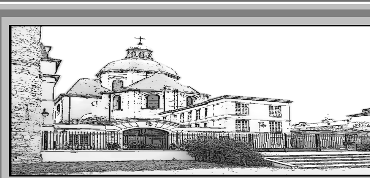
LYCEE CHARLEMAGNE

"Lundi 11" novembre

M.P.S.I.2



2024 2025

TD07

La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = F_1 = 1$ et pour tout n : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

◁0▷ Montrez pour tout n : $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \leqslant F_n \leqslant 2^n$.

Pour n égal à 0 et même à 1 :

$n = 0$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$	$\leqslant 1$	$\leqslant 1 = 2^0$
$n = 1$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{0} = 1$	$\leqslant 1$	$\leqslant 2 = 2^1$

On se donne n et on suppose

rang n	$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$	$\leqslant F_n$	$\leqslant 2^n$
rang $n+1$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$	$\leqslant F_{n+1}$	$\leqslant 2^{n+1}$

On somme :

rang n	$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$	$\leqslant F_n$	$\leqslant 2^n$
rang $n+1$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$	$\leqslant F_{n+1}$	$\leqslant 2^{n+1}$
	$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n}$	$\leqslant F_n + F_{n+1}$	$\leqslant 2^n + 2^{n+1}$

$= 2^n.(1+2) = 3.2^n \leqslant 4.2^n = 2^{n+2}$

A droite, c'est bon, à gauche, on écrit

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.\left(1+\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.\left(\frac{5}{2}\right) \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.\left(\frac{9}{4}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+2-1}$$

La propriété est héréditaire.

Résolvez : F_n est pair d'inconnue entière n.

On regarde la parité de F_n pour les premiers n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
F_n *mod* 2	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1

On devine très vite le motif | 1 | 1 | 0 | ou si vous préférez | impair | impair | pair |

Le mieux est d'énoncer un propriété par groupes de trois | $F_{3.p}$ impair | $F_{3.p+1}$ impair | $F_{3.p+2}$ pair |

La propriété est initialisée pour p égal à 0 (et même1 et 2).

Supposons la propriété vraie au rang p (donc aux rangs $n = 3.p$, $n = 3.p+1$ et $n = 3.p+2$) et calculons au rang $p+1$ (donc aux rangs $n = 3.p$, $n = 3.p+1$ et $n = 3.p+2$).

$n = 3.p$	$n = 3.p+1$	$n = 3.p+2$	hypothèse au rang p		
impair	impair	pair			
	impair + pair $\rightarrow$		impair		
		pair + impair $\rightarrow$		impair	
			impair + impair $\rightarrow$		pair
			impair	impair	pair
conclusion au rang $p+1$			$n = 3.(p+1)$	$n = 3.(p+1)+1$	$n = 3.(p+1)+2$

Pas trop de mots, mais un tableau pour expliquer.
Normalement, on comprend au premier coup d'oeil (c'est des maths).
Mais il n'y a pas de symboles partout ni de long calcul (ce n'estpas de la chimie).

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour tout n : $U_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$. Montrez que (U_n) est une suite géométrique de raison (à gauche) M *(c'est à dire $U_{n+1} = M.U_n$ et déduisez $U_n = M^n.U_0$).*

On multiplie $M.U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n + F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = U_{n+1}$.

C'est uen preuve directe.
Vous apsserez pour un crétin si vous avez titré « je fais une récurrence ».
C'est une formule directe qui SERT ensuite POUR DES RECURRENCES.

Maintenant, on peut faire une récurrence sur n pour prouver : $U_n = M^n.U_0$.
C'est vrai pour n égal à 0.
Supposons le résultat vrai pour n. On calcule alors

$$U_{n+1} = M.U_n, = M.(M^n.U_0) = (M.M^n).U_0 = M^{n+1}.U_0$$

« Monsieur, on fait la récurrence à chaque fois, ou on dit que c'est évident. »
Pas de récurrence.
Vous l'avez faite il y a trois ans.
Et juste un résultat du cours de première : une suite goémétrique caractérisée par $u_{n+1} = m.u_n$ vérifie automatiquement $u_n = m^n.u_0$.
Simplement, ici, on a des éléments dans $M_2(\mathbb{R})$ et pas dans $\mathbb{R}$.
Il faut donc surveiller la non-commutativité.

Montrez : $M^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$ par récurrence sur n *(est ce une convention de poser $M^0 = I_2$ ou bien est ce logique ?).*

Les premières puisssances de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donnent

$M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$M^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

On a initialisé.
Supposons pour un n donné : $M^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$. On calcule alors

$$M^{n+1} = M^n.M = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_{n-1}+F_{n-2} \\ F_n & F_n + F_{n-1} \end{pmatrix}$$

Par propriété de la suite de Léonard : $M^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$.
C'est bien la formule au rang $n+1$.

On rappelle : $\det(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = a.d - b.c$. Montrez pour tout couple de matrces : $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$.

On se donne deux matrices dont on calcule produit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.\alpha + b.\gamma & a.\beta + b.\delta \\ c.\alpha + d.\gamma & c.\beta + d.\delta \end{pmatrix}$$

On compare ensuite $(a.\alpha + b.\gamma).(c.\beta + d.\delta) - (c.\alpha + d.\gamma).(a.\beta + b.\delta)$
et $(a.d - b.c).(\alpha.\delta - \gamma.\beta)$
Il y a égalité.

Déduisez : $F_{n-1}.F_{n+1} - (F_n)^2 = (-1)^{n-1}$ pour tout n. Oui, il s'agit d'utiliser le déterminant !

En mettant en boucle cette propriété, on a $\det(A^n) = (\det(A))^n$ pour tout n *(récurrence sur n en fait).*

En particulier, pour la relation $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$ on obtient $(-1)^n = F_{n-2}.F_n - (F_{n-1})^2$.

Pas de grosse récurrence avec des F_n partout, juste un belle « astuce » matricielle !

Déduisez que le seul facteur commun à F_n et F_{n+1} est 1.

On se donne n. On suppose qu'un entier d divise F_n et F_{n+1}.
Alors d divise aussi $F_n.F_{n+2}$ et $F_{n+1}.F_{n+1}$ (si d divise a, il divise tout multiple de a).
Par addition, d divise $F_n.F_{n+2} - (F_{n-1})^2$ (directement, si d divise a et b il divise toute combinaison $a.u + b.v$).
Mais alors d divise $(-1)^{truc}$.
Il ne peut valoir que 1.

F_n et F_{n+1} sont toujours premiers entre eux.

Sinon, on voit que la formule $F_{n-1}.F_{n+1} - (F_n)^2 = (-1)^{n-1}$ est une identité de Bézout de la forme $a.F_{n+1} - b.F_n = \pm 1$ avec a et b entiers.

◃1▹ Guillaume Deslandes (ex MPSI2, livre chez Ellipses traduit aux presses du MIT) vous a donné des poids *(pardon des masses)* de 100, 300, 900 grammes ainsi que 2,7 et 8,1 kilogrammes. Montrez qu'avec une balance de type Roberval *(deux plateaux)*, vous pouvez peser toute quantité de 0 à 10 kilos *(par tranches de* 100 *grammes)* et même plus.
Prouvez que c'est un système de poids optimal.

◃2▹ T_n est le n^{ieme} polynôme de Tchebychev. Calculez $T_{20}(\sqrt{3}/2)$, $T_{13}(1/2)$ et $T'_{13}(1/2)$.
Résolvez $T_{16}(x) > 1$ d'inconnue réelle x.

Les polynômes de Tchebychev sont caractérisés par $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$.

On a donc très vite $T_{20}\Big(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big) = T_{20}\Big(\cos\Big(\dfrac{\pi}{6}\Big)\Big) = \cos\Big(\dfrac{20.\pi}{6}\Big) = \cos\Big(4.\pi - \dfrac{2.\pi}{3}\Big) = \cos\Big(\dfrac{2.\pi}{3}\Big) = \dfrac{-1}{2}$.

On a aussi $T_{13}\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = T_{13}\Big(\cos\Big(\dfrac{\pi}{3}\Big)\Big) = \cos\Big(\dfrac{13.\pi}{3}\Big) = \cos\Big(4.\pi + \dfrac{\pi}{3}\Big) = \dfrac{1}{2}$.

Pour la dérivation, il faut être vraiment matheux et se préoccuper des variables. On part encore de $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ et on dérive *(avant de donner une valeur à θ)* :

$-\sin(\theta).T'_n(\cos(\theta)) = -n.\sin(n.\theta)$, puis on donne une valeur à θ, en l'occurrence ici $\pi/3$:

$-\sin\Big(\dfrac{\pi}{3}\Big).T'_{13}\Big(\cos\Big(\dfrac{\pi}{3}\Big)\Big) = -13.\sin\Big(\dfrac{13.\pi}{3}\Big)$ donc $\dfrac{\sqrt{3}}{2}.T'_{13}\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = 13.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$: $\boxed{T'_{13}\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = 13}$

J'attends la réponse crétinissime des certains : puisque $T_{13}(1/2)$ est une constante, quand on dérive, on trouve 0. Je me demande ce que ceux là font en sciences. Et j'attends hélas aussi d'autres grosses bêtises des personnes pressées d'écrire des formules sans s'interroger d'abord sur qui sont les variables...

Quand la variable x est entre -1 et 1, on peut l'écrire $x = \cos(\theta)$ et on a $T_n(x) = T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta) \leqslant 1$.
Quand la variable x a dépassé 1, par croissance de T_n *(dont la dérivée ne peut plus s'annuler et changer de signe, elle a eu toutes ses racines entre -1 et 1)*, on a alors $T_n(x) > 1$.
Par parité, pour x plus petit que -1, on a $T_n(x) = T_n(-x) > 1$.

Comme on a étudié tous les cas, on a bien $\boxed{T_{16}(x) > 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty,\ -1[\cup]1,\ +\infty[}$

L'argument est essentiellement visuel sur la forme des polynômes de Tchebychev. On préférera une réponse imparfaite certes avec un petit dessin à la personne qui se lancera dans un long calcul pour expliciter T_{16} et ne pas savoir qu'en faire...

Lycee Charlemagne | MPSI2 | Annee 2023/24

Pafnouti encore

◊ 0 ◊ Montrez l'existence pour tout n de $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos\Big(\dfrac{2.k.\pi}{2.n+1}\Big)}}$ noté S_n. Calculez S_0 et S_1.

L'existence de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos\Big(\dfrac{2.k.\pi}{2.n+1}\Big)}$ ne pose qu'un problème : serait il possible que l'un des $\cos\Big(\dfrac{2.k.\pi}{2.n+1}\Big)$ soit nul.

Ceci revient à dire que $\dfrac{2.k.\pi}{2.n+1}$ s'écrive $\dfrac{2.p+1}{2}.\pi$ *(que de variables entre n, p et k)*. Par produit en croix, ceci revient à demander que $4.k$ soit égal au nombre impair $(2.n+1).(2.p+1)$, ce qui est impossible.

On calcule $\boxed{S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\cos\Big(\dfrac{2.k.\pi}{2.1+1}\Big)} = \frac{1}{\cos\Big(\dfrac{2.1.\pi}{3}\Big)} = -2}$

On ne calcule même pas la somme S_0 ! Elle est vide, et vaut 0.

La somme S_2 est faite de deux termes : $\dfrac{1}{\cos\Big(\dfrac{2.\pi}{5}\Big)}$ et $\dfrac{1}{\cos\Big(\dfrac{4.\pi}{5}\Big)}$. On rappelle $\cos\Big(\dfrac{2.\pi}{5}\Big) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ et on calcule

$\cos\Big(\dfrac{4.\pi}{5}\Big) = 2.\Big(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\Big)^2 - 1 = \dfrac{5+1-2.\sqrt{5}}{8} - 1 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

On passe aux inverses et on somme : $\boxed{\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}-\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}=4.\dfrac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}+1).(\sqrt{5}-1)}=\dfrac{4.2}{5-1}=2}$

On résume :

n	0	1	2
S_n	0	-2	2

On ne voit pas trop quoi déduire pour l'instant.

On traite tout de suite le calcul de $\cos(2.\pi/5)$. On résout l'équation $\cos(3.\theta)=\cos(2.\theta)$ d'inconnue θ de deux façons :

• cas d'égalité des cosinus :

$3.\theta=2.\theta \ mod\ 2.\pi$	$3.\theta=-2.\theta \ mod\ 2.\pi$
$2.k.\pi$ avec k dans $\mathbb{Z}$	$\dfrac{2.p.\pi}{5}$ avec p dans $\mathbb{Z}$

• polynômes de Tchebychev : $4.\cos^3(\theta)-3.\cos(\theta)=2.\cos^2(\theta)-1$
on factorise $4.X^3-2.X^2-3.X+1=(X-1).(4.X^2+2.X-1)$

$\cos(\theta)=1$	$\cos(\theta)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\cos(\theta)=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$
$2.k.\pi$ avec k dans $\mathbb{Z}$	$\varepsilon.Arccos\Big(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\Big)+2.n.\pi$	$\varepsilon.Arccos\Big(\dfrac{-\sqrt{5}-1}{4}\Big)+2.n.\pi$

En revenant à l'inconnue pertinente $\cos(\theta)$, les deux résolutions donnent des solutions à apparier :

$\cos(2.k.\pi)$	$\cos\left(\dfrac{2.\pi}{5}+2.n.\pi\right)$	$\cos\left(\dfrac{4.\pi}{5}+2.n.\pi\right)$
$\cos(\theta)=1$	$\cos(\theta)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\cos(\theta)=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

en tenant compte des signes.

◊ 0 ◊ Sachant $\cos\left(\dfrac{2.\pi}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, calculez S_2.

L'existence de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos\left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)}$ ne pose qu'un problème : serait il possible que l'un des $\cos\left(\dfrac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)$ soit nul.

Ceci revient à dire que $\dfrac{2.k.\pi}{2.n+1}$ s'écrive $\dfrac{2.p+1}{2}.\pi$ *(que de variables entre n, p et k)*. Par produit en croix, ceci revient à demander que $4.k$ soit égal au nombre impair $(2.n+1).(2.p+1)$, ce qui est impossible.

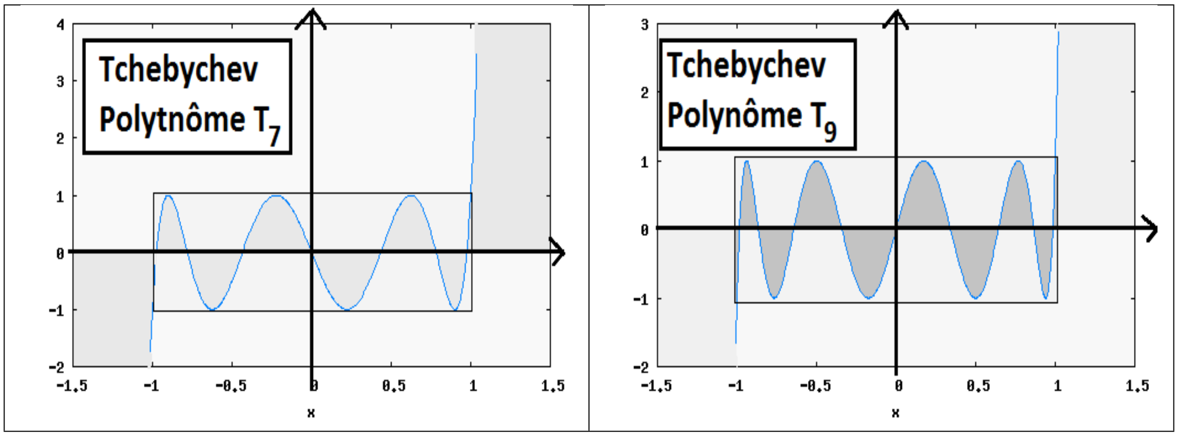
◊ 0 ◊ On introduira le polynôme $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(X-\cos\left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)\right)}$ qu'on notera $P_n(X)$. Pour tout n, on note encore T_n le n^{ieme} polynôme de Tchebychev, toujours caractérisé par $T_n(\cos(\theta))=\cos(n.\theta)$ pour tout angle θ.
Donnez la liste des racines réelles de l'équation $T_{2.n+1}(x)=1$ et de l'équation $T'_{2.n+1}(x)=0$.
◊ 1 ◊ Déduisez : $T_{2.n+1}(X)-1=2^{2.n}.(X-1).(P_n(X))^2$ (polynôme que l'on notera Q_n).
◊ 2 ◊ Calculez $Q_n(0)$ et montrez $Q'_n(0)=(-1)^n.(2.n+1)$.

On se fixe n et on regarde le polynôme $T_{2.n+1}(X)-1$. Il est de degré $2.n+1$.
On ne se contente pas de faire du calcul rapide. On fait des maths, avec des variables.
On résout déjà $T_{2.n+1}(x)-1=0$ sur $[-1,\ 1]$ en posant $x=\cos(\theta)$.
Pour être précise, on pose $\theta=Arccos(x)$, ce qui force θ à être entre 0 et π.
L'équation devient $\begin{array}{rcl}T_{2.n+1}(\cos(\theta)) & = & 1\\ x & = & \cos(\theta)\end{array}$ soit $\begin{array}{rcl}\cos((2.n+1)\theta) & = & \cos(0)\\ x & = & \cos(\theta)\end{array}$.

On trouve $(2.n+1).\theta=0\ mod\ 2.\pi$, ce qui donne $\theta=\dfrac{2.k.\pi}{2.n+1}$ avec k de 0 à n (car on a posé $\theta=Arccos(x)$, ce qui le force à rester entre 0 et π).

On tient $n+1$ racines x entre -1 et 1 : $\boxed{\cos\left(\dfrac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)\text{ avec } k\in\{0,1,\dots n\}}$

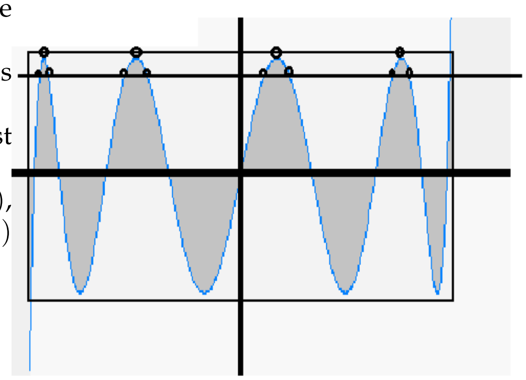
On continue à faire des maths. On a $n+1$ racines pour une équation de degré $2.n+1$. Il en manque encore n. C'est beaucoup !



Faut il les chercher hors de $[-1,\ 1]$?
Si x est plus grand que 1, on a $T_{2.n+1}(x) = ch((2.n+1).Argch(x)) > 1$. Il n'y a pas de nouvelle racine.
Si x est plus petit que -1, on a $T_{2.n+1}(x) = -T_{2.n+1}(-x) < -1$. Il n'y a pas de nouvelle racine non plus.

Il faut les chercher dans $\mathbb{C}$? C'est délicat.
Ou alors il faut faire comme un P.C. : ne même pas voir qu'il y a une difficulté
(le P.S.I. voit qu'il y a une difficulté, mais il est déjà heureux d'avoir $n+1$ racines).

Regardons la suite de l'énoncé, et ayons une idée de la forme des polynômes de Tchebychev.
Les racines que l'on a trouvées sont peut être des racines doubles...
C'est pourquoi on va regarder la dérivée du polynôme, qui est ici $T'_{2.n+1}$ puisque le -1 a une dérivée nulle.
Or, en dérivant la formule $T_{2.n+1}(\cos(\theta)) = \cos((2.n+1).\theta)$, on trouve $\sin(\theta).T'_{2.n+1}(\cos(\theta)) = (2.n+1).\sin((2.n+1).\theta)$ (c'est par rapport à θ qu'on a dérivé).
On divise et on évite à θ les multiples de π :



Quatre racines doubles

$$T'_{2.n+1}(\cos(\theta))(2.n+1).\frac{\sin((2.n+1).\theta)}{\sin(\theta)}$$

On pose $\theta = Arccos(x)$ et on travaille sur $]0,\ \pi[$. Pour θ de la forme $\dfrac{p.\pi}{2.n+1}$ avec p de 1 à $2.n$, on a $2.n$ angles, puis $2.n$ réels de $[-1,\ 1]$.

On a la liste des $2.n$ racines du polynôme $T'_{2.n+1}$ *(qui ne peut pas en avoir plus)* : les $\boxed{\cos\left(\dfrac{p.\pi}{2.n+1}\right)}$

On résume entre -1 et 1

racines de $T_{2n+1}(x)-1$	$\cos(\frac{0.\pi}{2n+1}) = 1$		$\cos(\frac{2.\pi}{2n+1})$		
racines de $T'_{2n+1}(x)$		$\cos(\frac{\pi}{2n+1})$	$\cos(\frac{2.\pi}{2n+1})$	$\cos(\frac{3.\pi}{2n+1})$	
racines de $T_{2n+1}(x)-1$	$\cos(\frac{4.\pi}{2n+1})$		$\cos(\frac{6.\pi}{2n+1})$		...
racines de $T'_{2n+1}(x)$	$\cos(\frac{4.\pi}{2n+1})$	$\cos(\frac{5.\pi}{2n+1})$	$\cos(\frac{6.\pi}{2n+1})$	$\cos(\frac{7.\pi}{2.n+1})$	

Le polynôme $T_{2.n+1}(X)-1$ a une racine simple, suivie de n racines doubles.
Le polynôme $(T_{2.n+1}(X)-1)'$ a $2.n$ racines simples.
On a toutes leurs racines, et elles sont réelles.

On a les racines du polynôme $T_{2.n+1}-1$. On le factorise :

$$T_{2.n+1}(X)-1 = \mu.(X-1).\prod_{k=1}^{n}\left(X-\cos\left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)\right)^2$$

car 1 est racine simple, et les autres doubles *(le degré est cohérent)*.
Le nombre μ est le coefficient dominant.
Or, on sait que T_n commence par $2^{n-1}.X^n$.

On déduit que T_n commence par $2^{2.n+1-1}.X^{2.n+1}$:

$$\boxed{T_{2.n+1}(X)-1=2^{2.n}.(X-1).\prod_{k=1}^{n}\left(X-\cos\left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)\right)^2}$$

On calcule $Q_n(0)=T_{2.n+1}(0)-1=-2^{2.n}.\prod_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)\right)^2$.
Il est plus facile d'aller chercher le premier :

$$\boxed{T_{2.n+1}(0)-1=T_{2.n+1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-1=\cos\left(\frac{2.n+1}{2}.\pi\right)-1=-1}$$

On calcule aussi $Q_n'(0)=T_{2.n+1}'(0)$ et on ne se risque même pas avec le membre

$$2^{2.n}.(X-1).\prod_{k=1}^{n}\left(X-\cos\left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)\right)^2$$

qui contient beaucoup de termes à la dérivation.
On rappelle ensuite ce qu'on a déjà écrit : $T_{2.n+1}'(\cos(\theta))=(2.n+1).\frac{\sin((2.n+1).\theta)}{\sin(\theta)}$. On applique en $\pi/2$:

$$T_{2.n+1}'(0)=(2.n+1).\frac{\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.\pi\right)}{\sin(\pi/2)}$$

et on exploite la semi périodicité du sinus : $\sin(n.\pi+\theta)=(-1)^n.\sin(\theta)$, donc $\sin\left(\frac{2.n+1}{2}.\pi\right)=(-1)^n.\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n$.

On résume : $\boxed{Q_n'(0)=T_{2.n+1}'(0)=(2.n+1).\frac{(-1)^n}{1}}$

Je rappelle qu'il est correct d'écrire $\sin(n.\pi+\theta)=\sin(n.\pi).\cos(\theta)+\cos(n.\pi).\sin(\theta)=0+(-1)^n.\sin(\theta)$.
Mais qu'est ce que c'est ridicule et lourd. C'est prouver noir sur blanc qu'on a encore besoin de petites roues pour faire du vélo. C'est aussi idiot que de prendre sa calculatrice pour calculer $17+5$.
Mais je dirai à votre décharge qu'on ne vous a jusqu'à présent pas ouvert l'esprit et tout transformée en calculs idiots, bourrins et lourdingues, au lieu de vous faire visualiser les choses. Vivement qu'on fasse des maths au collège et au lycée...

◊ 0 ◊ Montrez que si H est un polynôme factorisé sous les deux formes $H(X)=a_d.\prod_{k=1}^{d}(X-r_k)=\sum_{p=0}^{q}a_p.X^p$, alors on a $\frac{H'(X)}{H(X)}=\sum_{k=0}^{d}\frac{1}{X-r_k}$ et $\frac{H'(0)}{H(0)}=\frac{a_1}{a_0}$ (en supposant que 0 n'est pas racine de H).
◊ 1 ◊ Calculez S_n pour tout n.

On part de la formule $H(X)=a_d.\prod_{k=1}^{d}(X-r_k)$ *(ici, le polynôme est de degré d et de terme dominant* $a_d.X^d$*)*. On dérive, en généralisant la formule

$$(u.v)'=u'.v+u.v'$$

$(u.v.w)'=u'.v.w+u.v'.w+u.v.w'$ et même $\left(\prod_{k=1}^{d}u_k\right)'=\sum_{i=1}^{n}(u_i)'.\left(\prod_{\substack{k\leqslant d\\k\neq i}}u_k\right)$ si on veut être rigoureux.

Remarque : si vous ne comprenez pas après un trimestre que $\left(\prod_{k=1}^{d}u_k\right)'=\sum_{i=1}^{n}(u_i)'.\left(\prod_{\substack{k\leqslant d\\k\neq i}}u_k\right)$ *est la généralisation de* $(u.v.w)'=u'.v.w+u.v'.w+u.v.w'$*, est il prudent d'envisager MP ?*

Ici, chaque $(X-r)$ se dérive en 1 : $H'(X)=a_d.\sum_{i=1}^{d}\prod_{\substack{k\leqslant d\\k\neq i}}(X-r_k)$, et en version malpropre :

$$H'(X)=a_d.(X-r_2).(X-r_3)\dots(X-r_d)+a_d.(X-r_1).(X-r_3)\dots(X-r_d)+a_d.(X-r_1)\dots(X-r_{d-1})$$

Et en version avec des mots : d termes où à chaque fois, il manque un facteur du produit.
On divise par le produit où tout le monde est là :

$$\frac{H'(X)}{H(X)} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\prod_{\substack{k\leqslant d\\ k\neq i}}(X-r_k)}{\prod_{k\leqslant d}(X-r_k)} = \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{X-r_i}$$

puisque à chaque fois, il manque un terme entre numérateur et dénominateur.

Maintenant, il y a une idée de physicien qui est jolie :[1]

$$\ln(H(X)) = \ln(a_k) + \sum_{k=1}^{d} \ln(X-r_k)$$

car le logarithme du produit est la somme des logarithmes.

Il ne reste plus qu'à dériver : $\dfrac{H'(X)}{H(X)} = 0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \frac{1}{X-r_k}$.

C'est facile à voir et à retenir.

Mais c'est discutable. En effet, pour parler de logarithme, il faut être sur un intervalle inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$. La formule n'est donc démontrable que "zone par zone". Mais cette méthode a l'avantage de faire comprendre.

Sinon, si on est niveau "*je débute dans le post-bac*", on écrit pour quatre termes :

$$H(X) = a_4.(X-a_1).(X-a_2).(X-a_3).(X-a_4)$$

et on dérive :

$$H'(X) = \begin{array}{ccc} a_4.(X-a_2).(X-a_3).(X-a_4) & + & a_4.(X-a_1).(X-a_3).(X-a_4) \\ +a_4.(X-a_1).(X-a_2).(X-a_4) & + & a_4.(X-a_1).(X-a_2).(X-a_3) \end{array}$$

il ne reste plus qu'à diviser.

On repart de la forme développée : $H(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} a_k.X^k$ *(de terme dominant $a_d.X^d$)*.

On calcule en 0 : $H(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} a_k.0^k = a_0$ *(si si, le terme 0^0 reste et il vaut 1 ; mais il y a des crétins qui face à un polynôme sous forme $\sum_k a_k.X^k$ se disent qu'en 0 ça vaut 0, juste parce qu'ils obéissent aux calculs sans réfléchir et avec le nez collé à la feuille par le poids d'une formation débilitante)*.

On dérive : $H'(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{q} a_k.k.X^{k-1}$ (le terme en X^0 a une dérivée nulle).

On calcule en 0 : $H'(0) = a_1$.

Malproprement : $\begin{array}{ccccccc} H(X) & = & a_d.X^d & + & \dots & +a_2.X^2 & +a_1.X & +a_0 \\ H'(X) & = & d.a_d.X^{d-1} & + & \dots & +2.a_2.X & +a_1 & \end{array}$, puis $\begin{array}{ccc} H(X) & = & a_0 \\ H'(X) & = & a_1 \end{array}$.

On divise : $\boxed{\dfrac{H'(0)}{H(0} = \dfrac{a_1}{a_0} \text{ mais aussi } \dfrac{H'(0)}{H(0)} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{r_i}}$

C'est une de nos formules de Viète, déjà croisées :

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = \frac{a_2.a_3.a_4 + a_1.a_3.a_4 + a_1.a_2.a_4 + a_1.a_2.a_3}{a_1.a_2.a_3.a_4} = -\frac{coefficient\ de\ X}{coefficient\ constant} = -\frac{P'(0)}{P(0)}$$

On a établi un résultat sur $H'(0)/H(0)$ pour tout polynôme H. Et on a des polynômes comme T_n, $Q_n$et P_n.

Par exemple : $Q_n(X) = 2^{2.n}.(X-1).(P_n(X))^2$ se dérive en

$$Q_n'(0X) = 2^{2.n}.(P_n(X))^2 + 2^{2.n}.(X-1).2.P_n(X).P_n'(X)$$

On divise : $\dfrac{Q_n'(X)}{Q_n(X)} = \dfrac{1}{X-1} + 2.\dfrac{P_n'(X)}{P_n(X)}$. En 0 : $\dfrac{Q_n'(0)}{Q_n(0)} = -1 + 2.\dfrac{P_n'(0)}{P_n(0)}$.

Comme on les a calculés : $Q_n(0) = -1$ et $Q_n'(0) = (-1)^n.(2.n+1)$.

1. n'allez pas dire à Solène que j'ai dit du bien des idées des physiciens...

On résume : $(-1)^n.(2.n+1) = 1 - 2.\dfrac{P'(0}{P(0)}$.

Mais le polynôme P_n a pour racines les $\cos\left(\dfrac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)$.

Pour lui, la formule $\dfrac{H'(0)}{H(0)} = -\sum_{i=1}^{d} \dfrac{1}{r_i}$ donne

$$-\frac{P_n(0)}{P_n(0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos\left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)} = S_n$$

On a donc $(-1)^n.(2.n+1) = 1 - 2.S_n$.

On isole : $\boxed{S_n = \dfrac{1+(-1)^{n+1}.(2.n+1)}{2}}$

n pair	n impair
n	$-n-1$

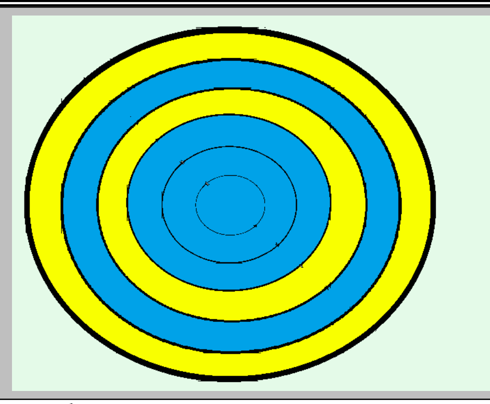
: | 0 | -2 | 2 | -4 |
|---|---|---|---|

◇ 0 ◇ Ah oui, j'ai écrit "sachant $\cos\left(\dfrac{2.\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$" ; beh on va dire que je ne le sais pas. Alors montrez le, en résolvant $\cos(2.\theta) = \cos(3.\theta)$ d'inconnue θ.

Origine : Crux mathematicorum, de la Canadian Mathematical Society.

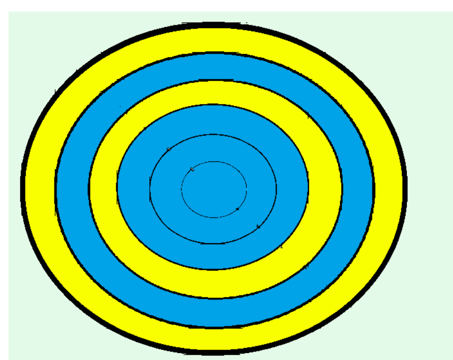
♣ Il fallait découper le gâteau *(ci contre vu du dessus)* en deux parts égales. Au lieu d'effectuer une découpe "en argument", on a effectué une découpe "en module". Sur le schéma, on a des cercles concentriques de rayons entiers 1 à 6. Montrez que les deux parts colorées sont égales.

◃3▹ Re-répartissez ce découpage en deux parts égales.



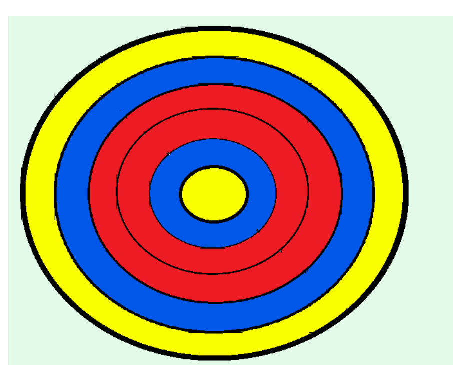
On a un disque qu'on découpe en couronnes successives. Les rayons vont de r à $6.r$.
Le r^{ieme} disque a pour aire $\pi.k^2.r^2$. La r^{ieme} couronne a donc pour aire $\pi.k^2.r^2 - \pi.(k-1)^2.r^2$ c'est à dire $(2.k-1).\pi.r^2$.

numéro de la couronne	1	2	3	4	5	6	
aire	$1.\pi.r^2$	$3.\pi.r^2$	$5.\pi.r^2$	$7.\pi.r^2$	$9.\pi.r^2$	$11.\pi.r^2$	
jaune				$7.\pi.r^2$		$11.\pi.r^2$	$(11+7)$
bleu	$1.\pi.r^2$	$3.\pi.r^2$	$5.\pi.r^2$		$9.\pi.r^2$		$(1+3+5+9)$



Les deux protagonistes ont droit à $18.\pi.r^2$.

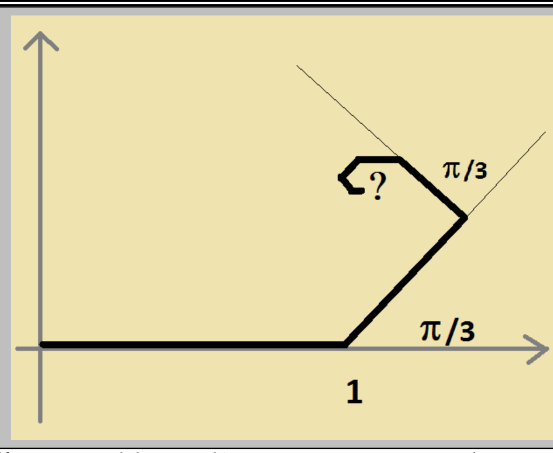
numéro de la couronne	1	2	3	4	5	6	
aire	$1.\pi.r^2$	$3.\pi.r^2$	$5.\pi.r^2$	$7.\pi.r^2$	$9.\pi.r^2$	$11.\pi.r^2$	
jaune	$1.\pi.r^2$					$11.\pi.r^2$	12
bleu		$3.\pi.r^2$			$9.\pi.r^2$		12
rouge			$5.\pi.r^2$	$7.\pi.r^2$			12



Chacun a un tiers de la surface totale. la clef étant dans $1+11=3+9=5+7$.

On part de l'origine. On avance de une unité dans la direction du demi-axe réel positif. On tourne de $\pi/3$. On avance d'une demi unité. On tourne de $\pi/3$. On avance d'un quart d'unité. On tourne de $\pi/3$. On avance d'un huitième d'unité. On tourne de $\pi/3$. On avance d'un seizième d'unité. A chaque fois, on tourne du même angle $\pi/3$, et on divise la distance par 2. Vers quel point se dirige-t-on ?
En gardant le même angle $\pi/3$ mais en remplaçant le rapport $1/2$ par un autre rapport r, est il possible de converger vers le point d'affixe i ?
C'est un exercice très simple sur la série géométrique..

◁4▷ Écrivez un script **Python** avec module **turtle**.



En regardant chaque déplacement comme un changement d'affixe par addition d'un terme contenant direction et norme, on peut suivre à la trace le point.
Partant de $z=0$, on avance à chaque fois de 2^{-n} en ayant tourné de $\dfrac{n.\pi}{3}$ au total.

On a donc $z_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}.e^{i.n.\pi/3}$.
On a une série géométrique de raison autre que 1.

La somme vaut $\dfrac{1-\dfrac{e^{i.(n+1).\pi/3}}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{e^{i.\pi/3}}{2}}$.

On converge vers le point d'affixe $\dfrac{2}{2-e^{i.\pi/3}}$. Tous calculs faits : $\boxed{1+\dfrac{i}{\sqrt{3}}}$ oui, au dessus du point I (même abscisse[2])

Avec un autre rapport, la somme devient $\dfrac{1-r^{n+1}.e^{i.(n+1).\pi/3}}{1-r.e^{i.\pi/3}}$ et elle converge vers $\dfrac{1}{1-r.e^{i.\pi/3}}$.
Même en y mettant de la bonne volonté, on n'obtient pas i.
Mais en jouant sur la longueur du premier pas, le rapport et/ou l'angle, on peut tout viser...

```
angle, facteur = 30, 0.5
longueur = 200

from turtle import *

T = Turtle()
for k in range(20) :
....forward(longueur)
....left(angle)
....longueur *= facteur
```

Petit problème : mon correcteur orthographique ne connaît pas le mot turtle (normal, c'est de l'anglais). Mais de là à ce qu'il me propose en remplacement le mot « turlute »...
Rappel : la turlute est le cri de l'alouette, un équipement pour la pêche et également une façon de chanter (québécoise) par onomatopées, proche du beat-box finalement.

◁5▷ Comment s'appelle un anneau $(A,\oplus,\otimes)$ vérifiant $\forall(a,\ b)\in A^2,\ a\otimes b=0 \Leftrightarrow (a=0\ et\ b=0)$?

Un anneau intègre ? Sauf que intègre c'est $\forall(a,\ b)\in A^2,\ a\otimes b=0 \Leftrightarrow (a=0\ ou\ b=0)$.
Ici, les deux sont nuls. C'est louche.

L'anneau peut il contenir autre chose que l'élément nul (neutre de la première loi) ?

2. pardon ! même partie réelle

On prend un élément a quelconque. Les résultats classiques dans un anneau donnent alors $a \otimes 0 = 0$.
En appliquant alors la quantification au couple $(a,\ 0)$, on a $a \otimes b = 0 \Leftrightarrow (a = 0\ et\ 0 = 0)$.
L'essentiel est $a = 0$.
L'anneau est réduit au seule élément nul de sa première loi.
Et est ce bien un anneau : $(\{0\}, \oplus, \otimes)$?

◁6▷ Un élève s'est trompé et a écrit la définition suivante pour un anneau intègre $(A, +, \times)$:
$\boxed{\forall (a,\ b) \in A^2,\ (a \times b = 0) \Rightarrow (a = 0\ et\ b = 0)}$ Trouvez l'erreur et montrez qu'un seul anneau vérifie ceci.

Normalement : $\boxed{\forall (a,\ b) \in A^2,\ (a \times b = 0) \Rightarrow (a = 0\ ou\ b = 0)}$
Ici, dès qu'un produit est nul, les deux facteurs le sont.
Dans un anneau, le neutre de la première loi (noté 0) est absorbant pour la seconde.
On a donc $0.a = 0$ pour tout a.
Et avec notre propriété, ceci donne $0 = 0$ et $a = 0$.
Le seule élément de l'anneau est donc le neutre additif 0.
C'est l'anneau $(\{0\},\ +,\ \times)$.[3]

◁7▷ Un élève a affirmé : "*dans l'anneau $(A, +, .)$ l'élément a est absorbant pour la seconde loi, c'est donc le neutre de la première*". A-t-il inventé une réciproque farfelue ?

Le cours démontre en effet que dans un anneau $(A, +, .)$, le neutre de la première loi (noté 0) est absorbant pour la deuxième.
Preuve : a donné quelconque, on va prouver $0.a = 0$, même si ça vous semble normal[a]
on écrit $0.a = (0 + 0).a$ car 0 est neutre additif
on développe : $O.a + O.a = 0.a$
on ajoute l'opposé de $0.a$ de chaque côté , qu'on va noter opp : $(O.a + O.a) + opp = 0.a + opp$
on simplifie en profitant de l'associativité $O.a = 0$
car dans le second membre, il ne reste bien que 0

a. mais si c'est normal pour un anneau tel que $(\mathbb{R}, +, .)$, l'est ce encore pour un anneau tel que $(P(\mathbb{N}), \Delta, \cap)$?

Mais la nouvelle question est « peut il exister un autre élément que 0 qui soit absorbant pour la seconde loi (disons α) ?
On a juste à le tester face à 0 puisque chacun est absorbant : $0.\alpha = 0$ car 0 est absorbant (voir ci-dessus)
$0.\alpha = \alpha$ car α est absorbant (hypothèse)

Zéro difficulté, zéro connaissance,
mais des raisonnements à bâtir, sans taper sur des hypothèses, sans écrire des formules avec des variables partout qui ne servent à rien.
La fausse piste consiste en effet à écrire les hypothèses : $\forall a,\ a.\alpha = \alpha$ et $\forall a,\ a.0 = 0$ et à taper dessus avec un a qui ne sert à rien, et dont on se débarrasse sans trop savoir comment.
Prendre l'initiative de dire »je vais prendre $a = 0$ dans la première et $a = \alpha$ dans la seconde est le début de l'intelligence face à la force brute du tapeur sur les formules. Et mine de rien, c'est ce qui distingue le matheux du reste de la presque humanité présente en Prépas.

◁8▷ Résolvez $X^2 + 23.X + 24 = 0$ dans l'ensemble range(39) pour l'addition et la multiplication modulo 39

Pour résoudre $X^2 + 23.X + 24 = 0$ d'inconnue X, on calcule le discriminant : $\Delta = 23^2 - 4.24 = 433$. On réduit modulo 39 : 4 car $39 \times 11 = 429$.
On extrait une racine carrée, c'est ici facile : $\delta = 2$.
On a deux racines : $(-23 + 2).2^{-1}$ et $(-23 - 2).2^{-1}$.

Qui est l'inverse de 2 ? C'est 20 car $2.20 = 40 = 1$.

Mais en fait, plus rapidement : $-23 = 16$. On effectue : $(16 + 2).2^{-1}$ et $(16 - 2).2^{-1}$: $\boxed{S = \{7,\ 9\}}$

Remarque : *On peut aussi dire « on propose 7 et 9, elles conviennent, et l'équation n'a que deux racines.*

Mais en fait, c'est plus subtil.
Car 39 n'est pas premier.

3. c'est l'addition et la multiplication modulo 1

La factorisation initiale est $X^2+23.X+24 = X^2-16.X+24$
$X^2+23.X+24 = (X-8)^2-64+24$
$X^2+23.X+24 = (X-8)^2-40$
$X^2+23.X+24 = (X-8)^2-1$
$X^2+23.X+24 = (X-8)^2-1^2$
$X^2+23.X+24 = (X-8-1).(X-8+1)$
$X^2+23.X+24 = (X-9).(X-7)$
On a donc deux solutions : 9 et 7.
Et c'est tout...

Non, ce n'est pas tout.
L'anneau n'est pas intègre.
Un produit de facteurs est nul si l'un des facteurs est nul.
Mais aussi si l'un vaut 3 et l'autre 13
si l'un vaut 6 et l'autre 13
si l'un vaut 9 et l'autre 13
si l'un vaut 3 et l'autre 26
Il y a peut être d'autres racines, qu'on obtient en résolvant de multiples systèmes comme « $(x-9) = 13$ et $(x-7)=6$ ».
Et on détecte d'autres solutions : 7,9, 22 et 33.

C'est aussi dû au fait que Δ (égal rappelons le à 4) avait plusieurs racines carrées : 2, 11, 28 et 37 !

◃9▹ L'ensemble des quaternions de Hamilton contient non seulement 1 et i mais aussi j (un autre que $e^{i.2.\pi/3}$) et k, vérifiant $i^2=j^2=k^2=-1$ mais aussi $i.j=k$ mais même $j.i=-k$. Et aussi $j.k=i$ et $k.j=-i$. Et enfin $k.i=j$ et $i.k=-j$.
La mutliplication (dont on admettra l'associativité) n'est plus commutative. Sinon, tout va presque bien pour les calculs, on distribue, on fait passer les réels comme on veut. Par exemple

$$(1+i-j+2.k).(2+i-k) = (2+i-k)+i.(2+i-k)-j.(2+i-k)+2.k.(2+i-k)$$

$$(1+i-j+2.k).(2+i-k) = (2+i-k)+(2.i-1+j)+(-2.j+k+i)+(4.k+2.j+2)$$
$$(1+i-j+2.k).(2+i-k) = 3+4.i+j+4.k$$

Calculez pour vérifier $(2+i-k).(1+i-j+2.k)$. Vérifiez que ces deux quaternions ont quand même le même module, égal au produit des modules (le module de $a+b.i+c.j+d.k$ est $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$).♣ Résolvez $i.z=z.i$ d'inconnue z dans $\mathbb{H}$.
Résolvez $i.z=z.j$ d'inconnue z dans $\mathbb{H}$.
Montrez que dans $\mathbb{H}$ les six quaternions i, $-i$, j, $-j$, k et $-k$ sont racines du polynôme X^2+1.
Montrez que ce sont les seules *(indication : on rappelle que le module d'un quaternion $a+b.i+c.j+d.k$ est $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ et qu'on a $|z^2|=|z|^2$).*
Quelles factorisations sont correctes :

$X^2+1=(X+i).(X-i)$	$X^2+1=(X-i).(X-j)$
$X^2+1=(X-i).(X+i)$	$X^2+1=(X+i).(X-i).(X+j).(X-j).(X+k).(X-k)$

Vérifiez que $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ est un groupe commutatif pour la multiplication.

On pose $z=a+i.b+j.c+k.d$ avec a, b, c et d réels.
On multiplie :

$i.z=i.(a+i.b+j.c+k.d)$	$z.i=(a+i.b+j.c+k.d).i$
$i.z=i.a-b+k.c-j.d)$	$z.i=a.i-b-k.c+j.d$

On identifie, et on trouve les complexes $a+i.b$ (partie en j et en k nulles).
Si la multiplication avait été commutative, on aurait trouvé $S=\mathbb{H}$. Ce n'est pas le cas.

On multiplie :

$i.z=i.(a+i.b+j.c+k.d)$	$z.j=(a+i.b+j.c+k.d).j$
$i.z=i.a-b+k.c-j.d)$	$z.j=j.a+b.k-c-i.d$

On identifie, on résout... $a=-d$ et $b=c$.
On a les quaternions de la forme $a.(1-k)+b.(i+j)$.
Rappel : On écrit $a.i$ ou $i.a$ c'est pareil. Car les réels commutent avec tout.
Mais on ne confond pas $a.i.j$ et $j.i.a$.

On a bien $i^2=-1$, $j^2=-1$ et $k^2=-1$ puis aussi $(ia)^2=(-j)^2=(-k)^2=-1$.

Mais le polynôme X^2+1 pourrait il avoir d'autres racines $a+b.i+c.j+d.k$.
On peut certes élever au carré et identifier : $a^2-b^2-c^2-d^2=-1$, $a.b+\ldots=0$ et ainsi de suite.

$X^2+1=(X+i).(X-i)$	Vrai	$X^2+1=(X-i).(X-j)$	Faux
$X^2+1=(X-i).(X+i)$	Vrai	$X^2+1=(X+i).(X-i).(X+j).(X-j).(X+k).(X-k)$	Faux

Il suffit de développer : $(X+i).(X-i)=X^2+i.X-i.X+(-i).i$ en prenant garde au fait que la multiplication n'est pas commutative.
Ensuite, X est un objet formel, donc $i.X$ et $X.i$, ce sera pareil.
Mais quand on va donner à X une valeur telle que j, ce ne sera plus le cas.
Donc, prudence.

Sinon, le terme constant de $(X-i).(X-j)$ n'est pas bon.
Et le degré du dernier est une absurdité.

Dans un anneau non commutatif, les polynômes ne se factorisent plus en fonction de leurs racines, d'ailleurs, ils peuvent en avoir plus que leur degré...

La loi est interne sur l'ensemble à huit éléments.

Le plus simple est de donner le tableau complet :

	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	-k	k	j	-j
-i	-i	i	1	-1	k	-k	-j	j
j	j	-j	k	-k	-1	1	-i	i
-j	-j	-j	-k	k	1	-1	i	-i
k	k	-k	-j	j	i	-i	-1	1
-k	-k	k	j	-j	-i	i	1	-1

On note la présence de chaque terme une fois et une seule par ligne, une fois et une seule par colonne.

L'associaitivité est offerte par l'énoncé, et c'est heureux, sinon, on devrait faire beaucoup de tests.

Le neutre est 1, on s'en doute. Et on le prouve.

Chaque élément a un symétrique, il suffit de lire la présence d'un 1 par colonne et ligne. Par exemple, i et $-i$ sont leurs propres symétriques (comme dans $(\mathbb{C},\ .)$).

La loi n'est pas commutative, on a tout fait pour ça.

◃10▹ On vous a dit "effectue le produit de i, j et k, dans $\mathbb{H}$ (Hamilton). Mais on ne vous a pas dit dans quel ordre. Combien de valeurs différentes pouvez vous obtenir ?
On vous a dit "effectue le produit de $1+i$, $1+j$ et $1+k$, dans $\mathbb{H}$". Mais on ne vous a pas dit dans quel ordre. Combien de valeurs différentes pouvez vous obtenir ?
On vous a dit "effectue le produit de $2.i$, $i+j$ et $i+k$, dans $\mathbb{H}$". Mais on ne vous a pas dit dans quel ordre. Combien de valeurs différentes pouvez vous obtenir ?

Première question.
Il y a six façons d'ordonner i, j et k. Et à chaque fois deux façons de mettre les parenthèses.

$(i.j).k=k^2=-1$	$(j.i).k=-k^2=1$	$(i.k).j=-j^2=1$	$(k.i).j=j^2=-1$	$(j.k).i=i^2=-1$	$(k.j).i=-i^2=1$
$i.(j.k)=i^2=-1$	$j.(i.k)=-j^2=1$	$i.(k.j)=-i^2=1$	$k.(i.j)=k^2=-1$	$j.(k.i)=j^2=-1$	$k.(j.i)=-k^2=1$

Bon, seulement deux valeurs.
Et la coïncidence des deux lignes vient de l'associativité qui est préservée...

---

11 On pose $G = \{$☻, ☺, ★, ■, ☼$\}$ histoire de bien embêter le monde. On suppose que $(G, *)$ est un groupe.

On donne une partie du tableau :

$*$	☼	★	☻	☺	■
☼		☺	☼	☻	
★	☺				
☻					
☺	☻	■			☼
■		☻			☺

Montrez que la relation ☻ $*$ ☼ $=$ ☼ entraîne que ☻ est le neutre (attention, neutre ce n'est pas juste $\exists a \in G,\ a * n = a$, c'est $\forall x \in G,\ x * n = n * x = x$, mais tenez compte du fait qu'on vous a dit qu'on avait un groupe).

Complétez alors la colonne et la ligne de ☻.
Complétez ■ $* \star =$?.

Montrez que pour tout a duu groupe $(G, *)$, l'application $x \longmapsto x * a$ est une bijection de G dans G.
Déduisez que chaque élément de G est présent une fois et une seule sur chaque ligne.
De même, justifiez : chaque élément est présent une fois et une seule par colonne.
Complétez le tableau, vérifiez que la loi est commutative.
Combien devriez vous faire de tests pour vous assurer de son associativité ?

Le fait qu'on ait ☻ $*$ ☼ $=$ ☼ dit juste que ☻ est neutre « vis à vis de ☼ et à droite seulement ».
Pourquoi l'est il vis à vis de tous les autres ? (il me semble avoir déjà posé cet exercice).
On se donne un élément x quelconque. On sait que notre groupe a un neutre n (on ne sait pas encore que c'est ☻) et que chaque élément a un symétrique. En particulier ☼, dont on va noter le symétrique s.
On part donc de ☻ $*$ ☼ $=$ ☼ et on multiplie à droite par s puis par x.
On obtient (en mettant ou non des paranthèses puisque « groupe » nous dit que la loi $*$ est associaitive

$$(\text{☻} * \text{☼}) * (s * x) = \text{☼} * (s * x)$$

$$\text{☻} * (\text{☼} * s) * x = (\text{☼} * s) * x$$

$$\text{☻} * n * x = n * x$$

$$\text{☻} * x = x$$

L'élément ☻ est neutre à droite (« vis à vis de tout le monde »).
Mais si on regarde alors le neutre n, on le confronte (classiquement) :

$$\text{☻} = \text{☻} * n = n$$

☻ est bien LE neutre.

On peut donc compléter sa ligne et sa colonne :

$*$	☼	★	☻	☺	■
☼		☺	☼	☻	
★	☺		★		
☻	☼	★	☻	☺	■
☺	☻	■	☺		☼
■		☻	■		☺

Pour tout élément a, l'application $x \longmapsto x * a$ va bien de G dans G (loi interne).

Elle est injective :	On se donne x et y, on suppose qu'ils ont la même image : $x * a = y * a$. On compose à droite par l'inverse de a (existe dans le groupe) : $(x * a) * a^{-1} = (y * a) * a^{-1}$. On utilise l'associaitivité et le rôle du neutre, et on trouve $x = y$.
Elle est surjective sur G	On se donne y dans G et on lui cherche un antécédent x vérifiant donc $x * a = y$. Un calcul direct dans notre groupe (même non commutatif) donne $x = y * a^{-1}$. Tout élément a bien un antécédent.
Elle est bijective de G dans G	On se donne y dans G et on lui cherche un antécédent (unique ?) x vérifiant donc $x * a = y$. Un calcul direct dans notre groupe donne $x = y * a^{-1}$. Tout élément a bien un antécédent, et on n'a pas le choix.
Elle est bijective de G dans G	On peut aussi construire l'application $y \longmapsto y * a^{-1}$ et vérifier que c'est la réciproque de notre application en écrivant $f \circ g = Id_G$ et $g \circ f = Id_G$ (en les appelant f et g).

Qui dit bijection dit bien « une fois et une seule ». Or, pour a fixé et x qui bouge, l'application $x \longmapsto x * a$ nous fait décrire toute la ligne de a dans le tableau.
Chaque élément de G est donc présent une fois et une seule sur cette ligne.

Ceci nous permet de compléter comme pour un Su-Do-Ku la ligne du smiley :

*	☼	★	☻	☺	■
☼		☺	☼	☻	
★	☺		★		
☻	☼	★	☻	☺	■
☺	☻	■	☺	★	☼
■		☻	■		☺

puis la ligne du carré car il manque deux éléments : étoile et soleil, mais soleil ne peut pas être sur la première colonne.

*	☼	★	☻	☺	■
☼		☺	☼	☻	
★	☺		★		
☻	☼	★	☻	☺	■
☺	☻	■	☺	★	☼
■	★	☻	■	☼	☺

Pourquoi un élément est présent une fois et une seule par colonne ? A cause de l'application $x \longmapsto a * x$.

Bref, on termine avec

+	☼	★	☻	☺	■
☼	■	☺	☼	☻	★
★	☺	☼	★	■	☻
☻	☼	★	☻	☺	■
☺	☻	■	☺	★	☼
■	★	☻	■	☼	☺

Et la loi est commutative par symétrie du tableau par rapport à sa diagonel principale.

Allez, comment j'ai construit cet exercice ?
En prenant un groupe classique : les entiers de range(5) pour l'addition modulo 5. C'est un groupe (abélien) classique dont voici le tableau

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Ensuite, pour brouiller les pistes, j'ai modiufie l'ordre des colonnes (et donc des lignes), mais en conservant la loi

+	4	2	0	1	3
4	3	1	4	0	2
2	1	4	2	3	0
0	4	2	0	1	3
1	0	3	1	2	4
3	2	0	3	4	1

On retrouve bien une loi interne.
Chaque élément est présent une fois et une seule par colonne et par ligne.

La commutativité se lit toujours sur le tableau.

Le neutre se reconnaît. Et les symétriques se groupent deux à deux.

Puis, pour brouiller encore les cartes, j'ai décidé de donner des noms tordus :

0	1	2	3	4
☻	☺	★	■	☼

:

Je le redis ?

+	☼	★	☻	☺	■
☼	■	☺	☼	☻	★
★	☺	☼	★	■	☻
☻	☼	★	☻	☺	■
☺	☻	■	☺	★	☼
■	★	☻	■	☼	☺

On retrouve bien une loi interne.
Chaque élément est présent une fois et une seule par colonne et par ligne.

La commutativité se lit toujours sur le tableau.

Le neutre se reconnaît. Et les symétriques se groupent deux à deux.

Il ne me restait plus qu'à effacer des informations pour que vous ayez du travail à faire.

+	☼	★	☻	☺	■
☼		☺	☼	☻	
★	☺				
☻					
☺	☻	■			☼
■		☻			☺

Et l'associaitivité ? On doit tester $\forall (a,\ b,\ c) \in G^3,\ (a * b) * c = a * (b * c)$.

Il ne suffit pas de le vérifier comme un élève naïf pour un triplet : $(☻ * ☺) * ★ = ☻ * (☺ * ★)$

(ou un physicien en laboratoire pour une liste impressionnante de quarante trois triplets).
Il faut tester tous les triplets $(a,\ b,\ c)$. Et il y a a priori $5 \times 5 \times 5$ tests à faire.

Ce qui fait 125.

Bon, on peut s'en épargner quelques uns.
Si l'un des éléments du triplet est le neutre n, la relation $(a * b) * c = a * (b * c)$ est vraie.
On n'a donc que 4^3 tests à faire.

De même, si a et c sont égaux et b le symétrique de a, ce n'est pas la peine de regarder .
Mais il n'y a pas tant de simplifications possibles.

◃12▹ Calculez $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$ (réduisez au dénominateur commun, c'est joli)..

On simplifie déjà

$$\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = \frac{\sqrt{k^4 + 2.k^3 + 3.k^2 + 2.k + 1}}{k.(k+1)} = \frac{k^2 + k + 1}{k.(k+1)}$$

Il ne reste plus qu'à décomposer en éléments simples :

$$\frac{k^2 + k + 1}{k.(k+1)} = \frac{(k^2 + k) + 1}{k.(k+1)} = 1 + \frac{1}{k.(k+1)} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

On peut sommer et télescoper : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = n + 1 - \frac{1}{n+1}}$

◃13▹ L''application f prend un rationnel x, écrit son écriture décimale et remplace tous les 5 par des 4, et le remet sous forme rationnelle.
Calculez $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{4}\right)$, $f\left(\frac{17}{14}\right)$. Combien l'équation $f(x) = \frac{73}{495}$ a-t-elle de solutions ?
Combien l'équation $f(x) = \frac{541}{990}$ a-t-elle de solutions ?

Quand il n'y a pas de 5 à modifier, on ne fait rien...

x	écriture décimale	image décimale	$f(x)$
$\frac{1}{2}$	$0,5$	$0,4$	$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
$\frac{1}{4}$	$0,25$	$0,24$	$\frac{24}{100} = \frac{6}{25}$
$\frac{17}{14}$	$1,2142857\overline{142857}\dots$	$1,2142847\overline{142847}\dots$	

L'écriture $1,2142857\overline{142857}\dots$ signifie que le motif 142857 se répète.
C'est le propre des rationnels. Une écriture périodique à partir d'un certain rang.
En fait, on pose la division, et dès qu'on retombe sur un reste déjà croisé, on sait que la boucle se met en place :

$$\begin{array}{cccccccccc|l}
\mathbf{1} & \mathbf{7} & & & & & & & & & \mathbf{1\ \ 4} \\
 & 3 & 0 & & & & & & & & 1,\ 2\ 1\ 4\ 2\ 8\ 5\ 7 \\
 & & \mathbf{2} & 0 & & & & & & & \\
 & \nearrow & & 6 & 0 & & & & & & \\
 & & & & 4 & 0 & & & & & \\
 & & & & 1 & 2 & 0 & & & & \\
 & & & & & & 8 & 0 & & & \\
 & & & & & & 1 & 0 & 0 & & \\
 & & & & & & & & \mathbf{2} & \leftarrow &
\end{array}$$

On vérifie en posant $x = 1,2142847\overline{142847}\dots$:

$$\begin{array}{lcccccccccccccccc}
10^6 \times x & = & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5, & 7 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & \dots \\
x & = & & & & & & & 1, & 2 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & \dots \\
difference & = & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 8 & 4, & 5 & & & & & & &
\end{array}$$

On déduit $(10^6 - 1).x = 1214283,5$.
On divise : $x = \frac{1214284,5}{999999} = \frac{12142845}{9999990} = \frac{17}{14}$ en simplifiant par $3^3.5.11.13.37$ (mais quelle horreur).

On remplace tous les 5 par des 4.
$f(x) = 1,2142847\overline{142847}\dots$:

$$\begin{array}{lcccccccccccccccc}
10^6 \times f(x) & = & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 8 & 4, & 7 & 1 & 4 & 2 & 8 & 4 & 7 & \dots \\
f(x) & = & & & & & & & 1, & 2 & 1 & 4 & 2 & 8 & 4 & 7 & \dots \\
difference & = & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 8 & 3, & 5 & & & & & & &
\end{array}$$

On divise : $x = \frac{1214283,5}{999999} = \frac{12142835}{9999990} = \frac{2428567}{1999998}$ et c'est laid.

On veut ensuite arriver à $f(x) = \frac{73}{495}$.
On traduit : $f(x) = 0,1474747\dots$ avec un 47 qui se répète.

De quel nombre ceci peut il venir sachant qu'on a transformé les 5 en 4.
L'idée naturelle est de dire : d'un seul : $x = 0,1\overline{57}5757\dots$ (c'est $\frac{26}{165}$).

Mais en fait il y en a d'autres, comme $0,147\overline{57}57\dots$ où le motif périodique 57 ne surgit qu'à la quatrième décimale.

Et comme on peut garder un nombre fini quelconque de 5 avant de commencer le motif répétitif, il y a une infinité de solutions.

On note qu'on a même aussi la solution $x = \frac{73}{495}$ qui ne contient aucun 5 et tout de suite des 4.

$f(x) = \frac{541}{990}$ c'est du même type.

◃14▹ Montrez $Arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{Arcsin(x)}{2}$ pour tout réel x de $[-1,\ 1[$.

Pour x entre -1 et 1, $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$existe.
Pour comparer ces deux fonctions de x, on peut démontrer que la différence est nulle.
On crée $x \longmapsto Arctan\Big(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\Big) - \dfrac{Arcsin(x)}{2}$ qu'on dérive.
Sa dérivée est nulle (tous calculs faits). Cette application est constante sur l'intervalle $[-1,\ 1[$.

$$\frac{\dfrac{2}{(1-x)^2}}{2.\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}.\frac{1}{1+\dfrac{1+x}{1-x}} - \frac{1}{2.\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Il suffit de la calculer en 0 pour trouver sa valeur $Arctan\Big(\sqrt{\dfrac{1+0}{1-0}}\Big) - \dfrac{Arcsin(0)}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.
On a donc $x \longmapsto Arctan\Big(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\Big) - \dfrac{Arcsin(x)}{2} = \dfrac{\pi}{4}$ pour tout x.

Autre idée. On prend x entre -1 et 1.
On pose $\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{Arcsin(x)}{2}$. On a alors $Arcsin(x) = 2.\theta - \dfrac{\pi}{2}$ puis $x = \sin\Big(2.\theta - \dfrac{\pi}{2}\Big)$ et enfin $x = -\cos(2.\theta)$.
On calcule alors

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{\frac{1-\cos(2.\theta)}{1+\cos(2.\theta)}} = \sqrt{\frac{2.\sin^2(\theta)}{2.\cos^2(\theta)}} = \sqrt{\tan^2(\theta)} = |\tan(\theta)|$$

On a même $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \tan(\theta)$ car θ est entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ ($\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi/2}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{Arcsin(x)}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi/2}{2}$).
On en déduit $Arctan\Big(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\Big) = \theta$ car θ est dans le bon intervalle.

Je vous laisse trouver d'autres preuves.

◃15▹ ♡ (a_n) et (b_n) sont les suites $\forall n,\ a_n = 4^n - 3.(-1)^n$ et $\forall n,\ b_n = -4^{n+1} + 5.(-1)^n$.
Trouvez la matrice M vérifiant $M.\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.
Vérifiez qu'on a alors $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ (sans calculer M^n).

On calcule $a_0 = -2$, $b_0 = 1$,, $a_1 = 7$ et $b_1 = -21$ et même $a_2 = 13$ et $b_2 = -59$.
On résout donc : $M.\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -21 & -59 \end{pmatrix}$.

Mais il suffit de multiplier à droite par la bonne matrice : $M = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -21 & -59 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -21 \end{pmatrix}^{-1}$

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -21 & -59 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -21 & -7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.\frac{1}{35}$$

$$M = \frac{1}{7}.\begin{pmatrix} -32 & -15 \\ 100 & 53 \end{pmatrix}$$

On veut prouver $U_{n+1} = M.U_n$avec la notation simplifiée $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
La présence d'un n et l'initialisation $M.\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ (séparable en $M.\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ et $M.\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$) peut faire penser à une récurrence.
On va déjà prouver

$$7.\begin{pmatrix} 4^{n+1} & -3.(-1)^{n+1} \\ -4^{n+2} & +5.(-1)^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & -15 \\ 100 & 53 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4^n & -3.(-1)^n \\ -4.4^n & +5.(-1)^n \end{pmatrix}$$

Il suffit de vérifier la première ligne pour les 4^n : $7.4 = -32 + 4.15$
pour les $(-1)^n$: $-7.3 = -32.(-3) + 5.15$
la deuxième ligne pour les 4^n : $-7.16 = 100 - 4.53$
pour les $(-1)^n$: $-7.5 = -3.100 + 5.53$

On a donc $U_{n+1} = M.U_n$.

Maintenant, par récurrence, on a $U_n = M^n.U_0$: initialisation faite
hérédité : si l'on a $M^n.U_0 = U_n$ (hypothèse de rang n)
et aussi $U_{n+1} = M.U_n$
alors on a $U_{n+1} = M.M^n.U_0 = M^{n+1}.U_0$

Mais sinon, autant parler de suite géométrique de raison à gauche M et de premier terme U_0.

Et si j'avais demandé de trouver M vérifiant $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ pour tout n ?

On peut attaquer cette question comme un physicien.
Quatre inconnues, quatre équations, quatre litres de sueur, quatre points à gagner.

$$\begin{pmatrix} 4.4^n & +3.(-1)^n \\ -16.4^n & -5.(-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4^n & -3.(-1)^n \\ -4.4^n & +5.(-1)^n \end{pmatrix}$$

puisque $4^{n+1} = 4.4^n$ et $4^{n+2} = 16.4^n$.

Remarque : *L'erreur à ne pas commettre ensuite est si on est matheux en plus d'être physicien, c'est de prétendre « on identifie ».*
ce n'est pas une identification, mais juste un « il suffit qu'on ait ».
En effet, nul ne demande $(\forall n,\ U_{n+1} = M.U_n) \Rightarrow (M = truc)$ *(sens « nécessaire », on identifie)*
mais juste
$(M = truc) \Rightarrow (\forall n,\ U_{n+1} = M.U_n)$ *(sens « suffisant », on propose).*
On ne part pas de ce qu'on demande pour arriver à autre chose.
Le but est d'arriver à ce qu'on demande $(\forall n,\ U_{n+1} = M.U_n)$

On propose donc les systèmes : $\begin{array}{rrcrll} 4.\alpha & -4.\beta & = & 4 & pour & 4^n \\ -3.\alpha & +5.\beta & = & 3 & pour & (-1)^n \end{array}$ et $\begin{array}{rrcrll} 4.\alpha & -4.\beta & = & -16 & pour & 4^n \\ -3.\alpha & +5.\beta & = & -5 & pour & (-1)^n \end{array}$

On trouve une solution (unique entre parenthèses).

Mais il y a l'approche du matheux.

On écrit ce qu'on peut : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4^n \\ (-1)^n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4^n \\ (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

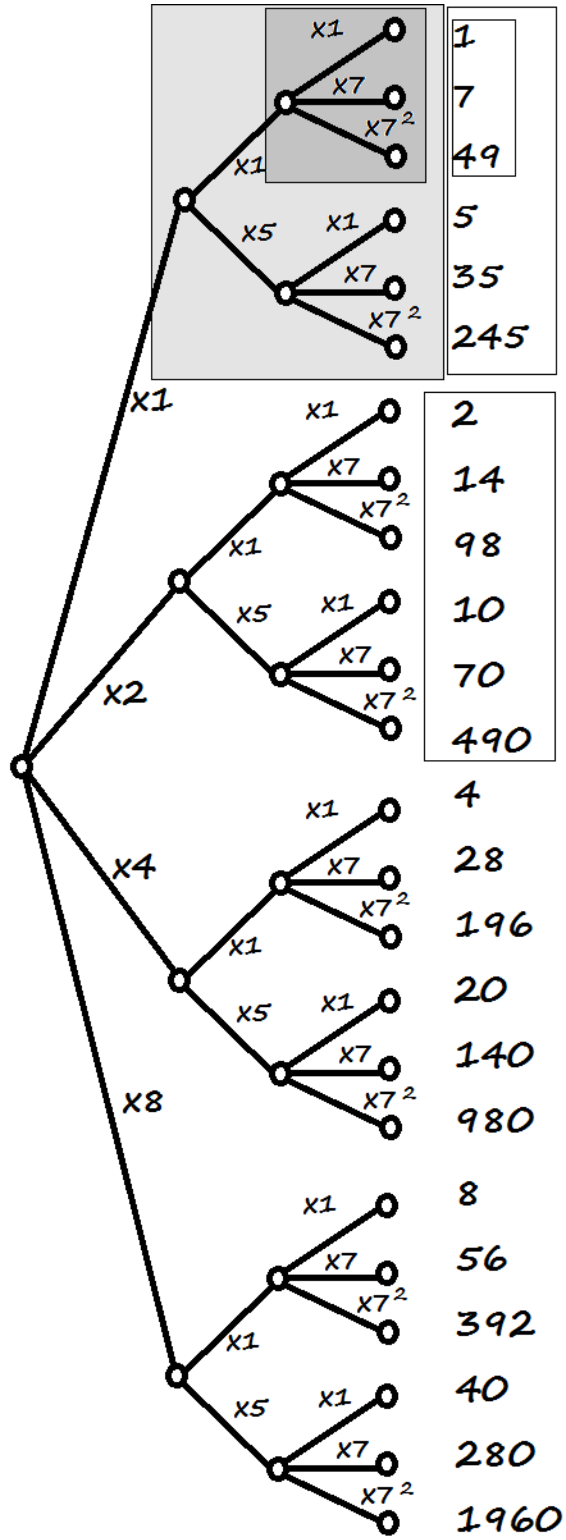
$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4^{n+1} \\ (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4^{n+1} \\ (-1)^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4^n \\ (-1)^n \end{pmatrix}$

Il ne reste qu'à imbriquer :
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4^{n+1} \\ (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4^n \\ (-1)^n \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Et voilà : $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$

Je vous laisse vérifier.
Et je vous invite à noter que ceci diagonalise M en l'écrivant $P.D.P^{-1}$.

◃16▹ Montrez que la somme des diviseurs de $2^3.5.7^2$ vaut 5130. Existe-t-il un entier dont la somme des diviseurs vaut 2021 ?



Les diviseurs de $2^3.5.7^2$ sont à écrire sous forme de produit de facteurs premiers eux aussi :
$2^a.5^b.7^c$ avec • $0 \leqslant a \leqslant 3$
• $0 \leqslant b \leqslant 1$
• $0 \leqslant c \leqslant 2$
On peut faire un arbre pour lister ces diviseurs.

Ceci permet de se convaincre qu'il y a 4.2.3 diviseurs.

Pour aussi se convaincre :

```
Div = [ ]
for a in range(4) :
...for b in range(2) :
......for c in range(3) :
.........d = (2**a)*(5**b)*(7**c)
.........Div.append(d)
.........S += d
```

Et pour la somme ?
La première zone grisée a pour somme $1+7+7^2$.
Elle est suivie juste au dessous d'une zone où les diviseurs sont cinq fois plus grands.
La zone grisée un peu plus grande a pour somme $(1+7+7^2)+5.(1+7+7^2)$ soit $(1+5).(1+7+7^2)$.

La zone suivante juste encadrée a la même somme, multipliée par 2.

Puis multipliée par 4.

Puis multipliée par 8.

On arrive au total $(1+2+2^2+2^3).(1+5).(1+7+7^2)$.

Et d'ailleurs, en développant $\Big(\sum_{a=0}^{3} 2^a\Big).\Big(\sum_{b=0}^{1} 5^b\Big).\Big(\sum_{c=0}^{2} 3^c\Big)$ on a bien la somme des $2^a.5^b.7^c$.

On a donc une formule pour la somme des diviseurs d'un entier connu sous forme de produit de facteurs premiers.

$2^a.3^b.5^c.7^d.11^e\ldots$ a $(a+1).(b+1).(c+1).(d+1)\ldots$ diviseurs a pour somme des diviseurs $(1+2+\ldots+2^a).(1+3+\ldots+3^b).(1+5+\ldots+5^c)\ldots$ (formule valable même si des exposants valent 0)

Peut on alors atteindre 2021 avec une telle formule ?
Sachant que 2021 vaut 43.47 il faudrait avoir $(1+2+4+\ldots+2^a)=43$ ou $(1+2+4+\ldots+2^a)=47$ ou avec d'autres nombres premiers.

Il suffit sinon d'attaquer les entiers plus petits que 2020 puisque la somme des diviseurs de n dépasse n.

D'ailleurs, un cadeau :

```
def SommeDiv(n) : #int -> int, somme des diviseurs
....S = 0 #initialisation d'un accumulateur
....for k in range(1, n+1) : #attention, k=0 est refusé, mais k=n doit être inclus
........if n%k == 0 : #test « k divise n », c'est à dire « n modulo k vaut 0 »
............S += k #on ajoute à la somme
....return S #la somme est calculée
```

Euh, non, on ne lance pas celui là, il risque de ne jamais s'arrêter.

```
n = 0
while Somme Div(n) != 2021 and n < 2021 :
....n += 1
```

◁17▷ J'ai trouvé $ch(\theta) = 5$. Calculez $ch(4.\theta)$ et $th(\theta)$.

Si on part de $ch(\theta) = 5$, on trouve $ch(2.\theta) = 2.5^5 - 1$ puis $ch(4.\theta) = 4\,801$. Ensuite, avec $ch^2 - sh^2 = 1$, on trouve $sh(\theta) = \sqrt{24}$ au signe près, puis $th(\theta) = \sqrt{24/25}$.

◁18▷ ♡ Y a-t-il plus de parties à 8 éléments dans un ensemble à 15 éléments que de parties à 12 éléments dans un ensemble à 17 éléments.

Comparons $\binom{15}{8}$ et $\binom{17}{12}$ en calculant proprement leur différence :

$\binom{15}{8} - \binom{17}{12} = \binom{15}{7} - \binom{17}{5} = \dfrac{15.14.13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5.6.7} - \dfrac{17.16.15.14.13}{1.2.3.4.5}$

$\binom{15}{8} - \binom{17}{12} = \binom{15}{7} - \binom{17}{5} = 5 \times 13 \times 1 \times 11 \times 9 - 17 \times 2 \times 1 \times 14 \times 13 = 13 \times (495 - 476)$

C'est $\binom{15}{8}$ qui l'emporte.

◁19▷ ♡ E est l'ensemble $MPSI2$. On note $\mathbb{F}$ l'ensemble des filles et $\mathbb{G}$ celui des garçons.
Combien l'équation $A \cap \mathbb{F} = \emptyset$ a t-elle de solutions d'inconnue A dans $P(E)$?
Combien l'équation $A \cap \mathbb{F} = \{Samira\}$ a t-elle de solutions d'inconnue A dans $P(E)$?
Combien l'équation $(A\Delta\mathbb{F}) \cap \mathbb{F} = \{Zaina\}$ a t-elle de solutions d'inconnue A dans $P(E)$?
Combien l'équation $(A\Delta\mathbb{G}) \cap \mathbb{F} = \{Zaina\}$ a t-elle de solutions d'inconnue A dans $P(E)$?

◁20▷ ♡ On définit : $A * B = \overline{A}\Delta\overline{B}$. Cette loi est elle commutative ? Est elle associative ? Dispose-t-elle d'un neutre ?
Mêmes questions avec $A \star B = \overline{A}\Delta B$.
Rappel : $\overline{A}$ est le complémentaire de A (les éléments qui ne sont pas dans A).
CΔD est la différence symétrique de C et D (les éléments qui sont dans C ou dans D, mais pas dans les deux, le "ou" exclusif).

C'est idiot, mais $A * B = \overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta B$...
C'est la loi Δ. On la sait commutative, associative, avec un neutre *(l'ensemble vide)* et un symétrique pour chaque élément *(lui même)*...

L'autre loi est plus originale. Elle est interne sur $P(E)$.
Elle est commutative : $A \star B = \overline{A}\Delta B = A\Delta\overline{B} = B * A$ et c'est $\overline{A\Delta B}$.
Il suffit de passer par la fonction indicatrice : $1_{A*B} = 1_A + 1_B + 1$ modulo 2.

On se donne trois parties A, B et c.
On étudie : $(A * B) * C = (\overline{A}\Delta B) * C = (\overline{A}\Delta B)\Delta\overline{C}$
$A * (B * C) = A * (B\Delta\overline{C}) = \overline{A}\Delta(B\Delta\overline{C})$
Et comme Δ est associative, il y a égalité.

Elle n'est pas associative : $(\emptyset * E) * E = \emptyset * E = \emptyset$ et $\emptyset * (E * E) = \emptyset * E = \emptyset$. Raté, ça marche ici.
$(\emptyset * \emptyset) * E = E * E = E$ et $\emptyset * (\emptyset * E) = \emptyset * \emptyset = E$. Raté encore !

Elle a un neutre.

En notant ce neutre N il doit déjà vérifier $N * N = N$.
Or, $N * N = \overline{N\Delta N} = \overline{\emptyset}$ =E .
S'il y a un neutre, c'est l'univers entier E.
On vérifie ensuite pour toute partie X, $X * E = X\Delta\emptyset = X$.

Le symétrique d'une partie X est elle même.
En effet, pour tout X, on a $X * X = \overline{X\Delta X} = \overline{\emptyset} = E$ *(le neutre)*.

◁ 21 ▷

♡ La loi ∩ est distributive sur ∆ (dans l'ensemble des parties d'un ensemble). Mais la loi ∩ est elle distributive sur ∩ ?
Et ∆ est elle distributive sur ∩ ?
Et ∆ est elle distributive sur ∆ ?

∩ est distributive sur elle même : $\begin{array}{cccccccccc} (a & + & b) & \times c & = & a & \times c & + & b & \times c \\ (A & \cap & B) & \cap C & = & A & \cap C & \cap & B & \cap C \end{array}$
Comme $C \cap C$ est gal à C, il y a égalité.

∆ n'est pas distributive sur elle même : $\begin{array}{cccccccccc} (a & + & b) & \times c & = & a & \times c & + & b & \times c \\ (A & \Delta & B) & \Delta C & \neq & A & \Delta C & \Delta & B & \Delta C \end{array}$
Dans le second membre, C s'en va. On donne un contre-exemple.

◁ 22 ▷

Simplifiez $(A\Delta B)\cap(\overline{A}\Delta B)\cap(\overline{A}\Delta\overline{B})\cap(A\Delta\overline{B})$ pour A et B parties d'un ensemble E.

Déjà, $(A\Delta B)\cap(\overline{A}\Delta B)$ est vide. L'ensemble est vide.
Pour simplifiez $(A\Delta B)\cap(\overline{A}\Delta B)\cap(\overline{A}\Delta\overline{B})\cap(A\Delta\overline{B})$, on peut tracer des "patates", même si ce n'est pas rigoureux.
Déjà, $(A\Delta B)\cap(\overline{A}\Delta B)$ est vide. Inutile d'aller plus loin. On intersecte encore, il ne reste rien.
Proprement, on peut passer par les indicatrices :
$1_{(A\Delta B)\cap(\overline{A}\Delta B)} = 1_{A\Delta B}.1_{\overline{A}\Delta B} = |1_A - 1_B|.|1 - 1_A - 1_B| = |(1_A - 1_B).(1 - 1_A - 1_B)|$

Le contenu de la parenthèse se développe en

	1	-1_A	-1_B
1_A	$+1_A$	-1_A	$-1_A.1_B$
-1_B	-1_B	$+1_A.1_B$	$+1_B$

il ne reste rien :
$1_{(A\Delta B)\cap(\overline{A}\Delta B)} = 1 = 1_{\emptyset}$ et les produits suivants sont nuls.

Maintenant, qui est $(A\Delta B)\cup(\overline{A}\Delta B)$? Je regarde en algèbre propositionnelle, avec α pour l'appartenance à A et β pour celle à B :

α	β	$\overline{\alpha}$	α ou_e β	$\overline{\alpha}$ ou_e β	(α ou_e β) ou ($\overline{\alpha}$ ou_e β)
Vrai	*Vrai*	*Faux*	*Faux*	*Vrai*	*Vrai*
Vrai	*Faux*	*Faux*	*Vrai*	*Faux*	*Vrai*
Faux	*Faux*	*Vrai*	*Faux*	*Vrai*	*Vrai*
Faux	*Vrai*	*Vrai*	*Vrai*	*Faux*	*Vrai*

On trouve $(A\Delta B)\cup(\overline{A}\Delta B) = E$. Les réunions suivantes ne servent plus à rien :

$$(A\Delta B)\cup(\overline{A}\Delta B)\cup(\overline{A}\Delta\overline{B})\cup(A\Delta\overline{B}) = E$$

On pouvait aussi tenir ces réponses par "une chose et son contraire ou...".

Le plus simple est aussi d'écrire : $\overline{A}\Delta B = (\emptyset\Delta A)\Delta B = \emptyset\Delta(A\Delta B) = \overline{A\Delta B}$.
On a alors pour notre exercice des choses comme $(A\Delta B)\cap\overline{(A\Delta B)}$ *et* $(A\Delta B)\cup\overline{(A\Delta B)}$.
C'est peut être sous cette forme synthétique et intelligente que vous trouverez l'exercice résolu dans les livres. Et vous vous demanderez peut être "aurais je dû y penser ?".

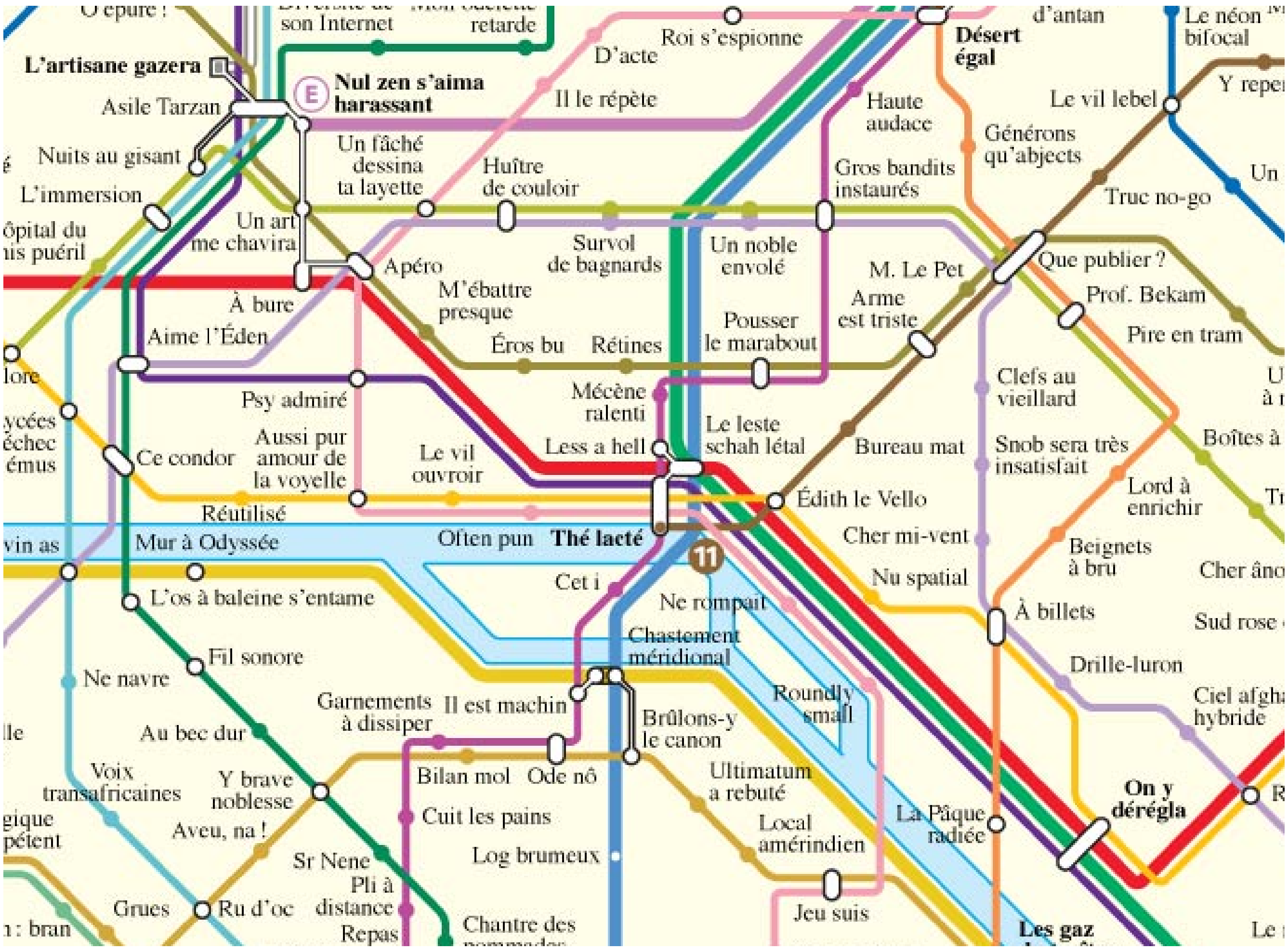
◁ 23 ▷

Un tour aux portes de Paris dans le sens trigonométrique :
Réunion postdatée. Clé d'hypocrite. Vélo à serpillère. La mort pilote. Amulette. Vil soleil urbain. L'autorité dupe. Le volapuk du savant affamé. Vicieuse irritante. Dose hypocrite. Encadrèrent photo. Préméditer un loto. Protège ta blonde. Sapin et graviers. Piéton perdant. Lopette vétillarde. Plan d'égout incorrect.

Réunion postdatée. Porte de Saint-Ouen
Clé d'hypocrite. Porte de Clichy
Vélo à serpillère. Pereire Levallois
La mort pilote. Porte Maillot
Amulette. La Muette

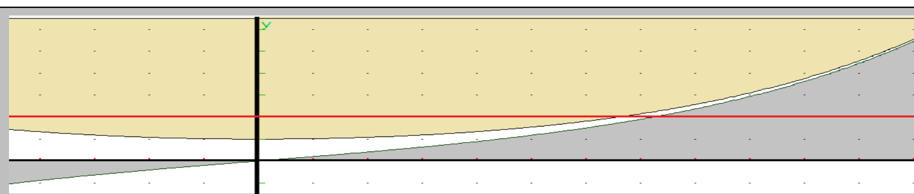
Vil soleil urbain. Boullainvilliers
L'autorité dupe. Porte d'Auteuil
Le volapuk du savant affamé. Malakoff - Plateau de Vanves [4]
Vicieuse irritante. Cité Universitaire
Dose hypocrite. Porte de Choisy
Encadrèrent photo. Porte de Charenton
Préméditer un loto. Porte de Montreuil
Protège ta blonde. Porte de Bagnolet
Sapin et graviers. Pré-Saint-Gervais
Piéton perdant. Porte de Pantin
Lopette vétillarde. Porte de la Villette
Plan d'égout incorrect. Porte de Clignancourt

http : / / www.gef.free.fr / metro.html



◁24▷

♡ Résoudre
$sh(t) \leqslant 2 \leqslant ch(t)$
d'inconnue réelle t.



On résout $sh(t) \leqslant 2$ en passant à l'argument sinus hyperbolique (croissant et bijectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) car on le connaît :

4. solution alternative (Volapük fantasmé de favela) (et le volapuk est une langue artificille imaginée au vingtième siècle pour les échanges internationaux, comme l'espéranto

$$t \leqslant Argsh(2) = \ln(2+\sqrt{5})$$

Sinon, on pose $X = e^t$ et l'équation devient $X - \dfrac{1}{X} \leqslant 4$ avec X positif.
On aboutit à $X^2 - 4.X - 1 \leqslant 0$ avec toujours X positif (entre les racines, mais positif) : $X \leqslant 2+\sqrt{5}$.
On trouve $t \leqslant \ln(2+\sqrt{5})$. La même. Fort heureusement.

Mais on exige aussi $2 \leqslant ch(t)$.
Cette fois, on ne passe pas à l'argument cosinus hyperbolique, car on n'a pas de bijectivité.
Cette équation a en effet un ensemble de solutions en deux intervalles $]-\infty,\ -\ln(2+\sqrt{3})] \cup [\ln(2+\sqrt{3}),\ +\infty[$.

Finalement, le jeu d'inéquations a pour ensemble de solutions

$$]-\infty,\ -\ln(2+\sqrt{3})] \cup [\ln(2+\sqrt{3}),\ \ln(2+\sqrt{5})]$$

Intersection de deux ensembles. Comme on le voit sur le dessin.

Remarque : *La phrase « je passe à l'arcsinus et je simplifie » ou « je passe à l'arctangente et je simplifie » est souvent une grosse ânerie...*
En fait, c'en est même toujours une.
Et elle doit vous faire prendre conscience de la notion d'injectivité justement... $f(x) = a$ *ne donne pas* $x = f^{-1}(a)$ *si* f^{-1} *n'existe pas...*
Par exemple $\sin(x) = a$ *donne* $\sin(x) = \sin(Arcsin(a))$ *(là d'accord), mais c'est tout...*

◁25▷ Calculez ces trois intégrales $\displaystyle\int_0^1 2^t.dt$, $\displaystyle\int_0^1 2^t.3^{(2^t)}.dt$ et $\displaystyle\int_0^1 2^t.(3^2)^t.dt$.

Pour $\displaystyle\int_0^1 2^t.dt$, $\displaystyle\int_0^1 2^t.3^{(2^t)}.dt$ et $\displaystyle\int_0^1 2^t.(3^2)^t.dt$ il n'y a pas de problème d'existence, par continuité.
Mais les écritures en puissances d'entiers posent problème pour intégrer. On doit revenir à $a^b = e^{b.\ln(a)}$ en l'occurrence ici : $2^x = e^{x.\ln(2)}$.

On intègre donc $x \longmapsto e^{x.\ln(2)}$ en $x \longmapsto \dfrac{e^{x.\ln(2)}}{\ln(2)}$ et on trouve $\boxed{\displaystyle\int_0^1 2^t.dt = \frac{2-1}{\ln(2)}}$

La troisième est du même type :

$$\boxed{\int_0^1 2^t.(3^2)^t.dt = \int_0^1 2^t.9^t.dt = \int_0^1 18^t.dt = \int_0^1 e^{t.\ln(18)}.dt = \frac{e^{t.\ln(18)}}{\ln(18)} = \frac{17}{\ln(18)}}$$

La deuxième est plus vicieuse. Elle est presque en $u'.3^u$. En effet, si on pose $u(t) = 2^t$, on a $u'(t) = \ln(2).2^t$ (dérivez $t \longmapsto e^{t.\ln(2)}$) et $3^{u(t)} = 3^{(2^t)}$.

On intègre $u'.3^u$ (égal à $u'.e^{u.\ln(3)}$) en $\dfrac{e^{u.\ln(3)}}{\ln(3)}$.

En tenant compte de tout ce qu'il faut compenser aux dénominateurs :

$$\boxed{\int_0^1 2^t.3^{(2^t)}.dt = \left[\frac{e^{e^{t.\ln(2)}.\ln(3)}}{\ln(2).\ln(3)}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{6}{\ln(2).\ln(3)}}$$ *(et* $\ln(2).\ln(3)$ *ne se simplifie pas).*

◁26▷ ♡ Montrez que pour $ch(x) = 5/4$, on a $sh(x) \in \mathbb{Q}$.
Combien existe-t-il de solutions dans $\mathbb{R}$ à l'équation $(ch(x),\ sh(x)) \in \mathbb{Z}^2$?
Combien existe-t-il de solutions dans $\mathbb{R}$ à l'équation $(ch(x),\ sh(x)) \in \mathbb{Q}^2$?
Rappel : $ch(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, $sh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, $ch^2 - sh^2 = ?$.

On va retrouver les triplets pythagoriciens, mais avec la trigonométrie hyperbolique...
On rappelle : $ch^2 - sh^2 = 1$ (à l'étage des fonctions).
On a donc ici : $\left(\dfrac{5}{4}\right)^2 - sh^2(x) = 1$. On simplifie : $sh^2(x) = \dfrac{3^2}{4^2}$.
Qu'on prenne la racine positive ou négative, on trouve un rationnel.

Rappel : pour avoir $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$ il suffit d'écrire $ch(x) + sh(x) = e^x$ et $ch(x) - sh(x) = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

L'équation où $ch(x)$ et $sh(x)$ sont entiers n'a qu'une solution : 0 : $ch(0) = 1$ et $sh(0) = 0$.
En effet, si $sh(x)$ et $ch(x)$ sont entiers, alors $sh(x) + ch(x)$ et $ch(x) - ch(x)$ le son aussi.
Mais ce sont alors deux entiers dont le produit vaut 1 !
La seule solution est que chacun vaille 1 (ou -1 mais la somme est positive).

En revanche, l'équation où $ch(x)$ et $sh(x)$ sont rationnels a aussi une infinité de solutions.
On demande trois entiers a, b et c vérifiant $ch(x) = \frac{a}{c}$ et $sh(x) = \frac{b}{c}$ (quitte à avoir réduit au dénominateur commun).
Ceci revient à exiger : $\frac{a^2}{c^2} - \frac{b^2}{c^2} = 1$ c'est à dire $a^2 + c^2 = b^2$. Un triplet pythagoricien !

Par exemple 60, 11 et 61 forment un triplet pythagoricien.
Le point $\left(\frac{60}{61}, \frac{11}{61}\right)$ est sur le cercle trigonométrique d'équation $x^2 + y^2 = 1$.
le point $\left(\frac{61}{60}, \frac{11}{60}\right)$ est sur l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

Tu veux construire tes propres triplets pythagoriciens ?
Choisis un rationnel $\frac{\alpha}{\beta}$ dans le rôle de $ch(x) + sh(x)$ et son inverse dans le rôle de $ch(x) - sh(x)$.
Tu as alors : $ch(x) = \frac{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}}{2}$ et $sh(x) = \frac{\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}}{2}$. Les deux sont rationnels.
Et ils s'écrivent : $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2.\alpha.\beta}$ et $\frac{\alpha^2 + -\beta}{2.\alpha.\beta}$.
Et le triplet pythagoricien est $(\alpha^2 - \beta^2, 2.\alpha.\beta,\ \alpha^2 + \beta^2)$.

◃27▹ Montrez que pour tout entier naturel n, $(t.\ln(t))^n$ tend vers 0 quand t tend vers 0.
Pour tout n, on pose $I_n = \int_0^1 (\ln(t))^n.dt$. Calculez I_0, I_1 et I_2.
Calculez I_n pour tout n en intégrant par parties.

$t.\ln(t)$ est en 0^+ une indétermination classique du type $0.(-\infty)$.
C'est un de nos classiques de Sup.

On la lève en posant $t = \frac{1}{X}$, on a alors $t.\ln(t) = \frac{\ln(1/X)}{X} = -\frac{\ln(X)}{X}$.
C'est cette fois une forme indéterminée classique : croissances comparées en $+\infty$.

On encadre donc en grand : $\boxed{t.\ln(t) \longrightarrow_{t\mapsto+\infty} 0}$

On élève à la puissance n, ça ne change rien : $(t.\ln(t))^n$ tend vers 0 en 0.

Aucune des I_n n'a de sens véritable. Il faut poser $I_{n,\varepsilon} = \int_\varepsilon^1 (\ln(t))^n.dt$, calculer et voir si cette intégrale a une limite quand ε tend vers 0.

Tenez : $I_{0,\varepsilon} = \int_\varepsilon^1 (\ln(t))^0.dt = \int_\varepsilon^1 dt = 1 - \varepsilon$.
Bon, l'exemple est mal choisi : $I_0 = 1$ sans difficulté.

Prenons plus classiquement $I_{1,\varepsilon} = \int_\varepsilon^1 (\ln(t))^1.dt = [t.\ln(t) - t]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon.\ln(\varepsilon) + \varepsilon$.
C'est certes indéterminé quand ε tend vers 0, mais c'est la question précédente. Il ne va rester que $I_1 = -1$.

Pour I_2, on intègre $\int_\varepsilon^1 (\ln(t))^2.dt$ par parties :

$(\ln(t))^2$	$\hookrightarrow$	$2.\ln(t).\frac{1}{t}$
1	$\hookleftarrow$	t

$$I_{2,\varepsilon} = \int_\varepsilon^1 (\ln(t))^2.dt = [t.(\ln(t))^2]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 2.\ln(t).dt = -\varepsilon.(\ln(\varepsilon))^2 - 2.I_{2,\varepsilon}$$

On fait tendre ε vers 0. $I_{1,\varepsilon}$tend vers -1 et $\varepsilon.(\ln(\varepsilon))^2$ tend vers 0.
On a trouvé une limite : $I_2 = 2$.

Bilan provisoire :

I_0	I_1	I_2
1	-1	2

(de là à en déduire tout de suite quelquechose...)

Supposons que I_n existe, en tant que limite des $I_{n,\varepsilon}$, et étudions l'existence(et le calcul) de I_{n+1}.
On intègre $I_{n+1,\varepsilon}$par parties :

$\int_\varepsilon^1 (\ln(t))^{n+1}.dt$:

$(\ln(t))^{n+1}$	$\hookrightarrow$	$(n+1).(\ln(t))^n.\frac{1}{t}$
1	$\hookleftarrow$	t

$$I_{n+1,\varepsilon} = \int_\varepsilon^1 1.(\ln(t))^{n+1}.dt = [t.(\ln(t))^{n+1}]_\varepsilon^1 - (n+1).\int_\varepsilon^1 (\ln(t))^n.dt = -\varepsilon.(\ln(\varepsilon))^{n+1} - (n+1).I_{n,\varepsilon}$$

On peut faire tendre ε vers 0, le membre de droite a une limite, celui de gauche aussi.
On a même $I_{n+1} = -(n+1).I_n$

En mettant en boucle, on a très vite alternance de signes et la factorielle qui se forme : $\boxed{I_n = (-1)^n.n!}$

Corollaire : je peux définir $(1/2)!$ par $\int_0^1 \sqrt{\ln(t)}.dt$ ou plutôt $\int_0^1 \sqrt{|\ln(t)|}.dt$.

Au fait, on a prouvé que $t.(\ln(t))^n$ tendait vers 0 quand t tendait vers 0 ?

Oui, au dessus, c'est $\varepsilon.(\ln(\varepsilon))^n$, mais ça nechange rien, hormis la rapidité de frappe pour moi.

Ce qu'on a prouvé, c'est $(t.\ln(t))^n$ tend vers 0.
Mais ici, on a un seul t face à $(\ln(t))^n$.
Le résultat reste quand même valable, mais il faut ruser.

On part de $(t.\ln(t))^n$ tend vers 0.
On l'applique à $t = \varepsilon^{1/n}$ avec n fixé et εqui tend vers 0.
On obtient : $(\sqrt[n]{\varepsilon}.\ln(\sqrt[n]{\varepsilon}))^n$ tend vers 0.
On simplifie : $\varepsilon.\left(\frac{\ln(\varepsilon)}{n}\right)^n$ tend vers 0 quand εtend vers 0.
La « constante » $\frac{1}{n^n}$ n'y change rien, puisque n est fixé : $\varepsilon.(\ln(\varepsilon))^n$ tend vers 0 quand ε tend vers 0.

◃28▹ Que donne la composée de deux petits cycles, suivant leur taille et suivant le nombre d'éléments communs ?

Un bicycle et un tricycle.			
$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ \alpha)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(a\ \alpha\ \beta)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b\ \alpha)} \circ \overrightarrow{(a\ b)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ \alpha\ \beta)} \circ \overrightarrow{(a\ b)}$	$=$
Deux tricycles.			
$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ \alpha)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(a\ c\ b)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(b\ a\ \alpha)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(a\ \alpha\ \beta)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ \alpha)}$	$=$
Un quadricycle et un bicycle.			
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ c)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ \alpha)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(b\ a)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ c)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$	$=$
Un quadricycle et un tricycle.			
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ c\ b)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ d\ c)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ c\ d)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ \alpha)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ c\ \alpha)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ d\ \alpha)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ \alpha\ \beta)}$	$=$
Deux quadricycles.			
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ c\ b\ d)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ d\ c)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ \alpha)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ \alpha\ \beta)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ \alpha\ \beta\ \gamma)}$	$=$
il manquerait encore quoi ?			

◁29▷ Pour comprendre le théorème de Lagrange (le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe).
On se donne un groupe $(G, *)$ de cardinal N et un sous-groupe H de cardinal n, dont on notera les éléments h_1 à h_n (ordre arbitraire et sans importance, retenez juste que le neutre de G en fait partie).
On les place dans la première colonne dans tableau.
On prend alors un élément x_1 de E qui n'est pas dans cette colonne (que déduisez vous s'il n'y en a pas ?). On remplit alors la deuxième colonne avec les $x_1 * h_k$ pour k de 1 à n.
Montrez que tous les éléments de cette colonne sont distincts et sont différents de tous les éléments de la première colonne.

On prend alors un élémentx_2 de G qui n'est dans aucune des deux premières colonnes (que déduisez vous s'il n'y en a pas ?). On remplit alors la troisième colonne avec les $x_2 * h_k$ pour h de 1 à n.
Montrez que tous les éléments de cette colonne sont distincts et sont différents de tous les éléments des deux premières colonnes.

Recommencez autant de fois que nécessaire. Que concluez vous quand vous avez tout épuisé ?
Pour comprendre, deux exemples où j'ai commencé à remplir les colonnes.

groupe : les entiers de 0 à 19 pour l'addition modulo 20				
sous groupe : les multiples de 5				
0	1	2	.	.
5	6			
10	11			
15				

groupe : les 24 permutations de $[a,\ b,\ c,\ d]$

sous groupe : $\{Id,\ \overrightarrow{(a\ b\ c)},\ \overrightarrow{(a\ c\ b)}\}$

Id	$\overrightarrow{(a\ b)}$	$\overrightarrow{(a\ d)}$	$\overrightarrow{(b\ d)}$	$\overrightarrow{(a\ c\ d)}$			
$\overrightarrow{(a\ b\ c)}$	$\overrightarrow{(b\ c)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$		$\overrightarrow{(a\ b\ d)}$			
$\overrightarrow{(a\ c\ b)}$	$\overrightarrow{(a\ c)}$	$\overrightarrow{(a\ c\ b\ d)}$	$\overrightarrow{(a\ c\ d\ b)}$				

◃30▹ L'ordre d'une permutation σ est le plus petit indice p non nul vérifiant $\sigma^p = Id$. Donnez dans S_{15} puis dans S_{16} une permutation d'ordre le plus grand possible.

♯ Un programme qui prend n en entrée et cherche le plus grand ordre qu'on puisse atteindre ?

Combien y a-t-il dans S_9 de permutations d'ordre 7 ?
Combien y a-t-il dans S_9 de permutations d'ordre 8 ?
Combien y a-t-il dans S_9 de permutations d'ordre 6 ?

Pour calculer l'ordre d'un cycle, c'est facile, c'est sa taille : $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$ doit être appliqué quatre fois pour redonner l'identité.
Et pour une permutation décomposée en « produit de cycles de support disjoints », il faut et il suffit que chaque cycle ait fait un nombre entier de tours. On trouve le plus petit multiple commun de la taille des cycles.
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(e\ f\ g)}$ est d'ordre 12. Et $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(e\ f\ g)} \circ \overrightarrow{(h\ i)}$ aussi.
En revanche $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(e\ f\ g\ h\ i)}$ est d'ordre 20.

On va donc chercher à découper $[0,\ 1,\ 2,\ 3, \dots 14]$ en cycles dont le p.p.c.m. soit le plus grand possible.
Solution ordre 105 : $[0,\ 1,\ 2] + [3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7] + [8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14]$
Ou si vous préférez : $\boxed{(3,\ 5,\ 7) \text{ avec } p.p.c.m.(3,\ 5,\ 7) = 105 \text{ et } 3+5+7 = 15}$

C'est à dire : un tri-cylcle, un pentacycle et un heptacycle.

Pour seize éléments : $\boxed{(4,\ 5,\ 7) \text{ avec } p.p.c.m.(4,\ 5,\ 7) = 140 \text{ et } 4+5+7 = 15}$

C'est à dire : un quadri-cylcle, un pentacycle et un heptacycle.

Petit programme un peu brutal, pas optimisé :
#recherche d'une permutation d'ordre maximum

```
def gcd(a, b) : #pgcd de deux entiers
....#algorithme d'Euclide
....#int x int -> int
....if b == 0 :
........return a
....return gcd(b, a%b)
```

```
def lcm(a, b) : #ppcm de deux entiers
....#utitlse a*b = pgcd(a,b)*ppcm(a,b)
....#int x int -> int
....return (a*b)//gcd(a,b)
```

```
def lcmL(L) : #ppcm d'une liste
....#par associativite du p.p.c.m.
....#list of int -> int
....if len(L) == 1 :
........return L[0]
....return lcm(L[0], lcmL(L[1 : ]))
```

```
def decomp(n) : #decompositions d'un entier en somme d'entiers non nuls
....#procedure recursive
....#int -> list of list of int
....if n == 0 :
........return [[ ]]
....L = [ ]
....for k in range(n) :
........Lk = decomp(k)
........for li in Lk :
............L.append(li+[n-k])
....return(L)
```

Et une version pour éviter les doubles :

```
def decomp(n) : #decompositions d'un entier en somme d'entiers non nuls
....#procedure recursive
....#int -> list of list of int
....if n == 0 :
........return [[ ]]
....L = [ ]
....for k in range(n) :
........Lk = decomp(k)
........for li in Lk :
............lii = sorted(li+[n-k])
............if not lli in L :
................L.append(lii)
....return(L)
```

Et une version pour éviter de solliciter trop de fois des calculs déjà faits :

```
D = {0 : [ ]} #un dictionnaire pour memoriser les listes deja trouvees

def decomp(n) : #decompositions d'un entier en somme d'entiers non nuls
....#procedure recursive
....#int -> list of list of int
....if n in D.keys() : #si on l'a deja calculee
........return D[n] #on la lit dans le dictionnaire
....L = [ ]
....for k in range(n) :
........Lk = decomp(k)
........for li in Lk :
............lii = sorted(li+[n-k])
............if not lli in L :
................L.append(lii)
....D[n] = L #on l'ajoute maintenant au dictionnaire
....return L
```

```
def maxordre(n) : #recherche classique de maximum
....#int -> int x list of int
....LD = decomp(n)
....maxi, Lm = 0, [ ]
....for L in LD :
.......ordre = lcmL(L)
.......if ordre > maxi :
...........maxi = ordre
...........Lm = L[: ]
....return maxi, Lm
```

Résultats :

n	ordre maxiumum	décomposition
0	1	
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	6	2+3
6	6	6 ou 2+6
7	12	3+4
8	15	3+5
9	20	4+5
10	30	2+3+5
11	30	5+6 ou 5+2+3
12	60	3+4+5
13	60	1+3+4+5
14	84	3+4+7
15	105	3+5+7
16	140	4+5+7
17	210	2+3+5+7
18	210	5+6+7 ou 1+2+3+5+7
19	420	3+4+5+7
20	420	1+3+4+5+7
21	420	2+3+4+5+7 et autres
22	420	4+5+6+7 par exemple encore
23	840	3+5+7+8
24	840	1+3+5+7+8
25	1260	4+5+7+9
26	1260	1+4+5+7+9
27	1540	4+5+7+11
28	2310	2+3+5+7+11
29	2520	5+7+8+9
30	4620	3+4+5+7+11
31	4320	1+3+4+5+7+11
32	5460	3+4+5+7+13
33	5460	1+3+4+5+7+11
34	9240	3+5+7+8+11
35	9240	1+3+4+7+8+11
36	13860	4+5+7+9+11

Je vous laisse trouver les suivants et essayer de trouver une formule générale.

◁ 31 ▷ Décomposez $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d\ e)} \circ \tau_{a,f} \circ \overrightarrow{(f\ g\ h\ i)}$ en produit de cycles de supports disjoints, et donnez son ordre (première puissance donnant Id).

La notation $\tau_{a,b}$ désigne le “bicycle” $\overrightarrow{(a\ b)}$.

	$\overrightarrow{(f\ g\ h\ i)}$		$\overrightarrow{(a\ f)}$		$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d\ e)}$	
a	$\rightarrow$	a	$\rightarrow$	f	$\rightarrow$	f
b	$\rightarrow$	b	$\rightarrow$	b	$\rightarrow$	c
c	$\rightarrow$	c	$\rightarrow$	c	$\rightarrow$	d
d	$\rightarrow$	d	$\rightarrow$	d	$\rightarrow$	e
e	$\rightarrow$	e	$\rightarrow$	e	$\rightarrow$	a
f	$\rightarrow$	g	$\rightarrow$	g	$\rightarrow$	g
g	$\rightarrow$	h	$\rightarrow$	h	$\rightarrow$	h
h	$\rightarrow$	i	$\rightarrow$	i	$\rightarrow$	i
i	$\rightarrow$	f	$\rightarrow$	a	$\rightarrow$	b

On déroule alors les images jusqu'à refermer pour avoir chaque cycle

a	$\rightarrow$	f	$\rightarrow$	g	$\rightarrow$	h	$\rightarrow$	i	$\rightarrow$	b	$\rightarrow$	c	$\rightarrow$	d	$\rightarrow$	e	

On a un unique cycle finalement $\overrightarrow{(a\ f\ g\ h\ i\ b\ c\ d\ e)}$.

Ce n'est qu'en l'élevant à la puissance 9 qu'on ramène les éléments à leur position initiale.
Son ordre vaut 9.

◁32▷ Décomposez les premières puissances de $\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)} \circ \overrightarrow{(10\ 11\ 12\ 13)}$ *(notée σ)* en produit de cycles de supports disjoints. Indiquez suivant l'exposant n le nombre de cycles de σ^n.
Existe-t-il une permutation φ vérifiant $\varphi \circ \varphi = \sigma$?
Existe-t-il une permutation φ vérifiant $\varphi \circ \varphi \circ \varphi = \sigma$?

Les deux cycles ont des supports disjoints. Chacun tourne donc dans son coin : $\sigma^n = \overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)}^n \circ \overrightarrow{(10\ 11\ 12\ 13)}^n$.
Mais chaque cycle de taille 9 ou 4 se casse en cycles plus petit suivant l'exposant.

	$\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)}^n$	$\overrightarrow{(10\ 11\ 12\ 13)}^n$
$n = 0$	Id	Id
$n = 1$	$\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)}$	$\overrightarrow{(10\ 11\ 12\ 13)}$
$n = 2$	$\overrightarrow{(1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 2\ 4\ 6\ 8)}$	$\overrightarrow{(10\ 12)} \circ \overrightarrow{(11\ 13)}$
$n = 3$	$\overrightarrow{(1\ 4\ 7)} \circ \overrightarrow{(3\ 6\ 9)} \circ \overrightarrow{(2\ 5\ 8)}$	$\overrightarrow{(10\ 13\ 12\ 11)}$
$n = 4$	$\overrightarrow{(1\ 5\ 9\ 4\ 8\ 3\ 7\ 2\ 6)}$	Id
$n = 5$	$\overrightarrow{(1\ 6\ 2\ 7\ 3\ 8\ 4\ 9\ 5)}$	$\overrightarrow{(10\ 11\ 12\ 13)}$
$n = 6$	$\overrightarrow{(1\ 7\ 4)} \circ \overrightarrow{(3\ 9\ 6)} \circ \overrightarrow{(2\ 8\ 5)}$	$\overrightarrow{(10\ 12)} \circ \overrightarrow{(11\ 13)}$
$n = 7$	$\overrightarrow{(1\ 8\ 6\ 4\ 2\ 9\ 7\ 5\ 3)}$	$\overrightarrow{(10\ 13\ 12\ 11)}$
$n = 8$	$\overrightarrow{(1\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)}$	Id
$n = 9$	Id	$\overrightarrow{(10\ 11\ 12\ 13)}$
$n = 10$	$\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)}$	$\overrightarrow{(10\ 12)} \circ \overrightarrow{(11\ 13)}$
$n = 11$	$\overrightarrow{(1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 2\ 4\ 6\ 8)}$	$\overrightarrow{(10\ 13\ 12\ 11)}$
$n = 12$	$\overrightarrow{(1\ 4\ 7)} \circ \overrightarrow{(3\ 6\ 9)} \circ \overrightarrow{(2\ 5\ 8)}$	Id

Je ne poursuis pas, la période est de 4 pour l'un et 9 pour l'autre, d'où 36 au final.

On peut au moins indiquer combien de cycles on a

$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$	$n = 12$				
0	2	3	4	1	2	4	2	1	1	3	2	3				

σ a pour signature $(-1)^8.(-1)^3$,ce qui fait -1.
Comment voudriez vous qu'il y ait φ vérifiant $\varphi \circ \varphi = \sigma$ (auquel cas on aurait $Sgn(\varphi)^2 = -1$).

Il n'y a pas de contradiction pour la signature à demander $\varphi^3 = \sigma$. Mais il y en a peut être ailleurs.
En effet, si φ se décompose en produit de cycles, il faut
soit que ceux ci se conservent (mais ils seraient de longueur 9 et 4, or, un cycle de longfueur 9 élevé au cube se casse en trois tricycles)
soit que ceux ci se cassent, mais alors ils se cassent en cycles de même taille.
Il n'y a pas de φ possible.

◁33▷ Explicitez $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)}$ *(notée σ)* ainsi que $\overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$.
Résolvez l'équation $\sigma^n = Id$ d'inconnue n dans $\mathbb{N}$.

	$\overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)}$		$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$				$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$		$\overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)}$	
a	$\longrightarrow$	a	$\longrightarrow$	b		a	$\longrightarrow$	b	$\longrightarrow$	b
b	$\longrightarrow$	b	$\longrightarrow$	c		b	$\longrightarrow$	c	$\longrightarrow$	c
c	$\longrightarrow$	c	$\longrightarrow$	d		c	$\longrightarrow$	d	$\longrightarrow$	e
d	$\longrightarrow$	e	$\longrightarrow$	e	et	d	$\longrightarrow$	a	$\longrightarrow$	a
e	$\longrightarrow$	f	$\longrightarrow$	f		e	$\longrightarrow$	e	$\longrightarrow$	f
f	$\longrightarrow$	g	$\longrightarrow$	g		f	$\longrightarrow$	f	$\longrightarrow$	g
g	$\longrightarrow$	h	$\longrightarrow$	h		g	$\longrightarrow$	g	$\longrightarrow$	h
h	$\longrightarrow$	d	$\longrightarrow$	a		h	$\longrightarrow$	h	$\longrightarrow$	d

On déroule en $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)} = \overrightarrow{(a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h)}$.

Mais aussi $\overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} = \overrightarrow{(a\ b\ c\ e\ f\ g\ h\ d)}$.
En recollant les deux quadricycles par un élément, on a crée un octocycle !

Les solutions de l'equation $\sigma^n = Id$ sont les multiples de 8. Pour faire des tours complets.

◁34▷ Soit $(G, .)$ un groupe où tout élément vérifie $x * x = 1$ (le neutre). Montrez que $(G, *)$ est commutatif.
(pensez à calculer $(a * b) * (a * b)$).

On se donne a et b. On veut montrer $a * b = b * a$.
On va appliquer la proprieté non seulement à a, mais aussi à b et à $a * b$.

On a $(a * b) * (a * b) = 1$.
On efface les parenthèses par associativité (et elle seule) : $a * (b * a) * b = 1$.
On compose à droite par b : $a * (b * a) * b * b = 1 * b$
$a * (b * a) = b$ car $b * b = 1$
On compose à gauche par a et il reste $(b * a) = a * b$. C'est fini.

◁35▷ On rappelle que $(S_5, \circ)$ est un groupe, de cardinal 120. Je n'en demande ni la liste des éléments ni le tableau de la loi de composition. Je vous demande de me donner un sous-groupe de cardinal 1, un sous-groupe de cardinal 2, un sous-groupe de cardinal 3, un sous-groupe de cardinal 4, un sous-groupe de cardinal 5, un sous-groupe de cardinal 6.

DansS_5, il y a l'identité, des cycles de taille 2 (comme $\overrightarrow{(1\ 3)}$), des cycles de taille 3 (comme $\overrightarrow{(1\ 4\ 3)}$), des cycles de taille 4 (comme $\overrightarrow{(1\ 3\ 2\ 4)}$), des cycles de taille 5 (comme $\overrightarrow{(1\ 3\ 2\ 5\ 4)}$), mais aussi des objets composites faits de deux bicycles (comme $\overrightarrow{(1\ 3)} \circ \overrightarrow{(2\ 5)}$) ou un bicycle et un tricycle.

- Le sous groupe le plus simple est $\{Id\}$.

- Vous en voulez un de cardinal 2 : prenez un bicycle $\{Id,\ \overrightarrow{(1\ 2)}\}$.

- Vous en voulez un de cardinal 3 : prenez un tricycle et son inverse : $\{Id,\ \overrightarrow{(1\ 2\ 3)},\ \overrightarrow{(3\ 2\ 1)}\}$.

- Et de cardinal 4 ? On ne s'en douterait pas : $\{Id,\ \sigma,\ \sigma^2,\ \sigma^3\}$ avec $\sigma = \overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 5)}$, et $\sigma^{-1} = \sigma^3$.

- Allez, on pose $\varsigma = \overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)}$ vérifiant $\varsigma^{-1} = \varsigma^4$ et on prend le groupe $\{Id,\ \varsigma,\ \varsigma^2,\ \varsigma^3,\ \varsigma^4\}$.

Pour le cardinal 6, on ne peut pas prendre un cycle de taille 6, on n'a pas ça en magasin. Alors quoi ? Un bicycle et un tricycle :
$\varphi = \overrightarrow{(1\ 2)} \circ \overrightarrow{(3\ 4\ 5)}$, et on a la liste de ses puissances

$\varphi^0 = Id$	$\varphi = \overrightarrow{(1\ 2)} \circ \overrightarrow{(3\ 4\ 5)}$	$\varphi^2 = \overrightarrow{(5\ 4\ 3)}$	$\varphi^3 = \overrightarrow{(1\ 2)}$	$\varphi^4 = \overrightarrow{(3\ 4\ 5)}$	$\varphi = \overrightarrow{(1\ 2)} \circ \overrightarrow{(5\ 4\ 3)}$

Quand on compose ces éléments entre eux, on obtient toujours un d'entre eux. On a un sous-groupe de $(S_5,\ \circ)$, et son cardinal est 6.
Ah oui, pour les inverses : $\varphi^6 = Id$, donc φ^k a pour inverse φ^{6-k}.

◃36▹ ♣ Combien de permutations de S_6 sont des carrés *(c'est à dire peuvent s'écrire $\sigma \circ \sigma$ pour au moins une permutation σ)* ?
Combien sont des cubes ?
Combien le cycle $\overrightarrow{(1\ 3\ 5)}$ a-t-il de racines carrées ?

Il y a 120 permutations, ce serait long de tenter de traiter toute la liste.
Mais on en élimine la moitié directement : si φ s'écrit $\varphi = \sigma \circ \sigma$ alors on a $Sgn(\varphi) = Sgn(\sigma)^2 = 1$ (la signature).
Ce ne peuvent être que des permutations de signature 1.
Par exemple $Id = Id^2$ (facile)
$\overrightarrow{(a\ b\ c)} = \overrightarrow{(a\ c\ b)} \circ \overrightarrow{(a\ c\ b)}$ (plus joli)
$\overrightarrow{(a\ c)} \circ \overrightarrow{(b\ d)} = \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$
mais $\overrightarrow{(a\ b)}$ ne peut êttre le carré de personne, sans rien essayer, jusqte parce que -1 n'est le carré de personne.

On dresse une taxonomie[5] des permutations et on élimine celles de signature -1,

signature -1	$\overrightarrow{(a\ b)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(d\ e)}$
	$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(c\ d)} \circ \overrightarrow{(e\ f)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d,\ e\ f)}$	
signature 1	Id	$\overrightarrow{(a\ b\ c)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(d\ e\ f)}$
	$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(c\ d)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d,\ e)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(e\ f)}$

et pour celles de signature 1, on trouve des racines carrées, en regardant déjà à quoi ressemble le carré de ces permutations :

permutation	$\overrightarrow{(a\ b)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(d\ e)}$	$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(c\ d)} \circ \overrightarrow{(e\ f)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d,\ e\ f)}$
carré	Id	$\overrightarrow{(a\ c)} \circ \overrightarrow{(b\ d)}$	$\overrightarrow{(a\ c\ b)}$	Id	$\overrightarrow{(a\ c\ e)} \circ \overrightarrow{(b\ d\ f)}$
	Id a beaucoup de racines				
Id	$\overrightarrow{(a\ b\ c)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(d\ e\ f)}$	$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(c\ d)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d,\ e)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(e\ f)}$
Id	$\overrightarrow{(a\ c\ b)}$	$\overrightarrow{(a\ c\ b)} \circ \overrightarrow{(d\ f\ e)}$	Id	$\overrightarrow{(a\ c\ e\ b'd)}$	$\overrightarrow{(a\ c)} \circ \overrightarrow{(b\ e)}$

Les cycles de taille impaire s'élèvent au carré en cycles de même taille.
Les cycles de taille paire s'élèvent au carré en se cassant en deux cycles plus petits.

Un objet tel que $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(e\ f)}$ malgré sa signature 1 n'a pas de racine carrée.

$\overrightarrow{(1\ 2\ 3)}$ a pour racine carré $\overrightarrow{(1\ 3\ 2)}$ (ne pas citer $\overrightarrow{(3\ 2\ 1)}$ c'est la même),
mais aussi des choses comme $\overrightarrow{(1\ 3\ 2)} \circ \overrightarrow{(4\ 5)}$.
Il suffit de mettre à côté du tricycle un bicycle fait de deux éléments parmi les trois qui restent.
Il y a donc une racine en simple tricycle et trois du type « tricycle rond bicycle ».

◃37▹ Un élève prétend que dans S_{10} *(permutations de la liste $[0, \ldots 9]$)*, il y a 10.9.8.7 cycles de taille 4 *(de la forme $\overrightarrow{a\ b\ c\ d}$)*. Il s'explique : 10 choix pour a, 9 pour b *(puisque différent de a)* et ainsi de suite. Expliquez pourquoi il a tort.
Un autre dit qu'il y en a $\binom{10}{4}$.6 *(choisir les éléments du cycle, et choisir l'ordre pour les citer de abcd à cdba en passant par cabd)*.
Qui a raison ?
Combien y a-t-il de cycles de taille k ?
♣ Combien y a-t-il dans S_{10} de permutations faites de deux quadricycles de supports disjoints ?

◃38▹ Combien y a-t-il dans S_6 de cycles de taille 4 ?
Combien y a-t-il dans S_6 de cycles σ de taille 4 vérifiant $\sigma(1) = 1$?
Combien y a-t-il dans S_6 de cycles σ de taille 4 vérifiant $\sigma(1) = 2$?
Combien y a-t-il dans S_6 de permutations σ de signature 1 ?
Combien y a-t-il dans S_6 de permutations σ de signature 1, vérifiant $\sigma(1) = 2$?

Rappel : la signature d'une permutation est 1 si elle se décompose en un nombre pair de bicycles, -1 sinon.
Exemple : $Sgn(\overrightarrow{(a\ b)}) = -1$, $Sgn(\overrightarrow{(a\ b\ c)}) = 1$ car $\overrightarrow{(a\ b\ c)} = \overrightarrow{(a\ c)} \circ \overrightarrow{(a\ b)}$, $Sgn(Id) = (-1)^0 = 1$.
La signature d'un $k-$cycle est $(-1)^{k-1}$. La signature d'une permutation générale est le produit des signatures des cycles qui la composent.

5. La taxonomie ou taxinomie est une branche des sciences naturelles qui a pour objet l'étude de la diversité du monde vivant. Cette activité consiste à décrire et circonscrire en termes d'espèces les organismes vivants et à les organiser en catégories hiérarchisées... bref, tout ça pour ne pas dire qu'on fait une classification

Pour construire un cycle de taille 4 dans S_6, il suffit de choisir les quatre éléments qu'on va faire bouger : $\binom{6}{4}$ choix, comme par exemple $\{1,\ 4,\ 5,\ 6\}$.
Ensuite, reste à savoir dans quel sens les faire tourner. Comme on sait que 1 va bouger, il suffit de savoir dans quel ordre les trois autres suivront :

$\overrightarrow{(1\,3\,5\,6)}$	$\overrightarrow{(1\,5\,3\,6)}$	$\overrightarrow{(1\,6\,3\,5)}$
$\overrightarrow{(1\,3\,6\,5)}$	$\overrightarrow{(1\,5\,6\,3)}$	$\overrightarrow{(1\,6\,5\,3)}$

Total : 90.

Si $\sigma(1)$ vaut 1, c'est que 1 ne bouge pas. Les éléments qui bougent sont donc 4 parmi 5.
Nouveau total : $\binom{5}{4}.3!$.

Si $\sigma(1) = 2$, c'est que 1 bouge. Et 2 aussi. Pour qu'ensuite on finisse par revenir sur 1.
Il reste à compléter le cycle avec deux éléments. A choisir parmi 4 : $\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Par exemple 4 et 5.
Et on complète le cycle : $\overrightarrow{(1\,2\,4\,5)}$ ou $\overrightarrow{(1\,2\,5\,4)}$.
Total : $\binom{4}{2}.2$.

La moitié des permutations a pour signature 1 et l'autre moitié a pour signature -1. Donc $\frac{6!}{2}$.

Argument :
chaque fois qu'on a une permutation σ de signature $+1$, on a la permutation $\sigma \circ \overrightarrow{(1\,2)}$ de signature -1.
chaque fois qu'on a une permutation σ' de signature -1, on a la permutation $\sigma' \circ \overrightarrow{(1\,2)}$ de signature $+1$.
Il y en a donc autant de chaque type.

Si une permutation vérifie $\sigma(1) = 2$, alors c'est une bijection de $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ dans $\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.
Il va donc y en avoir 5!.

Cinq choix pour $\sigma(2)$, puis quatre pour $\sigma(3)$ et ainsi de suite.

Maintenant, il y en a qui vont avoir pour signature -1. Par exemple $\overrightarrow{(1\,2)}$.
Et d'autres qui vont avoir pour signature $+1$. Par exemple $\overrightarrow{(1\,2\,3)}$.
Lesquelles sont les plus nombreuses ?

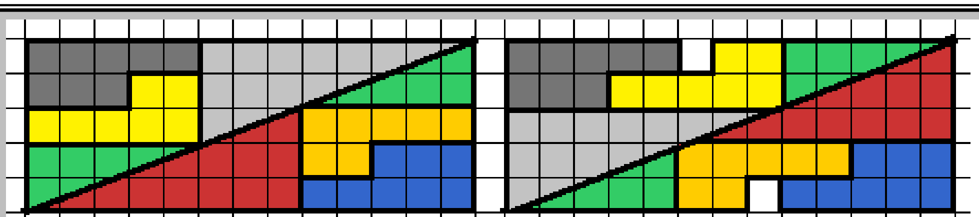
On va dire qu'il y en a autant de chaque.

Mais comment le prouver ? En reprenant l'idée de tout à l'heure.
A chaque permutation σ de signature $+1$ vérifiant $\sigma(1) = 2$, on associe $\overrightarrow{(4\,5)} \circ \sigma$ qui vérifie encore $(\overrightarrow{(4\,5)} \circ \sigma)(1) = 2$, mais dont la signature vaut -1.
A chaque permutation σ' de signature $+1$ vérifiant $\sigma'(1) = 2$, on associe $\overrightarrow{(4\,5)} \circ \sigma'$ qui vérifie encore $(\overrightarrow{(4\,5)} \circ \sigma')(1) = 2$, mais dont la signature vaut $+1$.

On a donc $\frac{5!}{2}$ permutations σ vérifiant $\sigma(1) = 2$ et $Sgn(\sigma) = 1$.

On peut d'ailleurs en donner la liste si on y tient.
Mais ça en fait quand même 60.

◁ 39 ▷



Il y a un truc qui cloche, non ?

C'est un puzzle de Fibonacci.
Les pièces sont bien les mêmes entre les deux assemblages.
Mais les triangles ne peuvent pas être « alignés ».
Dans les grands triangles, l'angle au sommet « pointu » est $Arctan(3/7)$.

Dans les petits triangles, l'angle au sommet « pointu » est $Arctan(2/5)$.
Il n'y a pas égalité.
Ceci signifie qu'il rest de l'espace un peu de part et d'autre de la diagonale.
Ou qu'au contraire dans l'autre puzzle, il y a un léger chevauchement.

◃40▹ On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout n de $\mathbb{Z}$ (et pas seulement $\mathbb{N}$).
Indiquez pour chacune des propriété ci dessous si vous la démontrez par récurrence simple, récurrence double, récurrence à forte hérédité, preuve directe.

		simple	double	forte	directe
a	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \in \mathbb{N}$				
b	$\forall n \in \mathbb{N},\ \sin(F_n.\pi) = 0$				
c	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{-2.n} \in \mathbb{N}$				
d	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{-2.n+1} \in \mathbb{Z}$				
e	chaque $F_{3.n+2}$ est pair				
f	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{2.n-1} + F_{-2.n-1} = 0$				
g	F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux				
h	$\forall n,\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$				
i	$\forall n \in \mathbb{N},\ (F_n)^2 + (F_{n+1})^2 = F_{2.n+2}$				
j	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n.(F_{n-1} + F_{n+1}) = F_{2.n+1}$				

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

		simple	double	forte	directe
a	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \in \mathbb{N}$		X	x	

Les deux premiers termes sont entiers.
Si pour un n donné, F_n et F_{n+1} sont entiers, alors leur somme l'est aussi.

Une récurrence forte convient aussi bien sût (à condition de l'avoir initialisée pour deux termes afin de pouvoir utiliser deux indices lors de l'éhérédité.

Une récurrence simple ne suffit pas. Si $F_n$est entier, rien ne permet de dire que $F_n + F_{n-1}$ le soit aussi.

Je pourrais alors ajouter un résultat direct, issu de celui ci : la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$est croissante.
En effet, $F_{n+1} - F = F_{n-1} \geqslant 0$ pour tout n.

		simple	double	forte	directe
a'	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+1} \geqslant F_n$				X

On note qu'une fois la récurrence double du a effectuée, ce résultat est direct.

En revanche, une récurrence n'est pas l'instrument utile pour prouver la croissance de (F_n) .
Comment prétendrez vous en effet passer de $F_{n+1} \geqslant F_n$ à $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \geqslant F_{n+1}$ si vous n'avez pas déjà prouvé que les $F_n$sont tous positifs.

Ceci signifie que l'élève qui écrit sur sa copie par réflexe attavique « la suite (F_n) est croissante, par récurrence sur n » passe pour un sombre crétin qui a des reflexes acquis (idiots) mais ne vérifie même pas que sa preuve tient la route.
Une fois encore, la pire attitude pour un futur ingénieur.

Qu'un ingénieur ne sache pas calculer, pourqoi pas.
Qu'un ingénieur ne sache pas apprendre des tonnes d'informations, pourquoi pas.
Qu'un ingénieur affirme des choses sans preuves, et c'est la porte ouverte aux pires dérives.

		simple	double	forte	directe
b	$\forall n \in \mathbb{N},\ \sin(F_n.\pi) = 0$				

C'est le m^me résultat que la question précédente.
Si on considére que le résultat précédent a été établi, alors c'est une preuve directe.

Sinon, il faut une récurrence forte, avec une formule aussi lorde que $\sin(F_{n+1}.\pi) = \sin(F_n.\pi).\cos(F_{n+1}.\pi) + \cos(F_n.\pi).\sin(F_{n+1}.\pi)$ dans laquelle les deux sinus sont nuls par hypothèse de rang n.

On étend la suite aux négatifs.

Et pour remonter en arrière, on écrit par exemple
- $F_{-1} + F_0 = F_1$ donc $F_{-1} + 1 = 1$
- $F_{-2} + F_{-1} = F_0$ donc $F_{-2} + 0 = 1$
- $F_{-3} + F_{-2} = F_{-1}$ donc $F_{-3} + 1 = 0$
- $F_{-4} + F_{-3} = F_{-2}$ donc $F_{-4} + (-1) = 1$

et ainsi de suite

n	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	-21	13	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

On devine des choses, avec les mêmes termes mais des signes moins. Et encore, pas toujours...

La formule utile pour remonter dans le temps sera $\boxed{F_{n-1} = F_{n+1} - F_n}$

		simple	double	forte	directe
c	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{-2.n} \in \mathbb{N}$				

Tant qu'on n'a pas de formule reliant $F_{-2.n}$ à un F_p avec p positif, on ne peut pas espérer une preuve directe.

Si on veut mener une récurrence (simple ou double), il faut relier $F_{-2.(n+1)}$ à $F_{-2.n}$ et peut être $F_{-2.(n-1)}$.
$F_{-2.(n-2)} = F_{-2.n-2} = F_{-2.n} - F_{-2.n-1}$ et on est bien embête, car on ignore le signe de $F_{-2.n-1}$.
Et si pour prouver $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{-2.n} \in \mathbb{N}$ on doit déjà prouver $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{-2.n-1} \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$ (je veux dire « est négatof »), on ne va pas s'en sortir.
Mais comment faire autrement ?

En fait, on prouve $F_{-p}.(-1)^p \in \mathbb{N}$ par récurrence double sur p.

		simple	double	forte	directe
d	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{-2.n+1} \in \mathbb{Z}$		X		

On prouve en fait $\forall p \in \mathbb{N},\ F_{-p} \in \mathbb{Z}$ par récurrence double.
Et ensuite, on applique au cas particulier de $n = 2.p - 1$.

		simple	double	forte	directe
e	chaque $F_{3.n+2}$ est pair	X	inutile	inutile	

F_2 est pair, il vaut 2.
On se donne n et on suppose $F_{3.n+2}$ pait.
Il faut accéder à $F_{3.(n+1)+2}$ c'est à dire à $F_{3.n+5}$.

On voit mal comment faire sans utiliser les intermédiaires sur lesquels aucune hypothèse ne porte.

Et pourtant :
$$\begin{array}{rcll} F_{3.n+5} & = & F_{3.n+4} & +F_{3.n+3} \\ F_{3.n+5} & = & F_{3.n+3} + F_{3.n+2} & +F_{3.n+3} \\ F_{3.n+5} & = & & 2.F_{3.n+3} \quad +F_{3.n+2} \end{array}$$
Or, $2.F_{3.n+3}$ est pair (entier fois 2) et $F_{3.n+2}$ est pair (hypothèse de récurrence).
Il s'ensuit que $F_{3.n+5}$ est pair.

Et c'est bien une récurrence simple.

		simple	double	forte	directe
f	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{2.n-1} + F_{-2.n-1} = 0$				

		simple	double	forte	directe
g	F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux	X			

F_0 et F_1 n'ont qu'un diviseur commun, et c'est 1.

Prenons n fixé et supposons que le seul diviseur commun de F_n et F_{n+1} est 1.
Il faut montrer que F_{n+1} et F_{n+2} n'ont pas de diviseur commun à part 1.
Soit donc d un diviseur commun de F_{n+2} et F_{n+1}.
Alors d divise aussi leur différence $F_{n+2} - F_{n+1}$ (qui vaut F_n).
d divise donc à la fois F_{n+1} et F_n, il ne peut valoir que 1 (hypothèse d erécurrence).
Le seul diviseur commun de F_{n+1} et F_n est 1, ils sont premiers entre eux.

Variante. On suppose que pour n donné, on a une relation de Bézout liant F_n et F_{n+1} de la forme $a.F_n + b.F_{n+1} = 1$ avec a et b entiers (condition nécessaire et suffisante pour qu'ils soient premiers entre eux).
On cherche à obtenir une relation $\alpha.F_{n+1} + \beta.F_{n+1} = 1$.
Mais si on remplace F_n par $F_{n+2} - F_{n-1}$ dans $a.F_n + b.F_{n+1} = 1$, on a $a.(F_{n+1} - F_{n+1}) + b.F_{n+1} = 1$ c'est à dire $(b-a).F_{n+1} + a.F_{n+2} = 1$. les deux entiers α et β existent bien.

Autre variante : la relation $F_n.(F_{n+2)} - F_{n+1}.(F_{n+1}) = \pm 1$ est tout de suite une relation de Bézout entre F_n et F_{n+1}.
Mais comment la prouver facilement ?
Moi je sais, mais il faut utiliser la suite.

		simple	double	forte	directe
h	$\forall n,\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$	X	x	x	

Oui, quand je mets récurrence simple, il va de soi que le résultat peut aussi être prouvé par récurrence double, puisque si on démontre $(P_{n+1} \Rightarrow P_{n+2})$
on a aussi $(P_n$ et $P_{n+1)}) \Rightarrow (P_{n+2})$

Pour n égal à 0, on a bien $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{-2} & F_{-1} \\ F_{-1} & F_0 \end{pmatrix}$
Pour n égal à 1, on a bien $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{-1} & F_0 \\ F_0 & F_1 \end{pmatrix}$
Pour n égal à 2, on a bien $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 \\ F_1 & F_2 \end{pmatrix}$

J'en initialise trop, mais son n'est jamais assez prudent.

Pour un n quelconque donné, supposons $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$ et multiplions par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_{n-2} + F_{n-1} \\ F_n & F_{n-1} + F_n \end{pmatrix}$$

On reconnaît bien $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$.

Comme quoi même avec la suite de Fibonacci, définie par « double hérédité », il peut y avoir des récurrences simples.

Une fois ce résultat établi, on a des conséquences énormes.
Par exemple, si on passe au déterminant :

$$\det(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n) = \det(\begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix})$$

Mais la formule de Terminale $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$ répétée plusieurs fois donne $\det(M^n) = (\det(M))^n = (-1)^n$.
On a donc $\boxed{F_n.F_{n-2} - (F_n)^2 = (-1)^n}$ preuve directe !

		simple	double	forte	directe
i	$\forall n \in \mathbb{N},\ (F_n)^2 + (F_{n+1})^2 = F_{2.n+2}$				X

Si si, directe une fois qu'on a prouvé le $\boxed{\text{h}}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2.n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

tout est dit !

		simple	double	forte	directe
j	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n.(F_{n-1} + F_{n+1}) = F_{2.n+1}$				

◁41▷

Résolvez $(1+t^2).y'_t+(1+t).y_t=0$ d'inconnue y fonction de t.
Il faudra penser à séparer $\dfrac{1+t}{1+t^2}$ en $\dfrac{1}{1+t^2}+\dfrac{1}{2}.\dfrac{2.t}{1+t^2}$.

L'équation $(1+t^2).y'_t+(1+t).y_t=t^2$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus, avec second membre identiquement nul. Elle n'est pas sous la forme de Cauchy-Lipschitz, mais ça ne posera pas de problème, puisque sur tout $\mathbb{R}$, on peut diviser : $y'_t+\dfrac{1+t}{1+t^2}.y_t=0$

Avec les notations habituelles : $a_t=\dfrac{1+t}{1+t^2}$. On intègre ? $A_t=Arctan(t)+\dfrac{\ln(1+t^2)}{2}$.

On met un signe moins, on passe à l'exponentielle ($e^{-\ln(1+t^2)/2}=e^{-\ln(\sqrt{1+t^2})}$: $\boxed{h_t=h_0.\dfrac{e^{-Arctan(t)}}{\sqrt{1+t^2}}}$

◁42▷

♡ Sachant $y_0=2$ et $2^t.y'_t+3^t.y_t=0$, calculez y_1.

L'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients continus $2^t.y'_t+3^t.y_t=1$ avec condition initiale se met sous forme de Cauchy Lipschitz sur $\mathbb{R}$ sans problème : $y'_t+(3/2)^t.y_t=0$. Avec les notations habituelles : $a_t=(3/2)^t=e^{t.\ln(3/2)}$. On intègre en $A_t=\dfrac{e^{t.\ln(3/2)}-1}{\ln(3/2)}$ histoire d'avoir la primitive nulle en 0. On trouve donc $y_t=y_0.e^{-\left(e^{t.\ln(3/2)}-1\right)/\ln(3/2)}=2.e^{-\left(e^{t.\ln(3/2)}-1\right)/\ln(3/2)}$. On veut la valeur en 1 : $2.e^{-\left(e^{\ln(3/2)}-1\right)/\ln(3/2)}$.

On simplifie en $\boxed{2.e^{-\left(\frac{3}{2}-1\right)/\ln(3/2)}=2.e^{\frac{3}{2.\ln(2/3)}}}$ et on n'a guère mieux.

◁43▷

Existe-t-il une équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y'_t+a_t.y_t=b_t$ qui admette pour solution ch et sh ?

On veut à la fois $\begin{array}{rcl} ch(t) & +a_t.sh(t) & = & b_t \\ & et & \\ sh(t) & +a_t.ch(t) & = & b_t \end{array}$ ou même $\begin{array}{rcl} a_t.sh(t) & - & b_t & = & -ch(t) \\ et & & \\ a_t.ch(t) & - & b_t & = & -sh(t) \end{array}$.

On trouve $a_t=1$ et $b_t=e^t$. On vérifie. C'était évident .

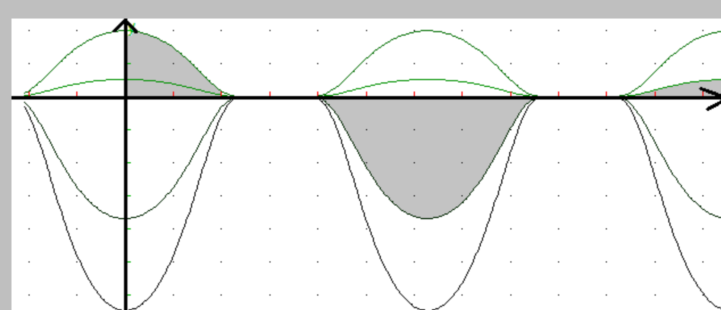
◁44▷

Sachant $y_0=1$ et $y'_t+t.y_t=0$ pour tout t, calculez y_1.

$y'_t+t.y_t=0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus, sous forme de Cauchy-Lipschitz, avec second membre nul, et avec une condition initiale. On aura unicité de la solution.
On résout l'équation homogène associée dont les solutions sont $Vect(t\longmapsto e^{-t^2/2})$.
Avec condition initiale : $y_t=e^{-t^2/2}$. On trouve $y_1=1/\sqrt{e}$.

◁45▷

De quelle équation différentielle linéaire linéaire d'ordre 1 à coefficients continus et à second membre nul $t\longmapsto\exp\left(\dfrac{-1}{\cos^2(t)}\right)$ est elle solution ?



Quelle est la dimension de l'espace des solutions.

Deux approches possibles.

On calcule y' et on ajuste pour avoir $y'_t+a_t.y_t=0$ (ou même on calcule le quotient $\dfrac{y'_t}{y_t}$, comme dans la résolution physicienne).
On sait que les solutions sont de la forme $\lambda.\exp(-A_t)$. Pour retrouver a, il suffit d'identifier A et de dériver.

Ici, $A_t=\dfrac{1}{\cos^2(t)}$ et donc $a_t=\dfrac{2.\sin(t)}{\cos^3(t)}$ (dérivez $\cos^{-2}$, c'est tout).

J'ai pour équation $\boxed{y'_t + \frac{2.\sin(t)}{\cos^3(t)}.y_t = 0}$

La résolution se fait sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Et on a un espace des solutions de dimension 1.

◁ 46 ▷ ♡ Sachant que u, v et w sont solutions de $y''_t + a_t.y'_t + b_t.y_t =_{\forall t} 0$, on pose $\omega = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$. Montrez $\omega' = \begin{vmatrix} u & v \\ u'' & v'' \end{vmatrix}$ puis $\omega'_t + a_t.\omega_t = 0$ ($\forall t$).

On développe $\omega = u.v' - u'.v$ (oui, on dirait un numérateur connu).
On dérive et simplifie : $\omega' = u'.v' + u.v'' - u''.v - u'.v' = u.v'' - u''.v$.
On remplace : $\omega' = u.(-a.v' - b.v) - (-a.u' - b.u).v$ car u et v sont solutions de l'équation.
Il reste : $\omega' = -a.v'.u + a.u'.v$.
On reconnaît : $\omega' = -a.\omega$ (le tout écrit sans t, à l'étage des fonctions).

On pouvait aussi au passage comparer ω' à $\begin{vmatrix} u & v \\ u'' & v'' \end{vmatrix}$ et trouver qu'il y avait égalité.

ω est le wronskien.

◁ 47 ▷ ♡ Donnez l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont l'ensemble des solutions est $\{t \longmapsto t + \lambda.\sqrt{1+t^2}, \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

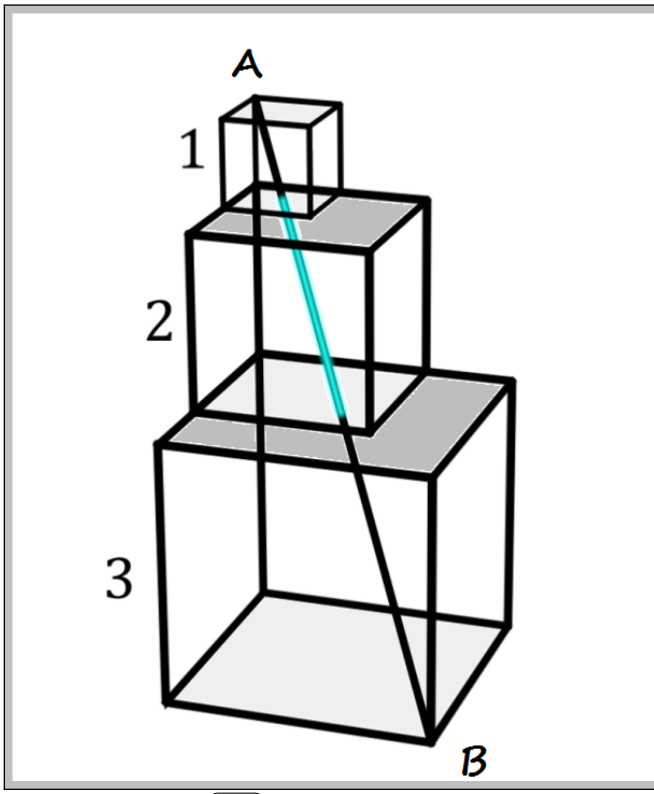
On cherche une équation de solutions $\{t \longmapsto t + \lambda.\sqrt{1+t^2}, \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. On comprend que l'équation homogène associée est $h'_t + a_t.h_t = 0$ avec a de primitive A donnant... euh, je me perds. Il faut et il suffit que $t \longmapsto \sqrt{1+t^2}$ soit solution. Ceci donne $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + a_t.\sqrt{1+t^2} = 0$. On a donc $a_t = -\frac{t}{1+t^2}$.
L'équation avec second membre est de la forme $y'_t - \frac{t}{1+t^2}.y_t = s_t$ et doit admettre pour solution « *particulière* » $t \longmapsto t$: $1 - \frac{t}{1+t^2}.t = s_t$.

On peut finalement proposer *(sous forme de pas-Cauchy-Lipschitz)* : $\boxed{(1+t^2).y'_t - t.y_t = 1}$

◁ 48 ▷ Trouvez avec Python le premier entier naturel dont l'écriture décimale du carré commence par 2024.

Ah oui, il y a un litige avec certains d'entre vous. Quand je dis écriture décimale, c'est pour dire « écriture en base 10 *», car l'écriture d'un entier dépend de la base dans laquelle on travaille. Et des élèves plus physiciens que mathématiciens croient que écriture décimale, ça veut dire « avec une virgule ».*
Disons le tout de suite, l'écriture d'un entier n'a pas besoin d'une virgumle, en effet. Et sinon, une cériture avec virgule dépend aussi de la base choisie. Vous êtes souvent trop influencés pa la base 10*, comme tous les cahralatans qui vous font de la numérologie. Rappelons que le nombre de l'antéchrist peut faire flipper les naïfs en base* 10*, mais s'écrit juste* 1010011010 *en base* 2*, et il n'y a rien à dire dessus.*

◁ 49 ▷



Quelle est la longueur de la grande diagonale $[A,\ B]$. Quelle est la longueur de sa partie « en bleu » dans le cube du milieu ?

Calculez $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}.dx$ et $\int_0^2 \sqrt{4-2^x}.dx$.
L'une vaudra $2.\dfrac{\ln(2+\sqrt{3})-\ln(2-\sqrt{3})-\sqrt{3}}{\ln(2)}$ *et l'autre* π.

Résolvez le système $\log_x(y)+\log_y(x)=\dfrac{50}{7}$ et $x.y=256$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$ *(rappel* $y=\log_a(x)\Leftrightarrow a^y=x$*).*

Donnez moi un entier ayant exactement 15 diviseurs.

On est dans $rang(53)$ pour l'addition et la multiplication modulo 53. L'équation $x^2+2.x+2=0$ a pour discriminant -4. L'élève dit « Δ est négatif, elle n'a donc pas de solution ». Il n'a rien compris ! Δ a une racine carrée assez évidente ! Résolvez l'équation.

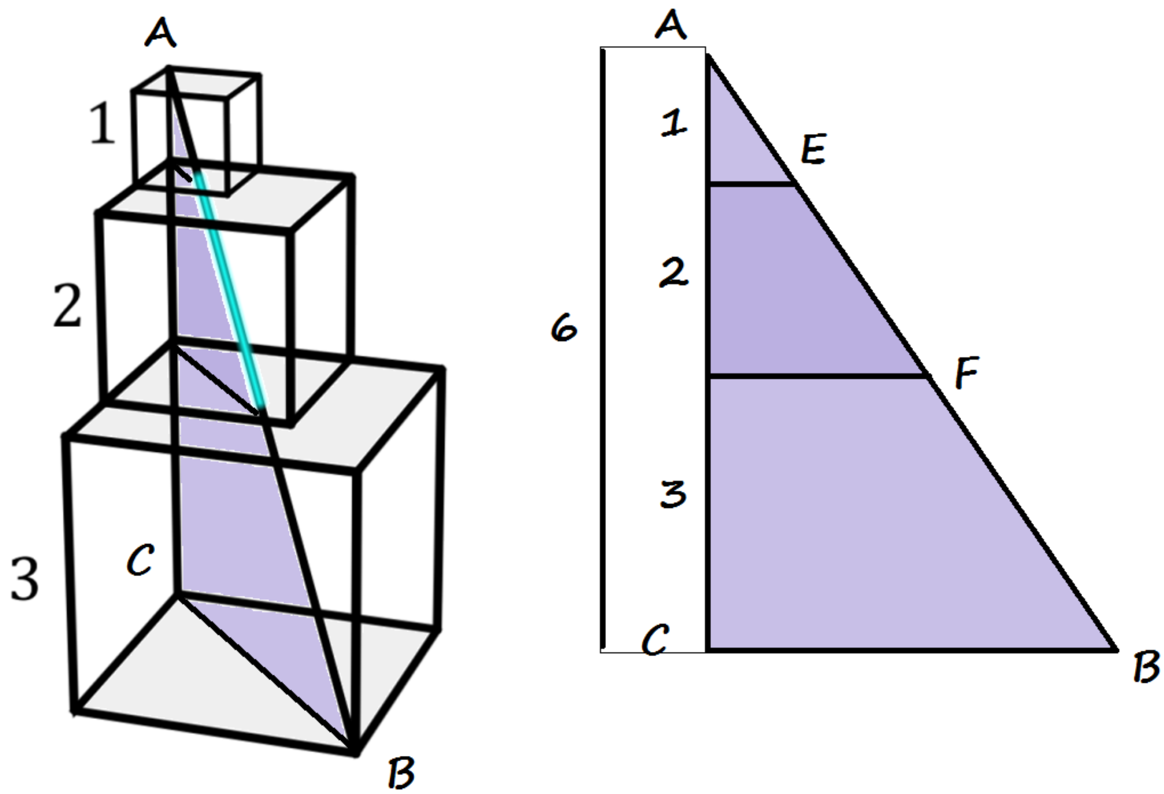
Un entier tel que $\boxed{2^{14}}$ a quinze diviseurs : les 2^p pour p allant de 0 à 14 lui même.
[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384]

Sinon, il y a 144. [1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144] .
On explique : $\boxed{144=2^4.3^2}$
Des diviseurs sont les $2^a.3^b$ avec $a\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ et $b\in\{0,\ 1,\ 2\}$.
Cinq choix pour l'un, et trois pour l'autre. Total (ou produit) : 15.

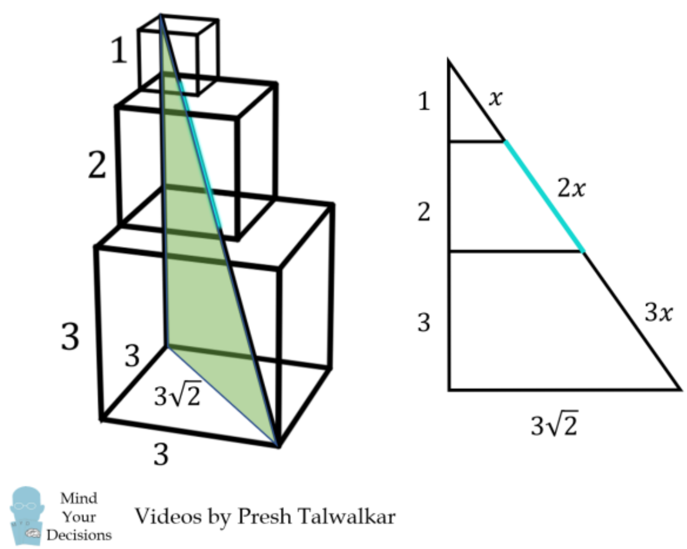
Le carré qui supporte l'ensemble a pour côté 3 et donc pour diagonale $3.\sqrt{2}$.
On coupe l'empilement de cubes suivant le plan de coupe matérialisé.
On obtient un triangle. Rectangle en un point qu'on va appeler C.

La hauteur totale des trois cubes est 6. On a donc $AC=6$.
On l'a dit au début : $BC=3.\sqrt{2}$.

Par théorème de Pythagore : $AB=\sqrt{6^2+(3.\sqrt{2})^2}=\sqrt{54}$. Simplifiable si on veut.



On va conclure par théorème de Thalès. La section que l'on cherche est à 2 (hauteur du cube du milieu)
ce que $\sqrt{54}$ (grande diagonale)
est à 6 (hauteur totale).



On a donc $\dfrac{EF}{2}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\sqrt{54}}{6}$.

La longueur cherchée vaut $\dfrac{\sqrt{54}}{3}$ ce qui fait $\sqrt{6}$.

Sinon, il y a aussi ça (source : Mind Your Decisions) :

On rappelle
$$\begin{aligned} y=\log_a(x) &\Leftrightarrow & a^y &= x \\ &\Leftrightarrow & e^{y.\ln(a)} &= x \\ &\Leftrightarrow & y.\ln(a) &= \ln(x) \\ &\Leftrightarrow & y &= \tfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$
(et pour $a=e$, on a le logarithme naturel).

L'équation $\log_x(y)+\log_y(x)=\dfrac{50}{7}$ donne $\dfrac{(\ln(x))^2+(\ln(y))^2}{\ln(x).\ln(y)}=\dfrac{50}{7}$.

et $x.y=256$ donne $\ln(x)+\ln(y)=8\ln(2)$.

On note a et b les deux « vraies inconnues » : $a=\ln(x)$ et $b=\ln(y)$: $7.(a^2+b^2)=50.a.b$
$a+b=8.\ln(2)$

La première équation dit $7.(a+b)^2=64.a.b$. En y reportant la seconde (et en divisant par 64) : $a.b=7.(\ln(2))^2$.

a et b sont les deux racines de $X^2 - 8.\ln(2).X + 7.(\ln(2))^2$ de discriminant $25.(\ln(2))^2$ et de racines $7.\ln(2)$ et $\ln(2)$.
On a donc $\{a,\ b\} = \{\ln(2),\ 7.\ln(2)\}$ puis $\{x,\ y\} = \{2,\ 128\}$.
On encadre $\boxed{S_{x,y} = \{(2,\ 128),\ (128,\ 2)\}}$ et on vérifie : $\log_2(128) + \log_{128}(2) = 7 + \dfrac{1}{7}$.

Résolvons $x^2 + 2.x + 2 = 0$ (et c'est $(x+1)^2 + 1 = 0$).
Son discriminant vaut -4. Mais ne dites pas que ce nombre est négatif et n'a donc pas de racine carrée...
La notion de signe n'a pas de sens dans $(\mathbb{F}_{53}, +, .)$. Rappelons que -1 c'est aussi 52. Alors...
La vraie question, dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$ et partout n'est pas « quel est le signe de Δ
elle est Δ est il le carré de quelqu'un.
Et ici, $7^2 = 49 = -4$.
On a de la chance, on n'a pas eu à chercher trop loin...
Sinon, il fallait étudier $d^2 = -4 + p.53$ avec p et d dans $\mathbb{Z}$.
On pose donc $\delta = 7$ (et on fout à la poubelle les cours de Terminale avec $\sqrt{\Delta}$,on est d'accord !).
On a donc deux racines : $(-2+\delta).2^{-1}$ et $(-2-\delta).2^{-1}$.
Mais qui est -2 ? C'est 51.
Et qui est 2^{-1} ? C'est 27 car $2 \times 27 = 54$.

Plein de vos réflexes acquis au collège et lycée sont à étendre.

$-x$ est l'opposé de x. Et ici, c'est modulo 53.

Une division par 2, c'est une multiplication par l'inverse de 2.

Une extraction de racine, c'est une question « de qui est ce le carré ? ».

On trouve $\boxed{S = \{22,\ 29\}}$

Et on vérifie : somme = $22 + 29 = 51 = -2$
produit : $22 \times 29 = 638 = 2$ car 636 est multiple de 53

◃50▹ ♡ Pouvez vous construire un triangle dont les sommets sont des points du quadrillage (=coordonnées entières) et dont l'aire vaut 2019 ? Pouvez vous construire un triangle dont les sommets sont des points du quadrillage et dont l'aire vaut 20, 19 ?

Les points du quadrillage ont des coordonnées entières. Les vecteurs qui les joignent ont des composantes entières. les déterminants calculés sont donc entiers.
On divise par 2.
Les aires des triangles à sommets entiers sont dons des demi entiers (donc soit des entiers, soit des décimaux en $\dots, 5$).
On ne pourra pas obtenir 20, 19 par exemple.

Pour obtenir 2019, il suffit de prendre par exemple $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2019 \end{vmatrix}$.
On prend la trois points $A(0,\ 0)$, $B(2,\ 0)$ et $C(0,\ 2019)$.
`La question est ensuite : combien de modèles de triangles ? Et avec un périmètre minimal...`

«Pourquoi la terre tourne ?
- Parce qu'elle est ronde !
- Alors, pourquoi est elle ronde ?
- Mais... Parce qu'elle tourne !»
Jacques Prévert.

◃51▹ Un défi pseudo mathématique mal posé mais circulant sur Internet propose

2	+	4	=	10
4	+	6	=	28
5	+	2	=	15
6	+	3	=	24
7	+	9	=	?

Pourquoi mal posé ? Parce que le « plus » n'est pas une addition. En langage mathématique : l'ateur a pensé à une loi interne sur $\mathbb{Z}$ qui vérifie $2 * 4 = 10$ et ainsi de suite.

Quelle est « fort varisemblablement » la loi qu'il a définie ?
Et maintenant, est ellle interne ? Commutative ? Associative ? A-t-on un neutre à droite, à gauche ?

◃52▹ Il parait qu'on a $[(1+\sqrt{2})^8] = 1153$. Le physicien valide, parce qu'il a une calculatrice à portée de main. mais franchement il a trouvé $(1+\sqrt{2})^8 \simeq 1153.9991$. Ce n'est pas convaincant, car il a besoin d'une précision relative au millionnième pour être sûr de ne pas avoir 1154.
Alors, c'est à vous d'utiliser plutôt votre cerveau. Et la formule du binôme. Et M(1-\sqrt 2)^8 . Avec ça, je pense avoir tout dit.