a_3}{10}.a_5$					

On reconnaît qu'on a prouvé le résultat de la ligne $*$.
Il faut prouver les autres.
On se doute qu'il va s'agir de travailler pour d'autres valeurs de k.

	$Q_1(X)$	$Q_2(X)$	$Q(X)$	$\Delta \geqslant 0$
$k=1$	$a_0 + a_1.X + \ldots + a_4.X^4 + a_5.X^5$	$a_0.X^5 + a_1.X^4 + \ldots + a_4.X + a_5$	$60.a_0.X^2 + 24.a_1.X + 6.a_2$	$16.(a_1)^2 - 40.a_0.a_2 \geqslant 0$
$k=2$	$a_1 + 2.a_2.X + \ldots + 4.a_4.X^3 + 5.a_5.X^4$	$a_1.X^4 + 2.a_2.X^3 + \ldots + 4.a_4.X + 5.a_5$	$12.a_1.X^2 + 12.a_2.X + 6.a_3$	$4.(a_2)^2 - 8.a_1.a_3 \geqslant 0$
$k=3$	$2.a_2 + 6.a_3.X + 12.a_4.X^2 + 20.a_5.X^3$	$2.a_2.X^3 + 6.a_3.X^2 + 12.a_4.X + 20.a_5$	$6.a_2.X^2 + 12.a_3.X + 12.a_4$	$4.(a_3)^2 - 8.a_2.a_4 \geqslant 0$
$k=4$	$6.a_3 + 24.a_4.X + 60.a_5.X^2$	$6.a_3.X^2 + 24.a_4.X + 60.a_5$	$6.a_3.X^2 + 24.a_4.X + 60.a_5$	$16.(a_4)^2 - 40.a_3.a_5 \geqslant 0$

Chacune de ces lignes correspond à une inégalité à prouver. Trop fort !

VII~2) On revient au cas général. Déduisez que la suite $(a_k)_{k\leqslant n}$ est ultra-log-concave.

On part de $P(X)$ de la forme $\sum_{j=0}^{n} a_j.X^j$ et on la dérive k fois.

Il suffit de dériver chaque X^j k fois. La formule est dans le cours : $(x \longmapsto x^j)^{(k)} = (x \longmapsto \frac{j!}{(j-k)}.x^{j-k})$.

Le facteur $\frac{j!}{(j-k)!}$ est en fait $j.(j-1)\ldots(j-k+1)$ formé de k facteurs descendants. On l'écrit aussi $\prod_{i=0}^{k-1}(j-i)$.

On ne garde évidemment que les termes qui n'ont pas disparu après k dérivation : $P^{(k)}(X) = \sum_{j=k}^{n} \frac{j!}{(j-k)!}.X^{j-k}$.

Mais il ne faut dériver que $k-1$ fois :

$$Q_1(X) = \sum_{j=k-1}^{n} \frac{j!}{(j-k+1)!}.X^{j-k+1}$$

On remplace X par $\frac{1}{X}$: $Q_1\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{j=k-1}^{n} \frac{j!}{(j-k+1)!}.X^{k-j-1}$.

On multiplie par X^{n-k+1} :

$$Q_2(X) = X^{n-k+1}.Q_1(X) = \sum_{j=k-1}^{n} \frac{j!}{(j-k+1)!}.X^{n-j}$$

On peut ré-indexer si on y tient avec $p = n-j$

$$Q_2(X) = \sum_{p=0}^{n-k+1} \frac{(n-p)!}{(n-p-k+1)!}.X^p$$

et on confirme le degré obtenu avant l'étude de l'exemple.

On dérive maintenant $n-k-1$ fois. Les termes de degré inférieur à $n-k-1$ disparaissent. Il ne reste donc que trois termes : $p=n-k+1$, $p=n-k$ et $p=n-k-1$ (c'est aussi $j=k-1$, $j=k$ et $j=k+1$.
On utilise encore la formule pour la dérivée $(n-k-1)^{eme}$ d'un monôme X^p :

$$Q(X)=(Q_2)^{(n-k-1)}(X)=\sum_{j=k-1}^{k+1}\frac{j!}{(j-k+1)!}.(X^{n-j})^{(n-k-1)}$$

$$Q(X)=\sum_{j=k-1}^{k+1}\frac{j!}{(j-k+1)!}.\frac{(n-j)!}{((n-j)-(n-k-1))!}.X^{n-j-(n-k-1)}$$

On a « simplement » $Q(X)=\displaystyle\sum_{j=k-1}^{k+1}\frac{j!}{(j-k+1)!}.\frac{(n-j)!}{(k-j+1)!}.X^{k-j+1}$.

Et comme il n'y a que trois termes

$j=k-1$	$j=k$	$j=k+1$
$\frac{(k-1)!}{0!}.\frac{(n-k+1)!}{2!}.a_{k-1}.X^2$	$\frac{k!}{1!}.\frac{(n-k)!}{1!}.a_k.X$	$\frac{(k+1)!}{2!}.\frac{(n-k-1)!}{0!}.a_{k+1}$

On peut encadrer :

$$\boxed{Q(X)=\frac{(k-1)!.(n-k+1)!.a_{k-1}}{2}.X^2+k!.(n-k)!.a_k.X+\frac{(k+1)!.(n-k-1)!.a_{k+1}}{2}}$$

C'est bien un polynôme de degré 2 (voire moins si a_{k+1} est nul).

Mais on a montré qu'il était dans $\mathbb{P}$. C'est donc que son discriminant est positif ou nul.

$$0\leqslant\Delta=(k!.(n-k)!.a_k)^2-4.\frac{(k-1)!.(n-k+1)!.a_{k+1}}{2}.\frac{(k+1)!.(n-k-1)!.a_{k+1}}{2}$$

On efface un facteur 4 et il reste $(k!.(n-k)!.a_k)^2\geqslant(k-1)!.(n-(k-1))!.a_{k-1}.(k+1)!.(n-(k+1))!.a_{k+1}$.
Quitte à diviser par $(n!)^2$ et à écrire $\dfrac{\alpha.\beta}{n!}=\dfrac{\beta}{\frac{n!}{\alpha}}$ on aboutit à

$$\frac{(a_k)^2}{\left(\frac{n!}{k!.(n-k)!}\right)^2}\geqslant(\frac{a_{k-1}}{\frac{n!}{(k-1)!.(n-(k-1))!}}.\frac{a_{k+1}}{\frac{n!}{(k+1)!.(n-(k+1))!}}$$

et c'est l'ultra-log-concavité de la suite des coefficients du polynôme au rang .
Ce résultat est vrai pour tout k, on a bien l'ultra-log-concavité de la suite $(a_0,\dots a_n)$.

Exemple

VIII∼0) On définit la suite $(T_n(X))$ par $T_0(X)=1$, $T_1(X)=X$ et $T_{n+1}(X)=2.X.T_n(X)-T_{n-1}(X)$. Calculez $T_n(X)$ pour n de 0 à 5 et montrez qu'ils sont tous dans $\mathbb{P}$.

On calcule les premiers avec la formule $T_{n+1}(X)=2.X.T_n(X)-T_{n-1}(X)$. En particulier : $P_2(X)=2.X.X-1$ puis $P_3(X)=2.X.(2.X^2-1)-X$ et ainsi de suite.

On a la forme explicite des polynômes, pas si moches :

$T_0(X)=1$
$T_1(X)=X$
$T_2(X)=2.X^2-1$
$T_3(X)=4.X^3-3.X$
$T_4(X)=8.X^4-8.X^2+1$
$T_5(X)=16.X^5-20.X^3+5.X$

On en veut les racines ? C'est facile pour les premiers. Pour le troisième, 0 est racine, et on a les deux autres.
Pour le polynôme de degré 4, on commence par trouver x^2 si x est racine : $8.(x^2)^2-8.x^2+1=0$. On passe ensuite aux racines.
On fait de même pour celui de degré 5 une fois isolée la racine 0.

$T_0(X)=1$	aucune				
$T_1(X)=X$			0		
$T_2(X)=2.X^2-1$		$-\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$	
$T_3(X)=4.X^3-3.X$		$-\sqrt{3}/2$	0	$\sqrt{3}/2$	
$T_4(X)=8.X^4-8.X^2+1$	$-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$		$\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
$T_5(X)=16.X^5-20.X^3+5.X$	$-\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2.\sqrt{2}}$	$-\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	0	$\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2.\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

Toutes les racines trouvées sont réelles, ces polynômes sont dans $\mathbb{P}$. Y compris le premier puisqu'il n'a pas de racine non réelle. Il n'a pas de racine !

Pour n et θ donnés, la relation $\cos((n+1).\theta)) + \cos((n-1).\theta) = 2.\cos(\theta).\cos(n.\theta)$ vient de la transformation de somme en produit :

$$\cos(p)+\cos(q) = \cos\left(\frac{p+q}{2}+\frac{p-q}{2}\right)+\cos\left(\frac{p+q}{2}-\frac{p-q}{2}\right) = \cos.\cos - \sin.\sin + \cos.\cos + \sin.\sin = 2.\cos.\cos$$

Ici : $\dfrac{p+q}{2} = \dfrac{(n+1).\theta+(n-1).\theta}{2} = \cos(n.\theta)$ et $\dfrac{p-q}{2} = \dfrac{(n+1).\theta-(n-1).\theta}{2} = \cos(\theta)$.

Cette formule va nous permettre de mener une récurrence forte sur n à θ fixé.

On se fixé θ et pour tout n, on note P_n la propriété $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$.

On initialise avec $\cos(0.\theta) = 1$ et $\cos(1.\theta) = \cos(\theta)$.
Pour faire moins escroc, on rappelle aussi $\cos(2.\theta) = 2.\cos^2(\theta) - 1$.

On se donne n et on suppose les propriétés P_n et P_{n-1} vraies. On a donc $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ et $T_{n-1}(\cos(\theta)) = \cos((n-1).\theta)$.
On a envie de prouver $T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1).\theta)$. Il suffit d'appliquer déjà la définition de T_{n+1}

$$T_{n+1}(\cos(\theta)) = 2.\cos(\theta).T_n(\cos(\theta)) - T_{n-1}(\cos(\theta))$$

en substituant $\cos(\theta)$ à la variable formelle X. Mais avec l'hypothèse de récurrence

$$T_{n+1}(\cos(\theta)) = 2.\cos(\theta).\cos(n.\theta) - \cos((n-1).\theta)$$

On utilise alors la formule démontrée juste avant en toute généralité en faisant passer $\cos((n-1).\theta)$ de l'autre côté :

$$T_{n+1}(\cos(\theta)) = 2.\cos(\theta).\cos(n.\theta) - \cos((n-1).\theta) = \cos((n+1).\theta)$$

On a bien prouvé $(P_0 \ et\ P_1)\ et\ (\forall n,\ (P_{n-1}\ et\ P_n) \Rightarrow (P_{n+1}))$, la propriété est vraie pour tout n.

VIII∼1) Montrez que chaque $T_n(X)$ est un polynôme à coefficients réels de degré n.

Les deux premiers $T_n(X)$ sont des polynômes.
Si pour un rang n donné quelconque $T_n(X)$ et $T_{n-1}(X)$ sont des polynômes, alors par construction (produit, somme de polynômes) $T_{n+1}(X)$ est aussi un polynôme.

Et pour le degré ? $T_1(X)$ est de degré 1 et $T_2(X)$ est de degré 2.
Supposons pour un n quelconque donné que $T_n(X)$ est de degré n et $T_{n-1}(X)$ est de degré $n-1$.
Alors par multiplication simple $2.X.T_n(X)$ est de degré $n+1$.
On lui soustrait un polynôme de degré strictement plus petit, on garde un polynôme de degré $n+1$.
Par récurrence à double hérédité, chaque $T_n(X)$ est de degré n (même mT_0 (X) tiens !).

VIII∼2) Montrez pour tout n et tout θ : $\cos((n+1).\theta)) + \cos((n-1).\theta) = 2.\cos(\theta).\cos(n.\theta)$. Déduisez $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$.

Voir plus haut.

VIII∼3) Montrez que les réels $\cos\left(\dfrac{2.k+1}{2.n}.\pi\right)$ sont tous racines de T_n (k dans $\mathbb{Z}$). Déduisez que chaque $T_n(X)$ est dans $\mathbb{P}$.

Ayant $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ on peut l'appliquer à un cas particulier

$$T_n\Big(\cos\Big(\frac{2.k+1}{2.n}.\theta\Big)\Big) = \cos\Big(n.\frac{2.k+1}{2.n}.\theta\Big) = \cos\Big(k.\pi+\frac{\pi}{2}\Big) = (-1)^k.\cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 0$$

Même si ça ne sert pas vraiment, j'ai utilisé $\cos(k.\pi+\theta) = (-1)^k.\cos(k.\theta)$ qui fait partie du cours. On la démontre en disjonctant les cas : $k == 2.p$ et $k = 2.p+1$).

Chaque réel $\cos\left(\frac{2.k+1}{2.n}.\pi\right)$ est une racine de $T_n(X)$.
Cela veut il dire que toutes les racines de $T_n(X)$ sont réelles.
N'allons pas trop vite. Il se pourrait que le polynôme $T_n(X)$ ait d'autres racines que ces nombres.
Et il se pourrait que certains de ces autres racines ne soient pas réelles.
Soyons logique et rigoureux !

Mais voilà, le polynôme $T_n(X)$ a n racines dans $\mathbb{C}$ puisqu'il est de degré n.
Et on en a donné combien ?
Une infinité vont dire ceux qui prennent $\cos\left(\frac{2.k+1}{2.n}.\pi\right)$ avec k dans $\mathbb{Z}$ tout entier.
Mais n'abusons pas ! Le cosinus est périodique. Donc on retrouvera plusieurs fois la même valeur.
Alors combien finalement ?
Faisons varier k de 0 à $n-1$.
L'angle $\frac{2.k+1}{2.n}.\pi$ va de $\frac{\pi}{2.n}$ à $\frac{2.n-1}{2.n}.\pi$ en augmentant peu à peu. On reste entre 0 et π.
On a donc n angles tous distincts entre 0 et π.
Ce qui donne n réels distincts (application cosinus strictement décroissante).

On a donc trouvé n racines.
Toutes réelles. Et comme le polynôme est de degré n on a toutes ses racines.

Tous nos T_n (et leurs dérivées et leurs produits) sont dans $\mathbb{P}$.

VIII~4) Montrez : $T_n(T_p(X)) = T_p(T_n(X)) = T_{n.p}(X)$ pour tout couple $(n,\ p)$.

Elle ne sert pas, et elle n'était pas dans le sujet de Mines Ponts.
D'ailleurs, ces polynômes de Tchebychev n'étaient pas dans le sujet de Mines-Ponts. Mais comme ce sont des classiques, je les ai glissés ici.

On veut montrer $T_n(T_p(X)) = T_{n.p}(X)$ (et on aura aussi $T_p(T_n(X)) = T_{p.n}(X)$ par symétrie des rôles, puis par transitivité on a la grande égalité).

Et la clef est de regarder en remplaçant X par $\cos(\theta)$.
Et là c'est une évidence avec la propriété de nos polynômes (une fois avec p et θ et une fois avec n et $p.\theta$)

$$T_n(T_p(\cos(\theta))) = T_n(\cos(p.\theta)) = \cos(n.(p.\theta)) = \cos((n.p).\theta)$$

Mais si on reprend la définition de $T_{n.p}$ on a même

$$T_n(T_p(\cos(\theta))) = T_n(\cos(p.\theta)) = \cos((n.p).\theta) = T_{n.p}(\cos(\theta))$$

La formule $T_p(T_p(X)) = T_{n.p}(X)$ semble vraie. mais seulement pour les X de la forme $\cos(\theta)$.

Est ce une arnaque de passer outre et de dire « donc $T_{n.p}(X) = T_n(T_p(X))$?
Oui, car en fait, on peut dire qu'on ne l'a que pour des X entre -1 et 1 (pardon, on n'a égalité des fonctions polynômes que pur des x entre -1 et 1).

Mais là, on peut avoir recours à une astuce : on étudie la fonction polynôme $x \longmapsto T_n(T_p(x)) - T_{n.p}(x)$ (de degré inférieur ou égal à $n.p$).
Elle est nulle pour tout x de $[-1,\ 1]$ (on l'écrit $x = \cos(\theta)$).
Elle a une infinité de racines. Elle a plus de racines que son degré ! C'est la fonction polynôme nulle.
La différence est nulle, les deux polynômes sont égaux.

◃50▹ Ma calculatrice a trouvé $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} \simeq 0,638$ et aussi $\frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}} \simeq 0,638$. Est ce le fruit du hasard si ils ont l'air égaux ? Prouvez moi que non.
Indication : on pourra poser $x = \sqrt[3]{2}$ pour simplifier les calculs.
On pourra aussi multiplier par $\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}+1)^3}$, si si !

On va prouver $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \dfrac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}$ en calculant le cube de chacun de ces deux nombres.
Si ils sont égaux, on pourra conclure.
Le membre de gauche a pour cube $\sqrt[3]{2}-1$ (positif).
Pour celui de droite, on a $\dfrac{(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3}{9}$. On va avoir besoin d'initiative :
• développer $(a+b+c)^3$ (et trouver après calcul $a^3+b^3+c^3+3.a^2.b+3.a^2.c+3.b^2.a+3.b^2.c+3.c^2.a+3.c^2.b+6.a.b.c$)
• poser $x=\sqrt[3]{2}$
Finalement, on développe $(1-x+x^2)^3$ et c'est plus simple, surtout si on tient compte de $x^3=2$:

$$(1-x+x^2)^3 = calcul = x^6-3.x^5+6.x^4-7.x^3+6.x^2-3.x+1 = 4-6.x^2+12.x-7.2+6.x^2-3.x+1 = -9+9.x$$

On divise par 9, il y a bien égalité.

Mais c'est quand même calculatoire.

Et si on lisait la petite indication. On va multiplier par $\sqrt[3]{2}+1$ (c'est bien $\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}+1)^3}$) dès le début.
A droite, on développe $(1-x+x^2).(1+x)$ et c'est classique

$$\frac{(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}).(\sqrt[3]{2}+1)}{\sqrt[3]{9}} = \frac{(\sqrt[3]{2}+1)-(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})+(\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4})}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{8}+1}{\sqrt[3]{9}} = \frac{2+1}{\sqrt[3]{9}} = \frac{3}{3^{2/3}} = 3^{1/3}$$

A gauche, on calcule quitte à réunir sous le m^me signe racine et à développer $(x+1)^3$:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}.\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}+1)^3} = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}-1).(\sqrt[3]{2}+1)^3} = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}-1).(2+3.\sqrt[3]{4}+3.\sqrt[3]{2}+1)}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}.\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}+1)^3} = \sqrt[3]{3.(\sqrt[3]{2}-1).(1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})} = \sqrt[3]{3.(\sqrt[3]{8}-1)} = \sqrt[3]{3}$$

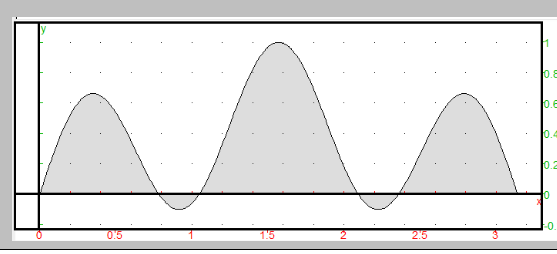
Bref, on a établi : $\sqrt[3]{(x-1)}.\sqrt[3]{(x+1)^3} = \dfrac{1-x+x^2}{\sqrt[3]{9}}.(x+1)$, il reste à simplifier par $x+1$ (non nul) pour conclure.

◁51▷

Transformez le produit $\cos(2.t).\sin(3.t)$ en somme de sinus et/ou de cosinus.
Déduisez $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(2.t).\sin(3.t).dt = \frac{6}{5}$.
Montrez pur tout x de $]0,\ \pi[$:

$$\cos(x).\cos(2.x).\cos(3.x) = \frac{\sin(4.x).\cos(3.x)}{4.\sin(x)}$$

Déduisez $\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right).\cos\left(\dfrac{2.\pi}{7}\right).\cos\left(\dfrac{3.\pi}{7}\right) = \dfrac{1}{8}$.



L'application intégrée $x \longmapsto \cos(2.t).\sin(3.t)$ est continue, donc intégrable. Ensuite, on a juste à écrire

$$\cos(2.t).\sin(3.t) = \frac{\sin(2.t+3.t)+\sin(3.t-2.t)}{2}$$

Une primitive est donc $t \longmapsto -\dfrac{\cos(5.t)}{10} - \dfrac{\cos(t)}{2}$. Le reste n'est que calcul.

Si on doit comparer $\cos(x).\cos(2.x).\cos(3.x)$ et $\dfrac{\sin(4.x).\cos(3.x)}{4.\sin(x)}$ il suffit de comparer $\cos(x).\sin(2.x)$ et $\dfrac{\sin(4.x)}{4.\sin(x)}$.
Par produit en croix, il suffit de constater qu'on applique deux fois la formule $\sin(t).\cos(t) = \dfrac{\sin(2.t)}{2}$.

On a directement

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right).\cos\left(\frac{2.\pi}{7}\right).\cos\left(\frac{3.\pi}{7}\right) = \frac{\sin\left(\frac{4.\pi}{7}\right).\cos\left(\frac{4.\pi}{7}\right).}{4.\sin\left(\frac{\pi}{7}\right).} = \frac{\sin\left(\frac{4.\pi}{7}-\frac{3.\pi}{7}\right)+\sin\cos\left(\frac{4.\Pi}{7}-\frac{3.\pi}{7}\right).}{8.\sin\left(\frac{\pi}{7}\right).} = \frac{0+\sin(\pi/7)}{8.\sin(\pi/7)} = \frac{1}{8}$$

Il a fallu quand même rappeler $\sin(a).\cos(b) = \dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$.

◁52▷ Montrez que l'une des racines du polynôme $X^3 + (1 - 20.i).X^2 - (137 + 15.i).X - 50 + 310.i$ est imaginaire pur (en la trouvant).

Posez la division euclidienne.

Trouvez les deux autres racines et montrez que les trois racines forment un triangle isocèle rectangle.

On ne cherche pas comme un dingue des i, $2.i$, $-2.i$ et autres.

On réfléchit. Si on a une solution imaginaire pure $i.a$, alors il doit être simple d'identifier partie réelle et partie imaginaire.
On va donc raisonner par analyse [3] et synthèse [4].

On écrit donc
$$(i.a)^3 + (1 - 20.i).(i.a)^2 - (137 + 15.i).(i.a) - 50 + 310.i$$
On identifie partie réelle et partie imaginaire
$$0 - a^2 + 15.a - 50 = 0 \ et \ -a^3 + 20.a^2 - 137.a + 310 = 0$$
On résout l'équation du second degré (deux racines 5 et 10). On reporte dans la seconde et seule 5 convient.

On tient la seule racine possible : $5.i$ et d'ailleurs quand on reporte, on annule bien partie réelle et partie imaginaire.

$$\begin{array}{cccc|ccc}
X^3 & +(1-20.i).X^2 & -(137+15.i).X & -50+310.i & X & -5.i & \\
\cline{5-6}
-(X^3 & -5.i.X^2) & & & X^2 & +(1-15.i).X & -62-10.i \\
\cline{1-2}
 & (1-15.i).X^2 & -(137+15.i).X & & & & \\
 & -((1-15.i).X^2 & +(75-5.i).X) & & & & \\
\cline{2-3}
 & & (-62-10.i).X & -50+310.i & & & \\
 & & -((-62-10.i).X & -50+310.i) & & & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

Et pourquoi ne tricherais-je pas. On note z_1, z_2 et $5.i$ le strois racines.
On sait : $z_1 + z_1 + 5.i = 20.i - 1$ et $z_1.z_2.(5.i) = 50 - 310.i$.
On trouve alors $z_1 + z_2$ et $z_1.z_2$. On n'a plus qu'aà écire le quotient $X^2 - (z_1 + z_2).X + z_1.z_2$ (et le reste est nul).

On résout à présent $z^2 + (1 - 15.i).z - 62 - 10.i = 0$ d'inconnue complexe z.

On calcule le discriminant :
$$(1 - 15.i)^2 - 4.(-62 - 10.i) = 1 - 225 - 30.i + 248 + 40.i = 24 + 10.i$$

On cherche les racines carrées de ce complexe en résolvant

$\Re e$	$a^2 - b^2$	$= 24$
module	$a^2 + b^2$	$= \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$
$\Im m$	$2.a.b$	$= 10$

Je trouve $\delta = 5 + i$ et je vérifie.

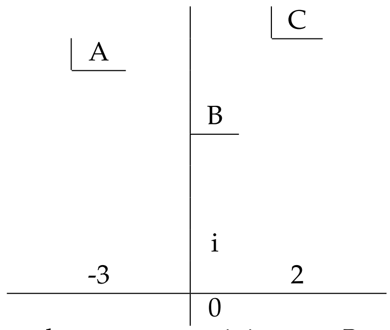
Les deux racines sont donc $\frac{15.i-1+(5+i)}{2} = 2 + 8.i \ et \ \frac{15.i-1-(5+i)}{2} = -3 + 7.i$

On a nos trois racines qu'on peut disposer dans le plan complexe : $-3 + 7.i$, $5.i$ et $2 + 8.i$.

On les nomme

z_A	z_B	z_C
$-3 + 7.i$	$5.i$	$2 + 8.i$

3. je cherche la solution à coups de conditions nécessaires en supposant qu'il en existe une
4. on propose on vérifie

Sur le dessin, 

on se dit que le sommet « isocèle » du triangle doit être en B

On se ramène donc avec « origine en B » en calculant les affixes des deux vecteurs $z_A - z_B$ et $z_C - z_B$

$z_A - z_B$	$z_B - z_B$	$z_C - z_B$
$-3 + 2.i$		$2 + 3.i$

Les deux vecteurs ont la même norme $\sqrt{3^2 + 2^2}$. Triangle isocèle.
Et on passe de l'un à l'autre par multiplication par i : rotation d'angle $\pi/2$.
On a bien un triangle isocèle rectangle : $z_A - z_B = e^{i.\pi/2}.(z_C - z_B)$.