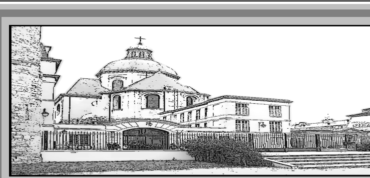
LYCEE CHARLEMAGNE

"Lundi 11" novembre

M.P.S.I.2



2024 2025

TD07

◁ 0 ▷ La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = F_1 = 1$ et pour tout n : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Montrez pour tout n : $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \leqslant F_n \leqslant 2^n$.

Résolvez : F_n est pair d'inconnue entière n.

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour tout n : $U_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$. Montrez que (U_n) est une suite géométrique de raison (à gauche) M *(c'est à dire $U_{n+1} = M.U_n$ et déduisez $U_n = M^n.U_0$)*.

Montrez : $M^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$ par récurrence sur n *(est ce une convention de poser $M^0 = I_2$ ou bien est ce logique ?)*.

On rappelle : $\det(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = a.d - b.c$. Montrez pour tout couple de matrces : $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$.

Déduisez : $F_{n-1}.F_{n+1} - (F_n)^2 = (-1)^{n-1}$ pour tout n. Oui, il s'agit d'utiliser le déterminant !

Déduisez que le seul facteur commun à F_n et F_{n+1} est 1.

◁ 1 ▷ Guillaume Deslandes (ex MPSI2, livre chez Ellipses traduit aux presses du MIT) vous a donné des poids *(pardon des masses)* de 100, 300, 900 grammes ainsi que $2,7$ et $8,1$ kilogrammes. Montrez qu'avec une balance de type Roberval *(deux plateaux)*, vous pouvez peser toute quantité de 0 à 10 kilos *(par tranches de* 100 *grammes)* et même plus. Prouvez que c'est un système de poids optimal.

◁ 2 ▷ T_n est le n^{ieme} polynôme de Tchebychev. Calculez $T_{20}(\sqrt{3}/2)$, $T_{13}(1/2)$ et $T'_{13}(1/2)$.
Résolvez $T_{16}(x) > 1$ d'inconnue réelle x.

◁ 3 ▷

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

Pafnouti encore

◇ 0 ◇ Montrez l'existence pour tout n de $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos\left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)}}$ noté S_n. Calculez S_0 et S_1.

◇ 1 ◇ Sachant $\cos\left(\frac{2.\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, calculez S_2.

◇ 2 ◇ On introduira le polynôme $\boxed{\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\left(\frac{2.k.\pi}{2.n+1}\right)\right)}$ qu'on notera $P_n(X)$. Pour tout n, on note encore T_n le n^{ieme} polynôme de Tchebychev, toujours caractérisé par $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n.\theta)$ pour tout angle θ. Donnez la liste des racines réelles de l'équation $T_{2.n+1}(x) = 1$ et de l'équation $T'_{2.n+1}(x) = 0$.

◇ 3 ◇ Déduisez : $T_{2.n+1}(X) - 1 = 2^{2.n}.(X-1).(P_n(X))^2$ (polynôme que l'on notera Q_n).

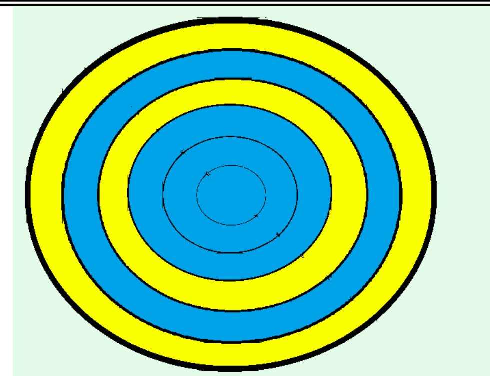
◇ 4 ◇ Calculez $Q_n(0)$ et montrez $Q'_n(0) = (-1)^n.(2.n+1)$.

◇ 5 ◇ Montrez que si H est un polynôme factorisé sous les deux formes $H(X) = a_d.\prod_{k=1}^{d}(X - r_k) = \sum_{p=0}^{q} a_p.X^p$, alors on a $\frac{H'(X)}{H(X)} = \sum_{k=0}^{d} \frac{1}{X - r_k}$ et $\frac{H'(0)}{H(0)} = \frac{a_1}{a_0}$ (en supposant que 0 n'est pas racine de H).

◇ 6 ◇ Calculez S_n pour tout n.

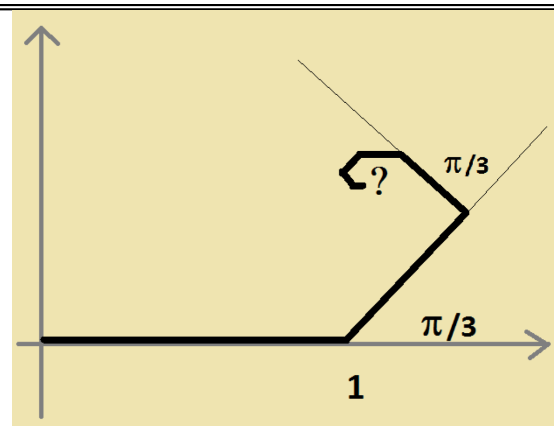
$\diamond 7 \diamond$ Ah oui, j'ai écrit "sachant $\cos\left(\frac{2.\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$" ; beh on va dire que je ne le sais pas. Alors montrez le, en résolvant $\cos(2.\theta) = \cos(3.\theta)$ d'inconnue θ.

Origine : Crux mathematicorum, de la Canadian Mathematical Society.



♣ Il fallait découper le gâteau *(ci contre vu du dessus)* en deux parts égales. Au lieu d'effectuer une découpe "en argument", on a effectué une découpe "en module". Sur le schéma, on a des cercles concentriques de rayons entiers 1 à 6. Montrez que les deux parts colorées sont égales.

$\triangleleft 4 \triangleright$ Re-répartissez ce découpage en deux parts égales.



On part de l'origine. On avance de une unité dans la direction du demi-axe réel positif. On tourne de $\pi/3$. On avance d'une demi unité. On tourne de $\pi/3$. On avance d'un quart d'unité. On tourne de $\pi/3$. On avance d'un huitième d'unité. On tourne de $\pi/3$. On avance d'un seizième d'unité. A chaque fois, on tourne du même angle $\pi/3$, et on divise la distance par 2. Vers quel point se dirige-t-on ?
En gardant le même angle $\pi/3$ mais en remplaçant le rapport $1/2$ par un autre rapport r, est il possible de converger vers le point d'affixe i ?
C'est un exercice très simple sur la série géométrique..

$\triangleleft 5 \triangleright$ Écrivez un script `Python` avec module `turtle`.

Petit problème : mon correcteur orthographique ne connaît pas le mot turtle (normal, c'est de l'anglais). Mais de là à ce qu'il me propose en remplacement le mot « turlute »...
Rappel : la turlute est le cri de l'alouette, un équipement pour la pêche et également une façon de chanter (québécoise) par onomatopées, proche du beat-box finalement.

$\triangleleft 6 \triangleright$ Comment s'appelle un anneau $(A, \oplus, \otimes)$ vérifiant $\forall(a,\ b) \in A^2,\ a \otimes b = 0 \Leftrightarrow (a = 0\ et\ b = 0)$?
(non, ce n'est pas seulement « un anneau intègre », lisez bien).

$\triangleleft 7 \triangleright$ Un élève s'est trompé et a écrit la définition suivante pour un anneau intègre $(A, +, \times)$:
$\boxed{\forall(a,\ b) \in A^2,\ (a \times b = 0) \Rightarrow (a = 0\ et\ b = 0)}$ Trouvez l'erreur et montrez qu'un seul anneau vérifie ceci.

$\triangleleft 8 \triangleright$ Un élève a affirmé : "*dans l'anneau $(A, +, .)$ l'élément a est absorbant pour la seconde loi, c'est donc le neutre de la première*". A-t-il inventé une réciproque farfelue ?

$\triangleleft 9 \triangleright$ Résolvez $X^2 + 23.X + 24 = 0$ dans l'ensemble range(39) pour l'addition et la multiplication modulo 39 (attention, 39 n'est pas premier, l'anneau n'est pas intègre).

$\triangleleft 10 \triangleright$ L'ensemble des quaternions de Hamilton contient non seulement 1 et i mais aussi j (un autre que $e^{i.2.\pi/3}$) et k, vérifiant $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ mais aussi $i.j = k$ mais même $j.i = -k$. Et aussi $j.k = i$ et $k.j = -i$. Et enfin $k.i = j$ et $i.k = -j$.
La mutliplication (dont on admettra l'associativité) n'est plus commutative. Sinon, tout va presque bien pour les calculs, on distribue, on fait passer les réels comme on veut. Par exemple

$$(1 + i - j + 2.k).(2 + i - k) = (2 + i - k) + i.(2 + i - k) - j.(2 + i - k) + 2.k.(2 + i - k)$$

$$(1 + i - j + 2.k).(2 + i - k) = (2 + i - k) + (2.i - 1 + j) + (-2.j + k + i) + (4.k + 2.j + 2)$$
$$(1 + i - j + 2.k).(2 + i - k) = 3 + 4.i + j + 4.k$$

Calculez pour vérifier $(2+i-k).(1+i-j+2.k)$. Vérifiez que ces deux quaternions ont quand même le même module, égal au produit des modules (le module de $a+b.i+c.j+d.k$ est $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$).

	1	i	j	k	en ligne : a
1	1	i	j	k	
i	i	-1	-k	j	
j	j	k	-1	-i	
k	k	-j	i	-1	
b					dans la case $a\times b$

♣ Résolvez $i.z=z.i$ d'inconnue z dans $\mathbb{H}$.
Résolvez $i.z=z.j$ d'inconnue z dans $\mathbb{H}$.
Montrez que dans $\mathbb{H}$ les six quaternions i, $-i$, j, $-j$, k et $-k$ sont racines du polynôme X^2+1.
Montrez que ce sont les seules *(indication : on rappelle que le module d'un quaternion $a+b.i+c.j+d.k$ est $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ et qu'on a $|z^2|=|z|^2$).*
Quelles factorisations sont correctes :

$X^2+1=(X+i).(X-i)$	$X^2+1=(X-i).(X-j)$
$X^2+1=(X-i).(X+i)$	$X^2+1=(X+i).(X-i).(X+j).(X-j).(X+k).(X-k)$

Vérifiez que $\{1,-1,\ i,-i,\ j,-j,\ k,-k\}$ est un groupe commutatif pour la multiplication.

◁ 11 ▷ On vous a dit "effectue le produit de i, j et k, dans $\mathbb{H}$ (Hamilton). Mais on ne vous a pas dit dans quel ordre. Combien de valeurs différentes pouvez vous obtenir ?
On vous a dit "effectue le produit de $1+i$, $1+j$ et $1+k$, dans $\mathbb{H}$". Mais on ne vous a pas dit dans quel ordre. Combien de valeurs différentes pouvez vous obtenir ?
On vous a dit "effectue le produit de $2.i$, $i+j$ et $i+k$, dans $\mathbb{H}$". Mais on ne vous a pas dit dans quel ordre. Combien de valeurs différentes pouvez vous obtenir ?

◁ 12 ▷ ♡ On pose $G=\{$☻, ☺, ★, ■, ☼$\}$ histoire de bien embêter le monde. On suppose que $(G,\ *)$ est un groupe.

On donne une partie du tableau :

*	☼	★	☻	☺	■
☼		☺	☼	☻	
★	☺				
☻					
☺	☻	■			☼
■		☻			☺

Montrez que la relation ☻ $*$ ☼ $=$ ☼ entraîne que ☻ est le neutre (attention, neutre ce n'est pas juste $\exists a\in G,\ a*n=a$, c'est $\forall x\in G,\ x*n=n*x=x$, mais tenez compte du fait qu'on vous a dit qu'on avait un groupe).

Complétez alors la colonne et la ligne de ☻.
Complétez ■ $*\star=?$.

Montrez que pour tout a duu groupe $(G,\ *)$, l'application $x\longmapsto x*a$ est une bijection de G dans G.
Déduisez que chaque élément de G est présent une fois et une seule sur chaque ligne.
De même, justifiez : chaque élément est présent une fois et une seule par colonne.
Complétez le tableau, vérifiez que la loi est commutative.
Combien devriez vous faire de tests pour vous assurer de son associativité ?

◁ 13 ▷ Calculez $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}$ (réduisez au dénominateur commun, c'est joli)..

◁ 14 ▷ L"application f prend un rationnel x, écrit son écriture décimale et remplace tous les 5 par des 4, et le remet sous forme rationnelle.
Calculez $f\Big(\frac{1}{2}\Big)$, $f\Big(\frac{1}{4}\Big)$, $f\Big(\frac{17}{14}\Big)$. Combien l'équation $f(x)=\frac{73}{495}$ a-t-elle de solutions ?
Combien l'équation $f(x)=\frac{541}{990}$ a-t-elle de solutions ?

◁ 15 ▷ Montrez $Arctan\Big(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\Big)=\frac{\pi}{4}+\frac{Arcsin(x)}{2}$ pour tout réel x de $[-1,\ 1[$.

◁ 16 ▷ ♡ (a_n) et (b_n) sont les suites $\forall n,\ a_n=4^n-3.(-1)^n$ et $\forall n,\ b_n=-4^{n+1}+5.(-1)^n$.
Trouvez la matrice M vérifiant $M.\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2\end{pmatrix}$.
Vérifiez qu'on a alors $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n\end{pmatrix}=M^n.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0\end{pmatrix}$ (sans calculer M^n).

◁ 17 ▷ Montrez que la somme des diviseurs de $2^3.5.7^2$ vaut 5130. Existe-t-il un entier dont la somme des diviseurs vaut 2021 ?

◁18▷ J'ai trouvé $ch(\theta) = 5$. Calculez $ch(4.\theta)$ et $th(\theta)$.

◁19▷ ♡ Y a-t-il plus de parties à 8 éléments dans un ensemble à 15 éléments que de parties à 12 éléments dans un ensemble à 17 éléments.

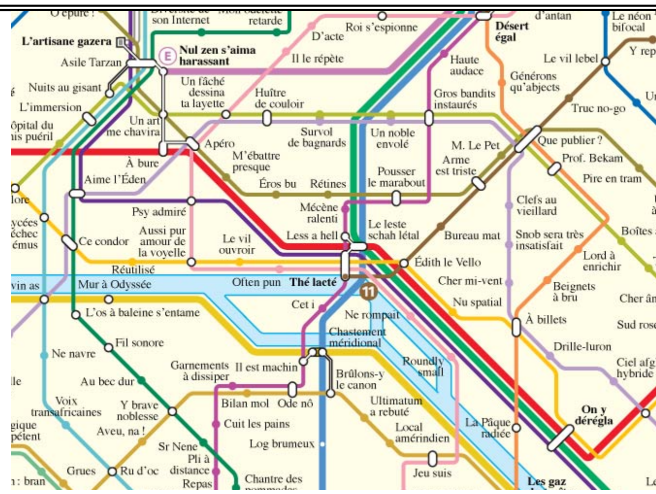
◁20▷ ♡ E est l'ensemble $MPSI2$. On note $\mathbb{F}$ l'ensemble des filles et $\mathbb{G}$ celui des garçons.
Combien l'équation $A \cap \mathbb{F} = \emptyset$ a t-elle de solutions d'inconnue A dans $P(E)$?
Combien l'équation $A \cap \mathbb{F} = \{Samira\}$ a t-elle de solutions d'inconnue A dans $P(E)$?
Combien l'équation $(A\Delta\mathbb{F}) \cap \mathbb{F} = \{Zaina\}$ a t-elle de solutions d'inconnue A dans $P(E)$?
Combien l'équation $(A\Delta\mathbb{G}) \cap \mathbb{F} = \{Zaina\}$ a t-elle de solutions d'inconnue A dans $P(E)$?

◁21▷ ♡ On définit : $A * B = \overline{A}\Delta\overline{B}$. Cette loi est elle commutative ? Est elle associative ? Dispose-t-elle d'un neutre ?
Mêmes questions avec $A \star B = \overline{A}\Delta B$.
Rappel : $\overline{A}$ est le complémentaire de A (les éléments qui ne sont pas dans A).
$C\Delta D$ est la différence symétrique de C et D (les éléments qui sont dans C ou dans D, mais pas dans les deux, le "ou" exclusif).

◁22▷ ♡ La loi $\cap$ est distributive sur Δ (dans l'ensemble des parties d'un ensemble). Mais la loi $\cap$ est elle distributive sur $\cap$?
Et Δ est elle distributive sur $\cap$?
Et Δ est elle distributive sur Δ ?

◁23▷ Simplifiez $(A\Delta B) \cap (\overline{A}\Delta B) \cap (\overline{A}\Delta\overline{B}) \cap (A\Delta\overline{B})$ pour A et B parties d'un ensemble E.

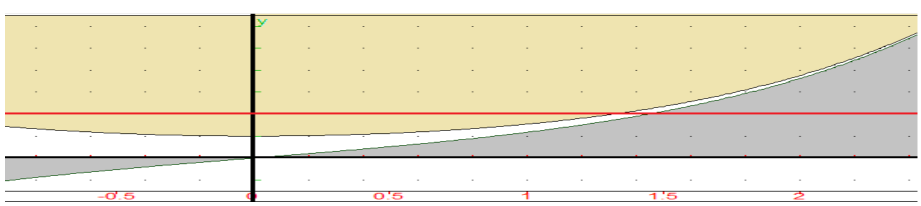
Un tour aux portes de Paris dans le sens trigonométrique :
Réunion postdatée. Clé d'hypocrite. Vélo à serpillère. La mort pilote. Amulette. Vil soleil urbain. L'autorité dupe. Le volapuk du savant affamé. Vicieuse irritante. Dose hypocrite. Encadrèrent photo. Préméditer un loto. Protège ta blonde. Sapin et graviers. Piéton perdant. Lopette vétillarde. Plan d'égout incorrect.



◁24▷ *http : //www.gef.free.fr/metro.html*

◁25▷

♡ Résoudre
$sh(t) \leqslant 2 \leqslant ch(t)$
d'inconnue réelle t.



◁26▷ Calculez ces trois intégrales $\int_0^1 2^t.dt$, $\int_0^1 2^t.3^{(2^t)}.dt$ et $\int_0^1 2^t.(3^2)^t.dt$.

◁27▷ ♡ Montrez que pour $ch(x) = 5/4$, on a $sh(x) \in \mathbb{Q}$.
Combien existe-t-il de solutions dans $\mathbb{R}$ à l'équation $(ch(x), sh(x)) \in \mathbb{Z}^2$?
Combien existe-t-il de solutions dans $\mathbb{R}$ à l'équation $(ch(x), sh(x)) \in \mathbb{Q}^2$?
Rappel : $ch(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, $sh(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, $ch^2 - sh^2 = ?$.

◁28▷ Montrez que pour tout entier naturel n, $(t.\ln(t))^n$ tend vers 0 quand t tend vers 0.

Pour tout n, on pose $I_n = \int_0^1 (\ln(t))^n.dt$. Calculez I_0, I_1 et I_2.
Calculez I_n pour tout n en intégrant par parties.

◁29▷ ♡ Que donne la composée de deux petits cycles, suivant leur taille et suivant le nombre d'éléments communs ?

Un bicycle et un tricycle.			
$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ \alpha)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(a\ \alpha\ \beta)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b\ \alpha)} \circ \overrightarrow{(a\ b)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ \alpha\ \beta)} \circ \overrightarrow{(a\ b)}$	$=$
Deux tricycles.			
$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ \alpha)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(a\ c\ b)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(b\ a\ \alpha)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(a\ \alpha\ \beta)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ \alpha)}$	$=$
Un quadricycle et un bicycle.			
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ c)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ \alpha)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(b\ a)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ c)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$	$=$
Un quadricycle et un tricycle.			
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ c\ b)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ d\ c)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ c\ d)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ \alpha)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ c\ \alpha)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ d\ \alpha)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ \alpha\ \beta)}$	$=$
Deux quadricycles.			
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ c\ b\ d)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ d\ c)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ \alpha)}$	$=$
$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ \alpha\ \beta)}$	$=$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ \alpha\ \beta\ \gamma)}$	$=$
il manquerait encore quoi ?			

◁30▷ ♡ Pour comprendre le théorème de Lagrange (le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe).
On se donne un groupe $(G,\ *)$ de cardinal N et un sous-groupe H de cardinal n, dont on notera les éléments h_1 à h_n (ordre arbitraire et sans importance, retenez juste que le neutre de G en fait partie).
On les place dans la première colonne dans tableau.
On prend alors un élément x_1 de E qui n'est pas dans cette colonne (que déduisez vous s'il n'y en a pas ?). On remplit alors la deuxième colonne avec les $x_1 * h_k$ pour k de 1 à n.
Montrez que tous les éléments de cette colonne sont distincts et sont différents de tous les éléments de la première colonne.

On prend alors un élémentx_2 de G qui n'est dans aucune des deux premières colonnes (que déduisez vous s'il n'y en a pas ?). On remplit alors la troisième colonne avec les $x_2 * h_k$ pour h de 1 à n.
Montrez que tous les éléments de cette colonne sont distincts et sont différents de tous les éléments des deux premières colonnes.

Recommencez autant de fois que nécessaire. Que concluez vous quand vous avez tout épuisé ?
Pour comprendre, deux exemples où j'ai commencé à remplir les colonnes.

groupe : les entiers de 0 à 19 pour l'addition modulo 20				
sous groupe : les multiples de 5				
0	1	2	.	.
5	6			
10	11			
15				

groupe : les 24 permutations de $[a,\ b,\ c,\ d]$

sous groupe : $\{Id,\ \overrightarrow{(a\ b\ c)},\ \overrightarrow{(a\ c\ b)}\}$

Id	$\overrightarrow{(a\ b)}$	$\overrightarrow{(a\ d)}$	$\overrightarrow{(b\ d)}$	$\overrightarrow{(a\ c\ d)}$			
$\overrightarrow{(a\ b\ c)}$	$\overrightarrow{(b\ c)}$	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$		$\overrightarrow{(a\ b\ d)}$			
$\overrightarrow{(a\ c\ b)}$	$\overrightarrow{(a\ c)}$	$\overrightarrow{(a\ c\ b\ d)}$	$\overrightarrow{(a\ c\ d\ b)}$				

◁31▷ L'ordre d'une permutation σ est le plus petit indice p non nul vérifiant $\sigma^p = Id$. Donnez dans S_{15} puis dans S_{16} une permutation d'ordre le plus grand possible.
♯ Un programme qui prend n en entrée et cherche le plus grand ordre qu'on puisse atteindre ?
Combien y a-t-il dans S_9 de permutations d'ordre 7 ?
Combien y a-t-il dans S_9 de permutations d'ordre 8 ?
Combien y a-t-il dans S_9 de permutations d'ordre 6 ?

◁32▷ Décomposez $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d\ e)} \circ \tau_{a,f} \circ \overrightarrow{(f\ g\ h\ i)}$ en produit de cycles de supports disjoints, et donnez son ordre (première puissance donnant Id).
La notation $\tau_{a,b}$ désigne le "bicycle" $\overrightarrow{(a\ b)}$.

◁33▷ Décomposez les premières puissances de $\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)} \circ \overrightarrow{(10\ 11\ 12\ 13)}$ *(notée σ)* en produit de cycles de supports disjoints. Indiquez suivant l'exposant n le nombre de cycles de σ^n.
Existe-t-il une permutation φ vérifiant $\varphi \circ \varphi = \sigma$?
Existe-t-il une permutation φ vérifiant $\varphi \circ \varphi \circ \varphi = \sigma$?

◁34▷ Explicitez $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)}$ *(notée σ)* ainsi que $\overrightarrow{(d\ e\ f\ g\ h)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$.
Résolvez l'équation $\sigma^n = Id$ d'inconnue n dans $\mathbb{N}$.

◁35▷ Soit $(G, .)$ un groupe où tout élément vérifie $x * x = 1$ (le neutre). Montrez que $(G, *)$ est commutatif.
(pensez à calculer $(a * b) * (a * b)$).

◁36▷ On rappelle que $(S_5, \circ)$ est un groupe, de cardinal 120. Je n'en demande ni la liste des éléments ni le tableau de la loi de composition. Je vous demande de me donner un sous-groupe de cardinal 1, un sous-groupe de cardinal 2, un sous-groupe de cardinal 3, un sous-groupe de cardinal 4, un sous-groupe de cardinal 5, un sous-groupe de cardinal 6.

◁37▷ ♣ Combien de permutations de S_6 sont des carrés *(c'est à dire peuvent s'écrire $\sigma \circ \sigma$ pour au moins une permutation σ)* ?
Combien sont des cubes ?
Combien le cycle $\overrightarrow{(1\ 3\ 5)}$ a-t-il de racines carrées ?

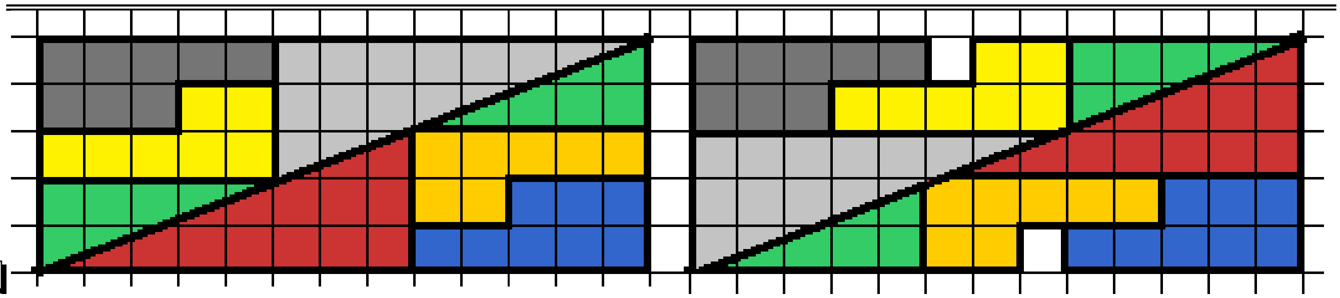
> Dans cet exercice et d'autres on pourra utiliser la notion de signature : la signature d'une permutation vaut 1 ou -1. On admet $Sgn(\sigma \circ \varphi) = Sgn(\sigma).Sgn(\varphi)$, $Sgn(Id) = 1$, et un cycle de taille k a pour signature $(-1)^{k-1}$. C'est tout ce dont a besoin pour la signature, n'allez pas lire des cours de quatre pages inutiles pour l'instant.

◁38▷ Un élève prétend que dans S_{10} *(permutations de la liste $[0, \dots 9]$)*, il y a 10.9.8.7 cycles de taille 4 *(de la forme $\overrightarrow{a\ b\ c\ d}$)*. Il s'explique : 10 choix pour a, 9 pour b *(puisque différent de a)* et ainsi de suite. Expliquez pourquoi il a tort.

Un autre dit qu'il y en a $\binom{10}{4}.6$ *(choisir les éléments du cycle, et choisir l'ordre pour les citer de abcd à cdba en passant par cabd).*
Qui a raison ?
Combien y a-t-il de cycles de taille k ?
♣ Combien y a-t-il dans S_{10} de permutations faites de deux quadricycles de supports disjoints ?

◃39▹ Combien y a-t-il dans S_6 de cycles de taille 4 ?
Combien y a-t-il dans S_6 de cycles σ de taille 4 vérifiant $\sigma(1) = 1$?
Combien y a-t-il dans S_6 de cycles σ de taille 4 vérifiant $\sigma(1) = 2$?
Combien y a-t-il dans S_6 de permutations σ de signature 1 ?
Combien y a-t-il dans S_6 de permutations σ de signature 1, vérifiant $\sigma(1) = 2$?

Rappel : la signature d'une permutation est 1 si elle se décompose en un nombre pair de bicycles, -1 sinon.
Exemple : $Sgn(\overrightarrow{(a\ b)}) = -1$, $Sgn(\overrightarrow{(a\ b\ c)}) = 1$ *car* $\overrightarrow{(a\ b\ c)} = \overrightarrow{(a\ c)} \circ \overrightarrow{(a\ b)}$, $Sgn(Id) = (-1)^0 = 1$.
La signature d'un $k-$*cycle est* $(-1)^{k-1}$*. La signature d'une permutation générale est le produit des signatures des cycles qui la composent.*



◃40▹ Il y a un truc qui cloche, non ?

◃41▹ On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout n de $\mathbb{Z}$ (et pas seulement $\mathbb{N}$).
Indiquez pour chacune des propriété ci dessous si vous la démontrez par récurrence simple, récurrence double, récurrence à forte hérédité, preuve directe.

		simple	double	forte	directe
a	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \in \mathbb{N}$				
b	$\forall n \in \mathbb{N},\ \sin(F_n.\pi) = 0$				
c	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{-2.n} \in \mathbb{N}$				
d	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{-2.n+1} \in \mathbb{Z}$				
e	chaque $F_{3.n+2}$ est pair				
f	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{2.n-1} + F_{-2.n-1} = 0$				
g	F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux				
h	$\forall n,\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$				
i	$\forall n \in \mathbb{N},\ (F_n)^2 + (F_{n+1})^2 = F_{2.n+2}$				
j	$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n.(F_{n-1} + F_{n+1}) = F_{2.n+1}$				

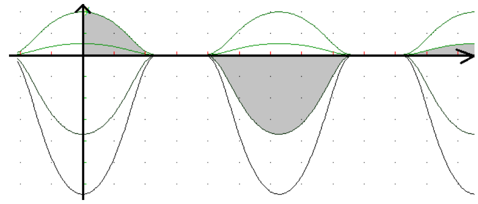
◃42▹ Résolvez $(1+t^2).y'_t + (1+t).y_t = 0$ d'inconnue y fonction de t.
Il faudra penser à séparer $\dfrac{1+t}{1+t^2}$ en $\dfrac{1}{1+t^2} + \dfrac{1}{2}.\dfrac{2.t}{1+t^2}$.

◃43▹ ♡ Sachant $y_0 = 2$ et $2^t.y'_t + 3^t.y_t = 0$, calculez y_1.

◃44▹ ♡ Existe-t-il une équation différentielle linéaire d'ordre 1 $y'_t + a_t.y_t = b_t$ qui admette pour solution ch et sh ?

◃45▹ ♡ Sachant $y_0 = 1$ et $y'_t + t.y_t = 0$ pour tout t, calculez y_1.

◃46▹ De quelle équation différentielle linéaire linéaire d'ordre 1 à coefficients continus et à second membre nul $t \longmapsto \exp\left(\dfrac{-1}{\cos^2(t)}\right)$ est elle solution ?



Quelle est la dimension de l'espace des solutions.

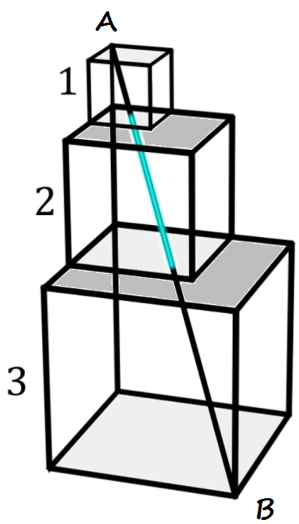
◁47▷ ♡ Sachant que u, v et w sont solutions de $y''_t + a_t.y'_t + b_t.y_t =_{\forall t} 0$, on pose $\omega = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$. Montrez $\omega' = \begin{vmatrix} u & v \\ u'' & v'' \end{vmatrix}$ puis $\omega'_t + a_t.\omega_t = 0$ $(\forall t)$.

◁48▷ ♡ Donnez l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont l'ensemble des solutions est $\{t \longmapsto t + \lambda.\sqrt{1+t^2},\ |\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

◁49▷ Trouvez avec Python le premier entier naturel dont l'écriture décimale du carré commence par 2024.

Ah oui, il y a un litige avec certains d'entre vous. Quand je dis écriture décimale, c'est pour dire « écriture en base 10 *», car l'écriture d'un entier dépend de la base dans laquelle on travaille. Et des élèves plus physiciens que mathématiciens croient que écriture décimale, ça veut dire « avec une virgule ». Disons le tout de suite, l'écriture d'un entier n'a pas besoin d'une virgule, en effet. Et sinon, une cériture avec virgule dépend aussi de la base choisie. Vous êtes souvent trop influencés pa la base* 10*, comme tous les cahralatans qui vous font de la numérologie. Rappelons que le nombre de l'antéchrist peut faire flipper les naïfs en base* 10*, mais s'écrit juste* 1010011010 *en base* 2*, et il n'y a rien à dire dessus.*

◁50▷



Quelle est la longueur de la grande diagonale $[A, B]$.
Quelle est la longueur de sa partie « en bleu » dans le cube du milieu ?

Calculez $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}.dx$ et $\int_0^2 \sqrt{4-2^x}.dx$.
L'une vaudra $2.\dfrac{\ln(2+\sqrt{3}) - \ln(2-\sqrt{3}) - \sqrt{3}}{\ln(2)}$ *et l'autre* π.

Résolvez le système $\log_x(y) + \log_y(x) = \dfrac{50}{7}$ et $x.y = 256$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}^{+*}$ *(rappel* $y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$*)*.

Donnez moi un entier ayant exactement 15 diviseurs.

On est dans $rang(53)$ pour l'addition et la multiplication modulo 53. L'équation $x^2 + 2.x + 2 = 0$ a pour discriminant -4. L'élève dit « Δ est négatif, elle n'a donc pas de solution ». Il n'a rien compris ! Δ a une racine carrée assez évidente ! Résolvez l'équation.

◁51▷ ♡ Pouvez vous construire un triangle dont les sommets sont des points du quadrillage (=coordonnées entières) et dont l'aire vaut 2019 ? Pouvez vous construire un triangle dont les sommets sont des points du quadrillage et dont l'aire vaut 20, 19 ?

◁52▷ $P(X)$, est un polynômre de degré 2024. Montrez que $P(X) - 3.P(X+1) + 3.P(X+2) - P(X+3)$ n'est plus de degré 2024.
Mais que est le degré maximal qu'il puisse atteindre ?

◁53▷ Un défi pseudo mathématique mal posé mais circulant sur Internet propose

2	+	4	=	10
4	+	6	=	28
5	+	2	=	15
6	+	3	=	24
7	+	9	=	?

Pourquoi mal posé ? Parce que le « plus » n'est pas une addition. En langage mathématique : l'ateur a pensé à une loi interne sur $\mathbb{Z}$ qui vérifie $2 * 4 = 10$ et ainsi de suite.
Quelle est « fort varisemblablement » la loi qu'il a définie ?

Et maintenant, est ellle interne ? Commutative ? Associative ? A-t-on un neutre à droite, à gauche ?

◁ 54 ▷ Il parait qu'on a $[(1+\sqrt{2})^8] = 1153$. Le physicien valide, parce qu'il a une calculatrice à portée de main. mais franchement il a trouvé $(1+\sqrt{2})^8 \simeq 1153.9991$. Ce n'est pas convaincant, car il a besoin d'une précision relative au millionnième pour être sûr de ne pas avoir 1154.
Alors, c'est à vous d'utiliser plutôt votre cerveau. Et la formule du binôme. Et M(1-\sqrt 2)^8 . Avec ça, je pense avoir tout dit.

«Pourquoi la terre tourne ?
- Parce qu'elle est ronde !
- Alors, pourquoi est elle ronde ?
- Mais... Parce qu'elle tourne !»
Jacques Prévert.