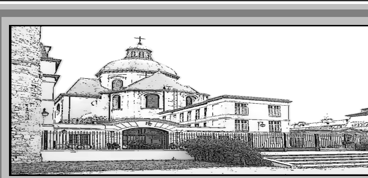
LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 6 novembre
M.P.S.I.2



2024 2025

IS06

♡ 0 ♡ Montrez qu'un entier naturel est divisible par 9 si et seulement si la somme des chiffres de son écriture décimale est un multiple de 9. 2 pt.

♡ 1 ♡ Montrez que dans un anneau, le neutre « additif » est absorbant pour la « multiplication ». 2 pt.

♡ 2 ♡ Justifiez $\overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta B$ pour deux parties A et B d'un ensemble E. 2 pt.

♡ 3 ♡ Montrez : $((p \Rightarrow q)\ et\ (p \Rightarrow \overline{q})) = (\overline{p})$. 2 pt.

♡ 4 ♡ Montrez que le cosinus hyperbolique ($ch(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$) vérifie aussi la relation « de Tchebhyptchev » : $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ ch((n+1).t) = 2.ch(t).ch(n.t) - ch((n-1).t)$. 2 pt.

♡ 5 ♡ $A = \{a,\ 1,\ \diamond\}$, $B = \{b,\ 1\}$, déterminez $P(A)\Delta P(B)$ et $P(A\Delta B)$ et leur cardinal. 3 pt.

◇ 0 ◇ On rappelle la notation dans un anneau tel que $(\mathbb{C},\ +,\ \times)$: $\lambda.A = \{\lambda.a \mid a \in A\}$ et $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$. Précisez pour les éléments de la premiere colonne si ils sont dans les ensembles : 4 pt.

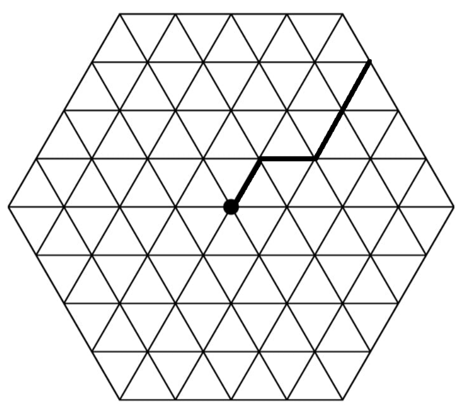
	$2.\mathbb{Z} + i.\mathbb{Z}$	$(2+i).\mathbb{Z}$	$(2+i).\mathbb{Z} + (1+i).\mathbb{Z}$	$(1+i).(\mathbb{Z} + i.\mathbb{Z})$	$2.\mathbb{Z} + (2+i).\mathbb{Z} + (3+i).\mathbb{Z}$
0					
1					
$1+i$					
$1-i$					

◇ 1 ◇ Un exercice classique est « *f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on suppose $f \circ f$ croissante et $f \circ f \circ f$ strictement décroissante, il faut montrer que f est décroissante* ».
Que répondre à l'élève $\mathscr{A}$ qui dit « *si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante ($x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow f(f(x)) \leqslant f(f(y))$) et de même $f \circ f \circ f$ est décroissante* ».
Que pensez vous de l'élève $\mathscr{B}$ qui dit « *si f était croissante, $f \circ f \circ f$ serait croissante, or elle est décroissante, donc f n'est pas croissante, on en déduit qu'elle est décroissante* ».
Que pensez vous de l'élève $\mathscr{C}$ qui dit « *je prends a et b avec $a \leqslant b$, j'ai alors $f(f(a)) \leqslant f(f(b))$ et $f(f(f(a))) \geqslant f(f(f(b)))$; en posant $\alpha = f(f(a))$ et $\beta = f(f(b))$, j'ai $\alpha \leqslant \beta$ et $f(\alpha) \geqslant f(\beta)$; je reconnais f est décroissante* ».
Que pensez vous de l'élève $\mathscr{D}$ qui dit « *comme $f \circ f$ est croissante, sa dérivée est positive : $\forall t,\ f'(t).f'(f(t)) \geqslant 0$; comme $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante, sa dérivée est négative : $f'(x).f'(f(x)).f'(f(f(x))) < 0$; or, en posant $t = f(x)$ dans la première, j'ai déjà $f'(f(x)).f'(f(f(x))) \geqslant 0$; en comparant : $f'(x) < 0$ et je reconnais que f est décroissante* ». 4 pt.
Soyez l'élève $\mathscr{E}$ qui donne enfin la bonne réponse (en passant par un taux d'accroissement de f dans lequel vous insérez...). 2 pt.

♣ Cet élève part tous les matins à la même heure. Quand il fait du dix à l'heure, il arrive avec un quart d'heure de retard en cours.
Quand il fait du quinze kilomètre à l'heure, il arrive avec seulement cinq minutes de retard.
A quelle distance habite-t-il du lycée. 2 pt.

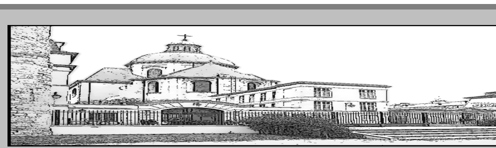
◇ Un polynôme non constant f vérifie $\forall x,\ f(f(x)) + f(x) = (f(x))^2$. Trouvez son degré, trouvez le polynôme, calculez $f(10)$. 4 pt.

Dénombrez les chemins. 4 pt.



Partant du centre, combien de chemin de longueur 4 permettent d'atteindre le bord?

LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 6 novembre
M.P.S.I.2



2024 2025
IS06
CORRECTION

IS06 Questions de cours.

Prenons un entier naturel n d'écriture en base 10 $\overline{c_d c_{d-1} \dots c_0}$ (les $c_k$sont des chiffres de 0 à 9). On traduit

$$n = c_d.10^d + c_{d-1}.10^{d-1} + \dots + 10.c_1 + c_0$$

Comme 10 est égal à 1 modulo 9, on a aussi $10^k = 1\ [9]$ pour tout exposant k (récurrence rapide sur k).
On a donc $n = c_d.10^d + c_{d-1}.10^{d-1} + \dots + 10.c_1 + c_0 \equiv c_d + c_{d-1} + \dots + c_1 + c_0\ [9]$.

Si on y tient : $\exists N \in \mathbb{N},\ n = \sum_{k=0}^{d} c_k + 9.N$.

On peut alors raisonner par équivalences ou double implication.
Si n est un multiple de 9 alors par soustraction, $n - 9.N$ est aussi un multiple de 9, la somme des chiffres de n est multiple de 9.

Si la somme $\sum_{k=0}^{d} a_k$est multiple de 9, alors par somme n est un multiple de 9.

En fait, c'est la transitivité de la congruence qui sert.

Rappel : « n est un multipIde 9 », ce n'est pas $n = 9.k$.
Ni $n = 9.k,\ k \in \mathbb{Z}$.
C'est $\exists k \in \mathbb{Z},\ n = 9.k$.

Et mieux encore, c'est $n \in 9.\mathbb{Z}$ (et $(9.\mathbb{Z}, +, .)$ est u anneau).

Notons n le neutre (additif) de l'anneau $(A, +, \times)$. On se donne un élément a quelconque, on veut montrer $n \times a = n$.
On calcule par hasard $(n + n) \times a$. Par neutralité additive de n, c'est $n \times a$. mais pas distributivité de $\times$ sur $+$, c'est $n \times a + n \times a$.
On a donc $n \times a = n \times a + n \times a$. On ajoute de chaque côté le symétrique additif (opposé) de $n \times a$ (noté $-(n \times a)$:

$$n \times a + (-(n \times a)) = (n \times a + n \times a) + (-(n \times a))$$

Il reste finalement $n = n \times a$ après usage de l'associativité de $+$ et la neutralité de n.

Des « raisonnements » creux croisés sur vos copies.
Comme n est le neutre de la première loi, il vaut 0.
Et comme $a \times 0$ ça fait toujours 0, c'est fini.
Ce type de « raisonnement » marche si l'anneau est un anneau de nombres.
Mais que faites vous si c'est un anneau de matrices, de fonctions, d'ensembles ou de tous autres objets.
Vous emblez ne croire qu'il n'y a que trois ensembles : $\mathbb{N}$,$\mathbb{R}$et $\mathbb{C}$et quatre opérations : $+$, $-$, $\times$ et $/$.
Bref, vous allez faire des calculs physique niveau terminale, mais vous n'allez jamais décoller et passer à la vitesse supérieure, dans des univers plus ouverts.

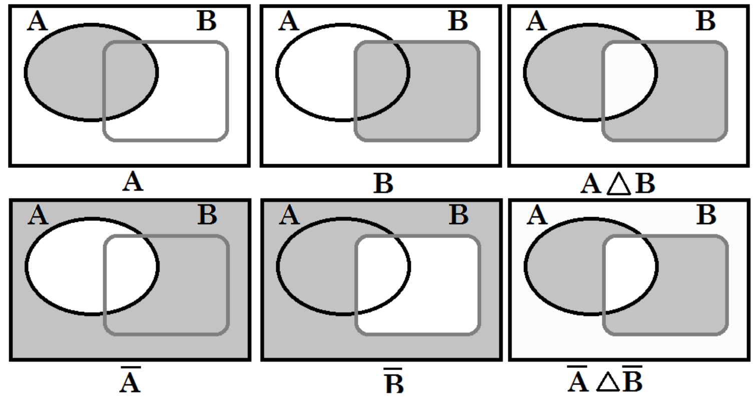
Choisissez votre démonstration

A	B	$A\Delta B$	$\overline{A}\Delta\overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0

$$1_{\overline{A}\Delta\overline{B}} = |1_{\overline{A}} - 1_{\overline{B}}| = |(1-1_A)-(1-1_B)|$$

$$1_{\overline{A}\Delta\overline{B}} = |1-1_A-1+1_B| = |1_B - 1_A|$$

$$1_{\overline{A}\Delta\overline{B}} = 1_{B\Delta A}$$



Si la proposition p réussissait à impliquer à la fois une chose (q) et son contraire ($\overline{q}$), c'est qu'elle serait fausse.

Avec des manipulations élémentaires (définition de l'implication, distributivité du *et* sur le *ou*)

$$\Big((p \Rightarrow q) \ et \ (p \Rightarrow \overline{q})\Big) \ = \ \Big(\overline{p} \ ou \ q) \ et \ (\overline{p} \ ou \ \overline{q})\Big)$$

$$\Big((p \Rightarrow q) \ et \ (p \Rightarrow \overline{q})\Big) \ = \ \Big(\overline{p} \ ou \ (q \ et \ \overline{q})\Big)$$

$$\Big((p \Rightarrow q) \ et \ (p \Rightarrow \overline{q})\Big) \ = \ \Big(\overline{p} \ ou \ False\Big) \ = \ \overline{p}$$

Les amateurs de S.I.I feront une table de vérité

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q}$	$p \Rightarrow \overline{q}$	$(p \Rightarrow q) \ et \ (p \Rightarrow \overline{q})$	$\overline{p}$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0

On m'a aussi proposé $\Big((p \Rightarrow q) \ et \ (p \Rightarrow \overline{q})\Big) = \Big((p \Rightarrow q) \ et \ (q \Rightarrow \overline{p})\Big)$ par contraposée.
Ensuite, en mettant bout à bout justement $(p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow \overline{p})$, on arrive par transitivité à $p \Rightarrow \overline{p}$.
Et ceci n'est possible que si p est faux[1].

On se donne t dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{N}$ et on calcule d'une part

$$ch((n+1).t) + ch((n-1).t) = \frac{e^{(n+1).t} + e^{(n-1).t} + e^{-(n+1).t} + e^{-(n-1).t}}{2}$$

et d'autre part

$$2.ch(t).ch(n.t) = \frac{(e^t + e^{-t}).(e^{n..t} + e^{-n.t})}{2} = \frac{e^{t+n.t} + e^{n.t-t} + e^{nn.t-t} + e^{-n.t-t}}{2}$$

il y a bien égalité.

On a trois ensembles à étudier et leurs parties :

$A = \{a, \ 1, \ \diamond\}$	$B = \{b, \ 1\}$	$A\Delta B = \{a, \ b, \ \diamond\}$
$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{1\}, \{\diamond\}, \{a,1\}, \{a,\diamond\}, \{1,\diamond\}, \{a,1,\diamond\}\}$ 8 parties	$P(B) = \{\emptyset, \{b\}, \{1\}, \{b,1\}\}$ 4 parties	$P(A\Delta B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{\diamond\}, \{a,b\}, \{a,\diamond\}, \{b,\diamond\}, \{a,b,\diamond\}\}$ 8 parties
$P(A)\Delta P(B) = \{\{a\}, \{b\}, \{\diamond\}, \{a,1\}, \{a,\diamond\}, \{1,\diamond\}, \{a,b,\diamond\}, \{b,1\}\}$ 8 parties		

1. de toutes façons, c'est $\overline{p} \ ou \ \overline{p}$

Attention, il devient insupportable de croiser encore la confusion entre $\emptyset$ et $\{\emptyset\}$. Après 142 remarques en cours, c'esy pesant.

IS06 Des sous-ensembles de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

L'élément nul est dans tous nos ensembles.

	$2.\mathbb{Z}+i.\mathbb{Z}$	$(2+i).\mathbb{Z}$	$(2+i).\mathbb{Z}+(1+i).\mathbb{Z}$	$(1+i).(\mathbb{Z}+i.\mathbb{Z})$	$2.\mathbb{Z}+(2+i).\mathbb{Z}+(3+i).\mathbb{Z}$
0	oui	oui	oui	oui	oui
	$2.0+i.0$	$(2+i).0$	$(2+i).0+(1+i).0$	$(1+i).(0+i.0)$	$2.(2+i).0+(3+i).0$
1	non	non	oui	non	oui
			$(2+i).1+(1+i).(-1)$		
$1+i$	non	non	oui	oui	oui
			$(2+i).0+(1+i).1$	$(1+i).(1+i.0)$	
$1-i$	non	non		oui	oui
			$(2+i).2+(1+i).(-3)$	$(1+i).(0+i.(-1))$	

Les éléments de $2.\mathbb{Z}+i.\mathbb{Z}$ ont forcément une partie réelle paire.

Pour $(2+i).\mathbb{Z}+(1+i).\mathbb{Z}$ on résout des systèmes d'inconnues a et b $\begin{array}{ccccc} 2.a & + & b & = & x \\ a & + & b & = & y \end{array}$ d'inconnues a et b pour x et y donnés, et il faut vérifier que a et b sont entiers à l'issue des calculs.

Pour que 1 soit dans $(1+i).(\mathbb{Z}+i.\mathbb{Z})$ il faudrait que $\dfrac{1}{1+i}$ (c'est à dire $\dfrac{1-i}{2}$) soit dans $(\mathbb{Z}+i.\mathbb{Z})$ (coefficients entiers).

La dernière colonne est vite traitée.
Déjà, avec $(2+i).\mathbb{Z}+(3+i).\mathbb{Z}$ j'ai tous les éléments de $\mathbb{Z}+i.\mathbb{Z}$.
En effet, tout complexe $a+i.b$ s'écrit $(-a+3.b).(2+i)+(a-2.b).(3+i)$; et si a et b sont eniers, alors $-a+3.b$ et $a-b$ le sont aussi.
Il ne reste plus qu'à l'écrire $2.0+(-a+3.b).(2+i)+(a-2.b).(3+i)$ pour qu'il soit dans $2.\mathbb{Z}+(2+i).\mathbb{Z}+(3+i).\mathbb{Z}$

IS06 Des élèves qui passent leur temps à dire des bêtises.

L'élève $\mathscr{A}$ part de ce qu'on doit prouver. Et il arrive au point de départ. Au mieux on dira qu'il a démontré une réciproque assez facile.
Si vous partez de ce qu'on vous demande, il n'y a que si vous aboutissez à une absurdité que vous pourrez conclure « on me demande de prouver quelquechose de faux » (raisonnement par l'absurde), et de toutes façons vous n'irez pas loin dans la vie (mais vous serez persuadé d'y être déjà ?).

Le second élève ($\mathscr{B}$) montre effectivement que f ne peut pas être croissante.
Mais la négation de « croissante » n'est pas « décroissante ».
En effet, croissante, c'est $\forall(a,\ b),\ (a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b))$. Et sa négation c'est $\exists(a,\ b),\ a \leqslant b \textit{ et } f(a) > f(b)$. Et les variables ont un rôle capital ; les quantificateurs aussi.

Si nécessaire, on lui montre la fonction sinus qui n'est pas croissante, mais qui n'est quand même pas non plus décroissante.

Le troisième s'appelle $\mathscr{C}$ et réussit bien à montrer $\alpha \geqslant \beta$ et $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.
Mais seulement pour α s'écrivant $f(f(a))$ et β s'écrivant $f(f(b))$.
On ne l'a pas « pour tout couple $(\alpha,\ \beta)$ », mais uniquement pour ceux de $Im(f(\circ f)$.

Imaginons que f soit $x \longmapsto e^{-x}$, les éléments de la forme $f(f(a))$ sont coincés entre 0 et 1.
Et on a donc juste « f décroissante sur $]0,\ 1[$. »

On détecte tout de suite l'arnaque du quatrième qu'on devrait appeler $\mathscr{P}$ comme physicien. Il raisonne bien et nous met sur la piste, mais il fait une hypothèse beaucoup trop forte, dont on n'a pas besoin.
Il suppose que f est dérivable. Ce n'est nulle part dans l'énoncé... Tout est donc foutu en l'air.

Regardons quand même son raisonnement dans le cas où f est dérivable, pour faire plaisir à son altesse.
On dérive $f \circ f$ (croissante), on trouve $f'(t).f'(f(t)) > 0$ pour tout t (dérivée de composée du type $(f' \circ u)' = (f' \circ u).u'$ avec $u = f$).
On regarde en $t = f(x)$ (puisque c'est $\forall t$) : $f'(f(x)).f'(f(f(x))) > 0$
On dérive $f \circ f \circ f$ (décroissante), on trouve $f'(x).f'(f(x)).f'(f(f(x)) < 0$ pour tout x (dérivée de composée multiple).

Et comme $f'(f(x)).f'(f(f(x))$ est déjà positif, c'est que $f'(x)$ est négatif.
Son raisonnement est aux petits oignons, mais évidemment uniquement dans le cas où f est dérivable, insistons encore.

Passons à la vraie preuve. On va montrer que les taux d'accroissement sont tous négatifs.
Un taux d'accroissement de f c'est $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ avec $a \neq b$.
Et f est croissante si et seulement si ses taux d'accroissement sont positifs.

En effet, pour $a < b$, on a « positif sur positif »
et pour $b < a$, on a « négatif sur négatif ».
La condition est nécessaire et suffisante.

Maintenant, pour a différent de b, on calcule

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{f(f(f(b)))-f(f(f(a)))}.\frac{f(f(f(b)))-f(f(f(a)))}{b-a} = \frac{1}{\dfrac{f(f(f(b)))-f(f(f(a)))}{f(b)-f(a)}}.\frac{f(f(f(b)))-f(f(f(a)))}{b-a}$$

La première fraction (au dénominateur) est un taux de $f \circ f$ entre $f(b)$ et $f(a)$. Il est positif ($f \circ f$ croit).
La seconde fraction (au numérateur) est un taux de $f \circ f \circ f$ entre a et b. Cette fois, ce taux est positif.
Le quotient est donc négatif,, ce qui traduit la décroissance de f tant attendue.

Et aucun dénominateur n'a été maltraité dans cet exercice, ni n'est nul.
En effet, $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante, donc injective, et f hérite de l'injectivité.

Si on regarde bien, c'est la preuve de notre ami $\mathscr{D}$ mais par les taux d'accroissement plutôt que les dérivées. Et en maths, la différence est énorme.

Il existe aussi une autre preuve en trois lignes.

On suppose donc $f \circ f$ croissante et $f \circ f \circ f$ strictement décroissante.
On montre par l'absurde que f est décroissante.
Si elle ne l'était pas, il existerait a et b vérifiant $a < b$ et $f(a) \leqslant f(b)$ (négation de $\forall(a,b),\ (a < b) \Rightarrow (f(a) > f(b))$).
Mais alors en appliquant $f \circ f$ croissante au second membre, on aurait $a < b$ et $f^3(a) \leqslant f^3(b)$ ce qui contredit la décroissance de f^3.

IS06 Un élève qui vient au lycée.

Notons d la distance à laquelle il habite.
Notons h le temps dont il dispose entre le moment où il part de chez lui et le moment où le cours commence.
Le premier matin décrit : il est arrivé avec un quart d'heure de retard. Il a donc roulé pendant $h+0,25$ (un quart d'heure c'est $0,25$ heure).
Et il a parcouru la distance d. On a donc $\dfrac{d}{h+0,25} = 10$ (unité : km/h).

Le second matin décrit, avec les données (cinq minutes, quinze à l'heure), on a $\dfrac{d}{h+\dfrac{1}{12}} = 15$ (unité : km/h).

deux équations, deux inconnues, on résout

$$d = 10.\left(h+\frac{1}{4}\right) = 15.\left(h+\frac{1}{12}\right)$$

On trouve h par l'équation du second degré : h vaut $\dfrac{1}{4}$ (quinze minutes).
Et on trouve alors $d = 5$.

On résume :

distance	$5\ km$	$5\ km$
vitesse	$10\ km/h$	$15\ km/h$
durée	$\frac{1}{2}\ h = 30\ mn$	$\frac{1}{3}\ h = 20\ mn$
retard	$15\ mn$	$5\ mn$

IS06 Un polynôme.

On note d le degré du polynôme. On a donc $f(x) = a_d.x^d + \ldots$.
Le polynôme $f \circ f$ est alors $x \longmapsto a_d.(a_d.x^d + \ldots)^d + \ldots$ et est de degré d^2. On lui ajoute f qui est juste de degré d, la somme est de degré d^2.
Mais le polynôme $(f)^2$ du membre de droite n'est que de degré $2.d$ (c'est $x \longmapsto (a_d.x^2 + \ldots)^2$).
Pour qu'il y ait égalité, il faut avoir $d^2 = 2.d$ et donc d vaut 2 (on réfute $d = 0$: « polynôme non constant »).
On peut alors écrire $f = x \longmapsto a.x^2 + b.x + c$ et identifier

$$\Big(a.(a.x^2 + b.x + c)^2 + b.(a.x^2 + b.x + c) + c\Big) + (a.x^2 + b.x + c) = (a.x^2 + b.x + c)^2$$

(l'égalité de deux fonctions polynômes est équivalente à l'égalité des coefficients)

$$\begin{array}{ccccccc}
a^3 & & & & = & a^2 & \\
2.a^2.b & & & & = & 2.a.b & \\
2.a^2.c & +a.b^2 & +a.b & +a & = & b^2 & +2.a.c \\
b^2 & +2.a.b.c & +b & & = & 2.b.c & \\
a.c^2 & +b.c & +2.c & & = & c^2 &
\end{array}$$

La première équation donne deux possibilités : $a = 1$ ou $a = 0$.

$a = 0$	$a = 1$
$0 = 0$ donc rien	$2.1^2.b = 2.1.b$ donc rien
$0 = b^2 + 0$ donc $b = 0$	$2.c + b^2 + b + 1 = b^2 + 2.c$ donc $b = -1$
$0 = 0$ donc rien	$(-1)^2 + 2.1.(-1).c - 1 = 2.(-1).c$ donc rien
$2.c = c^2$ donc $c = 0$ ou $c = 2$	$c^2 - c + 2.c = c^2$ donc $c = 0$
constant nul ou égal à 2	$f = x \longmapsto x^2 - x$
$f(10) = 0$ ou $f(10) = 2$	$f(10) = 90$

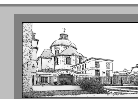
Mais l'énoncé a dit « polynôme non constant ». La seule solution est $f(10) = 90$.

Une belle idée croisée sur des copies pour trouver f (ou en tout cas la seule f possible) :
la relation $f(f(x)) + f(x) = (f(x))^2$ donnen, en posant $Y = f(x)$:

$$f(Y) + Y = Y^2$$

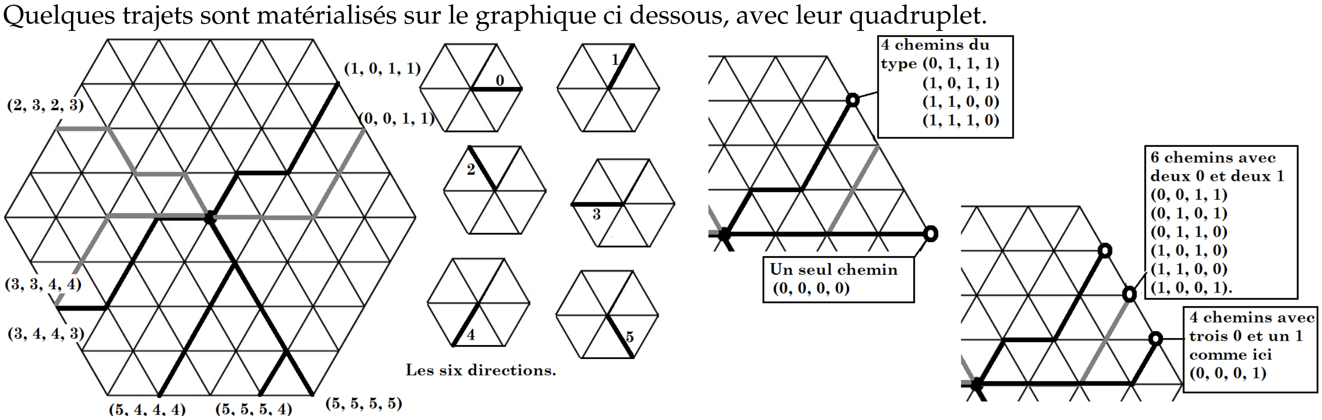
La seule fonction polynôme possible est donc $y \longmapsto y^2 - y$. Mais comme on n'a raisonné que par condition nécessaire, il faut vérifier. Et on l'a fait plus haut.

IS06 Dénombrement de chemins.



Déjà, le nombre de chemins doit être un multiple de 6. Chaque fois qu'on a un chemin, on en a un autre par rotation de $\pi/3$.
Mais ensuite ? Une fois le premier des six déplacements choisis, comment prendre les suivants ?

Mais finalement, chaque trajet peut être codé par un quadruplet qui indique la direction dans laquelle on fait un pas à chaque fois.
Comme les parcours demandés sont de longueur 4, il suffit de quatre chiffres pour indiquer le parcours.
Évidemment, il faut des mots cohérents.
Par exemple $(0, 1, 3, 4)$ nous ferait revenir au point de départ. Trop idiot.
De même, avec $0, 0, 1, 2)$, on reste dans le grand hexagone et on n'atteint pas le bord.
Quelques trajets sont matérialisés sur le graphique ci dessous, avec leur quadruplet.



Six quadruplets ne font intervenir qu'un symbole, et nous conduisent vers un coin du grand hexagone, en ligne droite, comme $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ qui nous fait sort « à l'est », ou $(3,\ 3,\ 3,\ 3)$ qui nous fait sortir par Brest, et $(5,\ 5,\ 5,\ 5)$ qui nous conduit à Nice.

Ensuite, il y a des quadruplets à deux symboles, et pas plus, sinon on ne sort pas.
Si on sort « juste à côté d'un coin du grand hexagone », on a trois fois un chiffre et une fois un autre chiffre. C'est l'exemple $(0,\ 0,\ 0,\ 1)$ et ses trois variantes $(1,\ 0,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0,\ 0)$ et $(0,\ 0,\ 1,\ 0)$.
Pour sortir au milieu d'un côté du grand hexagone, il faut deux fois une lettre et deux fois une autre lettre. On a alors $\binom{4}{2}$ chemins possibles comme indiqué sur le schéma ci-dessus (sortie par Strasbourg).

On peut donc faire le bilan

type de sortie	nombre de sorties	nombre de chemins par sortie	total
sortie en coin	six coins	un seul trajet comme $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$	6
sortie à côté d'un coin	douze sorties	quatre trajets comme $(0, 1, 0, 0)$	48
sortie au milieu d'un côté	six milieux	$\binom{4}{2}$ trajets par sortie comme $(0, 0, 1, 1)$	36
		Total	6+48+36 = 90