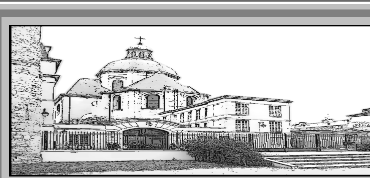
LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 18 octobre
M.P.S.I.2



2024 2025

Pb02

Cinq sujets très indépendants.

◊ 0 ◊ Justifiez $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\cos\left(\frac{5.\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. 2 pt.

♡ 0 ♡ Le cours dit que le sixième polynôme de Tchebychev est $32.X^6 - 48.X^4 + 18.X^2 - 1$. Donnez ses racines. 2 pt.

◊ 1 ◊ Par étourderie, l'élève propose $32.X^6 - 48.X^4 - 18.X^2 + 1$. Montrez que ce polynôme n'a que quatre racines réelles. 2 pt.

♡ 1 ♡ Combien a-t-il de racines complexes ? 1 pt.

♣ 0 ♣ Qui sont les six racines complexes de $32.X^6 + 48.X^4 + 18.X^2 + 1$? 2 pt.

On va montrer que si un polynôme à coefficients réels est de la forme

$$A(X) = a_n.X^n + \ldots + a_{k+1}.X^{k+1} + 0.X^k + a_{k-1}.X^{k-1} + \ldots + a_0$$

avec a_{k+1} et a_{k-1} de même signe (comme ici -48 et -18), alors il a au moins deux racines non réelles.

I∼0) Soit Q un polynôme à coefficients réels de racines réelles α_1 à α_d. Montrez :

$\forall x \in \mathbb{R} - \{\alpha_1, \ldots \alpha_d\}$, $\frac{Q'(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{x-\alpha_k}$ puis $\forall x \in \mathbb{R} - \{\alpha_1, \ldots \alpha_d\}$, $\frac{Q''(x).Q(x) - (Q'(x))^2}{(Q(x))^2} \leqslant 0$. 3 pt.

I∼1) Montrez que si toutes les racines d'un polynôme $P(X)$ à coefficients réels sont réelles, alors toutes les racines de sa dérivée $P'(X)$ sont réelles. 2 pt.

I∼2) Soit P un polynôme de la forme $a_n.X^n + \ldots + a_{k+1}.X^{k+1} + a_k.X^k + a_{k-1}.X^{k-1} + \ldots + a_0$.
Exprimez $P^{(k+1)}(0).P^{(k-1)}(0) - (P^{(k)}(0))^2$ à l'aide des a_i. 3 pt.

I∼3) Concluez : un polynôme tel que $A(X)$ ne peut pas avoir n racines réelles ; un polynôme tel que $A(X)$ a au moins deux racines non réelles. 4 pt.

Soit P un polynôme de degré n, de terme dominant $a_n.X^n$. On va montrer : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}.\binom{n}{k}.P(k) = n!.a_n$.

II∼0) Vérifiez le résultat pour n égal à 4. 2 pt.

II∼1) Soit P un polynôme de degré 6. On veut écrire

$$\frac{P(X)}{X.(X-1).(X-2).(X-3).(X-4).(X-5).(X-6)} = \frac{\lambda_0}{X} + \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\lambda_2}{X-2} + \frac{\lambda_3}{X-3} + \frac{\lambda_4}{X-4} + \frac{\lambda_5}{X-5} + \frac{\lambda_6}{X-6}$$

L'élève multiplie par $X-3$ de chaque côté et fait tendre X vers 3. Que trouve-t-il alors pour λ_3 ? 2 pt.

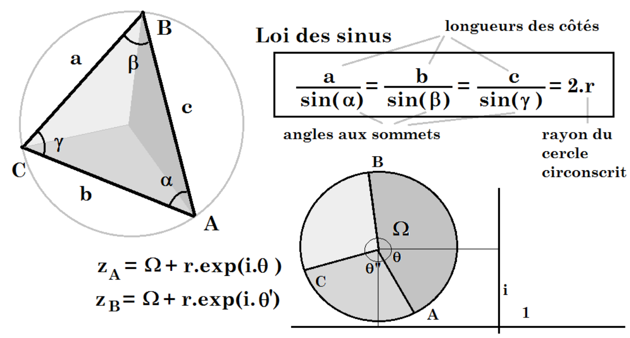
II∼2) Calculez de la même manière chaque λ_k. 2 pt.

II∼3) Quel argument doit on alors utiliser pour montrer que la condition nécessaire est aussi suffisante (c'est à dire « égalité $\forall x$ ») ? 2 pt.

II∼4) Démontrez alors le résultat demandé en identifiant le coefficient de X^n dans $P(X)$. 2 pt.

Un peu de géométrie dans le plan. On va démontrer la loi des sinus :
si (A, B, C) est un triangle d'angles au sommets α, β et γ, et de côtés a, b et c (logiquement $a = BC$ et ainsi de suite) et de rayon du cercle circonscrit r (le cercle passant par les trois sommets, de centre à l'intersection des médiatrices), alors on a

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2.r$$



Justifiez que les affixes des trois sommets peuvent s'écrire $\Omega + r.e^{i.\theta}$, $\Omega + r.e^{i.\theta'}$ et $\Omega + r.e^{i.\theta''}$ pour trois angles θ, θ' et θ'' . 1 pt.

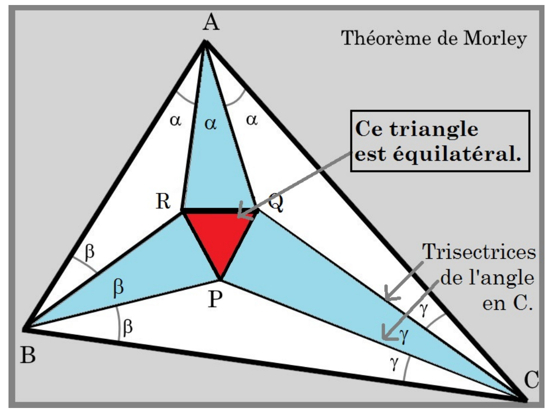
Montrez alors 2 pt.

$a = BC = r.|e^{i.\theta''} - e^{i.\theta'}| = r.2.\left|\sin\left(\frac{\theta''-\theta'}{2}\right)\right|$.

Montrez : 2 pt.

$Arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = Arg\left(\frac{e^{i.\theta''} - e^{i.\theta}}{e^{i.\theta'} - e^{i.\theta}}\right) = \frac{\theta''-\theta'}{2}\ [\pi]$.

Déduisez la loi des sinus. 2 pt.



On passe maintenant au théorème de Morley. Soit $(A,\ B,\ C)$ un triangle quelconque (non plat). On trace les trisectrice (qui coupent chaque angle au sommet en trois angles égaux). Elles se coupent deux à deux en trois points P, Q et R. Alors le triangle $(P,\ Q,\ R)$ est un triangle équilatéral.

Les notations sont ici celles du graphique ci contre (attention, ici, les angles aux sommets sont $3.\alpha$, $3.\beta$ et $3.\gamma$ pour éviter toute division par 3).

Montrez : $\sin(ARB) = \sin(\alpha+\beta)$.
et $\sin(ACB) = \sin(3.\alpha + 3.\beta)$. 1 pt.

Montrez pour tout angle θ $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$
et $-3.\sin(3.\theta) = -12.\cos^2(\theta).\sin(\theta) + 3.\sin(\theta)$. 3 pt.

Déduisez pour tout angle θ de $]0,\ \pi[$: $\frac{\sin(3.\theta)}{\sin(\theta)} = 4.\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right).\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$. 2 pt.

III~0) En appliquant la loi des sinus dans (BCA) et dans (BRA), montrez : 3 pt.

$$AR = 2.r.\sin(\beta).\frac{\sin(3.\alpha+3.\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = 8.r.\sin(\beta).\sin(\gamma).\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$AQ = 8.r.\sin(\beta).\sin(\gamma).\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)$$

III~1) Déduisez $\frac{AR}{\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{AQ}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{3}\right)}$. 1 pt.

III~2) On note M le point de la demi droite $[AQ)$ vérifiant $\widehat{MRA} = \frac{\pi}{3}+\beta$. Calculez alors $\widehat{AMR}$. 1 pt.

III~3) Déduisez en utilisant la loi des sinus : $AM = AQ$ puis $M = Q$. 2 pt.

III~4) Déduisez $\widehat{QRA} = \beta + \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{AQR} = \gamma + \frac{\pi}{3}$. 1 pt.

III~5) Déduisez $RQ = 8.r.\sin(\alpha).\sin(\beta).\sin(\gamma) = QP = PR$ et concluez avec Franck Morley (qui n'a rien à voir avec le Morley de l'expérience de Morley et Michelson qui coûte si cher aux labos de physique des lycées). 2 pt.

Un théorème qu'on ne démontrera pas ici dit :
si on prend `n+1` entiers distincts entre `1` et `2*n` (inclus), alors il en existe au moins un qui en divise un autre.
exemple : `n = 10`, *dans* `[20, 11, 18, 12, 14, 9, 16, 15, 7, 13, 19]`, *7 divise* `14` *(et il n'y a ici quel lui).*

◇ 2 ◇ Tâche mathématique. Complétez ce que dit ce théorème en quantifiant proprement : 2 pt.

$$\forall n,\ \forall(a_0, \dots a_n) \in ([1,\ 2.n+1] \cap \mathbb{N})^{n+1},\ \left(\dots\right) \Rightarrow \left(\dots\right)$$

Tache informatique. L'entier `n` est une donnée pour tout au long de l'énoncé.

♯ 0 ♯ Écrivez une procédure `test` qui prend en entrée une liste `L` et vérifie qu'elle est bien faite de `n+1` entiers, tous distincts, tous entre `1` et `2*n`. 3 pt.

♯ 1 ♯ Écrivez une procédure `exemple` qui prend en entrée une liste `L` ayant validé le test précédent et trouve deux indices `p` et `q` distincts tels que `L[p]` divise `L[q]`. 2 pt.

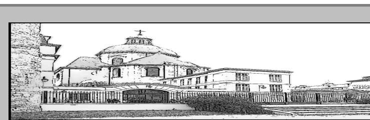
♯ 2 ♯ Écrivez une procédure `compte` qui prend en entrée une liste `L` ayant validé le test précédent et trouve le nombre de couples d'indices `(p, q)` distincts tels que `L[p]` divise `L[q]`. 1 pt.

Pour faire des statistiques, on veut écrire une procédure qui crée une liste de `n+1` entiers distincts au hasard entre `1` et `2*n`
Expliquez les erreurs et corrigez 2 pt.

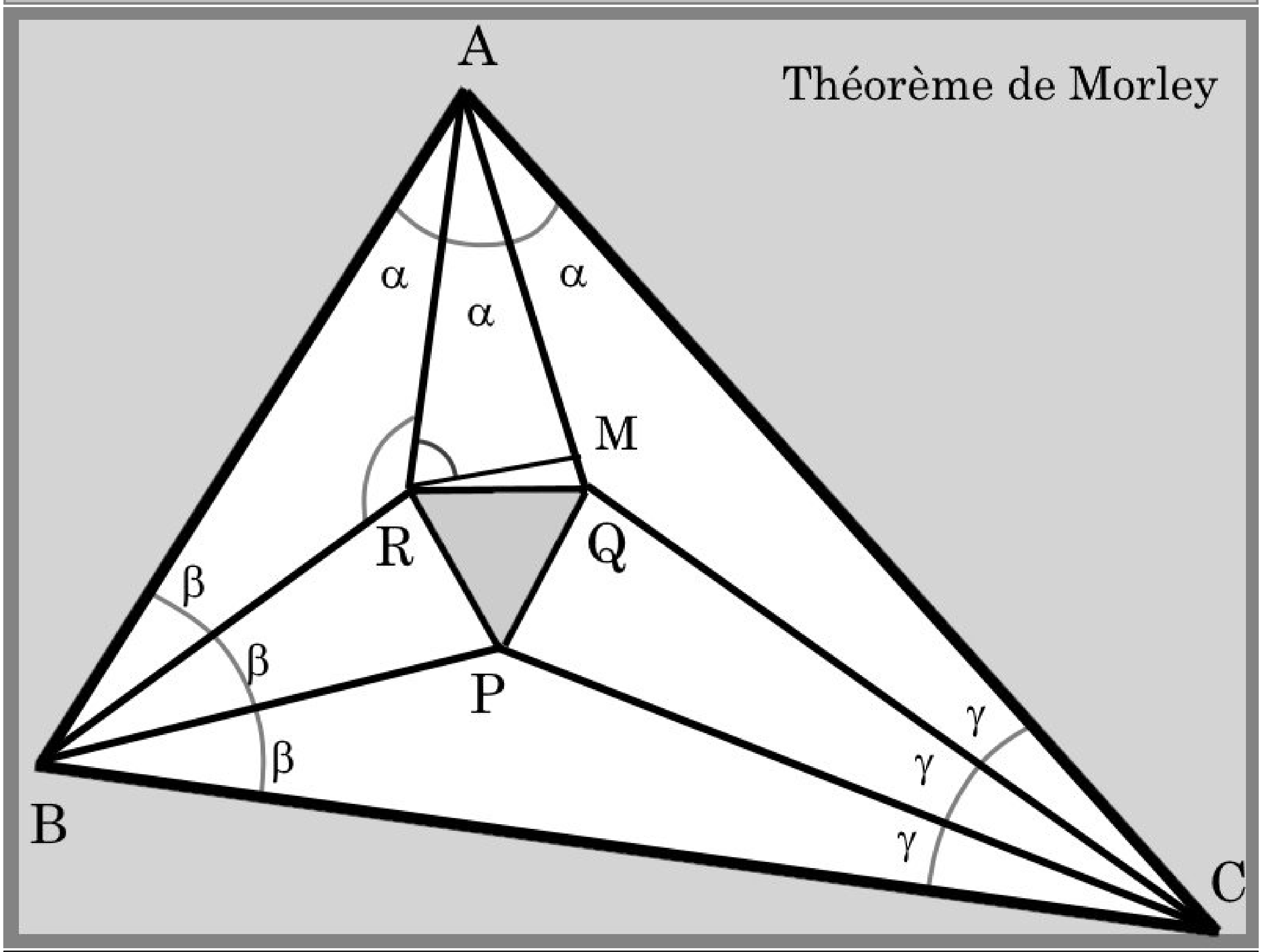
```
def alea( ) : # -> list of int
....for k in range(n+1) :
........if not(randrange(1, 2*n+1) in L) :
............L.append(randrange(1, 2*n+1))
....return L
```
[1]

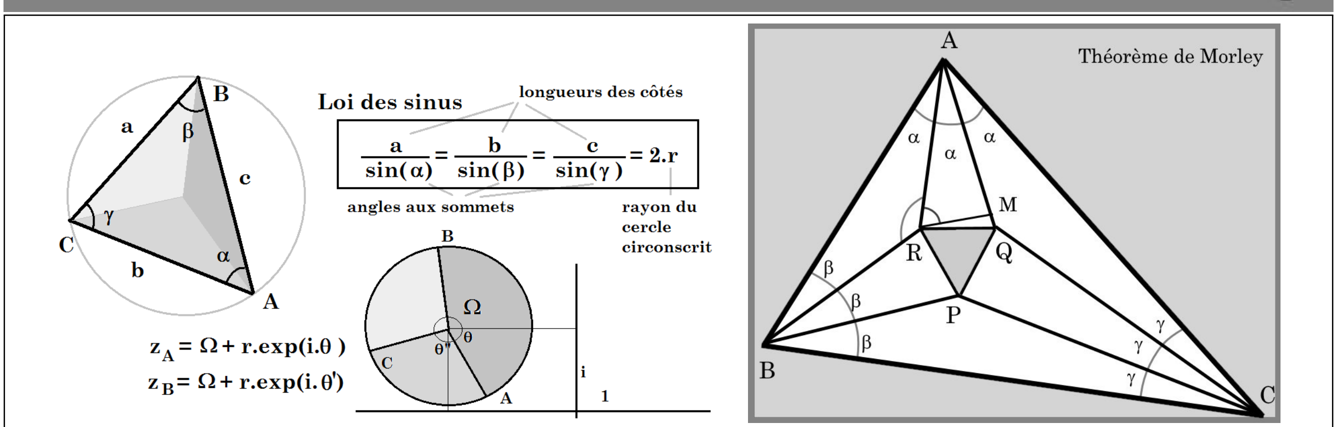
♣1♣ Pouvez vous trouver une liste de cinq entiers entre `1` et `10` (inclus) tels qu'aucune n'en divise un autre. Et six entiers entre `1` et `12` ? 2 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE M.P.S.I.2



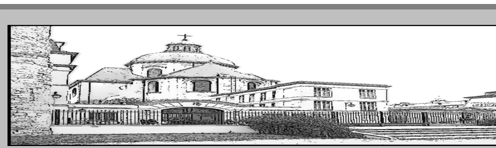
2024 Pb02 53- points 2025





1. la fonction `randrange(a, b)` du module `random` donne un nombre au hasard entre a (inclus) et b (exclu)

LYCEE CHARLEMAGNE
Vendredi 18 octobre
M.P.S.I.2



2024 2025
Pb02
CORRECTION

Pb02 Variations sur le polynôme de Tchebytchev.

La méthode directe pour nos deux cosinus :

$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Il ne reste qu'à remplacer par les valeurs connues.

On peut aussi dire que $\cos(\pi/12)$ est un réel positif qui vérifie $2.X^2-1=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Or, cette équation n'a qu'une solution positive, et comme par hasard

$$2.\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2-1=\frac{2+2.\sqrt{2.6}+6}{8}-1=\frac{2.\sqrt{12}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On procède de même pour l'autre.

On commence par chercher les racines de T_6 entre -1 et 1 en posant le changement de variable $\theta = Arccos(x)$ dans l'équation $T_6(x)=0$. Elle donne $\cos(6.\theta)=0$. On trouve $\theta=\frac{\pi}{12}+\frac{2.k.\pi}{6}$ avec k entier entre 0 et 5 pour ne pas déborder du domaine image de l'arc-cosinus.
Ceci nous livre six racines du polynômes T_6 toutes entre -1 et 1.
De par son degré, il n'a pas plus de six racines, on les a toutes.

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$\cos\left(\frac{3.\pi}{12}\right)$	$\cos\left(\frac{5.\pi}{12}\right)$	$\cos\left(\frac{7.\pi}{12}\right)$	$\cos\left(\frac{9.\pi}{12}\right)$	$\cos\left(\frac{11.\pi}{12}\right)$
$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
noter la parité du polynôme, si x est racine, $-x$ l'est aussi					

Pouvait on dire « c'est du cours : $\left\{\frac{(2.k+1).\pi}{2.6} \mid k\in range(6)\right\}$?

Un signe a changé avec $32.x^6-48.x^4-18.x^2+1$, y a-t-il une ruse ?
Le polynôme est pair, les racines se regroupent deux à deux.

On va donc changer de variable avec $y=x^2$ et on est face à une équation polynômiale du troisième degré

$$32.y^3-48.y^2-18.y+1=0$$

On ne demande pas la liste des racines, mais juste leur nombre. Donc, c'est Viète qui va travailler et pas Tartaglia !

On réfléchit donc en tant qu'individu hyper-intelligent, croisement de matheux et physicien. On fait une représentation graphique de $y\longmapsto 32.y^3-48.y^2-18.y+1$ (notée f) qui se dérive en $y\longmapsto 96.y^2-96.y-18$.

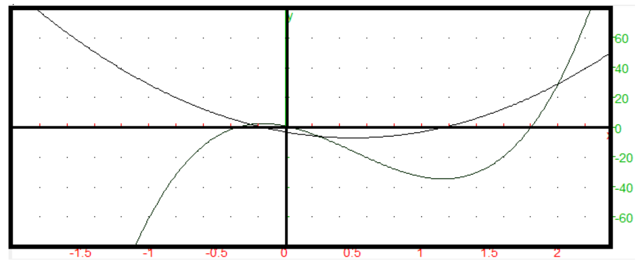
Et là encore, on réfléchit pour alléger et on divise par 6 pour avoir $16.y^2 - 16.y - 3$.

On trouve deux racines réelles : $\dfrac{2-\sqrt{7}}{4}$ et $\dfrac{2+\sqrt{7}}{4}$.

f' change de signe, f est croissante, décroissante, croissante.

f peut alors avoir trois racines réelles.

D'ailleurs, on constate $f(-1) = -61$, $f(0) = 1$ et $f(1) = -33 < 0$ et $f(2) = 29$.



On a donc bien trois solutions pour y : $y_0 < y_1 < y_2$. Mais si on regarde le produit des racines, il est négatif. Donc une est négative (pas les trois) $y_0 < 0 < y_1 < y_2$.

Et comme y est égal à x^2, on trouve quatre racines réelles pour x

$y_0 < 0$	$0 < y_1$	y_2
$x_0 = -i.\sqrt{\lvert y_0\rvert}$	$x_1 = -\sqrt{y_1}$	$x_2 = -\sqrt{y_2}$
$x'_0 = i.\sqrt{\lvert y_0\rvert}$	$x'_1 = \sqrt{y_1}$	$x'_2 = \sqrt{y_2}$
imaginaires	réelles	

D'autres preuves sont peut être possibles.
Et sinon, on peut se référer à la suite du devoir.

Ayant quatre racines réelles, il faut compléter avec deux racines « complexes non réelles » (on dira « imaginaires »). Mais le polynôme a bien six racines complexes.

Les réels sont des complexes, on écrit $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Le polynôme $32.X^6 + 48.X^4 + 18.X^2 + 1$ ressemble à $32.X^6 - 48.X^4 + 18.X^2 - 1$ et même à $-32.X^6 + 48.X^4 - 18.X^2 + 1$. Il suffit de changer des signes.

Et l'idée (illumination), c'est de faire intervenir i dont le carré vaut -1

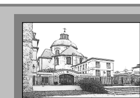
$$T_6(i.X) = 32.(i.X)^6 - 48.(i.X)^4 + 18.(i.X)^2 - 1 = -32.X^6 - 48.X^4 - 18.X^2 - 1$$

On résout donc l'équation $T_6(i.x) = -0$. On en connaît les racines dans $\mathbb{C}$: $i.x = \cos\left(\dfrac{k(2.k+1).\pi}{12}\right)$.

$i.\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$	$i.\cos\left(\dfrac{3.\pi}{12}\right)$	$i.\cos\left(\dfrac{5.\pi}{12}\right)$	$i.\cos\left(\dfrac{7.\pi}{12}\right)$	$i.\cos\left(\dfrac{9.\pi}{12}\right)$	$i.\cos\left(\dfrac{11.\pi}{12}\right)$
$i.\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$i.\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$i.\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$i.\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	$i.\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$	$i.\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Toutes sont imaginaires pures, il ne pouvait pas y avoir de racine réelle, puisque $32.x^6 + 48.x^4 + 18.x^2 + 1$ était un somme de réels strictement positifs.

Pb02 Premier théorème sur les polynômes.



La formule $\forall x \in \mathbb{R} - \{\alpha_1, \dots \alpha_d\}$, $\dfrac{Q'(x)}{Q(x)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \dfrac{1}{x-\alpha_k}$ est dans le cours.

On écrit $Q(X) = \lambda.(X-\alpha_1).(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_{d-1}).(X-\alpha_d)$.

On dérive comme un produit $Q(X) = \begin{array}{cccccc} \lambda & .1 & .(X-\alpha_2) & \dots & .(X-\alpha_{d-1}) & .(X-\alpha_d) \\ +\lambda & .(X-\alpha_1) & .1 & \dots & .(X-\alpha_{d-1}) & .(X-\alpha_d) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ +\lambda & .(X-\alpha_1) & .(X-\alpha_2) & \dots & .1 & .(X-\alpha_d) \\ +\lambda & .(X-\alpha_1) & .(X-\alpha_2) & \dots & .(X-\alpha_{d-1}) & .1 \end{array}$

On divise par la forme factorisée de $Q(X)$, λ part à à chaque fois on a un terme de plus au dénominateur qu'au numérateur.

Une fois qu'on a ce résultat, on comprend d'où vient $\dfrac{Q''(x).Q(x) - (Q'(x))^2}{(Q(x))^2}$?

Mais si ! La dérivée d'un quotient !

$$\left(\frac{Q'}{Q}\right)' = \frac{Q.(Q')' - Q'.Q'}{Q^2} = \frac{Q.Q'' - (Q')^2}{(Q)^2}$$

Et en dérivant le membre de droite, on a donc

$$\frac{Q(x).Q''(x)-(Q'(x))^2}{(Q(x))^2}=\sum_{k=1}^{d}\frac{-1}{(x-\alpha_k)^2}<0$$

en tant que somme de réels tous négatifs (carré de réel et signe moins).

On nous donne P de la forme $a_0+a_1.X+a_2.X^2+\ldots+a_n.X^n$.
On doit le dériver $k-1$, k et $k+1$ fois et calculer en 0.
On constate après deux ou trois dérivations

$$\begin{array}{rcccccccccc}
P(X) & = & a_0 & +a_1.X & +a_2.X^2 & +a_3.X^3 & +a_4.X^4 & +\ldots & +a_n.X^n & \text{donc} & P(0)=a_0\\
P'(X) & = & & a_1 & +2.a_2.X & +3.a_3.X^2 & +4.a_4.X^3 & +\ldots & +n.a_n.X^{n-1} & \text{donc} & P'(0)=a_1\\
P''(X) & = & & & +2.a_2 & +6.a_3.X & +12.a_4.X^2 & +\ldots & +n.(n-1).a_n.X^{n-2} & \text{donc} & P''(0)=2.a_2\\
P^{(3)}(X) & = & & & & +6.a_3 & +24.a_4.X & +\ldots & +n.(n-1).(n-2).a_n.X^n & \text{donc} & P^{(3)}(0)=6.a_3\\
 & & & & & \text{et ainsi de suite jusqu'à} & & & & & \\
P^{(n)}(X) & = & & & & & & & n!.a_n & \text{donc} & P^{(n)}(0)=n!.a_n
\end{array}$$

La résultat général est

$$P^{(k)}(0)=k!.a_k$$

On ne le démontre pas par récurrence.
On explique juste qu'à chaque étape des termes s'en vont. Seul le terme constant de $P^{(k)}$ va nous intéresser.
Or, tous les termes de degré plus petit que k ont disparu. Et le terme $a_k.X^k$ a perdu peu à peu son exposant en voyant au contraire se former une factorielle.

On valide donc $P^{(k)}(0)=k!.a_k$ mais aussi aux rangs précédent et suivant$P^{(k-1)}(0)=(k-1)!.a_{k-1}$ et $P^{(k+1)}(0)=(k+1)!.a_{k+1}$:

$$P^{(k+1)}(0).P^{(k-1)}(0)-(P^{(k)}(0))^2=(k+1)!.a_{k+1}.(k-1)!.a_{k-1}-(k!.a_k)^2$$

Esthétiquement, on pourra même factoriser

$$P^{(k+1)}(0).P^{(k-1)}(0)-(P^{(k)}(0))^2=((k-1)!)^2\Big(k.(k+1).a_{k+1}.a_{k-1}-k^2.(a_k)^2\Big)$$

parce que les factorielles sont faites pour être factorisées.

Le final est un raisonnement par l'absurde.

Prenons un polynôme A de la forme « lacunaire » indiquée [2]

$$A(X)=a_n.X^n+\ldots+a_{k+1}.X^{k+1}+0.X^k+a_{k-1}.X^{k-1}+\ldots+a_0$$

et supposons qu'il admet n racines réelles (c'est à dire « toutes ses racines sont réelles »).

Alors, il en est de même pour sa dérivée : toutes les racines de A' sont réelles.
Et en recommençant : toutes les racines de A'' sont réelles.
Et ainsi de suite jusqu'à « toutes les racines de $A^{(k-1)}$ sont réelles ».

Mais alors, on fait jouer à $A^{(k-1)}$ le rôle de Q dans le $I-0$ (si mon indexation n'a pas changé depuis).
On en déduit

$$\frac{A^{(k+1)}(x).A^{(k-1)}(x)-(A^{(k)}(x))^2}{(A^{(k-1)}(x))^2}=\frac{Q''(x).Q(x)-(Q'(x))^2}{(Q(x))^2}<0$$

et en particulier en $x=0$ (qui n'est pas une racine de $A^{(k-1)}$ puisque $A^{(k-1)}(0)=(k-1)!.a_{k-1}$)

$$\frac{(k+1)!.a_{k+1}.(k-1)!.a_{k-1}-(k!.0)^2}{(P^{(k-1)}(x))^2}<0$$

Or, les deux termes a_{k+1} et a_{k-1} sont non nuls, de même signe. Et ceci contredit ce qui est écrit ci dessus (produit strictement négatif).

2. une lacune c'est un trou, il manque ici $a_k.X^k$

On a trouvé une contradiction : il n'était pas possible que toutes les racines de A soient réelles.

Et pour un demi point de plus.
Mais si il y a une racine non réelle, il y a alors aussi son conjugué. Ce qui fait au moins deux racines non réelles.

Pb02 Second théorème sur les polynômes.

On se donne donc un polynôme de degré 4 qu'on écrit $a.X^4 + b.X^3 + c.X^2 + d.X + e$.

On doit calculer P en cinq points pour évaluer $\sum_{k=0}^{4}(-1)^{4-k}.\binom{4}{k}.P(k)$. On notera que n intervient de multiples fois dans la formule, à la fois pour le nombre de termes, pour les coefficients binomiaux et pour le signe qui clignote.

k	clignotant	binomial					
0	1	1					e
1	-1	4	a	$+b$	$+c$	$+d$	$+e$
2	1	6	$16.a$	$+8.b$	$+4.c$	$+2.d$	$+e$
3	-1	4	$81.a$	$+27.b$	$+9.c$	$+3.d$	$+e$
4	1	1	$256.a$	$+64.b$	$+16.c$	$+4.d$	$+e$

$(-4+96-324+256).a$ $\quad$ $(-4+24-36+16).c$ $\quad$ $(1-4+6-4+1).e$

$24.a$ $\quad$ $(-4+48-108+64).b$ $\quad$ $(-4+12-12+4).d$

On confirme qu'il reste exactement $24.a$, et a est bien le coefficient dominant.

Sur cette question :
comprendre le sigma
effectuer proprement les calculs, sans doutes par un tableau plutôt que par des spaghetti qui s'étirent sur plusieurs lignes
Les choses doivent être claires à lire, à corriger en cas d'erreur.

Mais on ne voit pas comment prolonger la méthode à d'autres valeurs de n. Et évidement, la récurrence n'est pas la bonne idée ici.
Pourquoi ?

Mais parce qu'en passant de n à $n+1$, la somme change du tout au tout, avec un terme de plus $\sum_{k=0}^{n+1}$ et aussi avec des coefficients binomiaux qui changent tous, et en plus un nouveau coefficient pour le polynôme.

On va attaquer avec un exemple, avec n égal à 6, mais pas avec de gros calculs comme pour $n = 4$.

On veut écrire

$$\frac{P(X)}{X.(X-1).(X-2).(X-3).(X-4).(X-5).(X-6)} = \frac{\lambda_0}{X} + \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\lambda_2}{X-2} + \frac{\lambda_3}{X-3} + \frac{\lambda_4}{X-4} + \frac{\lambda_5}{X-5} + \frac{\lambda_6}{X-6}$$

et on commence par l'étape d'analyse. On suppose que l'on a bien cette égalité. On va alors calculer les λ_k (et si l'égalité est de la foutaise, on verra bien ; on aura peut être une contradiction ; ou on aura peut être travaillé pour rien).

On multiplie comme proposé par $X-3$ et on simplifie ce qu'on peut

$$\frac{P(X)}{X.(X-1).(X-2).1.(X-4).(X-5).(X-6)}$$
$$= \frac{\lambda_0.(X-3)}{X} + \frac{\lambda_1.(X-3)}{X-1} + \frac{\lambda_2.(X-3)}{X-2} + \lambda_3 + \frac{\lambda_4.(X-3)}{X-4} + \frac{\lambda_5.(X-3)}{X-5} + \frac{\lambda_6.(X-3)}{X-6}$$

Quand on fait tendre X vers 3, il reste peu de choses à droite. Tous les numérateurs s'annulent, et il ne subsiste que $0 + \lambda_3 + 0$.

Ici, l'élève hésite. Aurait il même eu le droite de prendre $X = 3$, dans la mesure où 3 est une valeur interdite dans la formule de départ.
C'est pourquoi ma rédaction propose de faire tendre X vers 3.
Ceci dit, c'est quand même discutable car X est une variable formelle.
Il faudrait
- *soit travailler sur l'espace des fractions rationnelles formelles et substituer 3 dans le rôle de X.*
- *soit travailler sur l'espace des fonctions, et dans ce cas, c'est bien un passage à la limite qui sert.*

Et à gauche, on récupère $\dfrac{P(3)}{3.(3-1).(3-2).1.(3-4).(3-5).(3-6)}$ qu'on peut certes calculer $\dfrac{P(3)}{-36}$. Mais ce serait perdre de vue notre objectif.

On écrit intelligemment la formule obtenue $\boxed{\dfrac{(-1)^3.P(3)}{3!.3!} = \lambda_3}$

Et pour les autres ? On fait la même chose, mais avec X, $X-1$ et ainsi de suite.
En toute généralité, on multiplie par $X-k$ avec k pouvant valoir 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Allez, un tableau encore.

multiplicateur			membre de droite
X	$\dfrac{P(0)}{(-1).(-2).(-3).(-4).(-5).(-6)}$	$\dfrac{P(0)}{0\,!.6\,!}$	$\lambda_0+0+0+0+0+0+0$
$(X-1)$	$\dfrac{P(1)}{1.(-1).(-2).(-3).(-4).(-5)}$	$\dfrac{-P(1)}{1\,!.5\,!}$	$0+\lambda_1+0+0+0+0+0$
$(X-2)$	$\dfrac{P(0)}{2.1.(-1).(-2).(-3).(-4)}$	$\dfrac{P(2)}{2!.4!}$	$0+0+\lambda_2+0+0+0+0$
$(X-3)$	$\dfrac{P(0)}{3.2.1.(-1).(-2).(-3)}$	$\dfrac{-P(3)}{3!.3!}$	$0+0+0+\lambda_3+0+0+0$
$(X-4)$	$\dfrac{P(0)}{4.3.2.1.(-1).(-2)}$	$\dfrac{P(4)}{4!.2!}$	$0+0+0+0+\lambda_4+0+0$
$(X-5)$	$\dfrac{P(0)}{5.4.3.2.1.(-1)}$	$\dfrac{-P(5)}{5!.1!}$	$0+0+0+0+0+\lambda_5+0$
$(X-6)$	$\dfrac{P(0)}{6.5.4.3.2.1}$	$\dfrac{P(6)}{6!.0!}$	$0+0+0+0+0+0+\lambda_6$

Mais a-t-on bien l'égalité demandée ? On ne l'a que pour quelques valeurs de X.

Mais finalement un nombre suffisant de valeurs pour avoir l'égalité partout.

On a parlé avec les polynômes de Tchebychev de « rigidité ».

Si deux polynômes de degré inférieur ou égal à n coïncident en $n+1$ points alors ils sont égaux.

En effet, le polynôme différence a $n+1$ racines au moins, alors que son degré ne dépasse pas n. C'est donc le polynôme nul.

Prenons alors d'un côté $P(X)$ et de l'autre l'affreux produit

$$X.(X-1).(X-2).(X-3).(X-4).(X-5).(X-6).\Big(\frac{\lambda_0}{X}+\frac{\lambda_1}{X-1}+\frac{\lambda_2}{X-2}+\frac{\lambda_3}{X-3}+\frac{\lambda_4}{X-4}+\frac{\lambda_5}{X-5}+\frac{\lambda_6}{X-6}\Big)$$

Ceci est bien un polynôme car tous les dénominateurs se simplifient.

Proprement, c'est même $\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\lambda_k.\frac{X.(X-1).(X-2).(X-3).(X-4).(X-5).(X-6)}{(X-k)}$

et encore mieux $\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\lambda_k.\prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant 6\\ i\neq k}}(X-i)$.

Le choix des λ_k donne bien égalité des fonctions polynômes en 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

On a donc la synthèse :

$$\frac{P(X)}{X.(X-1).(X-2).(X-3).(X-4).(X-5).(X-6)}=\frac{\lambda_0}{X}+\frac{\lambda_1}{X-1}+\frac{\lambda_2}{X-2}+\frac{\lambda_3}{X-3}+\frac{\lambda_4}{X-4}+\frac{\lambda_5}{X-5}+\frac{\lambda_6}{X-6}$$

y compris en variable formelle X.

On nous invite à conclure en regardant le coefficient de X^n de chaque côté
après avoir multiplié par $X.(X-1)\dots(X-6)$.

A gauche, c'est a_6 si on a écrit $P(X)=\displaystyle\sum_{d=0}^{6}a_d.X^d$.

Et à droite, on regarde les sept termes

$\lambda_0.(X-1).(X-2).(X-3).(X-4).(X-5).(X-6)$	$\lambda_1.X.(X-2).(X-3).(X-4).(X-5).(X-6)$
$\lambda_2.X.(X-1).(X-3).(X-4).(X-5).(X-6)$	$\lambda_3.X.(X-1).(X-2).(X-4).(X-5).(X-6)$
$\lambda_4.X.(X-1).(X-2).(X-3).(X-5).(X-6)$	$\lambda_5.X.(X-1).(X-2).(X-3).(X-4).(X-6)$
$\lambda_6.X.(X-1).(X-2).(X-3).(X-4).(X-5)$	

Chacun de ces termes contient un seul X^6. Le total à droite est donc $(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4.\lambda_5+\lambda_6).X^6$.

En égalant de chaque côté (unicité d'écriture sur une base) :

$$a_6 = \frac{P(0)}{0!.6!} - \frac{P(1)}{1!.5!} + \frac{P(2)}{2!.4!} - \frac{P(3)}{3!.3!} + \frac{P(4)}{4!.2!} - \frac{P(5)}{5!.1!} + \frac{P(6)}{6!.0!}$$

Multiplions de chaque côté par 6! et on a nos binomiaux

$\frac{6!}{0!.6!}.P(0)$	$-\frac{6!}{1!.5!}.P(1)$	$+\frac{6!}{2!.4!}.P(2)$	$-\frac{6!}{3!.3!}.P(3)$	$+\frac{6!}{4!.2!}.P(4)$	$-\frac{6!}{5!.1!}.P(5)$	$+\frac{6!}{6!.0!}.P(6)$

Et la généralisation est possible.

On reprend la même idée, avec un polynôme P de degré n et de terme dominant $a_n.X^n$.
On veut écrire $\dfrac{P(X)}{X.(X-1)\dots(X-n)} = \dfrac{\lambda_0}{X} + \dfrac{\lambda_1}{X-1} + \dots + \dfrac{\lambda_n}{X-n}$ et proprement

$$\frac{P(X)}{X.(X-1)\dots(X-n)} = \frac{P(X)}{\prod_{i=0}^{n}(X-i)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda_j}{X-j} = \frac{\lambda_0}{X} + \frac{\lambda_1}{X-1} + \dots + \frac{\lambda_n}{X-n}$$

On commence par se fixer un entier k et on multiplie par $X-k$.

$$\frac{P(X)}{\prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}(X-i)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda_j.(X-k)}{X-j} = \lambda_k + \sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq k}} \frac{\lambda_j.(X-k)}{X-j}$$

On fait tendre X vers k (ou on substitue)

$$\frac{P(k)}{\prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}(k-i)} = \lambda_k + \sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq k}} \frac{\lambda_j.0}{k-j} = \lambda_k$$

On tient la valeur de chaque λ_k : $\dfrac{P(k)}{\Big(\prod_{i=0}^{k-1}(k-i)\Big).\Big(\prod_{i=k+1}^{n}(k-i)\Big)}$.

Dans l'expression $\Big(\prod_{i=0}^{k-1}(k-i)\Big).\Big(\prod_{i=k+1}^{n}(k-i)\Big)$, on reconnaît qu'on a coupé le produit au moment où il fallait sauter au dessus du terme $i=k$.
Mais le premier produit s'écrit même $\Big(\prod_{j=k}^{1} j\Big)$ en posant $j = k-i$ (ou en reconnaissant un produit de k entiers consécutifs).
Et le second produit s'écrit aussi comme produit de $n-k$ entier consécutifs, mais avec des signes moins

$$\Big(\prod_{i=k+1}^{n}(k-i)\Big) = \prod_{j=1}^{n-k}(-j) = (-1)^{n-k}.\prod_{j=1}^{k} j = (-1)^{n-k}.k$$

Bref, avec des mots comme avec de la froide mathématique $\boxed{\lambda_k = \dfrac{P(k)}{(n-k)!.(-1)^{n-k}.k!} = \dfrac{(-1)^{n-k}.P(k)}{(n-k)!.k!}}$

(qui a des problèmes avec $\dfrac{1}{(-1)^{n-k}} = (-1)^{n-k}$ *? Ne me dites pas que vous ne savez pas qu'on a à la fois* $\dfrac{1}{1} = 1$ *et* $\dfrac{1}{-1} = -1$*).*

On multiplie la formule par $\prod_{i=0}^{n}(X-i)$ pour la suite (la synthèse et l'égalisation des termes en X^n)

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k.\frac{X.(X-1)\dots(X-n)}{(X-k)} = \sum_{k=0}^{n} \Big(\lambda_k.\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq k}}(X-j)\Big)$$

Les deux polynômes coïncident en 0, 1 jusqu'à n. La différence a trop de racines, les deux polynômes sont égaux.

Il ne reste qu'à identifier le coefficient de X^n (et d'autres, mais ce n'est pas notre objectif)

$$a_n.X^n + \ldots = \sum_{k=0}^{n} \Big(\lambda_k.(X^n + \ldots +)\Big)$$

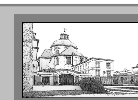
Le coefficient a_n est donc la somme des λ_k. On multiplie par $n!$ puisque c'est demandé

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} n!.\lambda_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!.(n-k)!}.(-1)^{n-k}.P(k)$$

On remplace $\dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$ par sa définition binomiale $\dbinom{n}{k}$ et on a la formule demandée.

Source : oral C.C.I.N.P. mais il y a à peu près trente ans. Peut être que vos parents, tantes, oncles ou ancien prof de lycée ont affronté cet exercice quand vous n'étiez même pas nés.

Pb02 Listes d'entiers.



$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a_0, \ldots a_n) \in ([0,\ n+1] \cap \mathbb{N})^n$ (introduction des variables)
$\Big(\forall p \leqslant n,\ \forall q < p,\ a_p \neq a_q\Big)$ (hypothèse « tous distincts)
$\Rightarrow \Big(\exists p \leqslant n,\ \exists q \leqslant n,\ (p \neq q)\ et\ (\exists r \in \mathbb{N},\ a_q = k.a_p)\Big)$ (l'un divise un autre)

Variante

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a_0, \ldots a_n) \in ([0,\ n+1] \cap \mathbb{N})^n,\ \Big(\forall (p,q),\ (p \neq q) \Rightarrow a_p \neq a_q\Big) \Rightarrow \Big(\exists (p,q),\ p \neq q\ et\ a_p | a_q\Big)$$

On nous donne une liste, on teste déjà si sa longueur est la bonne. En cas d'échec, on sort tout de suite.

On prend ensuite les éléments un par un (boucle impérative) et on regarde si ils sont bien entre `1` et `2*n`.
Si ce n'est pas le cas pour l'un d'entre eux, on sort tout de suite.
Le teste sera donc « plus petit que `1` ou plus grand que `2*n` ».

Sinon, on passe au test « tous distincts ».
On prend les éléments index par index (et même par couples d'index) et on teste si il y a coïncidence.

Si on a `L[p] == L[q]`, on sort tout de suite avec `False`.
Mais on ne peut pas prendre

```
def test(L) : #list of int -> boolean
....if len(L) != n+1 :
........return False
....for e in L :
....if e < 1 or e > 2*n :
........return False
....for p in range(len(L)) :
........for q in range(len(L)) :
............if L[p] == L[q] :
................return False
```

En effet, il y a quand même dans un tel test le moment où `p` est égal à `q`, et où on a forcément `L[p] = L[q]` [3].
On va donc reprendre avec

```
def test(L) : #list of int -> boolean
....if len(L) != n+1 :
........return False
....for e in L :
....if e < 1 or e > 2*n :
........return False
....for p in range(len(L)) :
........for q in range(len(L)) :
............if L[p] == L[q] and p != q :
................return False
....return True
```

```
def test(L) : #list of int -> boolean
....if len(L) != n+1 :
........return False
....for e in L :
....if e < 1 or e > 2*n :
........return False
....for p in range(len(L)) :
........for q in range(p) :
............if L[p] == L[q] and p != q :
................return False
....return True
```

Dans le seconde, on ne parcourt que la moitié du tableau à double entrée, diagonale exclue.

On nous donne une liste. On va faire un parcours de tableau à double entrée p et q dans range(len(L)).
Le test de divisibilité est `(L[q] % L[p]) == 0`.
Mais il ne faut pas oublier d'exclure le cas trivial `p == q`.

```
def exemple(L) : #list of int -> int, int
....for p in range(n+1) :
........for q in range(n+1) :
............if (p != q) and ((L[q] % L[p]) == 0) :
................return p, q #un couple
```

Comme l'exercice non traité ici dit qu'il y a toujours au moins un couple, on ne se préoccupe pas de ce qu'on fait si on sort de la double boucle ; ça n'arrivera pas.

Pour dénombrer les couples, c'est presque pareil, mais sans sortie brutale

```
def compte(L) : #list of int -> int
....c = 0
....for p in range(n+1) :
........for q in range(n+1) :
............if (p != q) and ((L[q] % L[p]) == 0) :
................c += 1 #un couple de plus
....return c
```

Dans

```
def alea( ) : # -> list of int
....for k in range(n+1) :
........if not(randrange(1, 2*n+1) in L) :
............L.append(randrange(1, 2*n+1))
....return L
```

la liste `L` n'a même pas été initialisée.
Ensuite, on appelle `n+1` fois une tentative de complétion de la liste.
On teste bien si on ajoute un élément qui n'existe pas (et encore). Mais si l'élément est déjà dans la liste, on ne fait rien.
Et à la fin, la liste est peut être trop courte.

Il ne faut pas une boucle impérative en `for`, mais une boucle conditionnelle en `while`.
Tant que la longueur de la liste n'est pas la bonne, on complète.

Mais je ne valide pas

```
def alea( ) : # -> list of int
....L = [ ]
....while len(L) < n+1 :
........if not(randrange(1, 2*n+1) in L) :
............L.append(randrange(1, 2*n+1))
....return L
```

En effet, on tire un entier au hasard `randrange(1, 2*n+1)`, et on regarde si il est ou non dans la liste.

3. et il manque la sortie finale par `True` si on a validé tous les test

Et si il n'y est pas... on tire un autre entier au hasard.
Il faut garder le même. Il faut donc tirer un entier, le mettre dans une variable, faire le test et le conserver puisque tout va bien.

```
def alea( ) : # -> list of int
....for k in range(n+1) :
........a = randrange(1, 2*n+1)
........if not(a in L) :
............L.append(a)
....return L
```

J'ai aussi une méthode impérative : je crée une liste des entiers de `1` à `2*n` (la pioche aux cartes) et j'en tire `n+1`, mais sans remise.

```
def alea( ) : # -> list of int
....L = [ ]
....pioche = [k for k in range(1, 2*n+1)] #la liste où on va piocher
....for p in range(n+1) : #on va piocher n+1 fois
........index = randrange(len(pioche)) #un index au hasard dans ce qu'il reste
........a = pioche.pop(index) #on sort l'élément de la pioche
........L.append(a) #on le met dans notre liste
....return L
```

On peut évidemment compacter en

```
def alea( ) : # -> list of int
....L = [ ]
....pioche = list(range(1, 2*n+1)) #la liste où on va piocher
....for p in range(n+1) : #on va piocher n+1 fois
........L.append(pioche.pop(randrange(len(pioche)))) #on sort l'élément de la pioche
....return L
```

Une liste où personne ne divise personne ? Il ne faut pas prendre le `1`, sinon il divise les autres.
Si on prend le `2`, on doit refuser le `4`, le `6`, le `8` et le `10`.
Mais alors pour en avoir cinq il faut prendre `3`, `5`, `7` et `9`. Et `3` va diviser `9`. Raté.

On ne prend donc pas le `2`. Et si on doit prendre un nombre pair, prenons le `4` ou (exclusif) le `8`. Et on a le droit de prendre le `6`.
Ceci nous interdit alors le `3`, mais autorise le `9`.
Finalement, je peux proposer `{5, 6, 7, 8, 9}` Ils sont tous assez grands pour qu'aucun n'en divise un autre.

Vous pouvez avoir d'autres propositions.

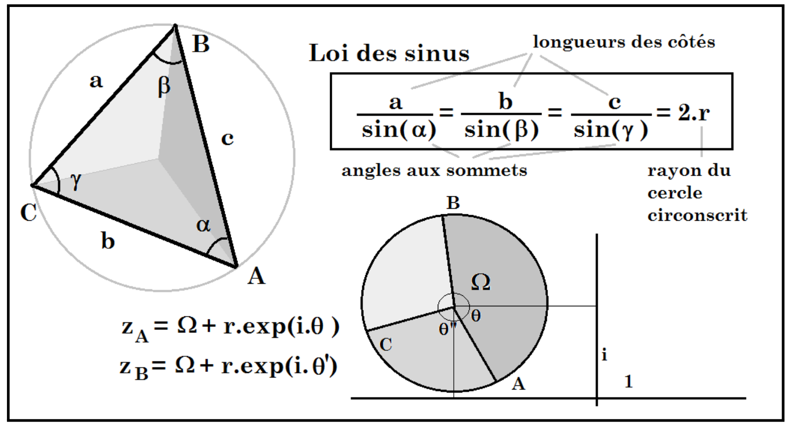
Et pour six entiers de 1 à 12 : `{7, 8, 9, 10, 11, 12}` est une liste parfaite pour la même raison.

Pb02 Loi des sinus.

On va donc faire de la géométrie complexe.
On note Ω l'affixe du centre du cercle circonscrit.
Les trois points A, B et C sont alors sur le cercle de centre Ω et de rayon r par définition même du cercle circonscrit.
Les trois affixes sont donc de la forme $\Omega + r.e^{i.\theta}$. mais pas avec le même argument pour tous. D'où trois affixes, et trois vecteurs utiles

$z_A = \Omega.r.e^{i.\theta}$	$z_B - z_A = r.(e^{i.\theta'} - e^{i.\theta})$
$z_B = \Omega.r.e^{i.\theta'}$	$z_C - z_A = r.(e^{i.\theta''} - e^{i.\theta})$
$z_C = \Omega.r.e^{i.\theta''}$	$z_C - z_B = r.(e^{i.\theta''} - e^{i.\theta'})$

On note déjà que le centre du cercle Ω a disparu. C'est normal, la figure pourrait être centrée sur l'origine après une petite translation, et rien ne changerait.



Passons à la mesure de la longueur. C'est le module du complexe. Pour l'instant, il n'y a rien

$$a = BC = |z_C - z_A| = r.|e^{i.\theta''} - e^{i.\theta'}|$$

Et c'est ensuite qu'il y a la méthode du cours avec arc moitié :

$$e^{i.\theta''} - e^{-i.\theta'} = e^{i.\frac{\theta''+\theta'}{2}}.\left(e^{i.\frac{\theta''+\theta'}{2}} - e^{i.\frac{\theta'+\theta''}{2}}\right)$$

Quand on passe au module, $\left|e^{i.\frac{\theta''+\theta'}{2}}\right|$ vaut 1, et $\left|e^{i.\frac{\theta''+\theta'}{2}} - e^{i.\frac{\theta'+\theta''}{2}}\right|$ est de la forme $|e^{i.\varphi} - e^{-i.\varphi}|$ et donne $|2.i.\sin(\varphi)|$

$$a = BC = |z_C - z_A| = r.|e^{i.\theta''} - e^{i.\theta'}| = r.\left|e^{i.\frac{\theta''+\theta'}{2}}\right|.\left|2.i.\sin\left(\frac{\theta''-\theta'}{2}\right)\right|$$

Et on tient la première formule $a = 2.r.\left|\sin\left(\frac{\theta''-\theta'}{2}\right)\right|$.

Pour $\left|Arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\right| = \left|Arg\left(\frac{e^{i.\theta''} - e^{i.\theta}}{e^{i.\theta'} - e^{i.\theta}}\right)\right|$, on commence par dire que dans $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$, les Ω se simplifient par soustraction, et les r se simplifient par quotient. Ensuite, on passe à l'argument.

Et si on recommençait le coup de l'arc moitié précédé d'une petite factorisation

$$\frac{e^{i.\theta''} - e^{i.\theta}}{e^{i.\theta'} - e^{i.\theta}} = \frac{e^{i.\frac{\theta''+\theta}{2}}.\left(e^{i.\frac{\theta''-\theta}{2}} - e^{i.\frac{\theta-\theta''}{2}}\right)}{e^{i.\frac{\theta'+\theta}{2}}.\left(e^{i.\frac{\theta'-\theta}{2}} - e^{i.\frac{\theta-\theta'}{2}}\right)} = \frac{e^{i.\frac{\theta''+\theta}{2}}}{e^{i.\frac{\theta'+\theta}{2}}}.\frac{2.i.\sin\left(\frac{\theta''-\theta}{2}\right)}{2.i.\sin\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right)}$$

Les 2 et les i se simplifient, le quotient d'exponentielles fusionne

$$\frac{e^{i.\theta''} - e^{i.\theta}}{e^{i.\theta'} - e^{i.\theta}} = e^{i.\frac{\theta''+\theta}{2} - i.\frac{\theta'+\theta}{2}}.\frac{\sin\left(\frac{\theta''-\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right)}$$

Le quotient des deux sinus est un réel. Dans l'argument, il ne comptera pas. Ou alors comme π si ce quotient de sinus est positif.

L'argument est donc celui de la différence « en l'air » : $\frac{\theta''-\theta}{2} - \frac{\theta'-\theta}{2}$, ce qui fait $\frac{\theta''-\theta'}{2}$.

On a donc bien (en fonction du signe du quotient de sinus donc) :

$$Arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\theta''-\theta'}{2}\ [\pi]$$

Mais qui est cet argument, géométriquement . ? C'est l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Avec nos notations, c'est l'angle au sommet en A. C'est celui qu'on note α.

On a donc $\sin(\alpha) = \sin\left(\dfrac{\theta'' - \theta'}{2}\right)$. Au signe près puisqu'il y a un modulo π. Mais si on passe à la valeur absolue, c'est effacé.

On a donc maintenant deux formules : $\sin(\alpha) = \sin\left(\dfrac{\theta'' - \theta'}{2}\right)$ et $a = 2.r.\left|\sin\left(\dfrac{\theta'' - \theta'}{2}\right)\right|$.
On obtient enfin en combinant : $\boxed{a = 2.r.\sin(\alpha)}$

Mais si on refaisait le même calcul avec le sommet B, on a $b = 2.r.\sin(\gamma)$.
Et de même $c = 2.r.\sin(\gamma)$.

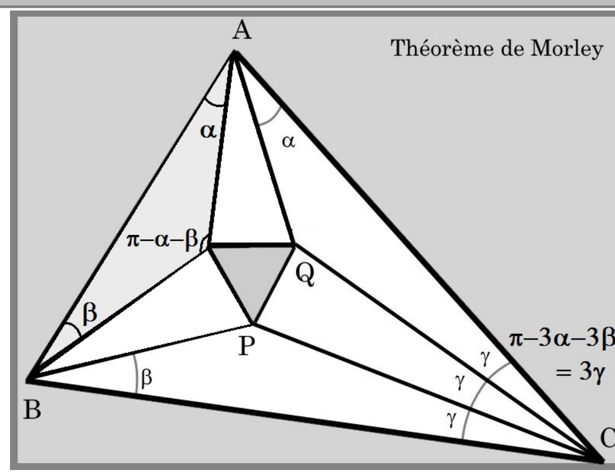
En prenant ces trois formules et en leur demandant « mais que vaut $2.r$? » on trouve bien

$$2.r = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Sinon, il existe des démonstrations où on prouve $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$ *sans passer par* $2.r$ *ni les complexes.*
Mais quand même, c'est un devoir sur les polynômes, les complexes...

La loi des sinus va nous servir plusieurs fois dans la démonstration du théorème de Morley.

Pb02 Un peu de trigonométrie.



Dans le triangle (BRA),l'angle au sommet R est égal à $\pi - \alpha - \beta$ (la somme des angles d'un triangle vaut π).

Son sinus vaut $\sin(\pi - \alpha - \beta)$ et ceci donne bien $\sin(\alpha + \beta)$.

Avez vous besoin de $\sin(\pi - \theta) = \sin(\pi).\cos(\theta) + \cos(\pi).\sin(-\theta)$ pour le dire ?

D'autre part, dans le grand triangle (ABC), l'angle en C vaut à la fois $3.\gamma$ mais aussi $\pi - 3.\alpha - 3.\gamma)$.
De nouveau avec $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$, on obtient $\sin(3.\gamma) = \sin(\pi - 3.\alpha - 3.\beta) = \sin(3.\alpha + 3.\beta)$.

La formule $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$ est dans le cours sur les polynômes de Tchebychev.

On la démontre avec les formules de Moivre
$\cos(3.\theta) = \Re e(e^{3.i\theta}) = \Re e((e^{i.\theta})^3 = \Re e((c + i.s)^3) =.$
$\cos(3.\theta) = \Re e(c^3 + 3.c^2.s.i - 3.c.s^2 - i.s^3) = c^3 - 3.c.s^2 = c^3 - 3.c.(1 - c^2)$ *C'est bon.*
On peut aussi écrire $\cos(3.\theta) = \cos(2.\theta).\cos(\theta) - \sin(2.\theta).\sin(\theta) = (2.\cos^2(\theta) - 1).\cos(\theta) - 2.\cos(\theta).\sin(\theta).\sin(\theta)$
et là encore, on remplace $\sin^2$ *par* $1 - \cos^2$.
On peut aussi écrire $\cos(3.\theta) + \cos(\theta) = 2.\cos\left(\frac{3.\theta - \theta}{2}\right).\cos\left(\frac{3.\theta + \theta}{2}\right) = 2.\cos(\theta).\cos(2.\theta)$. *On remplace* $\cos(2.\theta)$ *par* $2.\cos^2(\theta) - 1$ *et on fait passer* $\cos(\theta)$ *de l'autre côté.*

Cette relation est vraie pour tout θ, on peut donc dériver (la fonction $\theta \longmapsto \cos(3.\theta) - 4.\cos^3(\theta) + 3.\cos(\theta)$ est identiquement nulle, sa dérivée l'est aussi).
On a donc $-3.\sin(3.\theta) = 4.(3.\cos^2(\theta)).(-\sin(\theta) - 3.(-\sin(\theta))$.

Si on se place sur $]0,\ \pi[$, cette relation est vraie, et le sinus est non nul. On divise donc par $\sin(\theta)$ et même par $3.\sin(\theta)$.

On tient donc $\boxed{\forall\theta \in]0,\ \pi[,\ \dfrac{\sin(3.\theta)}{\sin(\theta)} = 4.\cos^2(\theta) - 1}$

On doit comparer à $4.\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right).\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$. Autant développer, sachant $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$$4.\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right).\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=4.\frac{\sqrt{3}.\cos(\theta)-1.\sin(\theta)}{2}.\frac{\sqrt{3}.\cos(\theta)+1.\sin(\theta)}{2}$$

En développant, on a $4.\frac{3.\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)}{4}$ et il suffit de remplacer $\sin^2$ par $1-\cos^2$.

Sinon, il y a aussi une idée un peu longue mais jolie :

$$4.\cos^2(\theta)-1=4.\left(\cos^2(x)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=4.\left(\cos(x)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).\left(\cos(x)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$4.\cos^2(\theta)-1=4.\left(2.\sin\left(\frac{x+\pi/3}{2}\right).\sin\left(\frac{\pi/3-x}{2}\right)\right).\left(2.\cos\left(\frac{x+\pi/3}{2}\right).\cos\left(\frac{\pi/3-x}{2}\right)\right)$$

Il ne reste qu'à rassembler $2.\sin\left(\frac{x+\pi/3}{2}\right)$ *avec* $\cos\left(\frac{x+\pi/3}{2}\right)$ *pour faire revenir* $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Pb02 Théorème de Morley.

Dans le triangle (BRA) la loi des sinus donne

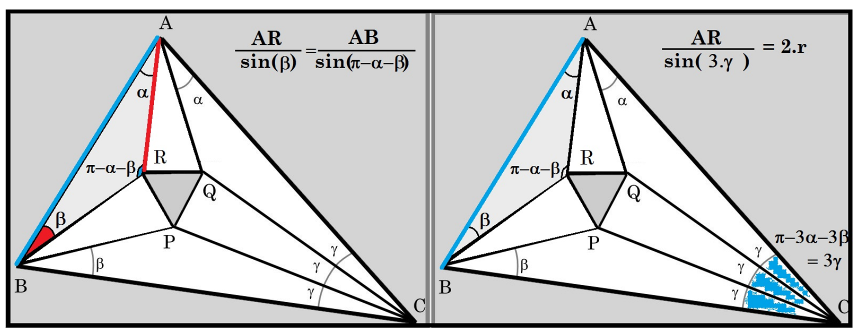
$$\frac{AR}{\sin(\beta)}=\frac{BR}{\sin(\alpha)}=\frac{AB}{\sin(\pi-\alpha-\beta)}=\frac{AB}{\sin(\alpha+\beta)}$$

et on ne fait pas intervenir le rayon de son cercle circonscrit. On isole : $AR=AB.\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Dans le triangle (BCA), la loi donne cette fois en faisant intervenir le rayon r

$$2.r=\frac{AC}{\sin(3.\beta)}=\frac{BC}{\sin(3.\alpha)}=\frac{AB}{\sin(3.\gamma)}=\frac{AB}{\sin(\pi-3.\alpha-3.\beta)}$$

et en ne gardant que les deux extrémités : $AB=2.r.\sin(3.\alpha+3.\beta)$.
Il suffit alors de remplacer AB dans l'expression $AR=AB.\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ pour obtenir effectivement



$$AR=2.r.\sin(3.\alpha+3.\beta).\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Une question de trigonométrie traitée plus haut permet de remplacer ensuite le quotient apparu spontanément $\frac{\sin(3.\alpha+3.\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ par

$$4.\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha-\beta\right).\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha+\beta\right)$$

Mais dans le triangle ABC, on avait $3.\alpha+3.\beta+3.\gamma=\pi$ce qui permet de remplacer $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha-\beta\right)$ par $\sin(\gamma)$.
De même toujours avec $3.\alpha+3.\beta+3.\gamma=\pi$, on a

$$\frac{\pi}{3}+\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}-\gamma=\frac{2.\pi}{3}-\gamma=\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)$$

Quand on passe au sinus, toujours avec $\sin(\pi-\theta)=\sin(\theta)$, on peut écrire $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha+\beta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)$.
Quant aux facteurs 2 et 4 ils fusionnent en un facteur 8. Et on a bien

$$AR=8.r.\sin(\beta).\sin(\gamma).\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)$$

Pour avoir $AQ = 8.r.\sin(\beta).\sin(\gamma).\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)$, on ne recommence pas tout.
On joue sur la symétrie des variables, en faisant tourner notre triangle. Ou plutôt on échange les rôles de B et C, ce qui va transformer R en Q , transformer β en γ et vice versa (en fait, on partirait du triangle (CQA) au lieu de (ARB)). On a bien

$$AQ = 8.r.\sin(\gamma).\sin(\beta).\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)$$

On compare alors les deux formules et on a

$$8.r.\sin(\beta).\sin(\gamma) = \frac{AQ}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)} = \frac{AR}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)}$$

et cette fois encore, on ne gardera qu'une partie de ces égalités qu'on encadrera.

On pourra aussi obtenir

$$8.r.\sin(\alpha).\sin(\beta) = \frac{CQ}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)} = \frac{CP}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$$
$$8.r.\sin(\alpha).\sin(\gamma) = \frac{BR}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)} = \frac{BP}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$$

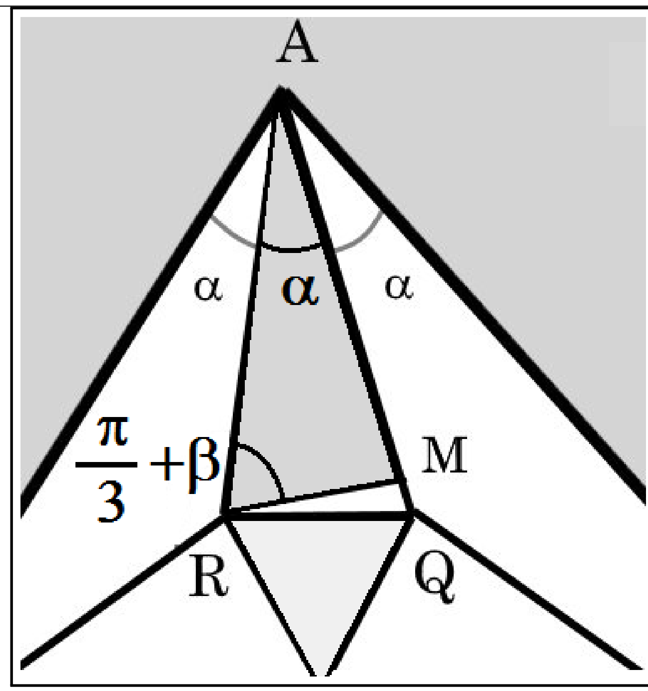
La construction suivante est un peu étrange si on ne lit pas la suite. On construit donc un point M sur la demi droite $[AQ)$, avec une condition d'angle.
Dans le triangle ARM, on connaît alors déjà deux angles : RAM égal à α et MRA égal à $\frac{\pi}{3}+\beta$.
Que reste-t-il pour le dernier angle AMR ? Simplement

$$\pi - \alpha - \left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)$$

Et ceci fait $\frac{2.\pi}{3} - \alpha - \beta$. On remplace encore $\alpha+\beta$ par $\frac{\pi}{3} - \gamma$ et on trouve

$$AMR = \frac{\pi}{3} + \gamma$$

qu'on a déjà croisé tiens.
On va encore utiliser la loi des sinus (dans ce triangle cette fois), sans faire intervenir le rayon du cercle circonscrit :



$$\frac{RM}{\sin(\alpha)} = \frac{AM}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)} = \frac{AR}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)}$$

Ne gardons que la dernière égalité et comparons la avec celle obtenue quelques questions auparavant

$$\frac{AQ}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)} = \frac{AR}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)}$$

.
On obtient $AM = AQ$.

Mais le seul point de la demi-droite $[AQ)$ vérifiant $AM = AQ$ est le point Q ! On a donc $M = Q$.

Et notre dessin est faux. Mais il vaut mieux faire des raisonnements justes sur des figures fausses que des raisonnements faux sur des figures justes

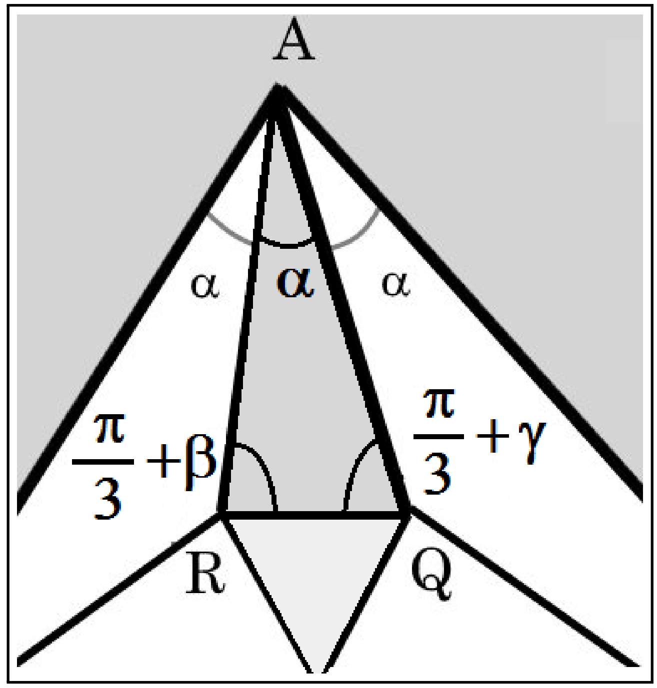
---

Le point M vérifiait $\widehat{MRA} = \dfrac{\pi}{3} + \beta$ par construction. Et comme M est en fait égal à Q, on a donc $\widehat{QRA} = \dfrac{\pi}{3} + \beta$.

Le point M vérifiait $\widehat{AMR} = \dfrac{\pi}{3} + \gamma$ par somme des angles. Et comme M est en fait égal à Q, on a donc $\widehat{AQR} = \dfrac{\pi}{3} + \beta$.

Ne serait il pas temps d'utiliser la loi des sinus dans ce triangle (RAQ) dont on connaît tous les angles ?

$$\frac{RQ}{\sin(\alpha)} = \frac{AQ}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right)} = \frac{AR}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)}$$



On décroise $RQ = \sin(\gamma).\dfrac{AQ}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right)}$.

Or, on a trouvé $AQ = 8.r.\sin(\beta).\sin(\gamma).\sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right)$.

On reporte et il reste bien

$$RQ = \sin(\gamma).8.r.\sin(\beta).\sin(\alpha)$$

Mais par symétrie des rôles on va avoir aussi

$$PQ = \sin(\gamma).8.r.\sin(\beta).\sin(\alpha)$$

(peut être pas avec les sinus dans le même odre à la fin, mais qu'importe).
De même

$$RQ = 8.r.\sin(\alpha).\sin(\beta).\sin(\gamma)$$

Bref, les trois longueurs sont égales. Le triangle est équilatéral.

Il existe une dizaine de démonstrations de ce théorème, dont certaines datant tout juste du début de ce siècle.
Il en existe évidemment une faisant intervenir notre complexe j.

Citation Wikipedia :
Frank Morley (9 septembre 1860 — 17 octobre 1937) est un mathématicien, connu principalement pour son enseignement et pour ses recherches en algèbre et en géométrie. Il a en particulier prouvé le théorème de Morley en géométrie plane.
Il a dirigé plus de cinquante doctorants et il est dit de lui : « [. . .] une des figures les plus marquantes du groupe relativement restreint d'hommes qui a initié ce développement qui, de son vivant, a mené les mathématiques aux États-Unis d'une position mineure à sa place actuelle dans les astres. »
Il est un bon joueur d'échecs et remporte une fois une victoire contre le champion du monde Emanuel Lasker.

Après la découverte de ce théorème par Frank Morley à la fin du XIXe siècle, les collègues de ce dernier trouvaient le résultat si beau qu'ils lui ont donné le nom de « miracle de Morley ».
Comme l'écrit Richard Francis : « Apparemment ignoré par les géomètres antérieurs ou hâtivement abandonné en raison d'incertitudes liées à la trisection et à la constructibilité, le problème n'apparut réellement qu'il y a un siècle. »
Par ailleurs, même si Morley a proposé une solution au problème, la preuve rigoureuse du théorème a été plus tardive.