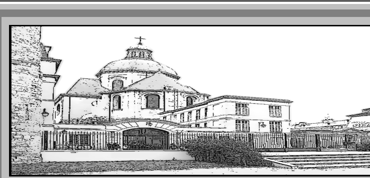
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 4 novembre
M.P.S.I.2



2024 2025

TD06

.	Quantification G est l'ensemble et $*$ est la loi. Une loi est une opération, qui prend deux éléments a et b et en calcule un nouveau, qu'on note $a * b$ si $*$ est le nom de la loi.
Interne	$\forall (a,\ b) \in G^2,\ a * b \in G$
Associative	$\forall (a,\ b,\ c) \in G^3,\ (a * b) * c = a * (b * c)$
Neutre	$\exists e \in G,\ \forall a \in G,\ a * e = e * a = a$ on prouve son unicité ne pas écrire $\forall a,\ \exists e,\ a * e = e * a = a$
Symétriques	$\forall a \in G,\ \exists \alpha \in G,\ a * \alpha = \alpha * a = e$ là aussi, il y a unicité par $\alpha' * a * \alpha$

En option

Commutative	$\forall (a,\ b) \in G^2,\ a * b = b * a$

Si possible, on évitera de confondre la loi (opération, action) et le résultat.

addition $+$	soustraction $-$	multiplication $\times$	division $\div$	composition $\circ$
somme $a + b$	différence $a - b$	produit $a \times b$	quotient a/b	composée $f \circ g$

On ne confondra pas les lois (calcul) et les relations (affirmation).

Lois	Relations
$+, \times, \cup, \cap, \Delta, \wedge, et, ou, \circ,$	$=, \leqslant, \subset, \neq,$ divise, $\sim, \equiv, >, \subsetneq$

Avec une loi $*$, on peut calculer $(a * b) * c$.
Avec une relation $\Re$, peut on écrire $(a \Re b) \Re c$? Essayez avec $\neq$ ou avec « divise ».

.	Une relation $\Re$ sur un ensemble est "formellement" une application de $E \times E$ dans $\{Vrai,\ Faux\}$. Pratiquement, on prend deux éléments a et b, et on dit $(a \Re b)$ si a est ou non en relation avec b.
Réflexive	Tout élément est en relation avec lui même $\forall a \in E,\ a \Re a$
Transitive	Les flèches se mettent bout à bout. $\forall (a,\ b,\ c) \in E^3,\ (a \Re b\ et\ b \Re c) \Rightarrow (a \Re c)$
Antisymétrique	Il ne peut pas y avoir de flèches dans les deux sens $\forall (a,\ b) \in E^2,\ (a \Re b\ et\ b \Re a) \Rightarrow (a = b)$ Ce n'est pas la négation de "symétrique".
Symétrique	Il y a une flèche à l'aller il y a une flèche au retour $\forall (a,\ b) \in E^2,\ (a \Re b) \Rightarrow (b \Re a)$

Ordre	Relation réflexive, antisymétrique et transitive un ordre peut être total ($\forall (a, b),\ a \ll b\ ou\ b \ll a$) ou partiel ($\exists (a, b),\ a \not\ll b\ et\ b \not\ll a$)
Équivalence	Relation réflexive, symétrique et transitive la classe d'équivalence d'un élément a est l'ensemble des éléments en relation avec a : $Cl(a) = \{\alpha \in E \mid \alpha \Re a\}$
l'égalité $=$	est à la fois relation d'ordre et d'équivalence.

◁0▷ On définit sur $\mathbb{R}$ la loi (interne évidemment) : $a * b = a.b + a + b$ (et commutative).
Montrez que -1 est absorbant ($\forall a,\ a * (-1) = ?$).
Montrez que cette loi est interne sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ (il faut donc vérifier $a * b \neq -1$ si $a \neq -1$ et $b \neq -1$).
Montrez que cette loi est associative.
Donnez son neutre, et montrez que tout réel différent de -1 a bien un symétrique (différent de -1, il faut aussi vérifier ça).
Résolvez $2 * x = 3$ d'inconnue x. résolvez $2 * x = 3 * x$ d'inconnue x.

Voici une partie du tableau d'une loi de groupe sur E égal à {☺, ☼, ★}.

$*$	☺	☼	★
☺	☼		
☼			
★		☼	

Timothée dit « le neutre c'est ★ car on a ☼ $*$ ★ $=$ ☼. Est ce logique ?
Myriam dit « non, on doit avoir $\forall a,\ a*$ ★ $= a$, et ici, on ne l'a que pour un a.
Timothée explique alors : « c'est un exercice classique : si on a ☼ $*$ ★ $=$ ☼ et si on note ☾ le symétrique de ☼ et e le neutre (inconnu a priori), alors on montre... ». Faites le taire, mais rédigez quand même l'argument.
Maintenant qu'ils sont d'accord, complétez quelques cases du tableau.
Foaud a dit « logiquement, il ne peut pas y avoir deux fois le même élément sur une colonne, il suffit de raisonner par l'absurde en utilisant le symétrique... ». Faites comme le prof, rédigez sa démonstration au tableau. Et ajoutez avec Solal « Pareil pour les lignes ».
Finissez de compléter le tableau, et constatez avec Elliot que la loi est alors commutative.
Que faites vous si Antoine demande alors « mais, comment être spur qu'elle est associative ? », combien devez vous faire de tests ?

Recommencez l'exercice avec

	☻	♫	♀	⬠
☻				
♫		♀	♫	
♀				
⬠				♀

◁1▷ Complétez avec vrai/faux et d'éventuels contre-exemples

ensemble	loi	interne	commutative	associative	existence de neutre (droite/gauche)	symétriques
$\mathbb{R}$	$a*b = a\times\lvert b\rvert$					
$\mathbb{C}$	$a\odot b = b$					
$\mathbb{R}$	$a\otimes b = a+b+a.b$					

ensemble
$\mathbb{R}$
$\mathbb{C}$
$\mathbb{R}$

Si il n'y a pas de neutre, comment voulez vous parler de symétrique ?

◁2▷ ♣ Un professeur un peu pervers a défini la loi suivante sur $\mathbb{N}$: $a*b = \left\{\begin{array}{ccc} a+b & si & a\leqslant b \\ a\times b & sinon & \end{array}\right|$. Montrez que cette loi n'est ni commutative, ni associative. Donnez son neutre à gauche.
Calculez $a*(a*(a*(a\dots*a))\dots)$ (n termes) et $((\dots(a*a)*a)\dots)*a$ (n termes aussi).
Avec dix nombres 1, neuf symboles $*$ et des parenthèses, quel est le plus grand nombre que vous puissiez obtenir (mieux que $((1*1)*(1*(1*1)))*(1*(1*((1*1)*1))))$ par exemple).
Peut on avoir $a*5 = b*5$ avec a différent de b ?
Peut on avoir $5*a = 5*b$ avec a différent de b ?

Une loi de composition[a] *est dite*
commutative si $\forall(a,b),\ a*b = b*a$ *(comme l'addition, la multiplication, mais pas la soustraction, ni l'exponentiation)*
associative si $\forall(a,b,c),\ (a*b)*c = a*(b*c)$*, comme l'addition, la multiplication, mais toujours pas les autres*

a. c'est à dire « un truc qui à partir de deux nombres en calcule un nouveau, comme l'addition, la soustraction, la division, l'exponentiation ou que sais je encore)

Il peut certes y avoir des cas où l'on a $a*b = b*a$. Mais il suffit d'un cas où ça ne marche pas pour tout casser.
$2*3 = 2+3 = 5$ alors que $3*2 = 3\times 2 = 6$.
Il ne faut pas hésiter à prendre des valeurs.

On y va au hasard :

$(1 \quad *2) \quad *3$			$1* \quad (2 \quad *3)$
$3 \quad *3$			$1 \quad *5$
6			6
raté, il y a égalité			
$(2 \quad *1) \quad *3$			$2* \quad (1 \quad *3)$
$2 \quad *3$			$2 \quad *4$
5			6
là c'est un contre-exemple			

◁3▷ Soit E un ensemble muni d'une loi interne $*$. Un élément $\diamondsuit$ de E est dit absorbant si $\forall a \in E,\ a * \diamondsuit = \diamondsuit * a = \diamondsuit$.
Montrez que si il y a un élément absorbant, alors il est unique.
Montrez que si $(E, *)$ est un groupe, avec un élément absorbant, alors c'est lui le neutre, et E est en fait réduit à l'absorbant $\diamondsuit$ tout seul.

◁4▷ $\heartsuit$ On définit : $a * b = \binom{a+b}{b}$ *(coefficient binomial)*. Cette loi est elle interne sur $\mathbb{N}$? Est elle commutative ? Est elle associative ? Y a-t-il un neutre ? Y a-t-il un élément absorbant ? Résolvez l'équation $10 * a = 43$.

Interne : oui. On obtient bien un entier.

Commutative : oui. On se donne a et b et on compare $\binom{a+b}{b}$ et $\binom{b+a}{a}$. Ils sont égaux par la formule $\forall(n, k = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Associative : $(1*2)*3 = \binom{3}{2} * 3 = 3 * 3 = \binom{6}{3} = 20$

$$1 * (2*3) = 1 * \binom{5}{3} = 1 * 10 = \binom{11}{10} = \binom{11}{1} = 11$$

On veut ensuite n tel que $\binom{a+n}{n}$ soit égal à a pour tout a. On le cherche par condition nécessaire (analyse) et on fera la synthèse si l'élément semble bien neutre.
n doit être neutre vis à vis de 0 : $\binom{n}{n} = 0$ c'est déjà raté. Il n'y a pas de neutre.

L'élément absorbant b vérifierait $\binom{a+b}{b} = b$ pour tout a. En particulier : $\binom{b}{b} = b$. Ceci donne $b = 1$.
Mais ensuite $\binom{1+1}{1} = 2$ et pas $1 * 1 = 1$ comme attendu. Il n'y a pas d'élément absorbant.

On résout ensuite $\binom{a+10}{10} = 43$. Mais 43 est premier. Il ne pourra intervenir dans un coefficient binomial qu'à partir de la ligne d'indice 43. Mais les coefficients binomiaux de ces lignes sont « grands » (ceux des extrémités valent 1, les suivants valent n supérieur ou égal à 43, et ensuite ils sont encore plus grands...
Il n'y a pas de solution.
L'équation $1 * a = 43$ avait pour solution 42.

◁5▷ $\heartsuit$ On prend x et y dans $]-1,\ 1[$. Montrez que $\dfrac{x+y}{1+x.y}$ existe.
Montrez, en calculant la différence entre son carré et 1 qu'il est dans $]-1,\ 1[$ aussi.
On pose alors $x * y = \dfrac{x+y}{1+x.y}$. Montrez que c'est une loi interne, associative, commutative sur $]-1,\ 1[$. Trouvez son neutre (est il bien dans $]-1,\ 1[$?). Le symétrique d'un élément de $]-1,\ 1[$ est il dans $]-1,\ 1[$?
Résolvez $x * \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.
On prend a dans $]0,\ 1[$. On définit la suite (a_n) par $a_0 = a$ et $a_{n+1} = a_n * a$ (en fait, c'est donc $a * a * \ldots * a$ n fois). Montrez qu'elle est croissante et majorée. Montrez qu'elle converge, et que la seule valeur possible pour sa limite est 1.

On se donne x et y entre -1 et 1. En écrivant $|x.y| = |x|.|y|$, on voit que $x.y$ est entre -1 et 1 (strictement), et le dénominateur ne peut pas s'annuler.

Ensuite, la belle question est « loi interne ».
La mauvaise méthode est « je tape sur les hypothèses ».
Et la pire est « j'invente des manipulations sur les inégalités et les quotients ».

Proprement, on doit montrer que le réel $\dfrac{x+y}{1+x.y}$ reste entre -1 et 1.
On va comparer son carré à 1.
C'est donc pourquoi l'énoncé nous propose de calculer $1-\Big(\dfrac{x+y}{1+x.y}\Big)^2$.
Si ce réel est positif, on aura gagné.

L'élève qui dit « ah c'est pour ça qu'on nous demande de calculer ça » me doit un bonbon. Il aurait dû le comprendre tout de suite.

On calcule donc $1-\dfrac{x^2+2.x.y+y^2}{(1+x.y)^2}=\dfrac{1+x^2.y^2+2.x.y-x^2-y^2-2.x.y}{(1+x.y)^2}$.
Le dénominateur est positif. Mais le numérateur ? Quel est le signe de $x^2.y^2-x^2-y^2+1$?
Il y a des termes positifs et des termes négatifs.

Mais si on y regarde de plus près, c'est $(1-x^2).(1-y^2)$.
Comme x^2 est entre 0 et 1 et y^2 aussi, le produit est positif.

Variante : on voit $x^2.(y^2-1)+1-y^2$ comme un trinôme en x de coefficient dominant négatif.
Mais x est entre -1 et 1, c'est à dire entre les racines.

Bref, on a bien $1-\dfrac{(x+y)^2}{(1+x.y)^2}\geqslant 0$ et $\dfrac{(x+y)^2}{(1+x.y)^2}$ entre -1 et 1. La loi est interne.

Sans loi interne, on ne pourrait envisager de calculer $(x*y)*z$ puisque si $x*y$ sortait de $]-1,\ 1[$, le dénominateur en $1+(x*y).z$ pourrait s'annuler !

On calcule ensuite sans effort : $(x*y)*z=\dfrac{(x*y)+z}{1+(x*y).z}=\dfrac{\dfrac{x+y}{1+x.y}+z}{1+\dfrac{x+y}{1+x.y}.z}$.

Après élimination des dénominateurs, il va rester $\dfrac{x+y+z+x.y.z}{1+x.y+x.z+y.z}$ (l'ami Viète ne doit plus être loin).

Le calcul de $x*(y*z)$ conduit au même résultat.
La loi est associative.

La commutativité est un jeu d'enfants.

Le neutre est 0 puisque pour tout x, on a $x*0=x$.

On se donne a et on résout $a*\alpha=0$ d'inconnue α. On trouve $\alpha=-a$.
Et on vérifie que ce symétrique est dans $]-1,\ 1[$ à son tour.

La résolution de $x*\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$ se fait sans effort.

On peut résoudre l'équation finalement du premier degré $\dfrac{x+\dfrac{1}{2}}{1+x.\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$.

Mais on peut aussi le jouer « algébriste » : $(x*a=b)\Leftrightarrow((x*a)*(-a)=b*(-a))$
$(x*a=b)\Leftrightarrow(x*(a*(-a))=b*(-a))$
$(x*a=b)\Leftrightarrow(x*(0)=b*(-a))$
$(x*a=b)\Leftrightarrow(x=b*(-a))$

La solution est donc ici $\dfrac{1}{3}*\dfrac{-1}{2}$. On trouve $\boxed{\dfrac{-1}{5}}$

Ce n'est pas plus rapide que la résolution brute. Mais c'est plus joli et surtout, ça donne des idées pour aller plus vite ensuite dans d'autres circonstances.

Partant de a, tous les $a*a$, $a*a*a$, $a*a*a*a$ et autres sont dans $]-1,\ 1[$.
Comme a est positif, par récurrence évidente, ils sont tous positifs.

On se donne n, on veut montrer $a_{n+1} \geqslant a_n$.
On va exprimer le premier à l'aide du second et calculer leur différence : $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n + a}{1 + a.a_n} - a_n = \dfrac{a_n + a - a_n - a.(a_n)^2}{1 + a.a_n}$.
Au numérateur, $a.(1 - (a_n)^2)$ est bien positif.

La suite est croissante. Et majorée par 1.
Elle converge donc par théorème de convergence des suites réelles croissantes majorées.
Et sa limite est inférieure ou égale à 1.
Mais elle peut être strictement inférieure à 1 après tout.

Toutefois, maintenant qu'on sait que (a_n) converge vers une limite qu'on va noter λ, passons à la limite dans $a_{n+1} = \dfrac{a + a_n}{1 + a.a_n}$.
Comme a_n converge vers λ, le membre de droite converge vers $\dfrac{a + \lambda}{1 + a.\lambda}$.
Et le membre de gauche converge aussi vers λ (avec une longueur d'avance diront certains).
On a donc $\lambda = \dfrac{a + \lambda}{1 + a.\lambda}$.
On effectue le produit en croix et on simplifie : $a.\lambda = a$.
La seule solution est bien $\lambda = 1$.

◁6▷ Les nombres

1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10

sont inscrits au tableau. Un élève en efface deux *(disons a et b)* et écrit à la place le nombre $a.b + a + b$. Il n'y a plus que neuf nombres, par exemple

1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/8	1/10	17/63

. Un autre élève passe et fait de même, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un nombre. Indiquez quel sera le dernier nombre écrit, même si vous ne savez pas l'ordre dans lequel les élèves ont effectué leurs éliminations.
C'est finalement un exercice sur les lois commutatives et associaitives, voyez vous pourquoi ?

L'ordre dans lequel on effectue les opérations semble n'avoir aucune importance ?
C'est étrange.
Mais si on prend des entiers pour se simplifier la vie, c'est le cas :

1	2	3	5
5			
23			
143			

1	2	3	5
	11		
		71	
143			

1	2	3	5
5			
		23	
143			

1	3	2	5
7			
		17	
143			

Définissions la loi $*$ par$a * b = a + b + a.b$.

Elle est commutative et associative.
On a donc $(a * b) * (c * d) = ((a * b) * c) * d = (a * c) * (b * d) = ((b * d) * c) * a$ et ainsi de suite.
Finalement, qu'importent donc les résultats intermédiaires, tout ce qu'on fait, c'est calculer $1 * \dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{3} * \dfrac{1}{4} * \ldots * \dfrac{1}{10}$ (sans parenthèses de priorité).

On peut donc calculer ce nombre « à la main », dans l'ordre qu'on veut
$$\begin{aligned} 1 * \frac{1}{2} &= 2 \\ 2 * \frac{1}{3} &= 3 \\ 3 * \frac{1}{4} &= 4 \\ 9 * \frac{1}{10} &= 10 \end{aligned}$$

Et on se dit qu'il doit y avoir un truc.

Remarque : *Je trouve cet exercice génial pour raconter l'importance de la commutativité et de l'associativité.*
Testez le si vous donnez des petits cours à un élève de collège pour vous faire de l'argent de poche.

En fait, il y a un truc : $a * b = (1 + a).(1 + b) - 1$.
C'est la multiplication classique « translatée de 1 ».
Notre pr*duit $1 * \dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{3} * \dfrac{1}{4} * \ldots * \dfrac{1}{10}$ est donc juste $(1+1).\left(\dfrac{3}{2}\right).\left(\dfrac{4}{3}\right).\left(\dfrac{5}{4}\right)\ldots\left(\dfrac{10}{9}\right) - 1$.
Et cette fois, c'est le cours « produit télescopique » qui sert ! Trop fort ! Je l'aime deux fois plus cet exercice.

◁7▷ Soient G un groupe, u dans G commutant avec tout élément de G, (x,y,z) dans G. On pose $u = x.y.z$ et on suppose $x^2 = y^2 = z^2 = 1$ (le neutre). Montrer que $u^4 = 1$.

On va calculer u^2 pour commencer, en profitant d'une hypothèse : u commute avec tout le monde, en particulier avec z :

$$u^2 = (x.y.z).(x.y.z) = (x.y).(z.(x.y.z)) = (x.y).((x.y.z).z) = (x.y).((x.y).(z.z)) = (x.y).(x.y)$$

On a évidemment aussi utilisé l'associaitivité, et la propriété $z^2 = 1$. Mais aucune commutativité abusive.
On continue avec u^3 qu'on écrit $u^2.u$ avec u^2 déjà calculé :

$$u^3 = (x.y).(x.y).(x.y.z) = ((x.y).x).(y.(x.y.z)) = ((x.y).x).((x.y.z).y) = (x.y).(x.x).(y.z.y)$$
$$u^3 = (x.y).(y.z.y) = x.(y.y).z.y = x.z.y$$

On termine en multipliant encore par u qu'on fait permuter avec un bloc $z.y$:

$$u^4 = (x.z.y).(x.y.z) = x.((z.y).(x.y.z)) = x.((x.y.z).(z.y))$$
$$u^4 = x.((x.y).(z.z).y) = (x.x).y.1.y = 1.y.y = 1$$

Peut être peut on y parvenir par d'autres chemins.

Exercice un peu décevant où finalement il suffit de tenter sa chance en utilisant les hypothèses au bon moment.
En colle, il permet de voir si en tout cas vous n'allez pas trop vite en permutant des termes qui n'ont pas le droit d'être permutés.

◁8▷ La division est elle une loi de composition interne sur l'ensemble des entiers ?
Pour quels entiers n la multiplication est elle une loi interne sur l'ensemble des diviseurs de $n!$?
Comment s'appelle une relation qui vérifie $\forall(a,b),\ (a\Re b \text{ et } b\Re a) \Leftrightarrow a = b$.
Comment s'appelle une relation qui vérifie $\forall(a,b),\ (a\Re b \text{ et } a\Re c) \Leftrightarrow b\Re c$.

La division n'est pas interne sur $\mathbb{Z}$ évidemment. Et d'ailleurs, est ce une loi dans la mesure où on ne peut pas diviser par 0.

L'ensemble des diviseurs de $n!$ est un ensemble assez étrange

n	0	1	2	3	4	5
diviseurs de$n!$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3,6\}$	$\{1,2,3,4,6,1,4\}$	

On note que $\{1\}$ est stable par multiplication.
Mais sinon, l'entier $n!$ est dans la liste des diviseurs, on le multiplie par lui même : $(n!)$ n'est plus dans la liste des diviseurs.
Les seules n valables sont 0 et 1.

L'implication $\forall(a,b),\ (a\Re b \text{ et } b\Re a) \Rightarrow a = b$ se lit « antisymétrique ».
L'implication $\forall(a,b),\ (a\Re b \text{ et } b\Re a) \Leftarrow a = b$ se lit « réflexive ».
Bon, mais il manque « transitive » pour une relation d'ordre.

L'implication $\forall(a,b),\ (a\Re b \text{ et } a\Re c) \Rightarrow b\Re c$ c'est presque « transitive ».
Mais équivalence ?
Dès qu'on a $b\Re c$ quelquepart entre deux éléments, alors on a $a\Re b$ et $a\Re c$. Pour tout a !

Il y a une relation simple qui vérifie cela : la relation vide . Chaque élément est dans son coin, personne n'est en relation avec personne. Et toute l'équivalence est sur le modèle « faux équivalent à faux » (et ça c'est vrai).

Une autre est la relation pleine. Tout le monde est en relation avec tout le monde. L'équivalence est alors de la forme « vrai équivalent à vrai » (et ça aussi c'est vrai).

En existe-t-il d'autres ?
Supposons que la relation n'est pas vide. Alors il existe au moins un couple $(\alpha,\ \beta)$ vérifiant $\alpha\Re\beta$ (et on peut avoir $\alpha = \beta$, rien ne nous bloque là dessus).
Alors, en utilisant le sens « indirect » de l'équivalence $(\alpha\Re\beta) \Rightarrow (a\Re\alpha \text{ et } a\Re\beta)$, on obtient $a\Re\alpha$ et $a\Re\beta$ pour tout a.
Ça commence à faire pas mal de flèches qui arrivent toutes sur α et β.
Mais alors en prenant a quelconque et α, on a $a\Re\alpha$. l'implication $(a\Re\beta) \Rightarrow (x\Re a \text{ et } c\Re\beta)$ (vraie pour tout x) donne « tous les x sont en relation avec tous les a ».

Bref, $\Re$est la relation pleine (si elle n'était pas la relation vide).

◃9▹

♡ Soit $(E, *)$ une structure interne, dotée d'un neutre et vérifiant :
$\forall(a,\ b,\ c) \in E^3,\ a*(b*c) = (a*c)*b$. Montrez que la loi est commutative et associative.

La commutativité prend juste deux éléments a et b. L'hypothèse a le droit d'en utiliser trois.
On se donne a et b, et on prend « comme par hasard » $c = n$ (le neutre).
L'hypothèse permet d'écrire $a*(b*n) = (a*c)*n$.
Ceci ne nous avance pas.

Mais si on prend b et c quelconques et qu'on choisit $a = n$, on a cette fois $n*(b*c) = (n*c)*b$.
Par neutralité de n, on obtient $b*c = c*b$. Comme ceci est vrai pour tout couple, c'est la définition de la commutativité.

Les variables sont muettes, la commutativité c'est $\forall(,\ b) \in E^2,\ a*b = b*a$ mais c'est tout autant $\forall(b,\ c) \in E^2,\ c*b = b*c$.
Ensuite, il y a des élèves qui disent « on ne peut pas prendre $a = n$, c'est un cas particulier.
C'est en effet « prendre un cas particulier dans une hypothèse ». Ceci est tout à fait légitime. C'est convoquer un témoin bien choisi dans l'hypothèse.
Ce qui ne tient pas la route c'est de dire « je dois montrer $\forall a$, truc, et j'ai montré truc pour un a particulier, donc c'est bon ».
Non. Il faut le montrer pour tous les a.
Il ne faut pas confondre le statut de l'hypothèse et celui de la conclusion.

A présent, on se donne a, b et c quelconques, et il faut passer de $(a*b)*c$ à $a*(b*c)$ en utilisant non seulement l'hypothèse, mais aussi la commutativité que l'on vient d'établir :
$a*(b*c) = (a*c)*b$ par hypothèse
$a*(b*c) = a*(c*b)$ (commutativité au sein de la parenthèse)
$a*(b*c) = a*(c*b) = (a*b)*c$ (hypothèse appliquée au triplet $(a,\ c,\ b)$.

◃10▹

♡ Montrez que si $\frac{a}{b}$ et $\frac{\alpha}{\beta}$ sont des rationnels positif vérifiant $\frac{a}{b} \leqslant \frac{\alpha}{\beta}$, alors on a aussi $\frac{a}{b} \leqslant \frac{a+\alpha}{b+\beta} \leqslant \frac{\alpha}{\beta}$.
La loi définie par $\frac{a}{b} \oplus \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a+\alpha}{b+\beta}$ sur les fractions irréductibles positives est-elle une loi interne ? commutative ? associative ? "neutralisable" ?

On suppose $\frac{\alpha.b - \beta.a}{b.\beta} > 0$ et on calcule $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{a+\alpha}{b+\beta}$ (ou même juste son numérateur) et $\frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b}$. On les trouve positifs.
Exemple : entre $\frac{4}{7}$ et $\frac{3}{5}$ on peut insérer $\frac{7}{12}$.

Remarque :	C'est un petit résultat qu'on enseignait en quatrième. Il me semblait ne servir à rien. Mais en fait, c'est un résultat qui sert pour les suites de Farey, qui donnent des algorithmes d'approximation des réels par des rationnels.

Interne : la $\oplus$ de deux rationnels est un rationnel ; mais plus forcément irréductible : $\frac{1}{2} \oplus \frac{3}{4} = \frac{4}{6}$ qu'il faut réduire.

Remarque :	Avec les suites de Farey, on ne l'appliquera que dans le cas $\begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix} = 1$, l'élément inséré sera irréductible.

Commutative : oui.

Associative : oui.

Neutre : comment peut on choisir $\frac{\alpha}{\beta}$ avoir $\frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$?
On demanderait $a.\beta = \alpha.b$ pour tout couple $(a,\ b)$, en particulier pour $(0,\ 1)$ et $(1,\ 1)$.
La seule possibilité serait $\frac{a+0}{b+0} = \frac{a}{b}$. Mais $\frac{0}{0}$ n'est pas un rationnel.

◃11▹

On pose $A = \{a + b.\sqrt{2} \mid (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$, $B = \{a + b.\sqrt{2} \mid (a,b) \in \mathbb{Q}^2,\ a^2 + b^2 \neq 0\}$ et $C = \{a + b.\sqrt{2} \mid (a,b) \in \mathbb{Q}^2,\ a.b \neq 0\}$.
La loi est la multiplication. Montrez qu'un de ces ensembles et un seul est un groupe.

Pour les ensembles comme $\{a + b.\sqrt{2} \mid (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$, la multiplication est toujours commutative et associative, puisque l'on est sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

On trouve le neutre : $1 = 1 + 0.\sqrt{2}$. Il est dans A. Mais pas dans C *($C = \{a + b.\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2,\ a.b \neq 0\}$, ici b est nul)*.

Pour la stabilité on prend $a + \sqrt{2}.b$ et $c + \sqrt{2}.d$ et on les multiplie : $(a.c + 2.b.d) + \sqrt{2}.(a.d + b.c)$.

Les deux nombres $(a.c + 2.b.d)$ et $(a.d + b.c)$ sont des rationnels *($(\mathbb{Q}, +, .)$ est un corps)*.

A est stable par multiplication. On se demande si C l'est aussi.

A priori, comme $a + b.\sqrt{2}$ est dans C, il est interdit à a et b d'être nuls tous deux en même temps. Et de même c et d ne sont pas nuls tous deux en même temps.

Mais on ne peut pas déduire comme ça que $a.c + 2.b.d$ est non nul. On n'a pas de stabilités de $\mathbb{Q}^*$ par addition. Par exemple, $1.3 + 3.(-1)$ est nul, avec quatre rationnels non nuls.

> *Que vous ne sachiez pas alors traiter la question, je peux le comprendre, tout le monde n'ira pas à Centrale,Mines,X...*
> *Que vous n'ayez pas vu la difficulté, je ne peux pas le comprendre, vous voulez être ingénieurs.*
> *Que vous ayez vu la difficulté mais l'ayez mise sous le tapis, je refuse de le comprendre, c'est pas Dauphine, c'est MPSI !*

Est il possible que $a.c + 2.b.d$ et $a.d + b.c$ soient tous les deux nuls ?

Il faudrait alors que la somme $(a.c + 2.b.d) + \sqrt{2}.(a.d + b.c)$ soit nulle. Mais cette somme est $(a + \sqrt{2}.b).(c + \sqrt{2}.d)$ et par intégrité de la célèbre multiplication dans $\mathbb{R}$, elle n'est nulle que pour $a + \sqrt{2}.b = 0$ ou $c + \sqrt{2}.d = 0$. Mais alors on aurait $\sqrt{2} = \dfrac{-a}{b}$ *(quotient de deux rationnels, donc rationnel, contradiction)* ou $\sqrt{2} = \dfrac{-c}{d}$ *(même contradiction)*.
C est stable par multiplication.

Reste l'affaire des inverses. L'inverse de $a + \sqrt{2}.b$ est $\dfrac{1}{a + \sqrt{2}.b} = \dfrac{a - \sqrt{2}.b}{(a + \sqrt{2}.b).(a - \sqrt{2}.b)}$.
On l'écrit $\dfrac{a}{a^2 - 2.b^2} - \sqrt{2}.\dfrac{b}{a^2 - 2.b^2}$ *($a^2 + 2.b^2$ ne peut pas être nul, sans avoir $a = 0$ puis $b = 0$ sinon, $\sqrt{2}$ serait rationnel, égal à $\pm\frac{a}{b}$)*. Les deux quotients $\dfrac{a}{a^2 - 2.b^2}$ et $\dfrac{-b}{a^2 - 2.b^2}$ existent et sont rationnels. Sauf si $a = b = 0$. L'ensemble A contient un élément non inversible. $(A, \times)$ n'est pas un groupe.
En revanche, si ni a ni b n'est nul, aucun des deux rationnels ne peut être nul.
Bref, $\boxed{\text{le groupe est } (B, \times)}$

> *Mon rôle est certes de voir si vous savez apprendre un cours* (exemple : interne, associative, neutre, symétrique...). *Mais surtout de voir si vous savez vous poser les bonnes questions. Le premier est question de travail personnel. Le second est question de cerveau.*

◁12▷ Les Sup de 2013 m'ont tellement embêté avec « mais la multiplication dans un anneau, c'est quelle multiplication » que je décide de construire un anneau un peu n'importe comment. On prend $\mathbb{Z}$ mais on ne prend pas les lois usuelles. Comme addition, je prends $x \oplus y = x + y - 7$.
Vérifiez que $(\mathbb{Z}, \oplus)$ est quand même un groupe (quel est le neutre, qui est le symétrique de n ?).
Puis, je décide de définir une multiplication, avec comme seule condition « interne, associative et distributive sur $\oplus$ ».
Vérifiez que c'est le cas si je pose $a \otimes b = 7$ pour tout couple $(a,\ b)$.
L'anneau est il alors intègre ?

Je cherche quand même à définir autre chose. Juste associatif et distributif sur $\oplus$.
Montrez pour tout n : $7 \otimes n = n \otimes 7 = 7$.
Montrez pour tout a et tout p : $a \otimes (14 - p) = 14 - (a \otimes p)$ (pensez à $a \otimes ((14 - p) \oplus p)$).
Montrez $(14 - p) \otimes (14 - n) = p \otimes n$.
On pose $a = 8 \otimes 8$. Montrez pour tout n supérieur ou égal à 7 : $8 \otimes n = (a - 7).n + 56 - 7.a$ (vous initialiserez pour $n = 7$ et pour l'hérédité, vous penserez à démontrer : $n + 1 = n \oplus 8$).
Montrez que ce résultat est encore valable pour n plus petit que 7 (vous pourrez écrire $n = 14 - p$).
Montrez alors par récurrence sur k : $k \otimes n =$

Finalement, pour l'addition $\oplus$ fixée, il y a plusieurs multiplication $\otimes$ qui conviennent, mais pas tant que ça.

◁13▷ Étudiez les variations sur $]0,\ 0.5[\cup]0.5,\ 1[$de $x \longmapsto \dfrac{x-1}{2.x-1}$. Montrez que pour x et y dans $]0,\ 1[$, $2.x.y-x-y+1$ est strictement positif. Déduisez que $(x,\ y) \longmapsto \dfrac{x.y}{2.x.y-x-y+1}$ est une loi de groupe sur $]0,\ 1[$ *(commutative ?)*.

On étudie à y fixé entre 0 et 1 l'application $f_y = (x \longmapsto 2.x.y-x-y+1)$.
Elle est affine (coefficient directeur $2.y-1$), donc monotone.
Il suffit d'avoir l'image de 0 et de 1 pour savoir que tous les $f_y(x)$ sont entre $f_y(0)$ et $f_y(1)$.
Or, $f_y(0) = 1-y > 0$ et $f_y(1) = y > 0$.

Que l'on ait

$0 < y < \frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < y < 1$
décroissante	constante	croissante
$1-y > f_y(x) > y > 0$	$f_y(x) = \frac{1}{2}$	$0<1-y < f_y(x) < y$

Cette étude assure l'existence de $x * y$ (je veux dire $\dfrac{x.y}{2.x.y-x-y+1}$) pour tout couple $(x,\ y)$ de $]0,\ 1[^2$.

Pour le caractère interne, il faut vérifier $\dfrac{x.y}{2.x.y-x-y+1} > 0$ (quotient de deux positifs)
$\dfrac{x.y}{2.x.y-x-y+1} < 0$ par produit en croix : $x.y-x-y+1 = (1-x).(1-y) > 0$

Commutative : oui.

Associative : $(a*b)*c = a*(b*c) = \dfrac{a.b.c}{a.b+a.c+b.c-a-a-c+1}$ (calcul un peu long mais pas difficile).

Neutre : $\dfrac{1}{2}$ puisque $\dfrac{a.\frac{1}{2}}{a-a-\frac{1}{2}+1} = a$ pour tout a.

Et $\dfrac{1}{2}$ est dans le bon intervalle.

Symétrique : le symétrique de a est $1-a$ (aussi entre -1 et 1), puisque $a*(1-a) = \dfrac{1}{2}$.

En fait, on a repris la loi $(a,\ b) \longmapsto \dfrac{a.b}{1+a.b}$ sur $]-1,\ 1[$ célèbre dans plusieurs exercices, et on a déformé l'intervalle,
en posant $a = 2.x-1$, $b = 2.y-1$ et $\dfrac{a.b}{1+a.b} = 2.(a*b)-1$.

◁14▷ On définit le produit de convolution sur les suites : $a*b$ a pour terme d'indice n la somme $\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}.b_k$ (qu'il faut donc noter $(a*b)_n$et pas du tout (a_n*b_n).
Si vous avez peur des sigma, écrivez juste que la nouvelle suite est $(a_0, b_0,\ a_0.b_1+a_1.b_0,\ a_0.b_2+a_1.b_1+a_2.b_2,\ a_0.b_3+a_1.b_2+a_2.b_1+a_3.b_0, \ldots)$.
Montrez que cette loi est commutative, associative. Donnez son élément neutre.

En estimant que a, b et c sont quantifiées, de même que n quelconque :

$$(a*b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}.b_k = \sum_{p=0}^{n} a_p.b_{n-p} = (b*a)_n$$

en ayant posé $p = n-k$.

On continue : $((a*b)*c)_n = \sum_{p=0}^{n} (a*b)_p.c_{n-p}$

$((a*b)*c)_n = \sum_{p=0}^{n} \Big(\sum_{i=0}^{p} a_i * b_{p-i}\Big).c_{n-p}$

$((a*b)*c)_n = \sum_{p=0}^{n} \Big(\sum_{i=0}^{p} a_i * b_{p-i}.c_{n-p}\Big)$

et $(a*(b*c))_n = \sum_{q=0}^{n} a_q*(b*c)_{n-p}$

$((a*b)*c)_n = \sum_{q=0}^{n} a_p.\Big(\sum_{k=0}^{n-p} b_i.c_{n-p-i}\Big)$

$((a*b)*c)_n = \sum_{p=0}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{p} a_i*b_{p-i}.c_{n-p}\Big)$

On change ensuite les indices.

L'élément neutre est la suite de premier terme 1 et dont tous les suivants sont nuls (malpropre : $(1,0,0,0\ldots)$ propre : $(1_{n=0})_{n\in\mathbb{N}}$. On la note N ($N_0 = 1$ et $N_n = 0$ sinon).
On convole : $(a*N)_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}.N_k$
Seul n_0 est non nul, et il vaut 1. Il reste a_n.
C'est vrai pour tout n, donc $(a*N) = a$.

◁15▷ Calculez $\int_{-1}^{1} T_5(t).T_4(t).dt$ où T_n est le n^{ieme} polynôme de Tchebychev (on est en maths, on réfélechit avant d'écrire douze formules !)

Pour $\int_{-1}^{1} T_5(t).T_4(t).dt$, on ne remplace rien car on a $T_n(t)$ et pas $T_n(\cos(\theta))$.
On peut certes calculer explicitement $T_5(t)$ et $T_4(t)$, puis leur produit.
Mais quand bien même on ne connaît pas tous les coefficients, on écrit ce qu'on sait par parité :

$$T_4(X).T_5(X) = (8.X^4 - a.X^2 + b).(16.X^5 - c.X^3 + d.X)$$

C'est un polynôme qui n'a que des termes d'exposant impair : X^9,X^7, X^5, X^3 et X.
Chaque intégrale comme $\int_{-1}^{1} t^5.dt$ est nulle. La somme est nulle.

La clef est dans « fonction impaire, intervalle symétrique ».

◁16▷

♡ 0 ♡ Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce déterminant vaudra 2017 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ ? & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$? Si oui, cette valeur sera-t-elle entière, si non, calculez le coefficient de X^{23} dans T_{27}.

♡ 1 ♡ On note T_n le n^{ieme} polynôme de Tchebychev. Rappelez la relation qui calcule T_{n+2} à l'aide de T_{n+1} et T_n.
♡ 2 ♡ Calculez $T'_n(0)$ pour tout n.
♡ 3 ♡ Que est le coefficient de X^{12} dans T_{15} ?
♠ 0 ♠ Un élève a trouvé le résultat suivant :

$$\begin{array}{lllllll} (X^2-1). & (0) & + & X. & (1) & = & 1 & .(X) \\ (X^2-1). & (4) & + & X. & (4.X) & = & 4 & .(2.X^2-1) \\ (X^2-1). & (24.X) & + & X. & (12.X^2-3) & = & 9 & .(4.X^3-3.X) \\ (X^2-1). & (...) & + & X. & (32.X^3-16.X) & = & ... & .(8.X^4-8.X^2+1) \end{array}$$

Et si finalement, vous me calculiez le coefficient de X^{12} dans T_{16} ?
◇ 0 ◇ Calculez $T_n(17/8)$.

♠ Complétez déjà les cases qu'il n'a pas complétées dans sa précipitation.
Ayant conjecturé quelquechose de joli, il veut écrire proprement sa formule pour tout n. Aidez le.
Il va voir son professeur, tout fier d'avoir deviné une belle formule à démontrer par récurrence. Son professeur lui dit *"ah, oui, c'est évident, sans récurrence, pars de $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ et dérive deux fois"*. Faites le pour lui, en n'omettant aucun détail.

La relation connue est $\boxed{T_{n+2}(X) = 2.X.T_{n+1}(X) - T_n(X)}$

Le polynôme T_n a la même parité que n, c'est du cours. On en déduit que dans T_{15} il n'y a que des termes d'exposant impair. Le coefficient de X^{12} est nul.

Pour calculer $T'_n(0)$, le plus simple est de partir de la formule $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ puis de la dériver (grâce au $\forall\theta$) : $-\sin(\theta).T_n(\cos(\theta)) = -n.\sin(n.\theta)$. On applique pour θ égal à $\pi/2$: $-1.T_n(0) = -n.\sin(n.\pi/2)$. On a la formule close $T'_n(0) = n.\sin(n.\pi/2)$

n modulo 4	0	1	2	3
$T'_n(0)$	0	n	0	$-n$

On peut aussi partir de $T_{n+2}(X) = 2.X.T_{n+1}(X) - T_n(X)$ et dériver
$T'_{n+2}(X) = 2.X.T'_{n+1}(X) + 2.T_{n+1}(X) - T'_n(X)$.
On applique en 0 : $T'_{n+2}(0) = 2.T_{n+1}(0) - T'_n(0)$. Or, $T_n(0)$ vaut $T_n(\cos(\pi/2))$ c'est à dire $\cos(n.\pi/2)$. Après, il faut mouliner un peu.

On complète
$$\begin{array}{ccccccccc}
(X^2-1). & (0) & + & X. & (1) & = & 1 & .(X) \\
(X^2-1). & (4) & + & X. & (4.X) & = & 4 & .(2.X^2-1) \\
(X^2-1). & (24.X) & + & X. & (12.X^2-3) & = & 9 & .(4.X^3-3.X) \\
(X^2-1). & (96.X^2-16) & + & X. & (32.X^3-16.X) & = & 16 & .(8.X^4-8.X^2+1)
\end{array}$$

On la formule : $\boxed{(X^2-1).T_n''(X) + X.T_n(X) = n^2.T_n(X)}$

On a initialisé. Mais on ne fait pas de récurrence, car on réfléchit avant de calculer [1].
Comme proposé, on part de $\forall\theta,\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ et on dérive deux fois :
$\forall\theta,\ -\sin(\theta).T'_n(\cos(\theta)) = -n.\sin(n.\theta)$
$\forall\theta,\ -\cos(\theta).T'_n(\cos(\theta)) + \sin^2(\theta).T_n''(\cos(\theta)) = -n^2.\cos(n.\theta)$
On fait un soupçon de trigonométrie $\forall\theta,\ \cos(\theta).T'_n(\cos(\theta)) + (\cos^2(\theta)-1).T_n''(\cos(\theta)) = n^2.\cos(n.\theta) = n^2.T_n(\cos(\theta))$.
On change de variable : $\forall x \in [-1,\ 1],\ x.T'_n(x) + (x^2-1).T_n''(x) = n^2.T_n(x)$
Mais il faut étendre à $\forall x \in \mathbb{C},\ x.T'_n(x) + (x^2-1).T_n''(x) = n^2.T_n(x)$.
Il suffit d'utiliser le résultat simple : $X.T'_n(X) + (X^2-1).T_n''(X) - n^2.T_n(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, ayant une infinité de racines. Il est forcément nul.

Pour avoir tous les points, il faut utiliser ce théorème d'extension de $[-1,\ 1]$ à $\mathbb{R}$.

On regarde le polynôme T_{16}. Il s'écrit $a.x^{16} - b.x^{14} + c.x^{12} - d.x^{10} + e.x^8 - f.x^6 + g.x^4 - h.x^2 + i$ avec a égal à 2^{15} (calculable).
On dérive et développe :
$x.(16.a.x^{15} - 14.b.x^{13} + 12.c.x^{11} - \ldots) + (x^2-1).(16.15.a.x^{14} - 14.13.b.x^{12} + 12.11.c.x^{10} - \ldots) = 16^2.(a.x^{16} - b.x^{14} + c.x^{12} + \ldots)$
$16.a + 16.15.a = 16^2.a$ (génial), puis $-14.b - 16.15.a - 14.13.b = -16^2.b$ puis $12.c + 12.11.c + 14.13.b = 16^2.c$ et ainsi de suite.
On identifie les coefficients et on fait tomber une à une les valeurs :
$32\,768.x^{16} - 131\,072.x^{14} + 212\,992.x^{12} - 180\,224.x^{10} + 84\,480.x^8 - 21\,504.x^6 + 2\,688.x^4 - 128.x^2 + 1$

On peut aussi suivre la méthode du cours : $2.\cos(16.x) = (c+i.s)^{16} + (c-i.s)^{16}$. On simplifie les termes imaginaires purs. On remplace les s^2 par des $1-c^2$ et on calcule.

On peut aussi écrire $T_{16}(X) = T_4(T_4(X)) = ((8.X^4-8.X^2+1)^2)^2 - 8.(8.X^4-8.X^2+1)^2 + 1$ et on ne garde que ce qu'on veut.

Pour $T_n(17/8)$, on peut chercher si $17/8$ est le cosinus hyperbolique d'un nombre simple (et pas un cosinus, car on dépasse 1). On sort la formule du cours ou on résout $\dfrac{(e^t)+(e^t)^{-1}}{2} = \dfrac{5}{3}$: $t = \ln(4)$. On a alors sans effort :

$$\boxed{T_n(ch(t)) = ch(n.t) = \frac{e^{n.\ln(4)} + e^{-n.\ln(4)}}{2} = \frac{4^{2.n}+1}{2.4^n}}$$

On pouvait aussi écrire : $T_{n+1}\left(\dfrac{17}{8}\right) = 2.\dfrac{17}{8}.T_n\left(\dfrac{17}{8}\right) - T_{n-1}\left(\dfrac{17}{8}\right)$
On a une suite $u_{n+1} = \dfrac{17}{4}.u_n - u_{n-1}$, d'équation caractéristique $\lambda^2 - \dfrac{17}{4}.\lambda + 1 = 0$, de racines 4 et 1/4.
La forme générale est donc $\exists(a,b),\ \forall n,\ u_n = a.4^n + b.4^{-n}$. Les conditions initiales en 1 et 17/8 donnent $a = b = 1/2$.

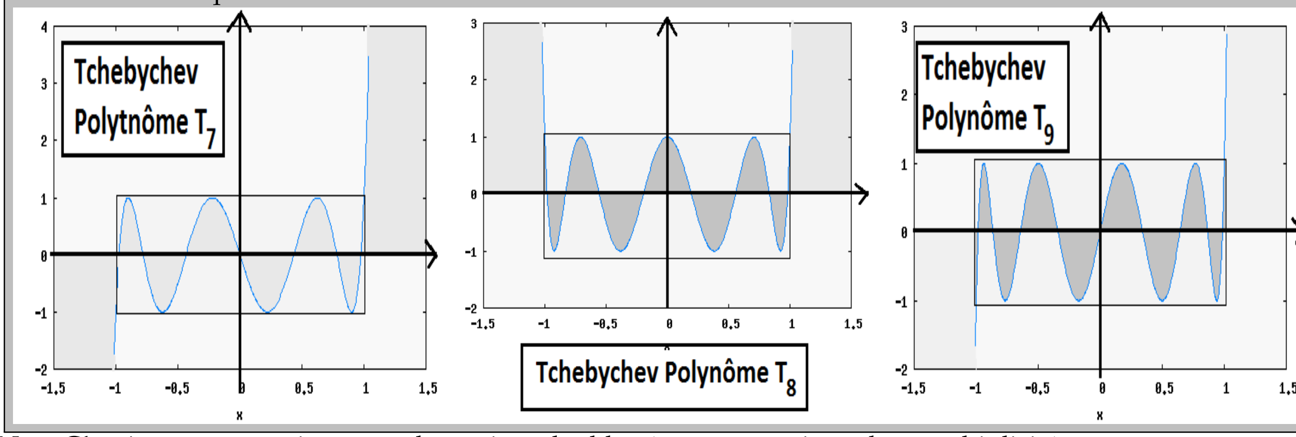
◃17▹ Résolvez $T_n\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$ d'inconnue n *(polynômes de Tchebychev)*.

Cette fois, $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
On résout donc $\cos\left(n.\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ d'inconnue n.

1. c'est ça les maths ; on réfléchit avant de calculer, pour éviter de calculer ; tandis qu'en physique, il faut réfléchir et calculer en même temps

Le cas d'égalité des cosinus donne $n.\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}\ [2.\pi]$ ou $n.\frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3}\ [2.\pi]$.
On a donc $\boxed{S_n = \{4 + 24.k.\pi \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{-4 + 24.k.\pi \mid k \in \mathbb{N}^*\}}$ par exemple 4, 20, 28 et ainsi de suite.

◁18▷ Le polynôme $T_n$est de degré n, de même que $T_n - 1$. Pourtant, si on cherche ses racines entre -1 et 1, on n'en trouve pas n.
Ceci veut il dire qu'il faut les chercher ailleurs ?



Non. C'est juste que certaines sont des racines doubles, à compter suivant leur multiplicité.

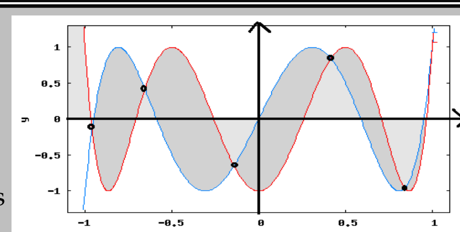
◁19▷ Qui est $2.X.(T_4 \circ T_4) - (T_5 \circ T_3)$?
Calculez le produit des racines de l'équation $2.T_n(x) = 1$ d'inconnue réelle x.

On pose $Q = 2.X.(T_4 \circ T_4) - (T_5 \circ T_3)$, et on calcule « par hasard » $Q(\cos(\theta))$ (je devrais écrire $\tilde{Q}(\cos(\theta))$ pour la rigueur).
$Q(\cos(\theta)) = 2.\cos(\theta).(T_4 \circ T_4)(\cos(\theta)) - (T_5 \circ T_3)(\cos(\theta))$
$Q(\cos(\theta)) = 2.\cos(\theta).T_{16}(\cos(\theta)) - T_{15}(\cos(\theta))$
$Q(\cos(\theta)) = 2.\cos(\theta).\cos(16.\theta) - \cos(15.\theta)$
$Q(\cos(\theta)) = \cos(17.\theta)$
On reconnaît la caractérisation de T_{17}.
On pouvait d'ailleurs l'obtenir sans repasser par $\cos(\theta)$.

Le produit des racines de $2.T_n(x) = 1$ fait juste intervenir les formules de Viète :
$2.T_n(x) - 1 = 2.(2^{n-1}.X^n + \ldots - 1)$ et tout dépend du coefficient constant de $2.T_n - 1$, c'est à dire du coefficient constant de T_n.
On rappelle que ce coefficient constant est $T_n(0)$ c'est à dire $\cos(\left(\frac{n.\pi}{2}\right)$.

n	forme du polynôme	produit des racines
n impair, $n = 2.p + 1$	$2^n.X^n - \ldots - 1$	2^{-n}
n pairement pair, $n = 4.k$	$2^n.X^n - \ldots + 1$	2^{-n}
n impairement pair, $n = 4.k + 2$	$2^n.X^n - \ldots - 3$	$-\frac{3}{2^n}$

◁20▷ ♡ On note T_n le n^{ieme} polynôme de Tchebychev. Donnez les racines de $T_6 - T_5$ et calculez leur somme.



On résout $T_6(x) = T_5(x)$ d'inconnue réelle x.
On a six racines à trouver (degré).
On cherche déjà entre -1 et 1 en posant $x = \cos(\theta)$ (et en fixant θ entre 0 et π pour ne avoir de doublons).
On résout donc $\cos(5.\theta) = \cos(6.\theta)$ d'inconnue θ.
Les deux cas d'égalité des cosinus donnent $\exists k,\ 5.\theta = 6.\theta + 2.k.\pi$
$\exists k,\ 5.\theta = -6.\theta + 2.k.\pi$
Le premier modèle donne θ multiple de $2.\pi$ et donc $\cos(\theta) = 1$ (en haut du graphe).
On a aussi la liste $\cos\left(\frac{2.k.\pi}{11}\right)$ pour k de 0 à 5 (on y retrouve la première racine pour k égal à 0).

Inutile de chercher ensuite hors de $[-1,\ 1]$, on a six racines !

Bilan $\boxed{S_x = \left\{ \cos\left(\frac{2.k.\pi}{11}\right) \mid k \in range(6) \right\}}$

Le polynôme $T_6 - T_5$ s'écrit $2^5.X - 2^4.X - \ldots$ (c'est même $32.X^6 - 16.X^5 - 48.X^4 + 20.X^3 + 18.X^2 - 5.X - 1$ si vous y tenez).

La somme des racines est donc $\frac{1}{2}$, sans effort.

◃21▹ T_n est le n^{ieme} polynôme de Tchebychev. Calculez $T_{20}(\sqrt{3}/2)$, $T_{13}(1/2)$ et $T'_{13}(1/2)$.
Résolvez $T_{16}(x) > 1$ d'inconnue réelle x.

Les polynômes de Tchebychev sont caractérisés par $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$.

On a donc très vite $T_{20}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = T_{20}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \cos\left(\frac{20.\pi}{6}\right) = \cos\left(4.\pi - \frac{2.\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2.\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$.

On a aussi $T_{13}\left(\frac{1}{2}\right) = T_{13}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos\left(\frac{13.\pi}{3}\right) = \cos\left(4.\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Pour la dérivation, il faut être vraiment matheux et se préoccuper des variables. On part encore de $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ et on dérive *(avant de donner une valeur à θ)* :

$-\sin(\theta).T'_n(\cos(\theta)) = -n.\sin(n.\theta)$, puis on donne une valeur à θ, en l'occurrence ici $\pi/3$:

$-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).T'_{13}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -13.\sin\left(\frac{13.\pi}{3}\right)$ donc $\frac{\sqrt{3}}{2}.T'_{13}\left(\frac{1}{2}\right) = 13.\frac{\sqrt{3}}{2}$: $\boxed{T'_{13}\left(\frac{1}{2}\right) = 13}$

J'attends la réponse crétinissime des certains : puisque $T_{13}(1/2)$ est une constante, quand on dérive, on trouve 0. Je me demande ce que ceux là font en sciences. Et j'attends hélas aussi d'autres grosses bêtises des personnes pressées d'écrire des formules sans s'interroger d'abord sur qui sont les variables...

Quand la variable x est entre -1 et 1, on peut l'écrire $x = \cos(\theta)$ et on a $T_n(x) = T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta) \leqslant 1$.
Quand la variable x a dépassé 1, par croissance de T_n *(dont la dérivée ne peut plus s'annuler et changer de signe, elle a eu toutes ses racines entre -1 et 1)*, on a alors $T_n(x) > 1$.
Par parité, pour x plus petit que -1, on a $T_n(x) = T_n(-x) > 1$.

Comme on a étudié tous les cas, on a bien $\boxed{T_{16}(x) > 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty,\ -1[\cup]1,\ +\infty[}$

L'argument est essentiellement visuel sur la forme des polynômes de Tchebychev. On préfèrera une réponse imparfaite certes avec un petit dessin à la personne qui se lancera dans un long calcul pour expliciter T_{16} et ne pas savoir qu'en faire...

◃22▹

Un professeur étourdi voulait poser l'exercice suivant : « résoudre $T_n\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{1}{2}$ d'inconnue n ». Il a écrit par erreur « résoudre $T_n\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{2}$ d'inconnue n », qui cette fois n'a pas de solution.

♡ 0 ♡ Résolvez quand même pour commencer le vrai exercice, et donnez le nombre de solutions dans `range(100)`.

On doit résoudre $T_n\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{1}{2}$ d'inconnue n.

On rappelle qu'on a déjà croisé : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2.2}$.

L'équation devient $T_n(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)) = \frac{1}{2}$ et même $\cos\left(\frac{n.\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Les cas d'égalité des cosinus conduisent à $\boxed{\exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{n.\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + 2.k.\pi}$ ou $\boxed{\exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{n.\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} + 2.k.\pi}$

On a deux familles pour n entier : $\boxed{S = \{4 + 24.k \mid k \in \mathbb{N}\} \bigcup \{-4 + 24.k \mid k \in \mathbb{N}^*\}}$

Malproprement : $\boxed{\{4,\ 20,\ 28,\ 44,\ 52,\ 68,\ 76,\ 92,\ 100,\ 116,\ 124, \ldots\}}$

Entre 0 et 100 il y a neuf solutions *(dont 100 d'ailleurs, donc dans range(100) il n'y en a que huit)*.

◊ 0 ◊ Calculez $T_n\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}\right)$ (appelé u_n) pour n de 0 à 5.

Ayant posé $x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$ on n'a pas d'angle simple vérifiant $\cos(\alpha) = x$. On doit se contenter de faire des calculs du type $2.x^2 - 1$, $4.x^3 - 3.x$ et même $8.x^4 - 8.x^2 + 1$.
Mais on rappelle aussi la formule dite de Tchebychev : $T_{n+2}(X) = 2.X.T_{n+1}(X) - T_n(X)$ qui donne ici $u_{n+2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}.u_{n+1} - u_n$ et permet de les calculer de proche en proche :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$	$\frac{2.\sqrt{6}-3}{8}$	$-\frac{\sqrt{2}+3.\sqrt{3}}{16}$	$\frac{1-12.\sqrt{6}}{32}$	$-\frac{31.\sqrt{2}+11.\sqrt{3}}{64}$

C'est la question qui déprime certains d'entre vous : « du calcul, comment voulez vous que je fasse ça sans me tromper ? ».

$\boxed{\diamond\, 0\, \diamond}$ Montrez qu'il existe quatre suites de rationnels (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) vérifiant pour tout n : $u_n = a_n + b_n.\sqrt{2} + c_n.\sqrt{3} + d_n.\sqrt{6}$ et donnez les coefficients du tableau

- $$\begin{array}{lllllllll} a_{n+2} & = & *.a_{n+1} & +*.b_{n+1} & +*.c_{n+1} & +*.d_{n+1} & +*.a_n & +*.b_n & +*.c_n & +*.d_n \\ b_{n+2} & = & *.a_{n+1} & +*.b_{n+1} & +*.c_{n+1} & +*.d_{n+1} & +*.a_n & +*.b_n & +*.c_n & +*.d_n \\ c_{n+2} & = & *.a_{n+1} & +*.b_{n+1} & +*.c_{n+1} & +*.d_{n+1} & +*.a_n & +*.b_n & +*.c_n & +*.d_n \\ d_{n+2} & = & *.a_{n+1} & +*.b_{n+1} & +*.c_{n+1} & +*.d_{n+1} & +*.a_n & +*.b_n & +*.c_n & +*.d_n \end{array}$$

Pour l'instant, on a bien des formes $u_n = a_n + b_n.\sqrt{2} + c_n.\sqrt{3} + d_n.\sqrt{6}$ avec a_n, b_n, $c_n$et d_n rationnels :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	1	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$	$\frac{2.\sqrt{6}-3}{8}$	$-\frac{\sqrt{2}+3.\sqrt{3}}{16}$	$\frac{1-12.\sqrt{6}}{32}$	$-\frac{31.\sqrt{2}+11.\sqrt{3}}{64}$
a_n	1	0	$-3/8$	0	$1/32$	0
b_n	0	$1/4$	0	$-1/16$	0	-31/64
c_n	0	$1/4$	0	$3/16$	0	$-11/64$
d_n	0	0	$1/4$	0	$-3/8$	0

On note P_n la propriété « les quatre rationnels existent, et on a l'égalité écrite plus haut ».
Et c'est parti pour une récurrence. A double hérédité.

Attention, on est en maths au delà du bac. Le plus important, c'est l'existence de a_n, b_n, c_n et d_n et pas l'égalité. Le comprendrez vous un jour, ou resterez vous malformés par un système prébac et des a priori crétins ?

On a initialisé l'existence en écrivant le tableau ci dessus.
On se donne un entier n, et on suppose que les deux quadruplets de rationnels (a_n, b_n, c_n, d_n) et $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1})$ existent.
On doit montrer que $(a_{n+2}, b_{n+2}, c_{n+2}, d_{n+2})$ existent. On va les expliciter, ce qui prouvera leur existence.

En passant, on doit prouver $\forall n$, $(P_n \Rightarrow P_{n+1})$. Quoi de plus simple alors que de suivre la quantification dans son ordre logique :
$\forall n$: on se donne n quelconque
$P_n \Rightarrow$: on suppose P_n vraie
$\Rightarrow P_{n+1}$: on montre que P_{n+1} est vraie.
C'est bien plus logique que vos « on suppose que P_n est vraie » et dans laquelle n n'est quantifié (une fois encore !) qu'après.

On rappelle alors la formule $u_{n+2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}.u_{n+1} - u_n$.
Avec les hypothèses de récurrence :

$$u_{n+2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}.(a_{n+1} + b_{n+1}.\sqrt{2} + c_{n+1}.\sqrt{3} + d_{n+1}.\sqrt{6}) - (a_n + b_n.\sqrt{2} + c_n.\sqrt{3} + d_n.\sqrt{6})$$

On développe et réordonne, proprement en tenant compte des propriétés de la racine carrée :

$$u_{n+2} = a_{n+1}.\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} + b_{n+1}.\frac{2+\sqrt{6}}{2} + c_{n+1}.\frac{\sqrt{6}+3}{2} + d_{n+1}.\frac{2.\sqrt{3}+3.\sqrt{2}}{2}) - (a_n + b_n.\sqrt{2} + c_n.\sqrt{3} + d_n.\sqrt{6})$$

On regroupe les termes :

$$u_{n+2} = \Big(b_{n+1} + \frac{3.c_{n+1}}{2} - a_n\Big).1 + \Big(\frac{a_{n+1}}{2} + \frac{3.d_{n+1}}{2} - b_n\Big).\sqrt{2} + \Big(\frac{a_{n+1}}{2} + d_{n+1} - c_n\Big).\sqrt{3} + \Big(\frac{b_{n+1}}{2} + \frac{c_{n+1}}{2} - d_n\Big).\sqrt{6}$$

Pour conclure, il suffit de dire qu'on définit alors a_{n+2}, b_{n+2}, c_{n+2} et d_{n+2} par les formules suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} a_{n+2} & = & & b_{n+1} & +3.c_{n+1}/2 & & -a_n & & & \\ b_{n+2} & = & a_{n+1}/2 & & & +3.d_{n+1}/2 & & -b_n & & \\ c_{n+2} & = & a_{n+1}/2 & & & +d_{n+1} & & & -c_n & \\ d_{n+2} & = & & b_{n+1}/2 & +c_{n+1}/2 & & & & & -d_n \end{array}\right.$$

(en alignant proprement pour que les choses soient agréables à lire et faciles à interpréter).
Une fois qu'on a écrit cette définition, on peut poser :

$$u_{n+2} = a_{n+2} + b_{n+2}.\sqrt{2} + c_{n+2}.\sqrt{3} + d_{n+2}.\sqrt{6}$$

et dire qu'on a *(presque)* fini l'hérédité de la récurrence.

On note que c'est « on définit alors..., on a bien la formule » *et non encore et toujours* « on écrit la formule et on identifie », *qui traduit les implications dans le mauvais sens. Mais là encore, on vous a fait croire que faire des maths c'était écrire des formules partout, faire des calculs et écrire des* $\Rightarrow$. *Quelle détresse, quelle tristesse. Quel manque d'intelligence. Comme si la littérature n'était que conjugaison.*

Pourquoi « *presque fini* » ? Parce qu'il faut encore dire qu'on a défini des suites de rationnels.
Pour l'instant, on a défini des suites. mais pourquoi des rationnels ?
Les deux premiers quadruplets sont faits de rationnels. Et la formule « matricielle » plus haut dit que si (a_n, b_n, c_n, d_n) et $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1})$ sont deux quadruplets de rationnels, alors $(a_{n+2}, b_{n+2}, c_{n+2}, d_{n+2})$ est un quadruplet de rationnels.

- L'argument est « sommes, produits de rationnels » comme $a_{n+2} = b_{n+1} + \dfrac{3.c_{n+1}}{2} - a_n$.
- L'argument encore plus court est « $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un anneau ».
- L'argument de pachyderme est « on écrit $a_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ et ainsi de suite, jusqu'à arriver à $a_{n+2} = \dfrac{truc}{bidule}$ ». C'est indigeste au possible.

Ah qu'il est facile de croire qu'on va avoir les points parce qu'on aura écrit des formules. Mais si on n'a pas dit qu'on travaillait par récurrence. Si on n'a pas dit que l'hérédité était double. Si on a tout concentré sur les formules au lieu de l'existence.Si on oublié de propager « rationnels ».

Au fait, pourquoi ai-je parlé de « formule matricielle » ?

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \\ d_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

ou même $$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \\ d_{n+2} \\ a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1.5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \\ a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

Mais ça, ce sera pour plus tard dans l'année.

◊ 0 ◊ Calculez $a_{2.n}$ et $d_{2.n}$ pour n de 0 à 3. ◊ 1 ◊ Montrez que chaque $a_{2.n}$ est de la forme $\dfrac{i_n}{2^{2.n+1}}$ avec i_n entier impair (pour n dans $\mathbb{N}^*$) et chaque $d_{2.n}$ de la forme $\dfrac{j_{2.n}}{2^{2.n+1}}$ avec $j_{2.n}$ entier.

L'énoncé nous dit de ne nous intéresser qu'aux termes d'indice pair : $u_{2.n}$, c'est à dire $\cos(2.n.\theta)$

avec $\theta = Arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}\right)$:

n	0	1	2	3
$u_{2.n} = \cos(n.2.\theta)$	1	$\dfrac{2.\sqrt{6}-3}{8}$	$\dfrac{1-12.\sqrt{6}}{32}$	$\dfrac{6.\sqrt{6}-99}{128}$
$a_{2.n}$	0	$\dfrac{-3}{8}$	$\dfrac{1}{32}$	$\dfrac{-99}{128}$
$d_{2.n}$	0	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{-3}{8}$	$\dfrac{3}{64}$
$b_{2.n}$et $c_{2.n}$	0	0	0	0

On peut se lancer dans un grand calcul pour avancer de deux étapes.
Ceci nous permet de dire (tout de suite ?) que par récurrence évidente (?) sur n $b_{2.n}$et $c_{2.n}$sont nuls.
On montrerait aussi que $a_{2.n+1}$ et $b_{2.n+1}$ sont toujours nuls aussi.
En fait, on a envie de prouver $u_{2.n} = a_{2.n} + d_{2.n}.\sqrt{6}$ et $u_{2.n} = b_{2.n+1}.\sqrt{2} + c_{2.n+1}.\sqrt{3}$ pour tout n.

Mais on peut aussi écrire : $u_{2.n} = \cos(2.n.\theta) = \cos(n.(2.\theta))$.
On travaille donc en fait avec l'angle $2.\theta$.

$$u_{2.(n+2)} = T_{2.n+4}(\cos(\theta)) = \cos((n+2).2.\theta) = 2.\cos(2.\theta).\cos((n+1).2.\theta) - \cos(n.2.\theta)$$

On remplace $\cos(2.\theta)$ par $\dfrac{2.\sqrt{6}-3}{8}$: $u_{2.(n+2)} = \frac{2.\sqrt{6}-3}{4}.u_{2.(n+1)} - u_{2.n}$
On recommence une récurrence plus simple (quoique à double hérédité) pour une propriété appelée Q_n :
il existe $a_{2.n}$ et $d_{2.n}$, rationnels, vérifiant $u_{n2.n} = a_{2.n} + d_{2.n}.\sqrt{6}$, et $2^{2.n+1}.a_{2.n}$est un entier impair et enfin et $2^{2.n+1}.d_{2.n}$est un entier.
L'initialisation est faite.

On se donne n, et on suppose que Q_n et Q_{n+1} sont vraies.
On calcule alors $u_{2.n+4}$ par la formule citée plus haut : $u_{2.(n+2)} = \cos((n+2).2.\theta) = 2.\cos(2.\theta).\cos((n+1).2.\theta) - \cos(n.2.\theta)$.
On remplace par les valeurs connues et l'hypothèse de récurrence :

$$u_{2.(n+2)} = \frac{2.\sqrt{6}-3}{4}.(a_{2.n+2} + d_{2.n+2}.\sqrt{6}) - a_{2.n} - d_{2.n}.\sqrt{6}$$

On développe et regroupe : $u_{2.(n+2)} = \Big(\dfrac{-3.a_{2.n+2}}{4} + 3.d_{2.n+2} - a_{2.n}\Big) + \Big(\dfrac{a_{2.n+2}}{2} - \dfrac{3.d_{2.n+2}}{4} - d_{2.n}\Big).\sqrt{6}$.
On pose donc bien $a_{2.n+4} = \Big(\dfrac{-3.a_{2.n+2}}{4} + 3.d_{2.n+2} - a_{2.n}\Big)$ et $d_{2.n+4} = \Big(\dfrac{a_{2.n+2}}{2} - \dfrac{3.d_{2.n+2}}{4} - d_{2.n}\Big)$.
ce sont des rationnels, par les hypothèses Q_n et Q_{n+1}.
Il reste à voir si $2^{2.n+5}.a_{2.n+4}$ est un entier impair et $2^{2.n+5}.d_{2.n+4}$ entier.

$$2^{2.n+5}.a_{2.n+4} = 2^{2.n+5}.\Big(\frac{-3.a_{2.n+2}}{4} + 3.d_{2.n+2} - a_{2.n}\Big) = -3.(2^{2.n+3}.a_{2.(n+1)}) + 12.(2^{2.n+3}.d_{2.(n+1)}) - 16.(2^{2.n+1}.a_{2.n})$$

dans cette expression, tous les termes entre parenthèses sont des entiers par hypothèse de récurrence, et selon l'énoncé ils s'écrivent même ainsi :
$2^{2.n+5}.a_{2.n+4} = -3.i_{2.n+3} + 12.j_{2.n+3} - 16.i_{2.n}$.
C'est un entier. Comme $12.j_{2.n+3} - 16.i_{2.n}$ est visiblement pair, et comme $-3.i_{2.n+3}$ est impair, la somme est impaire.
A ce stade, l'entier $i_{2.n+5}$ est entier et impair.
On passe à

$$2^{2.n+5}.d_{2.n+4} = 2^{2.n+5}.\Big(\frac{a_{2.n+2}}{2} - \frac{3.d_{2.n+2}}{4} - d_{2.n}\Big) = 2.(2^{2.n+3}.a_{2.(n+1)}) - 3.(2^{2.n+3}.d_{2.(n+1)}) - 16.(2^{2.n+1}.d_{2.n})$$

c'est un entier.
La récurrence s'achève.

◇ 0 ◇ Déduisez que l'équation $u_n = \dfrac{1}{2}$ d'inconnue n n'a aucune solution.

On se demande alors si $u_{2.n}$ peut valoir une fois au moins $\dfrac{1}{2}$.
Il faudrait pour cela que $\dfrac{i_{2.n}}{2^{2.n+1}} + \dfrac{j_{2.n+1}}{2^{2.n+1}}.\sqrt{6}$ soit égal à $\dfrac{1}{2}$.
Par irrationalité de $\sqrt{6}$, il faudrait que $j_{2.n+1}$ soit nul (pourquoi pas), et $\dfrac{i_{2.n}}{2^{2.n+1}}$ soit égal à $\dfrac{1}{2}$. Pour ce faire, il faudrait que $i_{2.n}$ simplifie les nombreux 2 du dénominateur. Or, il est impair. C'est impossible.

Mais serait il possible qu'un u_n tout court (d'indice pair ou impair) soit égal à $\dfrac{1}{2}$?
Mais si tel était le cas, $u_{2.n}$ serait égal à $2.\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^2 - 1$ c'est à dire $\dfrac{-1}{2}$.
L'équation $\dfrac{i_{2.n}}{2^{2.n+1}} + \dfrac{j_{2.n+1}}{2^{2.n+1}}.\sqrt{6} = \dfrac{-1}{2}$ est tout aussi impossible.

Bref, jamais $\cos\Big(n.Arccos\Big(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}\Big)\Big)$ ne prendra une valeur simple *(en tout cas, jamais il ne vaudra $\frac{1}{2}$).*

◃23▹ ♡♣ On pose $S=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$.
Citez les arguments qui permettent d'obtenir de ligne en ligne
$S=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n.(n+1)}$
$S=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n.(n+1)}\Big)$
$S=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n.(n+1)}\Big)$
$S=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=k}^{+\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\Big)$
$S=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}=1+S$
Le résultat final semble étrange ? Trouvez l'erreur.

$S=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n.(n+1)}$	on isole le terme $n=1$ on décale les indices $\frac{1}{n+1}$ pour n de 1 à l'infini on multiplie haut et bas par n
$S=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n.(n+1)}\Big)$	k est un compteur
$S=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n.(n+1)}\Big)$	on permute les sommes $1\leqslant k\leqslant n$
$S=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=k}^{+\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\Big)$	on décompose en éléments souples
$S=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{k}\Big)$	on télescope « à l'infini »
$S=1+S$	les variables sont muettes

L'erreur : on travaille sur quelquechose qui n'existe pas !
La somme S est en fait infinie.

◃24▹ ♡ Montrez que l'ensemble des matrices carrées de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec a et b réels est un sous-anneau de $(M(\mathbb{R}),+,.)$.
Est il commutatif ? Trouvez les élément de carré I_2 (résolvez $M^2=I_2$).
Trouvez les élément de carré $-I_2$ (résolvez $M^2=-I_2$).
Montrez que l'ensemble des matrices carrées de la forme $\begin{pmatrix} z & -\overline{h} \\ h & \overline{z} \end{pmatrix}$ avec z et h complexes est un sous-anneau de $(M(\mathbb{C}),+,.)$.
Est il commutatif ? Trouvez les élément de carré I_2 (résolvez $M^2=I_2$).
Trouvez les élément de carré $-I_2$ (résolvez $M^2=-I_2$).

Un sous-anneau c'est quoi ?
C'est une partie d'un anneau qui est encore un anneau.
Ça veut juste dire qu'on n'a pas à se prendre la tête sur les propriétés comme $A.(B+C)=A.B+A.C$, elles sont acquises dans l'anneau.
On doit donc juste vérifier les stabilités.

Oui, les stabilités, car il y a deux lois.
L'addition et la multiplication.

On note $C=\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a,b\ b)\in\mathbb{R}^2\}$. C'est toutes les matrices de cette forme. Je n'en donnerai pas la liste, il y en a une infinité.
On trouve le neutre de l'addition $\begin{pmatrix} 0 & -0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et celui de la multiplication $\begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour la stabilité par addition, on prend deux éléments de C : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$.

L'élève qui a pris $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est le type même de l'élève qui n'a rien compris, qui saura faire des calculs, mais pour qui l'art de raisonner nécessitera un gros travail de remise en question de soi.

On les additionne : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+a') & -(b+b') \\ (b+b') & (a+a') \end{pmatrix}$.
On reconnaît la forme $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha = a + a'$ et $\beta = b + b'$.
Leur produit se calcule : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a.a' - b.b') & -(a.b' + a'.b) \\ (a.b' + a'.b) & (a.a' - b.b') \end{pmatrix}$.
Je vous fais un dessin sur qui on appelle α et qui on appelle β pour dire « oui, ce produit est dans C » ?

Enfin, l'opposé de la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ de C est la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, dans C.

Bonus : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a.a' - b.b') & -(a.b' + a'.b) \\ (a.b' + a'.b) & (a.a' - b.b') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
La multiplication est ici commutative.
C'est ce qu'on appelle un anneau commutatif.

L'addition est de toutes façons commutative, ce n'est donc jamais sur elle que peut porter la question.

On calcule $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a^2 - b^2) & -2.a.b \\ (2.a.b) & (a^2 - b^2) \end{pmatrix}$.
On résout $A^2 = I_2$ donne $a^2 - b^2 = 1$ et $2.a.b = 0$.
On ne peut pas prendre $a = 0$, il faut donc prendre $b = 0$, et on reporte.
Deux solutions : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
De même $A^2 = -I_2$ donne $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Lycee Charlemagne | MPSI2 | Annee 2023/24

. Euler et Fourier .

I∼0) x est un réel dans $]0,\ 1[$. Montrez que la suite $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{2.x}{n^2 - x^2}\right)$ notée (C_N) est croissante,
la suite $\left(x^2 + \sum_{n=2}^{N} \frac{x^2}{n.(n-1)}\right)$ notée (σ_N) est croissante,
la suite $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{x^2}{n^2}\right)$ notée (S_N) est croissante,
la suite $\left(\prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right)$ notée (P_N) est décroissante.

Tous les termes existent. On rappelle que x est positif et chaque $n^2 - x^2$ aussi *(x est plus petit que n entier naturel)*, de même que chaque $1 - \frac{x^2}{n^2}$ *(égal à* $\frac{n^2 - x^2}{n^2}$*)*.

C_N	σ_N	S_N	P_N
$\sum_{n=1}^{N} \frac{2.x}{n^2 - x^2}$	$x^2 + \sum_{n=2}^{N} \frac{x^2}{n.(n-1)}$	$\sum_{n=1}^{N} \frac{x^2}{n^2}$	$\left(\prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right)$
$C_{N+1} - C_N = \frac{2.x}{(N+1)^2 - x^2}$	$\sigma_{N+1} - \sigma_N = \frac{x^2}{(N+1).N}$	$S_{N+1} - S_N = \frac{x^2}{(N+1)^2}$	$P_{N+1} - P_N = -P_N.\frac{x^2}{(N+1)^2}$
positif	positif	positif	négatif
suite croissante	suite croissante	croissante	décroissante

Pour la suite (P_N), on peut
- regarder la position par rapport à 1 du quotient de deux termes consécutifs
- calculer : $P_{N+1} - P_N = P_N.\Big(1 - \dfrac{x^2}{(N+1)^2}\Big) - P_N = -\dfrac{x^2}{(N+1)^2}.P_N$
- étudier la monotonie de $\ln(P_N)$

I∼1) Montrez que (σ_N) est majorée. Déduisez que (S_N) et (P_N) convergent. Montrez : $P_N \geqslant (1-x^2).\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)$ et déduisez : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} P_N \neq 0$.

Pour majorer σ_N, on voit venir les classiques : éléments simples et télescopage

$$x^2 + \sum_{n=2}^{N} \frac{x^2}{n.(n-1)} = x^2 + \sum_{n=2}^{N} \frac{x^2}{n-1} - \frac{x^2}{n} = x^2 + \frac{x^2}{1} - \frac{x^2}{N} \leqslant 2.x^2$$

On a un majorant.
Il dépend de x *(fixé)* mais pas de N *(celui qui bouge pour décrire la suite)*.

(σ_N) est croissante majorée. Elle converge. Mais de toutes façons, on le savait, puisqu'elle a une limite quand N tend vers l'infini : $x^2 + \dfrac{x^2}{1} - \dfrac{x^2}{N} \longrightarrow_{N\to+\infty} 2.x^2$

Remarque : *« Converge », c'est synonyme de « voir une limite ».*
Combien d'élèves perdent leurs temps à montrer $(u_n) = \Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)$ est croissante
(u_n) est majorée
donc (u_n) converge
enfin, la limite de (u_n) vaut...
alors que bien souvent, il suffit de dire « la suite $\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)$ converge vers 1 ».

(S_N) est croissante aussi, majorée.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x^2}{n^2} = x^2 + \sum_{n=2}^{N} \frac{x^2}{n^2} \leqslant x^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{x^2}{n.(n-1)} = 2.x^2 - \frac{1}{N} \leqslant 2.x^2$$

Erreur : *La majoration $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{x^2}{n^2} \leqslant 2.x^2 - \frac{1}{N}$ est une majoration terme à terme, mais pas une majoration de la suite.*
Le terme $2.x^2 - \dfrac{1}{N}$ dépend encore de N. Ce n'est pas un majorant.
Sinon, toute suite réelle (a_n) est majorée... par elle même...

Imprécision : *Une majoration par une suite convergente permet quand même de conclure.*
En effet, la suite convergente est forcément bornée.
Par transitivité, vous majorer la suite initiale par une constante.

Croissante majorée, (S_N) converge (vers $x^2.\Big(1+\dfrac{\pi^2}{6}\Big)$ d'ailleurs).

Pour la convergence de (P_N), on peut tricher.
Elle est décroissante et positive. C'est fini.

Mais pourrait elle converger vers 0 ? Après tout, le produit $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\Big(1-\frac{1}{N}\Big)$ converge vers 0.

De même, aucun terme $\dfrac{1}{n}$ n'est nul, mais la limite est nulle...

On va comparer avec une suite de référence.
x est entre 0 et 1. On a donc $x^2 < 1$ puis $\dfrac{x^2}{n^2} < \dfrac{1}{n^2}$ et $1 - \dfrac{x^2}{n^2} > 1 - \dfrac{1}{n^2}$.
On multiplie de 2 à N ces inégalités entre réels positifs :

$$\prod_{n=2}^{N}\Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big) > \prod_{n=2}^{N}\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)$$

On multiplie encore :

$$P_N \geqslant (1-x^2).\prod_{n=2}^{N}\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)$$

Le terme de droite a déjà été calculé par télescopage :

$$P_N \geqslant (1-x^2).\prod_{n=2}^{N}\Big(\frac{(n-1).(n+1)}{n^2}\Big) = (1-x^2).\frac{(n-1)!.\frac{(n+1)!}{2}}{(n!)^2}\Big)$$

On a donc

$$P_N \geqslant (1-x^2).\frac{N+1}{2.N} \geqslant \frac{1-x^2}{2}$$

La suite (P_N) est minorée par le réel $\frac{1-x^2}{2}$.Elle converge vers son plus grand minorant, supérieur ou égal à $\frac{1-x^2}{2}$. Elle ne peut pas converger vers 0.

II∼0) On définit $f = t \longmapsto \cos(x.t)$. Calculez pour tout n $\int_{-\pi}^{\pi} f(u).e^{-i.n.u}.du$ noté c_n

$\int_{-\pi}^{\pi} f(u).\cos(n.u).du$ noté a_n

$\int_{-\pi}^{\pi} f(u).\sin(n.u).du$ noté b_n

Ces intégrales vont servir dans les questions suivantes, vous pouvez donc valider vos calculs en lisant la suite de l'énoncé...

L'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(u).e^{-i.n.u}.du$ se calcule par parties *(intégrer deux fois, retrouver la même avec un coefficient)*, ou en passant dans $\mathbb{C}$. C'est ce que je vais faire.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(u).e^{-i.n.u}.du = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(x.u).e^{-i.n.u}.du = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i.x.u}+e^{-i.x.u}}{2}.e^{-i.n.u}.du$$

On sépare en $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i.(x-n).u}.du = \Big[\frac{e^{i.(x-n).u}}{(x-n)}\Big]_{-\pi}^{\pi}$ et une autre du même type, sachant que $x-n$ ne peut pas être nul *(x est entre 0 et 1 et n est entier).*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(u).e^{-i.n.u}.du = \frac{e^{i.x.\pi}.e^{i.n.\pi}-e^{-i.x.\pi}.e^{-i.n.\pi}}{2.i.(x-n)} - \frac{e^{-i.x.\pi}.e^{-i.n.\pi}-e^{i.x.\pi}.e^{i.n.\pi}}{2.i.(x+n)}$$

Ayant deux fois le même numérateur, on regroupe en $(e^{i.x.\pi}.e^{i.n.\pi}-e^{i.x.\pi}.e^{-i.n.\pi}).\frac{2.x}{2.i.(x-n).(x+n)}$ *(qui a pris $4.i^2.(x-n).(x+n)$ comme dénominateur commun ?).*

Mais ce n'est pas tout, $e^{i.n.\pi} = (e^{i.\pi})^n = (-1)^n$. On peut factoriser $(e^{i.x.\pi}-e^{i.x.\pi}).(-1)^n.\frac{x}{(x-n).(x+n)}$

On trouve c_n, puis on en extrait la partie réelle et la partie imaginaire :

$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(u).e^{-i.n.u}.du$	$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(u).\cos(n.t).du$	$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(u).\sin(n.t).du$
$\frac{2.x.\sin(\pi.x)}{x^2-n^2}.(-1)^n$	$\frac{2.x.\sin(\pi.x)}{x^2-n^2}.(-1)^n$	0

Question : *Pourquoi la formule $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x.u).e^{-i.n.u}.du = \int_{-\pi}^{\pi}\Re e(e^{i.x.u}).e^{-i.n.u}.du = \Re e\Big(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i.x.u}.e^{-i.n.u}.du\Big)$ qui semble une bonne idée (qu'on utilise d'ailleurs à la fin) est elle une erreur ?*

On peut passer de $f(u).\Re e(e^{-i.n.u})$ à $\Re e(f(u).e^{-i.n.u})$ puis de $\int_{-\pi}^{\pi} f(u).\Re e(e^{-i.n.u}).du$ à $\Re e\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(u).e^{-i.n.u}.du\Big)$.

On ne peut pas passer de $\Re e(e^{i.x.u}).e^{-i.n.u}$ à $\Re e(e^{i.x.u}.e^{-i.n.u})$.

Le problème est que $e^{-i.n.u}$ n'est pas un réel...

Il est normal que b_n soit nulle. Il s'agit de l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x.u).\sin(n.u).du$ d'une application impaire. Les deux intégrales $\int_{-\pi}^{0}\cos(x.u).\sin(n.u).du$ et $\int_{0}^{\pi}\cos(x.u).\sin(n.u).du$ vont donc se compenser.

II∼1) On pose $\phi_N = t \longmapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n.e^{i.n.t}$.

Montrez pour tout t : $\phi_N(t) = 2.\sin(\pi.x).\Big(\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.\cos(n.t)\Big)$.

Quand on calcule $c_n.e^{i.n.t}$, il y a quatre variables : x et t qui sont fixés, u qui sert à calculer l'intégrale, et n qui va servir à calculer une somme.

On doit aboutit à une formule avec des cosinus, c'est donc qu'on va regrouper des exponentielles complexes.

On va découper $\sum_{n=-N}^{N}$ en $\sum_{n=-N}^{-1}$, $\sum_{n=0}^{0}$ et $\sum_{n=1}^{N}$.
On regroupera ensuite les termes d'indices opposés :

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n.e^{i.n.t} = c_0.e^0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n.e^{i.n.t} + c_{-n}.e^{-.n.t})$$

Mais chaque c_n est égal à son c_{-n} d'indice opposé *(le $(-1)^n$ et le $(-1)^{-n}$ donnent la même chose)* :

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n.e^{i.n.t} = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n.(e^{i.n.t} + e^{-.n.t})$$

Les cosinus arrivent, de même d'ailleurs que le $\dfrac{1}{x}$ dans $c_0 = \dfrac{2.x.\sin(\pi.x)}{x^2 - 0^2}.(-1)^0$:

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n.e^{i.n.t} = \frac{2.\sin(\pi.x)}{x} + \sum_{n=1}^{N} c_n.2.\cos(n.t)$$

On remplace chaque $c_n$par sa valeur :

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n.e^{i.n.t} = \frac{2.\sin(\pi.x)}{x} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2.x.\sin(\pi.x)}{x^2 - n^2}.(-1)^n.2.\cos(n.t)$$

On factorise le réel (non nul) $2.\sin(x.\pi)$ et on a bien $\phi_N(t) = 2.\sin(\pi.x).\Big(\dfrac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N} \dfrac{(-1)^n.2.x}{x^2 - n^2}.\cos(n.t)\Big)$, qui permet de valider le calcul de chaque c_n.

II∼2) Prolongez par continuité $u \longmapsto \dfrac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}$ et $u \longmapsto \dfrac{f(t) - f(u)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}$ *(notée γ_t)* en $u = t$ *(t est fixé entre $-\pi$ et π, sens large)*. Pensez à $\cos(a) - \cos(b) = produit$, ça peut servir ici.

On veut prolonger par continuité des applications qui voient leur dénominateur s'annuler.
Quand u tend vers t, le réel $u - t$ et ses multiples tendent vers 0. On peut utiliser l'équivalent $\sin(\theta) \sim_{\theta \to 0} \theta$:

$$\frac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)} \sim_{u\to t} \frac{(2.N+1).\dfrac{t-u}{2}}{\dfrac{t-u}{2}}$$

(les équivalents passent au produit et quotient)

$$\frac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)} \sim_{u\to t} (2.N+1)$$

(on a simplifié par la variable non nulle $u - t$).
Être équivalent à un réel *(non nul évidemment)* c'est tendre vers ce réel :

$$\boxed{\frac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)} \longrightarrow_{u\to t} (2.N+1)}$$

Vous observerez que je n'ai écrit nulle part des $\simeq$ ou des $=$. C'est des maths, pas de l'approximation de pacotille.

- *Un physicien vous poussera à écrire* $\dfrac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)} \simeq \dfrac{(2.N+1).\dfrac{t-u}{2}}{\dfrac{t-u}{2}}$. *C'est inepte.*

• Un camarade de classe (pas un MPSI2 quand même) écrira $\dfrac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)} = \dfrac{(2.N+1).\dfrac{t-u}{2}}{\dfrac{t-u}{2}}$*. C'est monstrueux.*

• Un professeur de Terminale vous fera écrire $\dfrac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)} = \dfrac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{(2.N+1).\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}.\dfrac{\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}.(2.N+1)$

puis passer à la limite avec $\dfrac{\sin(\theta)}{\theta}$ *tend vers 1 quand* θ *tend vers 0.*
C'est parfaitement rigoureux.
Et c'est exactement la même chose que notre raisonnement par équivalents...

Pour l'autre quotient $\dfrac{f(t)-f(u)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}$, on a encore une forme indéterminée.

On fait un peut de trigonométrie[2] : $f(t)-f(u) = \cos(x.t)-\cos(x.u) = -2.\sin\left(\frac{x.t-x.u}{2}\right).\sin\left(\frac{x.t+x.u}{2}\right)$.
On a donc

$$\frac{f(t)-f(u)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)} = -2.\frac{\sin\left(\dfrac{x.t-x.u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}.\sin\left(\frac{x.t+x.u}{2}\right)$$

On peut utiliser un équivalent quand u tend vers t : $\dfrac{f(t)-f(u)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)} \sim_{u\to t} -2.\dfrac{\dfrac{x.t-x.u}{2}}{\dfrac{t-u}{2}}.\sin\left(\dfrac{x.t+x.u}{2}\right)$ *(le second sinus n'a pas d'équivalent sans sinus, puisque* $\dfrac{x.t+x.u}{2}$ *ne tend pas vers 0).*

On trouve une limite : $\boxed{-2.t.\sin(x.t)}$ Pourquoi pas.

On aurait pu aussi écrire $\dfrac{f(t)-f(u)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)} = \dfrac{\cos(x.t)-\cos(x.u)}{x.t-x.u}.\dfrac{\dfrac{t-u}{2}-0}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)-0}.2.x$ *et utiliser* $\dfrac{g(u)-g(t)}{u-t} \longrightarrow_{u\to t} g'(t)$ *pour les fonctions cosinus et sinus.*

II∼3) Montrez $\phi_N(t) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(u).\frac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}.du$ et $2.\pi.f(t) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\frac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}.du$.

Par linéarité

$$c_n.e^{i.n.t} = e^{i.n.t}.\int_{u=-\pi}^{\pi}\cos(x.t).e^{-i.n.u}.du = \int_{u=-\pi}^{\pi}\cos(x.t).e^{i.n.t}.e^{-i.n.u}.du$$

On somme :

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n.e^{i.n.t} = \int_{u=-\pi}^{\pi}\cos(x.t).\sum_{n=-N}^{N}(e^{i.n.t}.e^{-i.n.u}).du$$

Regardons en détail la somme (géométrique) $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N}(e^{i.n.t}.e^{-i.n.u})$. sa raison $e^{i.n.(t-u)}$ ne vaut pas 1.

$$\sum_{n=-N}^{N}\left(e^{i.(t-u.)}\right)^n = \frac{e^{-N..i.(t-u)}-e^{i.(N+1).(t-u)}}{1-e^{i.(t-u)}} = \frac{e^{i.(N+1).(t-u)}-e^{-N..i.(t-u)}}{e^{i.(t-u)}-1}$$

(plus agréable)
On équilibre un peu mieux numérateur et dénominateur en multipliant haut et bas par un arc moitié :

$$\sum_{n=-N}^{N}\left(e^{i.(t-u.)}\right)^n = \frac{e^{-i.(t-u)/2}}{e^{-i.(t-u)/2}}.\frac{e^{i.(N+1).(t-u)}-e^{-N..i.(t-u)}}{e^{i.(t-u)}-1}$$

2. c'est $(\cos.\cos - \sin.\sin) - (\cos.\cos + \sin.\sin)$

C'est bien ce qu'on attendait *(et connaissait par le cours)* :

$$\sum_{n=-N}^{N}\left(e^{i.(t-u.)}\right)^n = \frac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}$$

Remarque : La question précédente montre qu'on peut se permettre d'utiliser cette formule sauf en $u = t$, mais il n'y a pas de problème, un prolongement continu est possible...

On glisse ce noyau de Dirichlet dans l'intégrale :

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n.e^{i.n.t} = \int_{u=-\pi}^{\pi}\cos(x.t).\frac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}.du$$

C'est ce qu'on voulait.

La seconde intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\frac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}.du$ ressemble furieusement à la précédente. D'ailleurs, vous êtes prêts à dire que c'est la même. Mais c'est juste parce que vous traitez les variables avec mépris alors que vous devez vous incliner devant elles et les respecter.

On intègre en u et t est fixé. On sort donc $f(t)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\frac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}.du = f(t).\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}.du$$

Il est temps de sortir le noyau de Dirichlet ou plutôt de telihciriD puisqu'on l'utilise en sens inverse.

$$\frac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)} = 1+2.\sum_{k=1}^{n}\cos(n.(t-u))$$

On intègre :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)} = \int_{-\pi}^{\pi}1.du + 2.\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n.(t-u)).du$$

Chaque intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n.(t-u)).du$ est nulle

(on calcule $\left[-\dfrac{\cos(n.(t-u))}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \dfrac{\cos(n.t+n.\pi)-\cos(n.t-n.\pi)}{n}$ *et le cosinus est* $2.\pi-$*périodique* [3]*).*

Il ne reste que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dt$ qui vaut justement $2.\pi$.

On a donc $f(t).(2.\pi+0)$ pour retenir ce qu'il s'est passé.

> *On aurait pû aussi reprendre les calculs précédents, dans lesquels f aurait été une fonction constante au lieu de $u \longmapsto \cos(x.u)$.*

II∼4) En intégrant par parties montrez que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(p.u).\gamma_t(u).du$ converge vers 0 quand p tend vers l'infini.

Regardons donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(p.u).\gamma_t(u).du$ qu'on intègre par parties :

$\gamma_t(u)$	$\hookrightarrow$	$\gamma_t'(u)$
$\sin(p.u)$	$\hookleftarrow$	$\dfrac{\sin(p.u)}{p}$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(p.u).\gamma_t(u).du = \frac{1}{p}.\Big[\sin(p.u).\gamma_t(u)\Big]_{u=-\pi}^{\pi} - \frac{1}{p}.\int_{-\pi}^{\pi}\sin(p.u).\gamma_t'(u).du$$

3. *la différence entre $n.t+n.\pi$ et $n.t+n.\pi$ est un multiple de $2.\pi$,j'espère que vous n'avez pas développé avec des $\cos(n.t).\cos(n.\pi)+\sin(n.t).\sin(n.\pi)$; certes, ce n'est pas faux, mais c'est lourd, lourd, lourd comme un mec bourré en boite qui a bu et drague tout ce qui a deux yeux, deux oreilles et deux seins*

Le terme $\dfrac{\gamma_t(\pi).\sin(p.\pi)+\gamma_t(-\pi).\sin(p.\pi)}{p}$ a un numérateur borné (compris entre $-|\gamma_t(-\pi)|-|\gamma_t(\pi)|$ et $-|\gamma_t(-\pi)|-|\gamma_t(\pi)|$) et un dénominateur qui tend vers l'infini. Il tend vers 0.
On encadre de même le second terme :

$$0\leqslant\Big|\frac{1}{p}.\int_{-\pi}^{\pi}\sin(p.u).\gamma_t'(u).du\Big|\leqslant\frac{1}{p}.\int_{-\pi}^{\pi}|\sin(p.u).\gamma_t'(u)|.du\leqslant\frac{1}{p}.\int_{-\pi}^{\pi}|\gamma_t'(u)|.du$$

Le terme $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|\gamma_t'(u)|.du$ ne dépend plus de p, on peut le qualifier de « constante ». La division par p fait tendre le majorant vers 0.
Par théorème d'encadrement $\displaystyle\frac{1}{p}.\int_{-\pi}^{\pi}\sin(p.u).\gamma_t'(u).du$ tend vers 0.
Par addition, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(p.u).\gamma_t(u).du$ tend vers 0 quand p tend vers l'infini.

Le détail qui tue : qui nous assure que γ_t est dérivable ?
Le fait qu'on puisse la dériver, c'est vrai..
Mais en t, elle est continue, pas forcément dérivable. Il faudrait vérifier même ce point.
Et même dire qu'elle est alors C^1 pour pouvoir appliquer la formule d'intégration par parties...
Comme quoi rien n'est si évident.

II∼5) Déduisez $f(t)=\dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi}.\Big(\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.\cos(n.t)\Big)$ pour tout t entre $-\pi$ et π.

Résumons ce qu'on a prouvé : $\phi_N(t)=2.\sin(\pi.x).\Big(\dfrac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.\cos(n.t)\Big)$

$$\phi_N(t)=\int_{-\pi}^{\pi}f(u).\frac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}.du$$

$$2.\pi.f(t)=\int_{-\pi}^{\pi}f(t).\frac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}.du$$

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(p.u).\gamma_t(u).du$ tend vers 0 quand p tend vers l'infini
Et on veut $f(t)=\dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi}.\Big(\dfrac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.\cos(n.t)\Big)$.
Le membre de gauche, c'est $\displaystyle\frac{1}{2.\pi}.\int_{-\pi}^{\pi}f(t).\frac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}.du$.
Celui de droite ; c'est la limite quand N tend vers $+\infty$ de $\dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi}.\Big(\dfrac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.\cos(n.t)\Big)$ c'est à dire de $\dfrac{\phi_N(t)}{2.\pi}$ (si cette limite existe).
En utilisant ce qu'on sait, il s'agit donc prouver que $\displaystyle\frac{1}{2.\pi}.\int_{-\pi}^{\pi}f(t).\frac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}.du$ et $\displaystyle\frac{1}{2.\pi}.\int_{-\pi}^{\pi}f(u).\frac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}.du$ ont la même limite quand N tend vers l'infini.

Calculons leur différence :

$$\frac{1}{2.\pi}.\int_{-\pi}^{\pi}\Big(f(t)-f(u)\Big).\frac{\sin\Big((2.N+1).\dfrac{t-u}{2}\Big)}{\sin\Big(\dfrac{t-u}{2}\Big)}.du$$

Déplaçons comme par hasard le dénominateur :

$$\frac{1}{2.\pi}.\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)-f(u)}{\sin\left(\dfrac{t-u}{2}\right)}.\sin\left((2.N+1).\frac{t-u}{2}\right)du$$

C'est une quantité de la forme $\dfrac{1}{2.\pi}.\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\gamma_t(u).\sin(p.u).du$ avec $p=N+\dfrac{1}{2}$.
Quand N tend vers $+\infty$, p fait de même, et l'intégrale tend bien vers 0.

Tous les résultats précédents ont servir, mis bout à bout,pour parvenir à ce qu'on voulait.

II∼6) **Déduisez $\pi.\cot(\pi.x)=\dfrac{1}{x}-\lim_{N\to+\infty}C_N$.**

On veut maintenant passer de $f(t)=\dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi}.\left(\dfrac{1}{x}+\lim_{N\to+\infty}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\dfrac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.\cos(n.t)\right)$ pour tout t entre $-\pi$ et π à $\pi.\cot(\pi.x)=\dfrac{1}{x}-\lim_{N\to+\infty}C_N$.

Il doit y avoir un rapport, puisque $C_N=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\dfrac{2.x}{n^2-x^2}$.
Il faut faire partir ce $(-1)^n$ et ce cosinus.
Et il faut passer des $\sin(\pi.x)$ aux $\cot(\pi.x)$...
On voit venir l'idée : on prend $t=\pi$, ce qu'on aurait pû faire depuis le début...

$$f(\pi)=\frac{\sin(\pi.x)}{\pi}.\left(\frac{1}{x}+\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.\cos(n.\pi)\right)=\frac{\sin(\pi.x)}{\pi}.\left(\frac{1}{x}+\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n.2.x}{x^2-n^2}.(-1)^n\right)$$

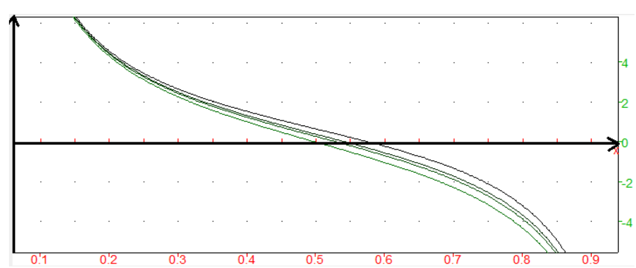
Question : *Que faire de l'élève qui reste en arrêt devant $\cos(n.\pi)=(-1)^n$.*
Ou devant $\cos(x+n.\pi)=(-1)^n.\cos(x)$?
Le faire quand même entrer en école d'ingénieur... oui parce que c'est ma mission en tant que prof.
Mais c'est désespérant. Ce devraient être des acquis et réflexes du lycée...

On a donc

$$\cos(\pi.x)=\frac{\sin(\pi.x)}{\pi}.\left(\frac{1}{x}+\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{2.x}{x^2-n^2}\right)$$

Je crois que la seule chose qui manque est le signe moins : $\cos(\pi.x)=\dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi}.\left(\dfrac{1}{x}-\lim_{N\to+\infty}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\dfrac{2.x}{n^2-x^2}\right)$ *(n^2-x^2 contre x^2-n^2).*

Le graphe ci-contre a tracé $x\longmapsto\pi\cot(\pi.x)$
et des sommes $\dfrac{1}{x}+\lim_{N\to+\infty}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\dfrac{2.x}{x^2-n^2}$
pour N égal à 1, 2 et 3.

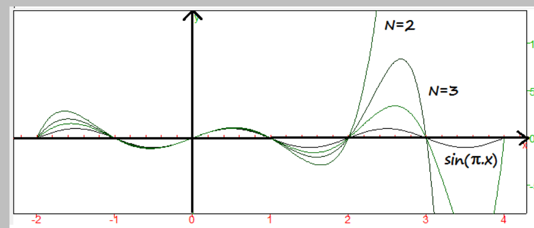


II∼7) On définit $\varphi = \theta \longmapsto \theta.\cos(\theta) - \sin(\theta)$. Calculez $\varphi^{(k)}$ et $\varphi^{(k)}(0)$ pour k de 0 à 4.

Déduisez $\varphi(\theta) \sim_{\theta\to 0} \dfrac{-\theta^3}{3}$.

Déduisez que $x \longmapsto \pi.\cot(\pi.x) - \dfrac{1}{x}$ se prolonge par continuité en 0 (valeur ?)..

Expliquez comment Euler a pû obtenir : $\dfrac{\sin(\pi.x)}{\pi.x} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)$..



Approximation de sin(π.x) par les produits infinis d'Euler $\pi.x.\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$

On fait passer de l'autre côté :

$$\pi.\frac{\cos(\pi.x)}{\sin(\pi.x)} = \left(\frac{1}{x} - \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{2.x}{n^2 - x^2}\right)$$

et même

$$\pi.\frac{\cos(\pi.x)}{\sin(\pi.x)} - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2.x}{x^2 - n^2}$$

Ce que fait Euler ? Il intègre : $\Big[\ln(\sin(\pi.x)) - \ln(x)\Big] = \sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n^2 - x^2) - \ln(n^2)$

$$\Big[\ln(\sin(\pi.x)) - \ln(x)\Big] = \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

$$\Big[\ln(\sin(\pi.x)) - \ln(x)\Big] = \ln\left(\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right)$$

Il y aura une question (niveau spé) : l'intégrale de la somme est elle la somme des intégrales ?
Si, il y a un problème, c'est une somme avec une infinité de termes... Et l'infini n'est pas le « grand nombre de termes » de la physique, c'est l'endroit où arrivent les choses qui n'arrivent jamais.
Pareil pour le passer au logarithme avec une infinité de termes...

Ensuite, il reste le crochet $\Big[\ln(\sin(\pi.x)) - \ln(x)\Big]$. Il devrait s'écrire $(\ln(\sin(\pi.x)) - \ln(x)) - (\ln(\sin(\pi.0)) - \ln(0))$.
Et il y a un problème...

D'où l'application φ :

n	$\varphi^{(n)}(\theta)$	$\varphi^{(n)}(0)$
0	$\theta.\cos(\theta) - \sin(\theta)$	0
1	$-\theta.\sin(\theta)$	0
2	$-\theta.\cos(\theta) - \sin(\theta)$	0
3	$\theta.\sin(\theta) - 2.\cos(\theta)$	-2
4	$\theta.\cos(\theta) + 3.\sin(\theta)$	0

On écrit une formule de Taylor à l'ordre 3 entre 0 et $0 + \theta$:

$$\varphi(\theta) = 0 + \frac{\theta^3}{6}.(-2) + \frac{\theta^4}{6}.\int_0^1 (1-t)^3.\Big(t.\theta.\cos(t.\theta) + 3.\sin(t.\theta)\Big).dt$$

On divise par $-\dfrac{\theta^3}{3}$: $\dfrac{\varphi(\theta)}{-\theta^3/3} = 1 - \dfrac{\theta}{2}.\int_0^1 (1-t)^3.\Big(t.\theta.\cos(t.\theta) + 3.\sin(t.\theta)\Big).dt.$
On se fixe θ entre -1 et 1 pour borner ce qu'il y a dans l'intégrale.
$\dfrac{\varphi(\theta)}{-\theta^3/3}$ tend vers 1. C'est la définition de l'équivalent.

On réduit

$$\pi.\cot(\pi.x) - \frac{1}{x} = \frac{\pi.x.\cos(\pi.x) - \sin(\pi.x)}{\sin(\pi.x).x} = \frac{\varphi(\pi.x)}{\sin(\pi.x).x}$$

En 0 on a une forme indéterminée, mais la question précédente donne un équivalent : $\pi.\cot(\pi.x) - \frac{1}{x} \sim_{x\to 0} \frac{-\pi^3.x^3}{3.\pi.x.x}$.
Le terme de droite tend vers 0, celui de gauche aussi !
Ceci prouve que $\pi.\cot(\pi.x) - \frac{1}{x}$ admet une limite en 0.

On pourra même montrer qu'elle est dérivable en 0.

Et si j'en revient à $\Big[\ln(\sin(\pi.x)) - \ln(x)\Big]$, c'est $\Big[\ln\left(\frac{\sin(\pi.x)}{x}\right)\Big]$, et on peut prolonger en 0 aussi.

◁25▷ Les nombres $\dfrac{1}{n}$ pour n de 1 à 20 sont écrits au tableau. On en prend deux (au hasard) a et b ; on les efface et on met en fin de liste le nombre $a.b + a + b$ (par exemple, on remplace $\dfrac{1}{11}$ et $\frac{1}{7}$ par $\dfrac{19}{77}$). Et on recommence. Jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un nombre, qu'on va appeler S.
Dans quel ordre faut il avoir barré les 20 nombres pour que S soit le plus grand possible ?
Dans quel ordre faut il avoir barré les 20 nombres pour que S soit le plus petit possible ?
Allez, on arrête de tourner autour du pot : combien vaut S ?
Indice : C'est un exercice de théorie des groupes, mine de rien. Commu... et Asso....

En fait, l'ordre dans lequel on fait les opérations n'a aucune importance.
On pose $a * b = a + b + a.b$.
On calcule $(a * b) * c$ *et* $a * (b * c)$ *(et aussi* $(a * c) * b$, $(b * c) * a$ *et ainsi de suite). On trouve la même chose.*

Donc, finalement peu importe l'ordre, ce sera toujours le même résultat...

Alors, on calcule $1 * \dfrac{1}{2} * \dfrac{1}{3} * \dfrac{1}{4} * \ldots * \dfrac{1}{20}$

1	$*\frac{1}{2}$	$*\frac{1}{3}$	$*\frac{1}{4}$	$*\frac{1}{5}$	$\ldots$	$*\frac{1}{20}$
2		$*\frac{1}{3}$	$*\frac{1}{4}$	$*\frac{1}{5}$	$\ldots$	$*\frac{1}{20}$
3			$*\frac{1}{4}$	$*\frac{1}{5}$	$\ldots$	$*\frac{1}{20}$
4				$*\frac{1}{5}$	$\ldots$	$*\frac{1}{20}$
5					$\ldots$	$*\frac{1}{20}$
20						

S vaudra toujours 21.
En fait, $1 + (a * b) = (1 + a).(1 + b)$.

Il suffit donc de

tout décaler de 1	*on a des* $\dfrac{k+1}{k}$
tout multiplier pour faire des $*$	*il reste* $\dfrac{21}{1}$
soustraire 1 *pour revenir*	20

◁26▷ Justifiez : $Arcsin(\sqrt{1-x^2}) = Arccos(x)$ pour x dans $[0,\ 1]$.

Solution du physicien :	je dérive les deux fonction, elles ont la même dérivée, elles diffèrent donc d'une constante, je calcule cette constante en 0
Solution du matheux :	je nomme f leur différence, je dérive f : f' est nulle je trouve $f(x) = f(0)$ pour tout x (cette démarche évite ces histoires contre nature de « je calcule ensuite la constante en un point », alors que le seul point de vue logique est « je regarde d'un étatt initial 0 à un état final x »)
Solution du mateux :	je pose $\theta = Arcsin(\sqrt{1-x^2})$ je traduis : $\sin(\theta) = \sqrt{1-x^2}$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ j'en déduis $\sin^2(\theta) = 1 - x^2$ puis $\cos^2(\theta) = 1 - (1 - x^2) = x^2$ je retrouve $\cos(\theta) = x$ au signe près mais comme θ est entre 0 et $\pi/2$, c'est bien $\cos(\theta) = x$ avec $\cos(\theta) = x$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \leqslant \pi$ je reconnais $\theta = Arccos(x)$ j'efface θ dans $Arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \theta = Arccos(x)$ et c'est fini.

Euh, monsieur, il y en a deux qui s'appellent « solution du matheux », que vouliez vous dire vraiment ?
je voulais dire que justement, le matheux est celui qui va proposer plusieurs solutions, ne pas se contenter de « celle qui a

marché ».

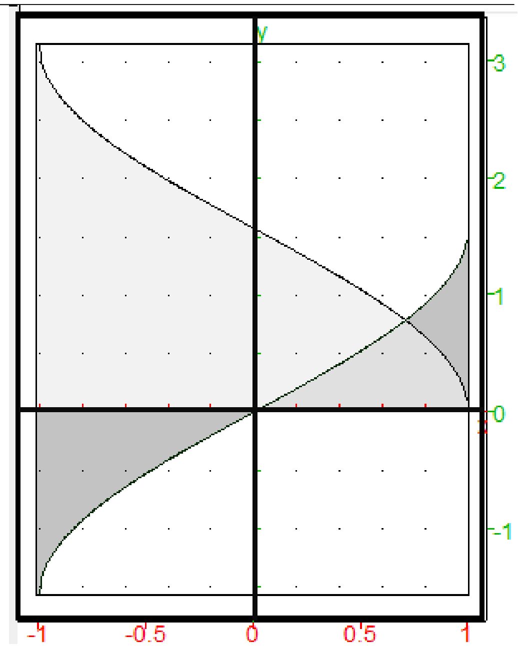
Sinon, le calcul :

x	$\longrightarrow$	$\sqrt{1-x^2}$	$\longrightarrow$	$Arcsin(\sqrt{1-x^2})$
	$\dfrac{-2.x}{2.\sqrt{1-x^2}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}$	

On a donc $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{x^2}}$ et la positivité de x permet de simplifier $\dfrac{x}{|x|}$.
On notera quand même qu'il y a alors un problème pour le calcul effectife de cette dérivée en 0 (et en 1).

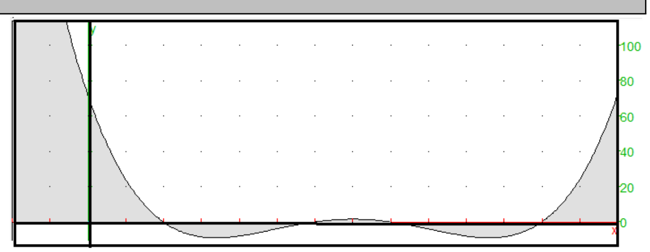
◃27▹ Résolvez $Arcsin(x) = Arccos(x)$ d'inconnue réelle x.

x est nécessairement entre -1 et 1.
On passe au cosinus (ou au sinus), condition juste nécessaire : $\sqrt{1-x^2} = x$.
On élève au carré (nécessaire) : $1 - x^2 = x^2$.
On résout : $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
On garde $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ mais on élimine $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ qui donne $-\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3.\pi}{4}$.
L'unique solution est $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$



Et si on se dit qu'elle sautait aux yeux, on la propose, vérifie : $\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\} \subset S_x$
Mais pourquoi est ce la seule ? Juste parce que *Arcsin* est croissante et *Arccos* décroissante. Elles ne se croiseront donc qu'une fois (leur différence est strictement monotone donc injective et ne s'annule qu'une fois).

◃28▹ ♡ Un polynôme unitaire de degré 4 a pour racines 1, 3, 4 et 6. Calculez sa valeur en 2 et en 5.
♡ Un polynôme de degré 4 a pour racines 1, 3, 4 et 6. Comparez sa valeur en 2 et sa valeur en 5.
♡ Un polynôme de degré 4 a pour racines 1, 2 et 3 *(et une autre)*. Il vaut 1 en 0 et en 5. Retrouvez la dernière racine.
(unitaire : coefficient dominant égal à 1).



Un polynôme unitaire de degré 4 a pour racines 1, 3, 4 et 6. Calculez sa valeur en 2 et en 5.
C'est donc forcément $(x-1).(x-3).(x-4).(x-6)$.
En 2 il vaut -8 et en 5 il vaut -8 aussi.

Un polynôme de degré 4 a pour racines 1, 3, 4 et 6. Comparez sa valeur en 2 et sa valeur en 5.
Cette fois, il s'écrit $\lambda.(x-1).(x-3).(x-4).(x-6)$ avec λ inconnu (non nul).
En 2 et en 5, il prend la même valeur $-8.\lambda$.

Un polynôme de degré 4 a pour racines 1, 2 et 3 *(et une autre)*. Il vaut 1 en 0 et en 5. Retrouvez la dernière racine.
Cette fois, il s'écrit $(x-1).(x-2).(x-3).(a.x+b)$ (son autre racine est $-b/a$).
On le calcule en 0 : $-6.b = 1$.
On le calcule en 5 : $24.(5.a+b) = 1$.
Ceci nous permet de récupérér a et b : $b = -\dfrac{1}{6}$ et $a = \dfrac{1}{24}$.
La racine qui manque est 4.

◁29▷ ♡ Calculez $\int_1^2 x^x.(1+\ln(x)).dx$.

Facile en dépit des apparences.

$$\int_1^2 x^x.(1+\ln(x)).dx = \int_1^2 e^{x.\ln(x)}.(1+\ln(x)).dx = \left[e^{x.\ln(x)}\right]_{x=1}^{2}$$

(forme $e^u.u'$ ou changement de variable, c'est pareil).

◁30▷ Montrez : $\forall n \in \mathbb{N},\ (10^n+1 = 0\ [3]) \Rightarrow (10^{n+1}+1 = 0\ [3])$.
Déduisez vous : $\forall n \in \mathbb{N},\ (10^n+1 = 0\ [3])$.

On se donne n. On suppose $10^n+1 = 0\ [3]$ (et on veut $10^{n+1}+1 = 0\ [3]$).
On multiplie par 10 : $10.(10^n+1) = 10.0\ [3]$.
On développe : $10^{n+1}+10 = 0\ [3]$.
On réduit modulo 3 : $10^{n+1}+1 = 0\ [3]$. C'est bon !

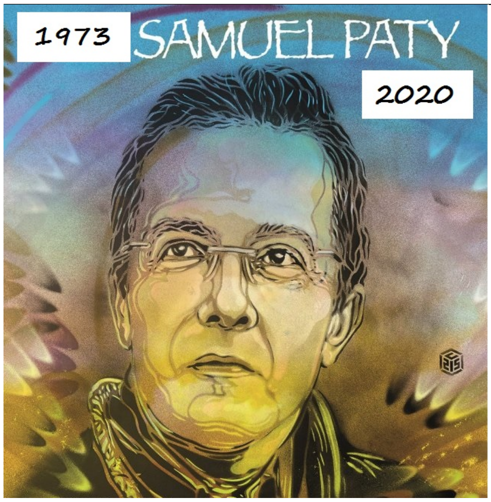
Niveau Terminale : je mets des k partout : $10^n+1 = 3.k$
$10^{n+1}+10 = 30.k$
$10^{n+1}+1 = 30.k-9$
$10^{n+1}+1 = 3.(10.k-3)$

C'est correct, c'est gentil, mais c'est indigeste.
On écrit $a = b\ [p]$ et c'est tout. Et si vraiment vraiment vraiment il faut : $\exists k,\ a = b+k.p$.
Mais on reste avec des « égalités modulo » : $a = b\ [p]$.
Et on a le droit d'additionner : $a+c = b+c\ [p]$
soustraire : $a-c = b-c\ [p]$
multiplier : $a\times c = b\times c\ [p]$
diviser : $a\times c^{-1} = b\times c^{-1}\ [p]$ où c^{-1} est l'inverse de c modulo p ($c\wedge p = 1$)

La propriété P_n : $10^n+1 = 0\ [3]$ est héréditaire.

Mais pas initialisée.

Tant pis pour elle. Le principe de récurrence n'y peut rien pour elle.



Dans notre République, être libre, c'est avoir le droit de dire ce que l'on pense, le droit de partager ses connaissances, d'écouter, de débattre, de dessiner, de chanter.

Tout cela fait partie de ce que nous appelons la liberté d'expression, qui est une de nos libertés les plus importantes.

La liberté d'expression signifie aussi que personne n'a le droit de forcer les autres à penser comme lui, à faire comme lui ou à dire la même chose que lui.

Cette liberté d'expression n'est pas sans limites. On peut ne pas être d'accord avec les idées des autres, et on peut en rire, on peut même s'en moquer, mais on n'a pas le droit d'inciter à la violence ou à la haine contre qui que ce soit.

◁ 31 ▷ Pouvez vous mettre $x \longmapsto \cos(x) + \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ sous la forme $x \longmapsto A.\cos(x-\varphi)$?

Oui.
Les quatre termes du premier membre sont de la forme $a_k.\cos(x) + b_k.\sin(x)$.
Leur somme est de la forme $\alpha.\cos(x) + \beta.\sin(x)$.
On peut la mettre sous la forme demandée.

	$\cos(x)$	$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$	$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$	
cosinus	$\cos(x)$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\cos(x)$	$\dfrac{1}{2}.\cos(x)$		$\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\right).\cos(x)$
sinus		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sin(x)$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\sin(x)$	$-\sin(x)$	$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right).\cos(x)$

Le réel positif A est égal à $\sqrt{\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2}$. Et φ est un simple Arctangente.

◁ 32 ▷ Résolvez $\cos(2.\theta) = 1 + \cos(\theta)$ d'inconnue réelle θ.

On transforme $\cos(2.\theta) = 1 + \cos(\theta)$ en $2.\cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2 = 0$.
On trouve deux solutions : $\cos(\theta) = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$ et $\cos(\theta) = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$. On élimine la première *(un cosinus ne dépasse pas 1)*.
On vérifie quand même $-1 = \dfrac{1-\sqrt{25}}{4} \leqslant \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \leqslant \dfrac{1-\sqrt{16}}{4} = -\dfrac{3}{4}$.
On trouve cette fois un ensemble de solutions infini *(périodicité et parité)* :

$$S_\theta = \left\{ Arccos\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right) + 2.k.\Pi \mid k \in \mathbb{Z},\ \varepsilon \in \{-1,\ 1\} \right\}$$

◁ 33 ▷ Montrez que les matrices de la forme $\begin{pmatrix} ch(\theta) & sh(\theta) \\ sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix}$ forment un groupe pour la multiplication, et montrez que ce sous groupe est commutatif.
Appel : $ch(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $sh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$.

Interne. On prend deux matrices de cet ensemble $\begin{pmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) \\ sh(\alpha) & ch(\alpha) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} ch(\beta) & sh(\beta) \\ sh(\beta) & ch(\beta) \end{pmatrix}$.
On effectue leur produit :
$\begin{pmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) \\ sh(\alpha) & ch(\alpha) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} ch(\beta) & sh(\beta) \\ sh(\beta) & ch(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\alpha).ch(\beta) + sh(\alpha).sh(\beta) & sh(\alpha).ch(\beta) + ch(\alpha).sh(\beta) \\ sh(\alpha).ch(\beta) + ch(\alpha).sh(\beta) & ch(\alpha).ch(\beta) + sh(\alpha).sh(\beta) \end{pmatrix}$
C'est $\begin{pmatrix} ch(\alpha+\beta) & sh(\alpha+\beta) \\ sh(\alpha+\beta) & ch(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$. On retrouve le schéma $\begin{pmatrix} ch(\theta) & sh(\theta) \\ sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix}$ avec θ gal à $\alpha + \beta$. On a bien un élément de l'ensemble.

Obtenir une matrice 2 sur 2 est la moindre des choses, mais ne prouvait rien.
Il faillait bien s'assurer d'avoir une forme avec des *sh* et des *ch* au bon endroit.

Associativité. La multiplication matricielle est associative.
Sinon, on prend trois matrices qu'on note M_α, $M_\beta$et M_γ.
On a montré plus haut : $M_\alpha.M_\beta = M_{\alpha+\beta}$.
On calcule alors : $(M_\alpha.M_\beta).M_\gamma = M_{\alpha+\beta}.M_\gamma = M_{(\alpha+\beta)+\gamma}$ et $M_\alpha.(M_\beta.M_\gamma) = M_\alpha.M_{\beta+\gamma} = M_{\alpha+(\beta+\gamma)}$.
Il y a égalité.

Neutre. Certes, on sait que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est le neutre de la multiplication matricielle.
Mais il faut s'assurer qu'il est dans l'ensemble. On l'écrit juste $\begin{pmatrix} ch(0) & sh(0) \\ sh(0) & ch(0) \end{pmatrix}$. C'est la bonne forme...

Symétrique. Le symétrique de $\begin{pmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) \\ sh(\alpha) & ch(\alpha) \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} ch(-\alpha) & sh(-\alpha) \\ sh(-\alpha) & ch(-\alpha) \end{pmatrix}$, et il est dans l'ensemble.
Il suffit d'écrire $M_\alpha.M_{-\alpha} = M_{-\alpha}.M_\alpha = M_{\alpha-\beta} = M_0$ (le neutre).

Sur ce type d'exercice, bien souvent les élèves perdent du temps sur des questions idiotes et passent à côté des vraies questions.
Pourquoi ? parce qu'ils croient que faire des maths, c'est calculer (rappelez moi le nom de la matière où on passe son temps à calculer...).
Par exemple, ils remplissent douze lignes de calcul avec des $(\begin{pmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) \\ sh(\alpha) & ch(\alpha) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} ch(\beta) & sh(\beta) \\ sh(\beta) & ch(\beta) \end{pmatrix}).\begin{pmatrix} ch(\gamma) & sh(\gamma) \\ sh(\gamma) & ch(\gamma) \end{pmatrix}$.
C'est hyper gentil, mais hyper con.
En effet, on a $A.(B.C) = (A.B).C$ dès que A, B et C sont des matrices !

En revanche, ils disent « la matrice $\begin{pmatrix} ch(\alpha) & sh(\alpha) \\ sh(\alpha) & ch(\alpha) \end{pmatrix}$ est inversible car son déterminant vaut 1 (oh, juste du calcul, c'est rassurant...).
Mais ils ne regardent pas si l'inverse est dans l'ensemble, c'est à dire de la forme $\begin{pmatrix} ch(a) & sh(a) \\ sh(a) & ch(a) \end{pmatrix}$.
L'essentiel de la question est là : les variables.

La multiplication matricielle n'est pas commutative. Mais n'allez pas dire que les sous-groupes de matrices carres de taille 2 sont forcément non commutatifs.
On peut justement forcer la restriction à ne nous faire travailler que sur des matrices qui « commutent entre elles ».

◁ 34 ▷ Vérifiez que

Id	$\overrightarrow{(1\,2\,3)}$	$\overrightarrow{(3\,2\,1)}$	$\overrightarrow{(1\,2)}\circ\overrightarrow{(3\,4)}$
$\overrightarrow{(1\,2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,3\,4)}$	$\overrightarrow{(2\,3,\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,3)}\circ\overrightarrow{(2\,4)}$
$\overrightarrow{(4\,2\,1)}$	$\overrightarrow{(4\,3\,1)}$	$\overrightarrow{(4\,3,\,2)}$	$\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)}$

est un groupe pour a loi de composition.
Montrez qu'il n'est pas commutatif.
Donnez des sous-groupes de cardinal 2 et 3.
Pouvez vous trouver des sous-groupes de cardinal 1 et 12 ?
Pouvez vous trouver des sous-groupes de cardinal 4 et 6 ?

On a douze éléments, on doit dresser une table de taille 12 sur 12.
Pour le caractère interne, il faudra vérifier que quand on les compose, on retrouve une permutation de la famille.

$$\begin{aligned}
\textit{Par exemple }\ & \overrightarrow{(1\,2\,4)}\circ\overrightarrow{(4\,2\,1)} = Id \\
& \overrightarrow{(1\,2\,4)}\circ\overrightarrow{(3\,2\,1)} = \overrightarrow{(1\,3\,4)} \\
& \overrightarrow{(1\,2\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3\,4)} = \overrightarrow{(1\,2\,3)} \\
& \overrightarrow{(1\,2\,4)}\circ(\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)}) = \overrightarrow{(4\,2\,3)}\ \textit{(à mémoriser)} \\
& (\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)})\circ\overrightarrow{(1\,2\,4)} = \overrightarrow{(1\,3\,2)}\ \textit{(à mémoriser aussi)} \\
& (\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)})\circ(\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)}) = Id \\
& (\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)})\circ(\overrightarrow{(1\,2)}\circ\overrightarrow{(3\,4)}) = \overrightarrow{(1\,3)}\circ\overrightarrow{(2\,4)}
\end{aligned}$$

En tant que loi de composition, elle est associative.
On dispose d'un neutre, c'est Id.
Et chaque permutation a son symétrique : pour un cycle $\overrightarrow{(a\,b\,c)}$ prendre $\overrightarrow{(a\,c\,b)}$
pour un bi-bycycle prendre lui même
La loi n'est pas commutative (exemple visible plus haut).

Sous groupes de cardinal 2 : $\boxed{Id}\ \boxed{\overrightarrow{(1\,2)}\circ\overrightarrow{(3\,4)}}$ et les deux du même type.

Sous groupes de cardinal 2 : $\boxed{Id}\ \boxed{\overrightarrow{(1\,2\,3)}}\ \boxed{\overrightarrow{(3\,2\,1)}}$ et les trois du même type.

Sous groupe de cardinal 1 : $\boxed{Id}$
Et aucun autre,car dans le sous-groupe, il faut qu'il y ait le neutre.

Sous groupe de cardinal 12 : le groupe lui même !

Sous groupe de cardinal 4 :

$g\circ f$	Id	$\overrightarrow{(1\,2)}\circ\overrightarrow{(3\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,3)}\circ\overrightarrow{(2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)}$	f
Id	Id	$\overrightarrow{(1\,2)}\circ\overrightarrow{(3\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,3)}\circ\overrightarrow{(2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)}$	
$\overrightarrow{(1\,2)}\circ\overrightarrow{(3\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,2)}\circ\overrightarrow{(3\,4)}$	Id	$\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)}$	$\overrightarrow{(1\,3)}\circ\overrightarrow{(2\,4)}$	
$\overrightarrow{(1\,3)}\circ\overrightarrow{(2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,3)}\circ\overrightarrow{(2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)}$	Id	$\overrightarrow{(1\,2)}\circ\overrightarrow{(3\,4)}$	
$\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)}$	$\overrightarrow{(1\,4)}\circ\overrightarrow{(2\,3)}$	$\overrightarrow{(1\,3)}\circ\overrightarrow{(2\,4)}$	$\overrightarrow{(1\,2)}\circ\overrightarrow{(3\,4)}$	Id	
g					

Klein !

Sous groupe de cardinal 6 : impossible *(c'est un peu long à montrer, mais on s'interroge « si on y met deux tricycles, on finit par avoir tout », si on y met un tricycle et un bi-bicyle, c'est pareil au final »).*

◁35▷ ♡ On rappelle la définition de $A+B$ quand A et B sont deux parties d'un groupe $(G,+)$: $A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$.
Pour le groupe $(\mathbb{R},\ +)$, $a-$déterminez $\mathbb{N}+\mathbb{N}$ et comparez avec $2.\mathbb{N}$
$b-$ déterminez $\mathbb{R}^{+}+\{0\}$ et comparez avec $\mathbb{R}^{*}\cup\{0\}$
$c-$ déterminez $\mathbb{Z}+[0,\ 1]$
$d-$ déterminez $\mathbb{Z}+]0,\ 1[$
$e-$ montrez : $\mathbb{Q}+]0,\ \varepsilon[=\mathbb{R}$ pour tout réel strictement positif ε.
Pour le groupe $(\mathbb{Z}_{12},+)$[a] : $f-$déterminez $\{0,\ 1,\ 3\}+\{1,\ 2,\ 10,\ 11\}$
$g-$ pouvez vous trouver A de cardinal 3 vérifiant $A+A=\mathbb{Z}_{12}$
$h-$ pouvez vous trouver B de cardinal 4 vérifiant $B+B=\mathbb{Z}_{12}$

a. ensemble des entiers de 0 à 11 (inclus) pour l'addition modulo 12

$a-$ Les éléments de $\mathbb{N}+\mathbb{N}$ sont de la forme $a+b$ avec a et b entiers naturels. Ce sont des entiers naturels : $\mathbb{N}+\mathbb{N}\subset\mathbb{N}$. Mais en plus tout élément n de $\mathbb{N}$ est atteint, de la forme $n+0$ par exemple.
On a donc $\mathbb{N}+\mathbb{N}=\mathbb{N}$. Tandis que $2.\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers pairs.

Oui, on doit raisonner par double inclusion.
Dois je même dire « on doit raisonner » ?

$b-$ Prenez un réel non nul quelconque, ajoutez lui 0 (seul élément de $\{0\}$, vous retrouvez x : $\mathbb{R}^{*}+\{0\}=\mathbb{R}^{*}$).
$\mathbb{R}^{*}\cup\{0\}$, ça fait justement $\mathbb{R}$.

$c-$ L'ensemble $\mathbb{Z}+[0,\ 1]$ est inclus dans $\mathbb{R}$, mais il est même égal à $\mathbb{R}$. En effet, tout réel x s'écrit $[x]+(x-[x])$ *(partie entière et partie décimale)* avec $[x]$ dans $\mathbb{Z}$ et $x-[x]$ dans $[0,\ 1[$ *(donc a fortiori dans $[0,\ 1]$)*. On a $\mathbb{Z}+[0,\ 1]=\mathbb{R}$.

$d-$ $\mathbb{Z}+]0,\ 1[$ ne donnera pas $\mathbb{R}$. Les entiers ne peuvent pas s'écrire comme somme d'un entier et « d'un truc en $0,quelquechose$ ».
Ce sont d'ailleurs les seuls éléments qu'on n'arrive pas à avoir. $\mathbb{Z}+]0,\ 1[=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.
On l'écrit d'ailleurs aussi $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n,\ n+1[$.

$e-$ $\mathbb{Q}+]0,\ \varepsilon[$ est inclus dans $\mathbb{R}$. Mais pourquoi est il égale à $\mathbb{R}$? parce que tout réel est la somme d'un rationne et d'un truc tout petit.
Pour x donné, l'intervalle $]x-\varepsilon,\ x[$ contient au moins un rationnel *(densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)*. On note q un tel rationnel.
On a alors $x=q+(x-q)$ avec $x-q$ entre 0 et ε.

$f-$ Un tableau :

	1	2	10	11
0	1	2	10	11
1	2	3	11	0
3	4	5	1	2

$\{0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 11\}$

$g-$ Si A n'a que trois éléments a, b et c, l'ensemble $A+B$ n'en contiendra pas plus de 9 (peut-être moins si on a des situations comme $a+b=a+c$). En tout cas, ne rêvons pas d'atteindre $\mathbb{Z}_{12}$.

$h-$ Un exemple ? Mais $B+B$ contient 16 éléments au maximum. Sauf qu'on a une certaine symétrie : a_0+a_1 et a_1+a_0.
On a donc au plus 10 éléments différents. Raté encore.

◁ 36 ▷

On pose $A = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$. Calculez A^2, B^2, $A.B$, $B.A$, ainsi que $A+B$.
Calculez A^n et B^n. Pourquoi peut on utiliser la formule du binôme pour $(A+B)^n$ et pourquoi donne-t-elle $A^n + B^n$? Retrouvez la matrice M^n.

On va calculer M^n par une autre méthode, qu'on appelle décomposition en combinaisons de projecteurs commutant deux à deux.
Ne cherchez pas pour l'instant à comprendre pourquoi, qui sont ces projecteurs...
Ce sont ces deux matrices A et B (de somme M, comme par hasard).

On effectue les calculs et surtout, on ne s'arrête pas à A^2 =quatre coefficients.

On prend du recul :

A^2	B^2	$A.B$	$B.A$
$-A$	$2.B$	$0_{2,2}$	$0_{2,2}$

Et si déjà on doit résoudre un exercice élémentaire, niveau Terminale (je dis bien Terminale et pas Terminable, c'est que c'est un exercice destiné à cultiver votre intelligence...).

$$(A+B)^2 = A^2 + A.B + B.A + B^2$$

(pas de binôme trop rapide, on est dans un anneau non commutatif).

$$(A+B)^2 = -A + 2.B$$

et cette forme est plus agréable que celle avec des coefficients partout.

On pousse plus loin, avec M^3 : $(A+B)^3 = (-A+2.B).(A+B)$
$(A+B)^3 = -A^2 + 2.B.A - A.B + 2.B^2$ (pas de commutativité)
$(A+B)^3 = A + 4.B$ ça commence à prendre forme

On pouvait y accéder aussi avec la formule du binôme sans commutativité :

$$(A+B)^3 = A^3 + (A^2.B + A.B.A + B.A^2) + (A.B^2 + B.A.B + B^2.A) + B^3$$

dans laquelle on élimine tout ce qui contient $A.B$ ou $B.A$: $(A+B)^3 = A^3 + B^3 = -A + 4.B$.

On généralise : $(A+B)^n = (-1)^n.A + 2^n.B$ pour tout n.

C'est initialisé.

Supposons $(A+B)^n = (-1)^n.A + 2^n.B$ vrai pour un entier naturel n quelconque.
On calcule $(A+B)^{n+1} = (A+B)^n.(A+B)$
$(A+B)^{n+1} = (-1)^n.A + 2^n.B).(A+B)$
$(A+B)^{n+1} = (-1)^n.A^2 + 2^n.B^2 + (-1)^n.A.B + 2^n.B.A$
$(A+B)^{n+1} = (-1)^n.A^2 + 2^n.B^2$
$(A+B)^{n+1} = (-1)^{n+1}.A + 2^{n+1}.B$

On a donc $\boxed{M^n = (-1)^n.\begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} + 2^n.\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 4/3 & 4/3 \end{pmatrix}}$

Avec un peu de recul, on pouvait quand même utiliser la formule du binôme.
L'anneau des matrices 2 sur 2 n'est pas commutatif.
Mais ici, les deux matrices A et B sont permutables ($A.B = B.A$, et mal dit : elles commutent).
On a donc quand même $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.A^{n-k}.B^k$.
Mais dès que k vaut autre chose que 0 ou n, on a un $A.B$ ou un $B.A$ dans $A^{n-k}.B^k$. Ce terme est nul !

Dans la somme issue du binôme, il ne reste que deux termes : $(A+B)^n = A^n + B^n$.

Surtout, ne faites pas lire cette formule à un élève de collège ou même de lycée, il croira que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ c'est plus cool que l'identité remarquable que lui apprend son prof. Mais ici, on a $a.b = b.a = 0$, ce qui n'a pas souvent lieu dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Ensuite, par récurrence évidente sur n $A^n = (-1)^n.A$ et $B^n = 2^n.B$.
Les deux valeurs $(-1)^n$ et 2^n viennent directement des deux valeurs propres de M.

◁37▷ ♡ Un élément a d'un anneau $(A, +, .)$ est dit nilpotent si il existe n vérifiant $a^n = 0$ (neutre additif)
idempotent si il existe p vérifiant $a^p = 1$ (neutre multiplicatif).
Donnez les éléments nilpotents et les éléments idempotents de l'anneau des entiers $(range(120), +, .)$.
Montrez que la somme et le produit de deux éléments nilpotents est encore nilpotent.

Montrez que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes dans $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ mais que leur somme ne l'est plus, de même que l'un de leurs produits.

Pour chaque entier *(enfin, on va voir si on va jusqu'au bout)* de 0 à 120, on calcule ses puissances successives, jusqu'à
• soit tomber sur 0 *(élément nilpotent)*
• soit tomber sur 1 *(élément idempotent)*
• soit déceler une période qui nous fera dire « c'est bon, on ne passera que par ces valeurs ».

On note au passage qu'il est incompatible qu'un élément soir à la fois nilpotent et idempotent.

0		nilpotent
1		idempotent
2	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 8, 16, 32, 64, 8	périodique
3	1, 3, 9, 27, 81, 3, 9, 27, 81, 3,	périodique
4	1, 4, 16, 64, 16, 64, 16, 64	périodique
5	1, 5, 25, 5, 25, 5, 25	périodique
6	1, 6, 36, 96, 96, 96, 96	périodique
7	1, 7, 49, 103, 1	idempotent
8	1, 8, 64, 32, 16, 8, 64, 32, 16	périodique
9	1, 9, 81, 9, 81, 9	périodique

Tous les calculs sont faits à la main *(ou à l'ordinateur)*.

Mais qui pourrait être nilpotent ? Il faudrait avoir $a^n = 0$ $[120]$ pour un n.
C'est à dire $a^n = 120.k = 2^3.3.5.k$ pour un k bien choisi.
Il faut donc qu'il y ait dans a^n un facteur 2, un facteur 3 et un facteur 5 *(et après, on mettra le reste dans k)*.

30	1, 30, 60, 0	nilpotent
60	1, 60, 0	nilpotent
90	1, 90, 60, 0	nilpotent

$30^3 = 2^3.3^3.5^3 = (2^3.3.5).k$ avec $k = \ldots$.
$60^2 = (2^3.3.5).(2.3^{.5})$et $90^3 = (2^3.3.5).(3^2.5^2)$.

Les nombres premiers avec 120 sont idempotents.

Si a est nilpotent *(avec $a^n = 0$)* et b nilpotent *(avec $b^p = 0$)*,
alors $a.b$ est nilpotent. Il suffit de l'élever à la puissance $n + p$ *(et même $Max(n, p)$)*.
On a en effet : $(a.b)^{n+p} = a^{n+p}.b^{n+p}$ *(car ils commutent)* donc

$$(a.b)^{n+p} = a^{n+p}.b^{n+p} = (a^n).a^p.b^n.(b^p)$$

Les deux termes entre parenthèses sont nuls, le produit est nul.

Pour la somme, je vous le rédige sur un exemple.
Si a est nilpotent d'indice 3 et b d'indice 4, alors $a + b$ est nilpotent d'indice 6 :

$$(a + b)^6 = a^6 + 6.a^5.b + 15.a^4.b^2 + 20.a^3.b^3 + 15.a^2.b^4 + 6.a.b^5 + b^6$$

(commutativité)
Et dans cette somme, chaque terme est nul, soit à cause de a ($a^6 + 6.a^5.b + 15.a^4.b^2 + 20.a^3.b^3$), soit à cause de b ($15.a^2.b^4 + 6.a.b^5 + b^6$).

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes car $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (donc $n = 2$).

Mais leur somme est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dont le carré est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{pair} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{impair} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On ne pourra jamais avoir $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

◃38▹ Montrez que l'ensemble des nombres de la forme $p + q.\sqrt{3}$ est un groupe pour l'addition usuelle, et même un anneau pour l'addition et la multiplication usuelle.
Parmi ces éléments, lesquels ont un inverse pour la multiplication (l'inverse doit être dans l'anneau) :
$1, 4, \sqrt{3}, 2+\sqrt{3}, 5-\sqrt{3}, 15.\sqrt{3}+26, 7+4.\sqrt{3}, 7+5.\sqrt{3}$.

◃39▹ ♡ Il y a quatre ans, un élève dont je tairai le nom [a] a écrit en physique pour une équation différentielle d'ordre 1 : $S = Vect(\cos)$. Pour Solène, c'est une horreur, l'équation était à coefficients constants. Mais sinon, ça pourrait être quoi, l'équation pour qu'il ait raison, ce brave garçon ?

[a]. et dont je tairai le prénom parce que j'ai le même

Les équations $y'_t + a.y_t = 0$ ont des solutions de la forme $t \longmapsto y_0.e^{-a.t}$.
Mais $\cos(t).y'_t + \sin(t).y_t = 0$ a pour solutions $Vect(\cos)$. Et encore, seulement sur $[-\pi/2,\ \pi/2]$, au delà, il faut se méfier, c'est Cauchy et Lipschitz qui me l'ont dit.

◃40▹ On pose $a = Arctan(1/5)$ et $b = Arctan(1/239)$. Calculez $\tan(2.a)$, puis $\tan(4.a)$ et enfin $\tan(4.a-b)$.
Concluez $\pi = 16.a - 4.b$ (formule de Machin).
Montrez pour tout x : $Arctan(x) = \int_0^x \frac{1-t^{4.n}}{1+t^2}.dt + \int_0^x \frac{t^{4.n}}{1+t^T}.dt$.
Montrez : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \frac{1-t^{4.n}}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{2.n-1} (-1)^k.t^{2.k}$.
Déduisez : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \left| Arctan(x) - \sum_{k=0}^{2.n-1} \frac{(-1)^k.x^{2.k+1}}{2.k+1} \right| \leqslant \frac{x^{4.n+1}}{4.n+1}$.
Montrez : $Arctan(a) \simeq \sum_{k=0}^{11} \frac{(-1)^k}{(2.k+1).5^{2.k+1}}$ à 10^{-8}près.
Calculez π à 10^{-7} près grâce à la formule de Machin.

On y va doucement avec la formule $\tan(2.a) = \frac{2.\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$ appliquée deux fois et $\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a).\tan(b)}$.

$$\tan(2.a) = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{2.5}{25-1} = \frac{5}{12}$$

$$\tan(4.a) = \frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{10.12}{144-25} = \frac{120}{119}$$

Déjà, $\tan(4.a)$ vaut presque 1.

Le physicien s'en contentera pour affirmer $4.a = \frac{\pi}{4}$.
Le mathématicien débutant corrigera $4.a \simeq \frac{\pi}{4}$.
Le mathématicien corrigera $4.a \simeq \frac{\pi}{4}\ [\pi]$.

$$\tan(4.a-b) = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1+\frac{120.1}{119.239}} = \frac{120.239-119}{119.239+120}$$

Il nous suffit de prouver ensuite $120.239 - 119 = 119.239 + 120$. C'est directe si on simplifie par 119.239.

Et c'est moche si on calcule explicitement $119.239 = 28441$ comme un mauvais livre de (presque) sciences.

Ayant $\tan(4.a-b)=1$ (vraie égalité), on a $4.a-b=\frac{\pi}{4}\ [\pi]$.

Celui qui part de $\tan(4.a-b)=1$ et prétend passer à l'arctangente des deux côtés est idiot si ensuite il simplifie $Arctan(\tan(4.a-b))$ en $4.a-b$.

Mais quand même, a est entre 0 et $\frac{\pi}{4}$ puisque c'est l'arctangente d'un élément de $[0,\ 1]$.
Donc $4.a$ est plus petit que π.
On soustrait b qui est positif mais plus petit que $\frac{\pi}{2}$.
Il s'ensuit que $4.a-b$ est entre $4.0-\frac{\pi}{2}$ et $4.\frac{\pi}{4}-0$. Et dans cet intervalle, il n'y a que $\frac{\pi}{4}$ qui ait pour tangente 1.

On peut donc conclure

$$4.a-b=\frac{\pi}{4}$$

et multiplier par 4 si on y tient.

C'est dans la partie « encadrement et congruences modulo π » qu'il y a des maths.
Dans la partie calcul initiale, il n'y a que du calcul, comme son nom l'indique.
C'est sur la partie maths que l'on vous jugera.

La formule $\forall t\in\mathbb{R}^+,\ \frac{1-t^{4.n}}{1+t^2}=\sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.t^{2.k}$ est juste la série géométrique : $1+a+a^2+\ldots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ avec $a=-t^2$.

Si vous y tenez, vous prenez vos réflexes de Terminale et vous la démontrez par récurrence sur n.

Je vous fais juste l'hérédité. On suppose pour un n donné quelconque :

$$\frac{1-t^{4.n}}{1+t^2}=\sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.t^{2.k}$$

On ajoute $(-1)^{2.n}.t^{2.(2.n)}+(-1)^{2.(n+1)-1}.t^{2.(2.(n+1)+1)}$ (oui, deux termes car on passe de $2.n-1$ à $2.(n+1)-1$, c'est là qu'on va surveiller votre rigueur)

$$(-1)^{2.n}.t^{2.(2.n)}+(-1)^{2.(n+1)-1}.t^{2.(2.(n+1)-1)}+\frac{1-t^{4.n}}{1+t^2}=(-1)^{2.n}.t^{2.(2.n)}+(-1)^{2.(n+1)-1}.t^{2.(2.(n+1)-1)}+\sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.t^{2.k}$$

$$t^{4.n}-t^{4.n+2}+\frac{1-t^{4.n}}{1+t^2}=\sum_{k=0}^{2.(n+1)-1}(-1)^k.t^{2.k}$$

$$\frac{(t^{4.n}-t^{4.n+2})+t^2.(t^{4.n}-t^{4.n+2})}{1+t^2}+\frac{1-t^{4.n}}{1+t^2}=\sum_{k=0}^{2.(n+1)-1}(-1)^k.t^{2.k}$$

$$\frac{1-t^{4.n+4}}{1+t^2}=\sum_{k=0}^{2.(n+1)-1}(-1)^k.t^{2.k}$$

Et c'est bien la formule demandée.

Je dirai que la preuve par récurrence est déjà ici un très bon test pour vérifier votre capacité à surveiller vos variables, telles que « $2.(2.(n+1)-1)$ ».
Et il permet de voir si vous visualisez bien une somme de 0 à $2.n-1$ et la somme suivante

0	*1*	*2*	*3*	*...*	*2.n-2*	*2.n-1*		
0	*1*	*2*	*3*	*...*	*2.n-2*	*2.n-1*	*2.n*	*2.n+1*

La preuve attendue dans un devoir sera donc $\sum_{k=0}^{2.n-1}a^k=\frac{1-a^{(2.n-1)+1}}{1-a}$ avec $a=-t^2$.

Mais je vous propose aussi la preuve sans faille et sans récurrence :
On ne va pas prouver $\frac{1-t^{4.n}}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.t^{2.k}$ mais $1-t^{4.n} = (1+t^2).\sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.t^{2.k}$.
Il suffit alors de partir du membre de droite et de télescoper[4]

$$(1+t^2).\sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.t^{2.k} = \sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.(t^{2.k}+t^{2.k+2}) = \sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.t^{2.k} - \sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^{k+1}.t^{2.(k+1)})$$

En posant $u_k = (-1)^k.t^{2.k}$ on a alors $\sum_{k=0}^{2.n-1}u_k - \sum_{k=0}^{2.n-1}u_{k+1}$ et elle télescope. Il ne reste que u_0 avec un signe plus et $u_{2.n-1+1}$ avec un signe moins.

La formule $\frac{1-t^{4.n}}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.t^{2.k}$ est vraie pour tout t positif. Appliquons la à tous les t entre 0 et x lui aussi positif.
Et intégrons :

$$\int_{t=0}^{x}\frac{1-t^{4.n}}{1+t^2}.dt = \sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.\int_0^x t^{2.k}.dt$$

en profitant de la linéarité de l'intégrale (l'intégrale de la somme est la somme des intégrales).
On sépare la première intégrale en deux et on remplace $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$par $Arctan(x)$ (c'était quand même ça notre objectif).
On calcule chaque intégrale du second membre (et on ne calcule pas l'intégrale qui reste dans le premier)

$$Arctan(x) - \int_{t=0}^{x}\frac{t^{4.n}}{1+t^2}.dt = \sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.\frac{x^{2.k+1}}{2.k+1}$$

On remet dans le bon ordre

$$Arctan(x) - \sum_{k=0}^{2.n-1}(-1)^k.\frac{x^{2.k+1}}{2.k+1} = \int_{t=0}^{x}\frac{t^{4.n}}{1+t^2}.dt$$

Dans la formule attendue $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\left|Arctan(x) - \sum_{k=0}^{2.n-1}\frac{(-1)^k.x^{2.k+1}}{2.k+1}\right| \leqslant \frac{x^{4.n+1}}{4.n+1}$, la valeur absolue ne sert à rien.

Quant à l'intégrale non calculable $\int_0^x \frac{t^{4.n}}{1+t^2}.dt$ on peut quand même la majorer. Le $1+t^2$ au dénominateur est plus grand que 1. On a donc

$$\int_0^x \frac{t^{4.n}}{1+t^2}.dt \leqslant \int_0^x \frac{t^{4.n}}{1+0}.dt = \left[\frac{t^{4.n+1}}{4.n+1}\right]_{t=0}^{x} = \frac{x^{4.n+1}}{4.n+1}$$

Bilan :

$$Arctan(x) \simeq \sum_{k=0}^{2.n-1}\frac{(-1)^k.x^{2.k+1}}{2.k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots - \frac{x^{4.n-1}}{4.n-1}$$

mais on sait même de combien est l'erreur dans cette approximation : l'erreur est majorée par $\frac{x^{4.n+1}}{4.n+1}$ (le terme qu'on aurait écrit ensuite, tiens tiens).

C'est cette formule qui va nous permettre de calculer les différents termes de

$$\pi = 16.Arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4.Arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

avec autant de chiffres derrière la virgule qu'on veut.

C'est ainsi qu'avec $n = 6$, on est sûr d'avoir $Arctan(a) \simeq \sum_{k=0}^{11}\frac{(1)^k.a^{2.k+1}}{2.k+1}$ à 10^{-8} près puisque $\frac{(1/5)^{2.6+1}}{2.6+1}$ est plus petit que 10^{-8}.
On remplace donc $Arctan(1/5)$ par

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{5^3.3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9} - \frac{1}{11.5^{11}} + \frac{1}{13.5^{13}} - \frac{1}{15.5^{15}} + \frac{1}{17.5^{17}} - \frac{1}{19.5^{19}} + \frac{1}{21.5^{21}} - \frac{1}{23.5^{23}}$$

4. d'ailleurs la formule de la série géométrique se prouve ainsi et jamais par récurrence sauf dans un mauvais livre

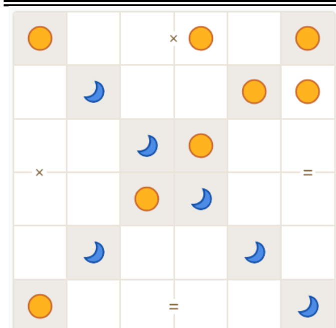
C'est plus léger pour $Arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ car on a a besoin de moins de termes

$$\frac{1}{239} - \frac{1}{239^3.3} + \frac{1}{5.239^5}$$

Bref, le reste n'est qu'application numérique.

Pour en savoir plus :
page Wikipedia John Machin
Vidéo d'Axel Arno

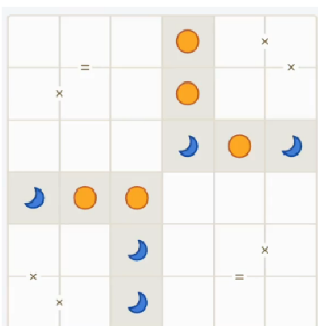
◁ 41 ▷

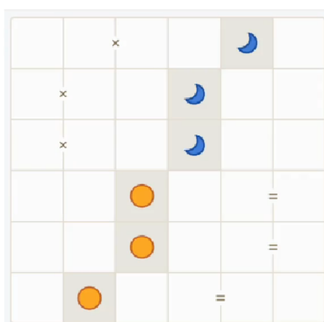


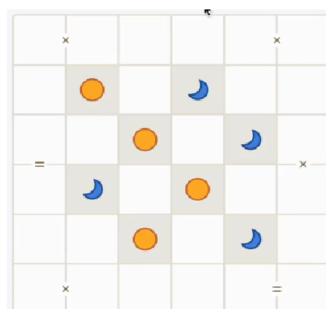
Une grille à résoudre.

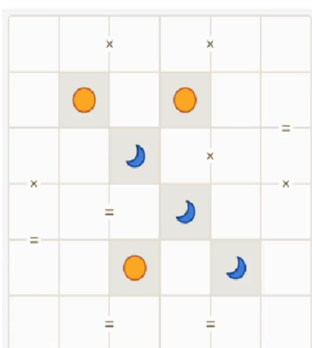
La solution.

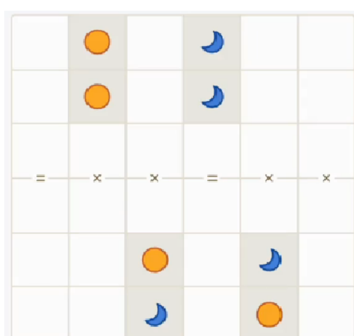
Une grille de taille 2.n sur 2.n. Sur chaque ligne et chaque colonne : n lunes et n soleils .
Sur une ligne ou une colonne, jamais plus de deux lunes à la suite, pareil pour les soleils.
Deux cases séparées d'un = contiennent le même motif. Au contraire deux cases séparées d'un x contiennent une lune et un soleil.

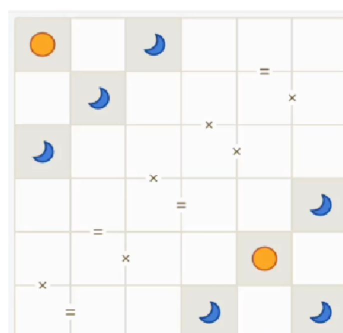












◁ 42 ▷

◁ 43 ▷

♡ Calculez ce cardinal : $Card\{\{1,\ 2\} \cap \{2,\ 5\},\ \{2,\ 3\} \cup \{4,\ 5\},\ \emptyset,\ \{2,\ 3\} \cap \{4,\ 5\}\}$.

$\{1,\ 2\} \cap \{2,\ 5\} = \{2\}$
$\{2,\ 3\} \cup \{4,\ 5\} = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
$\{2,\ 3\} \cap \{4,\ 5\} = \emptyset$
$\{\{1,\ 2\} \cap \{2,\ 5\},\ \{2,\ 3\} \cup \{4,\ 5\},\ \emptyset,\ \{2,\ 3\} \cap \{4,\ 5\}\} = \Big\{\{2\},\ \{2,3,4,5\},\ \emptyset,\ \emptyset\}$
Cet ensemble (d'ensembles) n'a que trois éléments, car le dernier est cité deux fois.
La réponse est 3.

◁44▷

♡ Montrez : $X^4+1=(X^2-\sqrt{2}.X+1).(X^2+\sqrt{2}.X+1)$.
♡ Trouvez a, b, c et d pour avoir $\frac{1}{X^4-1}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X-i}+\frac{d}{X+i}$.
♡ Trouvez α, β, γ et δ pour avoir $\frac{1}{X^4+1}=\frac{\alpha.X+\beta}{X^2-\sqrt{2}.X+1}+\frac{\gamma.X+\delta}{X^2+\sqrt{2}.X+1}$.
♠ Calculez

$\int_0^1 \frac{dt}{t^4+1}$	$\int_0^1 \frac{t.dt}{t^4+1}$	$\int_0^1 \frac{t^3.dt}{t^4+1}$

Il suffit évidemment de développer $(X^2-\sqrt{2}.X+1).(X^2+\sqrt{2}.X+1)$ pour arriver à X^4+1.

Mais astucieusement, on écrit $X^4+1=X^4+2.X^2+1-2.X^2=(X^2+1)^2-(\sqrt{2}.X)^2$ et on retrouve soi même la formule. Oh joli.

On décompose en éléments simples par la méthode des pôles.
On réduit le membre « éléments simples au dénominateur commun » :

$$\frac{1}{X^4-1}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X-i}+\frac{d}{X+i}=\frac{a.(X+1).(X^2+1)+b.(X-1).(X^2+1)+c.(X^2-1).(X+i)+d.(X^2-1).(X-i)}{}$$

On demande au numérateur de valoir 1 : $a.(X+1).(X^2+1)+b.(X-1).(X^2+1)+c.(X^2-1).(X+i)+d.(X^2-1).(X-i)=1$
On trouve a, , c et d en prenant des valeurs en 1, -1, i et $-i$.[5]

$$\frac{1}{X^4-1}=\frac{1}{4}.\frac{1}{X-1}-\frac{1}{4}.\frac{1}{X+1}+\frac{1}{4.i}.\frac{1}{X-i}-\frac{1}{4.i}.\frac{1}{X+i}$$

On pourra préférer $\frac{1}{X^4-1}=\frac{1}{4}.\frac{1}{X-1}-\frac{1}{4}.\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2}.\frac{1}{X^2+1}$ si on doit intégrer.

Pour

$$\frac{1}{X^4+1}=\frac{\alpha.X+\beta}{X^2-\sqrt{2}.X+1}+\frac{\gamma.X+\delta}{X^2+\sqrt{2}.X+1}$$

on ne va pas se prendre la tête. On réduit au dénominateur commun et on résout un système.

$$\frac{1}{X^4+1}=\frac{1}{4}.\Big(\frac{-\sqrt{2}.X+2}{X^2-\sqrt{2}.X+1}+\frac{\sqrt{2}.X+2}{X^2+\sqrt{2}.X+1}\Big)$$

(on vérifie)

Si l'on doit intégrer, on sépare. Et pas qu'une fois.

$$\int_0^1 \frac{-\sqrt{2}.x+2}{x^2-\sqrt{2}.x+1}.dx=\frac{-1}{\sqrt{2}}.\int_0^1 \frac{2..x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}.x+1}.dx+\int_0^1 \frac{1}{x^2-\sqrt{2}.x+1}.dx=\Big[\ln(x^2-\sqrt{2}.x+1)\Big]+\int_0^1 \frac{2.dx}{(\sqrt{2}x-1)^2+1}$$

et on intègre en logarithme et arctangente.

On fait de même avec l'autre terme. Finalement

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^4+1}=\frac{\sqrt{2}.\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}}{8}.\ln(2+\sqrt{2})-\frac{\sqrt{2}}{8}.\ln(2-\sqrt{2})$$

Celle en t est plus simple $\int_0^1 \frac{t.dt}{t^4+1}$.
Changeons de variable : $u=t^2$. L'intégrale devient $\int_{t=0}^{t=1} \frac{t.dt}{t^4+1}=\frac{1}{2}.\int_{u=0}^{u=1} \frac{du}{1+u^2}$.
On intègre en $Arctan(u)$. On trouve $\frac{\pi}{8}$.

Le dernier est en $\frac{u'}{u}$ avec $u=1+t^4$. On intègre en logarithme.

$$\int_0^1 \frac{t.dt}{t^4+1}=\Big[\frac{\ln(1+t^4)}{3}\Big]_0^1=\frac{\ln(2)}{3}$$

---

5. si vous refusez de prendre $x=1$ à cause du dénominateur nul en 1, dites que vous faites tendre x vers 1, de même pour les autres pôles

◁45▷ ♡ Résolvez $Arctan(x) + \frac{\pi}{6} = Arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi}{3}$ d'inconnue réelle x *(ne passez pas tout de suite à la tangente).*

x ne peut pas être nul.
Si il est positif, on remplace $Arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ par $\frac{\pi}{2} - Arctan(x)$.
L'équation devient $2.Arctan(x) = \frac{2.\pi}{3}$. On trouve $Arctan(x) = \frac{\pi}{3}$.
L'unique solution est $\sqrt{3}$, positive effectivement. On peut vérifier.

Si il est négatif, on remplace par $-\frac{\pi}{2} - Arctan(x)$.
Cette fois, on trouve $2.Arctan(x) = -\frac{\pi}{3}$.
La solution est $-1/\sqrt{3}$ *(valide après vérification).*

On a donc deux solutions : $\boxed{S = \left\{\sqrt{3},\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\right\}}$

Remarque : | *Il valait mieux remplacer effectivement $Arctan(1/x)$ avant de commencer.*

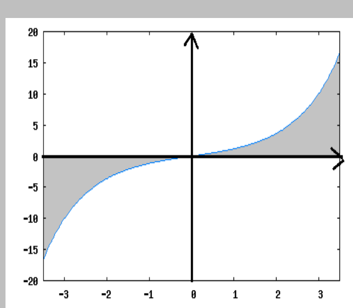
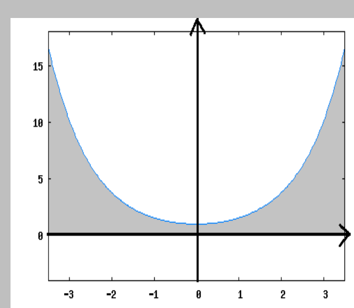
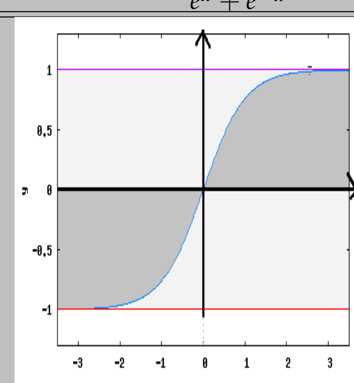
◁46▷ $(G, *)$ est un groupe. On enlève un élément, ça reste un groupe. Qui est G ?
$(G, *)$ est un groupe. On enlève deux élément, ça reste un groupe. Qui est G ? (deux solutions)
On pourra utiliser le théorème de Lagrange : le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe.

On note n le cardinal de G.
On enlève un élément (pas le neutre), et on a encore un groupe, donc un sous-groupe.
Et le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe. $n-1$ divise n.
n vaut 2.
Par exemple $(\{Id,\ \overrightarrow{(1\ 2)}\}, \circ)$. Et c'est $\overrightarrow{(1\ 2)}$ qu'on enlève, et il reste le groupe le plus simple.
Ou alors $\{0, 1\}$ pour l'addition modulo 2.

Pour le second, $n-2$ divise n.
n vaut 3 ou 4.
$\{0,\ 1,\ 2\}$ pour l'addition modulo 3 et on enlève 1 et 2.
Ou alors $\{1,\ j,\ j^2\}$ pour la multiplication, et on enlève j et j^2.

$\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ pour l'addition modulo 4 et on enlève 1 et 3.
Ou alors $\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$ pour la multiplication, et on enlève $-i$ et i.

◁47▷ ♡ On définit : $g = \theta \longmapsto \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ *(fonction de Guderman).* Montrez que c'est une bijection de $]-\pi/2,\ \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$. Explicitez sa bijection réciproque (à un réel x, on associe l'angle θ vérifiant $g(\theta) = x$).
Dérivez g et g^{-1}.
On définit les fonctions hyperboliques :

$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
		

Montrez : | $sh(g(\theta)) = \tan(\theta)$ | $ch(g(\theta)) = 1/\cos(\theta)$ | $th(g(\theta)) = \sin(\theta)$ |

On dérive une composée :

θ	$\longmapsto$	$\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}$	$\longmapsto$	$\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$	$\longmapsto$	$\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$
	affine		tan		ln	
	$\frac{1}{2}$	$\times$	$1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$	$\times$	$\frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$	

On simplifie et on trouve $\dfrac{1}{\dfrac{2.t}{1+t^2}}$ avec $t=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

On reconnait un sinus, mais de $\dfrac{\theta+\dfrac{\pi}{2}}{2}$. On a donc $\dfrac{1}{\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

Bref : $\boxed{g'(\theta)=\dfrac{1}{ch(\theta)}}$ pour tout θ de $]-\pi/2,\ \pi/2[$

Une dérivée strictement positive, une application continue strictement croissante.
Elle va réaliser un homéomorphisme entre deux intervalle. Il suffit d'étudier les limites aux bornes pour avoir l'intervalle image.

en $\frac{\pi}{2}$ par valeur inférieure	$\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}$ tend vers $\frac{\pi}{2}$	$\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ tend vers $+\infty$	$g(\theta)$ tend vers $+\infty$
en $\frac{\pi}{2}$ par valeur supérieure	$\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}$ tend vers 0	$\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ tend vers 0	$g(\theta)$ tend vers $-\infty$

Ensuite, on peut expliciter g^{-1}. Ou même avant, comme ça on prouve que g est bijective.

On se donne x réel, et on résout $\ln\left(\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=x \Leftrightarrow \tan\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=e^x$

$\ln\left(\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=x \Leftrightarrow \dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}=Arctan(e^x)$ car l'intervalle est le bon

$$\ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=x \Leftrightarrow \frac{\theta}{2}=Arctan(e^x)-\frac{\pi}{4}$$

$$\ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=x \Leftrightarrow \theta=2.Arctan(e^x)-\frac{\pi}{2}$$

On dérive cette composée :

$$x\longmapsto 2.\frac{1}{1+(e^x)^2}.e^x$$

(composée, comme tout à l'heure $x\longmapsto e^x\longmapsto Arctan(e^x)\longmapsto 2.Arctan(e^x)-C$)

On simplifie et on reconnaît un truc fou :

$g'(\theta)$	$(g^{-1})'(x)$
$\frac{1}{\cos(\theta)}$	$\frac{1}{ch(x)}$

On pouvait aussi dériver $x\longmapsto g(g^{-1}(x))=x$ et trouver $(g^{-1})'(x)=\dfrac{1}{g'(g^{-1}(x))}$...

A toutes fins utiles, on calcule $e^{g(\theta)}=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sin}{\cos}$ et $e^{-g(\theta)}=\dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\cos}{\sin}$.

On somme et on réduit au dénominateur commun : $\dfrac{\sin^2+\cos^2}{\sin.\cos}$ pour le dire vite.
On divise par 2 :

$$\frac{e^{g(\theta)}+e^{-g(\theta)}}{2}=\frac{1}{2.\sin.\cos}=\frac{1}{\sin\left(2.\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\frac{1}{\cos(\theta)}$$

On note que dans le premier membre, $ch(g(\theta))$ est toujours plus grand que 1.
dans le second membre, l'inverse d'un cosinus (positif) est aussi plus grand que 1.

De même, $\dfrac{e^{g(\theta)}-e^{-g(\theta)}}{2}=\dfrac{\sin}{\cos}-\dfrac{\cos}{\sin}=\dfrac{\sin^2-\cos^2}{2.\sin.\cos}=\dfrac{\cos\left(2.\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sin\left(2.\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\dfrac{1}{\sin\left(2.\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)}=\tan(\theta)$.

On note que dans le premier membre, $sh(g(\theta))$ décrit tout $\mathbb{R}$.
dans le second membre, une tangente décrit tout $\mathbb{R}$.

Pour avoir la dernière égalité, on fait le quotient des deux premières.

$$th(g(\theta)) = \sin(\theta)$$

On note que dans le premier membre, $th(g(\theta))$ décrit juste $]-1,\ 1[$.
dans le second membre, un sinus décrit $]-1,\ 1[$.

Il y a d'autres preuves de ces égalités. Mais en tout cas, la réaction du matheux, ce n'est pas juste de calculer. C'est aussi de vérifier la cohérence comme avec les trois remarques sur les domaines $[1,\ +\infty[$, $\mathbb{R}$ et $]-1,\ 1[$...

Joël Martin (la Comtesse du Canard) à Paris :
Paris aux prestigieuses scènes est la capitale mondiale capitale du luxe. On y rencontre plein de titis qui rusent et bisent des copines à l'air cool. On voit plein de péniches à la Seine et plein de bus faciles à citer. On entend parfois soupirer des touristes subjugués par l'abîme dans la Tour : "Ah que j'aurais aimé connaître vos motivations, Eiffel !"

Et Joël Martin en Haute-Savoie (ah le goût de Mont-Blanc) :
Les amateurs de pentes collectionnent les faces, épatés par les faces et les pentes effilées. Une grimpeuse qui apprécie la Verte quand elle est jolie, et surtout la Verte enneigée, parcourt le mont sans craindre le vide. Une autre luge sous la Verte. Mais gare à l'excès de glisse quand se déchaîne le vent... détresse sur les faces !

◁47▷ Mon fils a eu 6 sur 20 *(en gym, pas en maths)*. La moyenne de classe est à 11. Il me dit : *"j'aurais eu cinq points de plus, j'aurais eu comme la moyenne"*. Je lui dis *"non, car la moyenne de la classe aurait alors augmenté"*. *"Ah oui, j'aurais du avoir* 11,2 *alors"*. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe de mon fils ?

Notons N le nombre d'élèves. Notons S la somme des notes tant que mon fils a 6.
On a alors $S = N \times 11$ par définition même de la moyenne.

Faisons gagner cinq points à mon fils et rien qu'à lui. La somme des notes devient $S+5$.
La moyenne devient $\dfrac{S+5}{N} = \dfrac{S}{N} + \dfrac{5}{N} = 11 + \dfrac{5}{N}$. Comme N n'est pas infini, ceci confirme que la nouvelle moyenne est plus que 11.

Comment avoir égalité alors ? C'est François lui même, en pur matheux, qui le dit : il doit avoir $11,2$, c'est à dire $5,2$ points de plus.
La nouvelle somme est $S + 5,2$ et la nouvelle moyenne est $\dfrac{S+5,2}{N} = \dfrac{S}{N} + \dfrac{5,2}{N} = 11 + \dfrac{5,2}{N}$.
Mais la nouvelle moyenne est $11,2$ puisque mon fils a réussi à atteindre la moyenne. On a donc $11 + \dfrac{5,2}{N} = 11,2$.
On égalise : $N = \dfrac{5,2}{0,2} = 26$.

Et pour avoir les points, comme à l'école élémentaire et au collège : « il y a 26 élèves dans la classe ».

◁48▷ ♡ Montrez que les matrices de taille 2 sur 2 à déterminant non nul forment un groupe pour la multiplication, non commutatif.
Montrez que l'ensemble des matrices de taille 2 sur 2 à coefficients entiers et à déterminant 1 en forme un sous-groupe.
En est il de même pour les matrices de taille 2 sur 2 à coefficients entiers et à déterminant 1 ou -1.
Montrez que les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 2.a & a \\ -2.a & -a \end{pmatrix}$ avec a décrivant $\mathbb{R}^*$ forment un groupe pour la multiplication, mais pas un sous-groupe du groupe précédent...

On note $GL_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2 sur 2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant non nul $a.d - b.c$.

Associativité	Acquise, c'est le produit matriciel : $(A.B).C = A.(B.C)$ que A, B et C soient inversibles ou non.
Neutre	Le neutre est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Et alors ? Ce n'est pas ça la question. Tu es sûr que tu sais faire des maths ? Le neutre proposé est il dans l'ensemble ?
Stabilité	Si A et B ont un déterminant non nul, alors c'est aussi le cas de AB car $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$. Et $A.B$ est évidemment une matrice carrée de taille 2 sur 2.
Symétriques	Si la matrice A (égale à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$) a un déterminant non nul alors elle a un inverse : $\dfrac{1}{a.d - b.c}.\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Et alors ? Crétin fini. Tu n'as répondu qu'à la moitié de la question. Tu ne mérites aucun point. Où dis tu que l'invverse est dans l'ensemble ? Nulle part. Tu n'as donc pas compris la question. Que fais tu en salle de maths ?

Pour « non commutative, on donne un contre-exemple.

Les matrices de taille 2 sur 2 à coefficients entiers et de déterminant 1 :
on y trouve la matrice neutre, car son déterminant vaut 1 (et ses coefficients 0 ou 1).
Si A et B sont à coefficients entiers, leur produit est encore à coefficients entier. Et son déterminant vaut 1×1.
Si A est à coefficients entiers et a pour déterminant 1, son inverse est $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, à coefficients entiers, de déterminant $d.a - (-c).(-b)$, ce qui fait 1.

Même démonstration pour déterminant égal à 1 ou -1.

Les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 2.a & a \\ -2.a & -a \end{pmatrix}$ sont un exemple intéressant. Leur déterminant est nul. Leur ensemble n'est pas inclus dans le groupe et ne pourra pas en être un sous-groupe. Mais on a quand même

Associativité	Comme toujours.
Neutre	Le neutre est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, et il est dans l'ensemble. Si si : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2.a & a \\ -2.a & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.a & a \\ -2.a & -a \end{pmatrix}$ et pareil à gauche !
Stabilité	$\begin{pmatrix} 2.a & a \\ -2.a & -a \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2.b & b \\ -2.b & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.a.b & a.b \\ -2.a.b & -a.b \end{pmatrix}$ Elle est de la forme voulue (avec $a.b$ non nul).
Symétriques	$\begin{pmatrix} 2.a & a \\ -2.a & -a \end{pmatrix}$ n'est pas inversible au sens classique du terme $A.A^{-1} = I_2$. Mais il ne s'agit ici d'obtenir le neutre de ce groupe : $\begin{pmatrix} 2.a & a \\ -2.a & -a \end{pmatrix}.quelquechose = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Et ici, on constate $\begin{pmatrix} 2.a & a \\ -2.a & -a \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{2}{a} & \frac{1}{a} \\ -\frac{2}{a} & -\frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ (des deux côtés). Et $\frac{1}{a}$ est bien à son tour un réel non nul...

Et ce groupe est commutatif.

Mais ce n'est pas un sous groupe de $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$.
Ce n'est pas non plus un sous groupe de $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ tout simplement parce que $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ n'est même pas un groupe !

◁ 49 ▷

N	diviseurs de N	somme des diviseurs non triviaux	somme des carrés des chiffres
125	1, 5, 25, 125	$5+25=30$	$1^2+2^2+5^2=30$
581	1, ‘7, 83, 581	$7+83=90$	$5^2+8^2+1^2=90$
8 549	1, 83, 103, 8549	$83+103=186$	$8^2+5^2+4^2+9^2=?$
16 999	1, 89, 191	$89+191=?$	$1^2+6^2+9^2+9^2+9^2=280$

Un nombre parfait canadien est un nombre dont la somme des diviseurs propres est la somme des carrés de ses chiffres *(on se demande pourquoi un jour au congrès de la Canadian Mathématical Society à l'Université du Manitoba des gens se sont posé la question dans un couloir entre deux conférences*[a]*)*. Écrivez un programme qui cherche les 7 premiers nombres supercanadiens *(la somme des diviseurs propres est la somme des cubes de ses chiffres)*, et vérifiez à la main que 160 en fait partie.

a. si, pour le plaisir de chercher, c'est ce qui caractérise les mathématiciens et mathématiciennes et fait que les physiciens les regardent avec les yeux surpris du « à quoi ça sert » ?

Pour tester si un nombre n est parfait canadien, on accumule la somme de ses diviseurs propres par un range adéquat avec un test.
On prend aussi la liste de ses chiffres et on en effectue la somme des cubes.

```
def SomCubes(n) :
....SC = 0
....LC = list(str(n))
....for Chif in LC :
........c = int(Chif)
........SC += c*c*c
....return SC
```

```
def SomDiv(n) :
....for d in range(2, n) :
........if n%d == 0 :
............SD += d
....return SD
```

```
Parfaits = [ ]
n = 0
while len(Parfaits)<7 :
....if SomCubes(n) == SomDiv(n) :
........Parfaits.append(n)
........print('et hop : ',n)
........n += 1
print(L)
```

Sinon, pour faire fondre un entier, on a

```
def SomCubes(n) :
....SC, nn = 0, n #copie de sécurité
....while nn > 0 :
........c = nn%10 #on récupère le chiffre des unités
........SC += c*c*c
........nn = nn/10 #on efface le chiffre des unités
....return SC
```

On décompose $160 = 2^5.5$ et on dresse la liste de ses diviseurs :

2	2^2	2^3	2^4	2^5	somme : 63
2.5	$2^2.5$	$2^3.5$	$2^4.5$		somme : 31×5

La somme des diviseurs cherchés vaut 217. Et la somme des cubes des chiffres vaut 1^3+6^3. Pareil.

142	160	1 375	6 127	12 643	51 703	86 833

La syntaxe `while len(Parfaits)<7` est risquée, si on n'en trouve pas 7, la boucle ne s'arrête jamais !