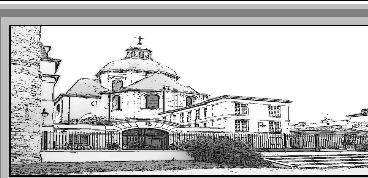
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 4 novembre
M.P.S.I.2



2024 2025

TD06

.	Quantification G est l'ensemble et $*$ est la loi. Une loi est une opération, qui prend deux éléments a et b et en calcule un nouveau, qu'on note $a * b$ si $*$ est le nom de la loi.
Interne	$\forall (a,\ b) \in G^2,\ a * b \in G$
Associative	$\forall (a,\ b,\ c) \in G^3,\ (a * b) * c = a * (b * c)$
Neutre	$\exists e \in G,\ \forall a \in G,\ a * e = e * a = a$ on prouve son unicité ne pas écrire $\forall a,\ \exists e,\ a * e = e * a = a$
Symétriques	$\forall a \in G,\ \exists \alpha \in G,\ a * \alpha = \alpha * a = e$ là aussi, il y a unicité par $\alpha' * a * \alpha$

En option

Commutative	$\forall (a,\ b) \in G^2,\ a * b = b * a$

Si possible, on évitera de confondre la loi (opération, action) et le résultat.

addition $+$	soustraction $-$	multiplication $\times$	division $\div$	composition $\circ$
somme $a + b$	différence $a - b$	produit $a \times b$	quotient a/b	composée $f \circ g$

On ne confondra pas les lois (calcul) et les relations (affirmation).

Lois	Relations
$+, \times, \cup, \cap, \Delta, \wedge, et, ou, \circ,$	$=, \leqslant, \subset, \neq,$ divise, $\sim, \equiv, >, \subsetneq$

Avec une loi $*$, on peut calculer $(a * b) * c$.
Avec une relation $\Re$, peut on écrire $(a \Re b) \Re c$? Essayez avec $\neq$ ou avec « divise ».

.	Une relation $\Re$ sur un ensemble est “formellement” une application de $E \times E$ dans $\{Vrai,\ Faux\}$. Pratiquement, on prend deux éléments a et b, et on dit $(a \Re b)$ si a est ou non en relation avec b.
Réflexive	Tout élément est en relation avec lui même $\forall a \in E,\ a \Re a$
Transitive	Les flèches se mettent bout à bout. $\forall (a,\ b,\ c) \in E^3,\ (a \Re b \ et\ b \Re c) \Rightarrow (a \Re c)$
Antisymétrique	Il ne peut pas y avoir de flèches dans les deux sens $\forall (a,\ b) \in E^2,\ (a \Re b\ et\ b \Re a) \Rightarrow (a = b)$ Ce n'est pas la négation de “symétrique”.
Symétrique	Il y a une flèche à l'aller il y a une flèche au retour $\forall (a,\ b) \in E^2,\ (a \Re b) \Rightarrow (b \Re a)$

Ordre	Relation réflexive, antisymétrique et transitive un ordre peut être total ($\forall (a,b),\ a \ll b\ ou\ b \ll a$) ou partiel ($\exists (a,b),\ a \not\ll b\ et\ b \not\ll a$)
Équivalence	Relation réflexive, symétrique et transitive la classe d'équivalence d'un élément a est l'ensemble des éléments en relation avec a : $Cl(a) = \{\alpha \in E \mid \alpha \Re a\}$
l'égalité $=$	est à la fois relation d'ordre et d'équivalence.

◁0▷ On définit sur $\mathbb{R}$ la loi (interne évidemment) : $a * b = a.b + a + b$ (et commutative).
Montrez que -1 est absorbant ($\forall a,\ a * (-1) = ?$).
Montrez que cette loi est interne sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ (il faut donc vérifier $a * b \neq -1$ si $a \neq -1$ et $b \neq -1$).
Montrez que cette loi est associative.
Donnez son neutre, et montrez que tout réel différent de -1 a bien un symétrique (différent de -1, il faut aussi vérifier ça).
Résolvez $2 * x = 3$ d'inconnue x. résolvez $2 * x = 3 * x$ d'inconnue x.

◃1▹ Voici une partie du tableau d'une loi de groupe sur E égal à {☺, ☼, ★}.

$*$	☺	☼	★
☺	☼		
☼			
★		☼	

Timothée dit « le neutre c'est ★ car on a ☼ $*$ ★ $=$ ☼. Est ce logique ?
Myriam dit « non, on doit avoir $\forall a,\ a * ★ = a$, et ici, on ne l'a que pour un a.
Timothée explique alors : « c'est un exercice classique : si on a ☼ $*$ ★ $=$ ☼ et si on note ☾ le symétrique de ☼ et e le neutre (inconnu a priori), alors on montre... ». Faites le taire, mais rédigez quand même l'argument.
Maintenant qu'ils sont d'accord, complétez quelques cases du tableau.
Foaud a dit « logiquement, il ne peut pas y avoir deux fois le même élément sur une colonne, il suffit de raisonner par l'absurde en utilisant le symétrique... ». Faites comme le prof, rédigez sa démonstration au tableau. Et ajoutez avec Solal « Pareil pour les lignes ».
Finissez de compléter le tableau, et constatez avec Elliot que la loi est alors commutative.
Que faites vous si Antoine demande alors « mais, comment être spur qu'elle est associative ? », combien devez vous faire de tests ?

Recommencez l'exercice avec

	☻	♫	♀	⬠
☻				
♫		♀	♫	
♀				
⬠				♀

◃2▹ Complétez avec vrai/faux et d'éventuels contre-exemples

ensemble	loi	interne	commutative	associative	existence de neutre (droite/gauche)	symétriques
$\mathbb{R}$	$a * b = a \times \|b\|$					
$\mathbb{C}$	$a \odot b = b$					
$\mathbb{R}$	$a \otimes b = a + b + a.b$					

◃3▹ ♣ Un professeur un peu pervers a défini la loi suivante sur $\mathbb{N}$: $a * b = \left\{ \begin{array}{ccc} a+b & si & a \leqslant b \\ a \times b & sinon & \end{array} \right|$. Montrez que cette loi n'est ni commutative, ni associative. Donnez son neutre à gauche.
Calculez $a * (a * (a * (a \ldots * a)) \ldots)$ (n termes) et $((\ldots (a * a) * a) \ldots) * a$ (n termes aussi).
Avec dix nombres 1, neuf symboles $*$ et des parenthèses, quel est le plus grand nombre que vous puissiez obtenir (mieux que $((1 * 1) * (1 * (1 * 1))) * (1 * (1 * ((1 * 1) * 1))))$ par exemple).
Peut on avoir $a * 5 = b * 5$ avec a différent de b ?
Peut on avoir $5 * a = 5 * b$ avec a différent de b ?

Une loi de composition[1] *est dite*
commutative si $\forall (a, b),\ a * b = b * a$ *(comme l'addition, la multiplication, mais pas la soustraction, ni l'exponentiation)*
associative si $\forall (a, b, c),\ (a * b) * c = a * (b * c)$, *comme l'addition, la multiplication, mais toujours pas les autres*

◃4▹ Soit E un ensemble muni d'une loi interne $*$. Un élément $\diamondsuit$ de E est dit absorbant si $\forall a \in E,\ a * \diamondsuit = \diamondsuit * a = \diamondsuit$.
Montrez que si il y a un élément absorbant, alors il est unique.
Montrez que si $(E, *)$ est un groupe, avec un élément absorbant, alors c'est lui le neutre, et E est en fait réduit à l'absorbant $\diamondsuit$ tout seul.

◃5▹ ♡ On définit : $a * b = \binom{a+b}{b}$ *(coefficient binomial)*. Cette loi est elle interne sur $\mathbb{N}$? Est elle commutative ? Est elle associative ? Y a-t-il un neutre ? Y a-t-il un élément absorbant ? Résolvez l'équation $10 * a = 43$.

◃6▹ ♡ On prend x et y dans $]-1,\ 1[$. Montrez que $\dfrac{x+y}{1+x.y}$ existe.
Montrez, en calculant la différence entre son carré et 1 qu'il est dans $]-1,\ 1[$ aussi.
On pose alors $x * y = \dfrac{x+y}{1+x.y}$. Montrez que c'est une loi interne, associative, commutative sur $]-1,\ 1[$. Trouvez

1. *c'est à dire « un truc qui à partir de deux nombres en calcule un nouveau, comme l'addition, la soustraction, la division, l'exponentiation ou que sais je encore)*

son neutre (est il bien dans $]-1,\ 1[$?). Le symétrique d'un élément de $]-1,\ 1[$ est il dans $]-1,\ 1[$?
Résolvez $x * \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.
On prend a dans $]0,\ 1[$. On définit la suite (a_n) par $a_0 = a$ et $a_{n+1} = a_n * a$ (en fait, c'est donc $a * a * \ldots * a$ n fois). Montrez qu'elle est croissante et majorée. Montrez qu'elle converge, et que la seule valeur possible pour sa limite est 1.

◁7▷ Les nombres

1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10

sont inscrits au tableau. Un élève en efface deux *(disons a et b)* et écrit à la place le nombre $a.b + a + b$. Il n'y a plus que neuf nombres, par exemple

1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/8	1/10	17/63

. Un autre élève passe et fait de même, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un nombre. Indiquez quel sera le dernier nombre écrit, même si vous ne savez pas l'ordre dans lequel les élèves ont effectué leurs éliminations.
C'est finalement un exercice sur les lois commutatives et associaitives, voyez vous pourquoi ?

◁8▷ Soient G un groupe, u dans G commutant avec tout élément de G, (x, y, z) dans G. On pose $u = x.y.z$ et on suppose $x^2 = y^2 = z^2 = 1$ (le neutre). Montrer que $u^4 = 1$.

◁9▷ La division est elle une loi de composition interne sur l'ensemble des entiers ?
Pour quels entiers n la multiplication est elle une loi interne sur l'ensemble des diviseurs de $n!$?
Comment s'appelle une relation qui vérifie $\forall(a, b),\ (a\Re b \textit{ et } b\Re a) \Leftrightarrow a = b$.
Comment s'appelle une relation qui vérifie $\forall(a, b),\ (a\Re b \textit{ et } a\Re c) \Leftrightarrow b\Re c$.

◁10▷ ♡ Soit $(E, *)$ une structure interne, dotée d'un neutre et vérifiant :
$\forall(a,\ b,\ c) \in E^3,\ a * (b * c) = (a * c) * b$. Montrez que la loi est commutative et associative.

◁11▷ ♡ Montrez que si $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{\alpha}{\beta}$ sont des rationnels positif vérifiant $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{\alpha}{\beta}$, alors on a aussi $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{a+\alpha}{b+\beta} \leqslant \dfrac{\alpha}{\beta}$.
La loi définie par $\dfrac{a}{b} \oplus \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{a+\alpha}{b+\beta}$ sur les fractions irréductibles positives est-elle une loi interne ? commutative ? associative ? "neutralisable" ?

◁12▷ On pose $A = \{a + b.\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$, $B = \{a + b.\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2,\ a^2 + b^2 \neq 0\}$ et $C = \{a + b.\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2,\ a.b \neq 0\}$.
La loi est la multiplication. Montrez qu'un de ces ensembles et un seul est un groupe.

◁13▷ Les Sup de 2013 m'ont tellement embêté avec « mais la multiplication dans un anneau, c'est quelle multiplication » que je décide de construire un anneau un peu n'importe comment. On prend $\mathbb{Z}$ mais on ne prend pas les lois usuelles. Comme addition, je prends $x \oplus y = x + y - 7$.
Vérifiez que $(\mathbb{Z}, \oplus)$ est quand même un groupe (quel est le neutre, qui est le symétrique de n ?).
Puis, je décide de définir une multiplication, avec comme seule condition « interne, associative et distributive sur $\oplus$ ».
Vérifiez que c'est le cas si je pose $a \otimes b = 7$ pour tout couple $(a,\ b)$.
L'anneau est il alors intègre ?

Je cherche quand même à définir autre chose. Juste associatif et distributif sur $\oplus$.
Montrez pour tout n : $7 \otimes n = n \otimes 7 = 7$.
Montrez pour tout a et tout p : $a \otimes (14 - p) = 14 - (a \otimes p)$ (pensez à $a \otimes ((14 - p) \oplus p)$).
Montrez $(14 - p) \otimes (14 - n) = p \otimes n$.
On pose $a = 8 \otimes 8$. Montrez pour tout n supérieur ou égal à 7 : $8 \otimes n = (a - 7).n + 56 - 7.a$ (vous initialiserez pour $n = 7$ et pour l'hérédité, vous penserez à démontrer : $n + 1 = n \oplus 8$).
Montrez que ce résultat est encore valable pour n plus petit que 7 (vous pourrez écrire $n = 14 - p$).
Montrez alors par récurrence sur k : $k \otimes n =$
Finalement, pour l'addition $\oplus$ fixée, il y a plusieurs multiplication $\otimes$ qui conviennent, mais pas tant que ça.

◁14▷ Étudiez les variations sur $]0,\ 0.5[\cup]0.5,\ 1[$ de $x \longmapsto \dfrac{x-1}{2.x-1}$. Montrez que pour x et y dans $]0,\ 1[$, $2.x.y - x - y + 1$ est strictement positif. Déduisez que $(x,\ y) \longmapsto \dfrac{x.y}{2.x.y - x - y + 1}$ est une loi de groupe sur $]0,\ 1[$ *(commutative ?)*.

◁15▷ On définit le produit de convolution sur les suites : $a*b$ a pour terme d'indice n la somme $\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}.b_k$ (qu'il faut donc noter $(a*b)_n$et pas du tout (a_n*b_n).

Si vous avez peur des sigma, écrivez juste que la nouvelle suite est $(a_0.b_0,\ a_0.b_1+a_1.b_0,\ a_0.b_2+a_1.b_1+a_2.b_2,\ a_0.b_3+a_1.b_2+a_2.b_1+a_3.b_0,\ldots)$.

Montrez que cette loi est commutative, associative. Donnez son élément neutre.