LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 13 novembre
$\mathcal{M.P.S.I.2}$

2024 2025

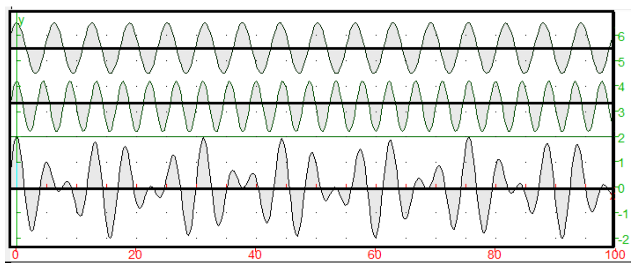
IS07

♡ 0 ♡ Montrez que si f est un morphisme de groupes de $(A, *)$ dans $(B, \otimes)$ et g est un morphisme de groupes de $(B, \otimes)$ dans $(C, \oplus)$ alors $g \circ f$ est un morphisme de $(A, *)$ dans $(C, \oplus)$. 2 pt.

♡ 1 ♡ y fonction de t est solution de $\forall t,\ y'_t + a.y_t = 0$ et $y_0 = 1$. Résolvez. z fonction de t est solution de $\forall t,\ z_t + \cos(t).y_t = 0$ et $z_0 = 1$. On constate $z_{\pi.} = y_\pi$. Déduisez la valeur de a. 3 pt.

♡ 2 ♡ Dans le plan, on a $A(1+i)$, $B(2+3.i)$, $C(-1+4.i)$, $D(-5+y.i)$. Ajustez y pour que l'aire du quadrilatère $(ABCD)$ soit égale à $23/2$. 3 pt.

♡ 3 ♡ Montrez : $\forall t,\ ch^2(t) - sh^2(t) = 1$. On donne : $sh(a) = \dfrac{28}{45}$, montrez (en les calculant) que $ch(a)$ et $th(a)$ sont aussi rationnelles. 3 pt.



Avec une naïveté déconcertante que nous lui pardonnerons car il sortait d'un T.P. de chimie de quatre heures, l'élève a dit « la somme de deux fonctions périodiques est périodique ». Demandez lui alors la période de $f = x \longmapsto \cos(x)$, la période de $g = x \longmapsto \cos(\sqrt{2}.x)$. Demandez lui de prouver que la fonction $f + g$ n'atteint la valeur 2 qu'en 0. Concluez. 3 pt.

◇ 0 ◇ Montrez que l'équation $x^2 + 4.x + 18 = 0$ n'a pas de solution dans $(\mathbb{R}, +, .)$.
Montrez que l'équation $x^2 + 4.x + 18 = 0$ a deux solution dans $(\mathbb{C}, +, .)$.
Montrez que l'équation $x^2 + 4.x + 18 = 0$ a deux solution dans le corps $(\mathbb{Z}_{/19.\mathbb{Z}}, +, .)$ (opérations modulo 19).
Montrez que l'équation $x^2 + 4.x + 18 = 0$ admet pour solutions 2, 12, 14 et 24 dans l'anneau $(\mathbb{Z}_{/30.\mathbb{Z}}, +, .)$ (opérations modulo 30). 3 pt.

Ecrivez un script Python qui prend en entrée n et indique le nombre de solutions de l'équation $x^2 + 4.x + 18 = 0$ dans l'anneau $(\mathbb{Z}_{/n.\mathbb{Z}}, +, .)$ (opérations modulo n). 2 pt.

♡ 4 ♡ Combien y a-t-il de bicycles dans $(S_6, \circ)$? 1 pt.

◇ 1 ◇ Montrez qu'il y a autant de tri-bicycles (c'est à dire des permutations telles que $\overrightarrow{(1\ 2)} \circ \overrightarrow{(3\ 5)} \circ \overrightarrow{(4\ 6)}$ formées de trois bicycles de supports disjoints). 2 pt.

♡ 5 ♡ Déterminez $\left(\overrightarrow{(1\ 2)} \circ \overrightarrow{(3\ 4)} \circ \overrightarrow{(5\ 6)}\right) \circ \left(\overrightarrow{(1\ 3)} \circ \overrightarrow{(2\ 4)} \circ \overrightarrow{(5\ 6)}\right)$ et $\left(\overrightarrow{(1\ 2)} \circ \overrightarrow{(3\ 4)} \circ \overrightarrow{(5\ 6)}\right) \circ \left(\overrightarrow{(1\ 3)} \circ \overrightarrow{(2\ 5)} \circ \overrightarrow{(4\ 6)}\right)$ (décomposez les en produit de cycles de supports disjoints) et donnez l'ordre de chacun. 3 pt.

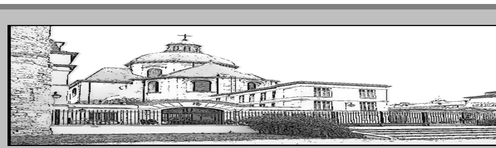
◇ 2 ◇ On définit Φ de $(S_4, \circ)$ dans $(S_6, \circ)$ par $\Phi(\sigma) = \left\{ \begin{array}{cc} \sigma & si \quad \sigma \in A_4 \\ \sigma \circ \overrightarrow{(5\ 6)} & si \quad \sigma \notin A_4 \end{array} \right|$. Vérifiez que Φ est injectif.
Montrez que Φ est un morphisme $(\forall \sigma, \sigma'),\ \Phi(\sigma \circ \sigma') = \phi(\sigma) \circ \phi(\sigma'))$, et montrez $\forall \sigma \in S_4,\ \Phi(\sigma) \in S_6$. 3 pt.

◇ 3 ◇ Peut il exister un morphisme Ψ injectif de $(S_4, \circ)$ dans $(A_5, \circ)$? Montrez que $\{\Psi(\sigma) \mid \sigma \in S_4\}$ serait alors un sous-groupe de $(A_5,\ \circ)$. Concluez. 3 pt.

♣ 0 ♣ C'est un nombre à huit chiffres. Ses chiffres vont en décroissant strictement du plus grand « à gauche » au plus petit « à droite », et c'est un multiple de 180. Quel est ce nombre ? 2 pt.

[0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, 1369, 1444, 1521, 1600, 1681, 1764, 1849, 1936, 2025, 2116, 2209, 2304, 2401, 2500, 2601, 2704, 2809, 2916, 3025, 3136, 3249, 3364, 3481]

LYCEE CHARLEMAGNE
Mercredi 13 novembre
M.P.S.I.2



2024 2025
IS07
CORRECTION

IS07 Questions de cours.

On se donne x et y dans $(A,)$.
Ils ont chacun une image par f qui elle même a une image par g. Reste à valider la qualité de morphisme de $g \circ f$ en utilisant celle de f et celle de g

$$g \circ f(x * y) = g(f(x * y)) = g\big(f(x) \otimes f(y)\big) = g(f(x)) \oplus g(f(y))$$

On a évidemment

$$ch^2(t) - sh^2(t) = (ch(t) + sh(t)).(ch(t) - sh(t)) = e^t.e^{-t} = 1$$

Si on nous donne $sh(a) = \dfrac{28}{45}$, on déduit

$$ch^2(a) = 1 + \frac{28^2}{45^2} = \frac{45^2 + 28^2}{45^2} = \frac{2809}{45^2} = \frac{53^2}{45^2}$$

la liste des carrés nous l'offre, et même si on ne sait pas de qui c'est le carré, on n'est quand même pas loin de 50^2 et le chiffre des unités nous guide.
On passe à la racine (positive car le cosinus hyperbolique l'est) et au quotient

$$ch(a) = \frac{53}{45} \geqslant 1 \text{ et } th(a) = \frac{28}{53} < 1$$

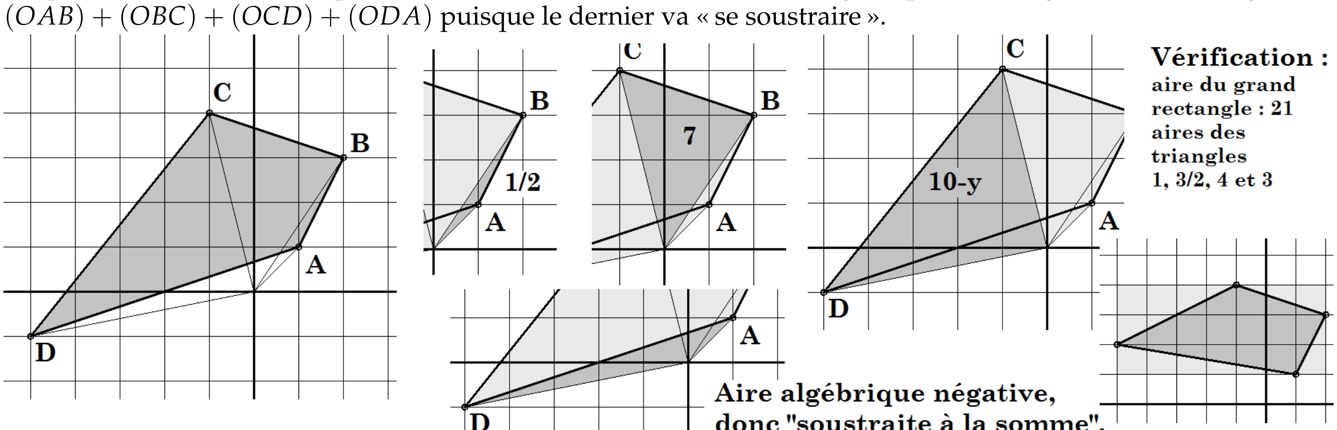
On connait la forme des solutions de l'équation différentielle $y_t + a.y_t = 0$ (ou si vous préférez : $y' = -a.y_t$). On trouve $y_t = y_0.e^{-a.t}$ (n'oubliez pas le signe moins, et vérifiez si nécessaire). On tient compte de la condition initiale : $y_t = e^{-a.t}$.

Le cours nous donne aussi les solutions de $z'_t + \cos(t).z_t = 0$. On prend la primitive de $t \longmapsto \cos(t)$ nulle en 0 : c'est $t \longmapsto \sin(t)$. On met un signe moins et on place ça dans une exponentielle, avec la condition initiale : $z_t = 1.e^{-\sin(t)}$ (et si nécessaire, on vérifie : $z'_t = -\cos(t).e^{-\sin(t)}$).

En même temps, c'est juste une question de cours.

On demande ensuite $z_\pi = y_\pi$: $e^{-a.\pi} = e^{-\sin(\pi)}$. C'est décevant, a vaut 0 et la solution y est constante.

Le parallélogramme dont on doit calculer l'aire se décompose en triangles.
On peut même comme indiqué dans le cours écrire comme « somme algébrique de triangles issus de l'origine » : $(OAB) + (OBC) + (OCD) + (ODA)$ puisque le dernier va « se soustraire ».



On peut pour chaque triangle utiliser la formule $\dfrac{Im(\overline{z}.z')}{2}$ ou la formule $\dfrac{1}{2}.\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

$(O\ A\ B)$	$(O\ B\ C)$	$(O\ C\ D)$	$(O\ D\ A)$	total
$\dfrac{1}{2}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \dfrac{11}{2}$	$\dfrac{1}{2}.\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 4 & y \end{vmatrix} = \dfrac{20-y}{2}$	$\dfrac{1}{2}.\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{-5-y}{2}$	$\dfrac{27-2.y}{2}$

L'exigence de l'énoncé donne $\dfrac{27-2.y}{2} = \dfrac{23}{2}$ et on trouve $y = 2$.

IS07 Second degré.

Dans $\mathbb{R}$ l'équation s'écrit $(x+2)^2 = -14$. Elle ne peut pas avoir de solution.

Dans $\mathbb{C}$ la même factorisation canonique donne $(x+2)^2 = (\sqrt{14}.i)^2$ et on trouve deux solutions : $-2+i.\sqrt{14}$ et $-2+i.\sqrt{14}$ (vérifiez la somme et le produit, et calculez le discriminant si vous y tenez).

Dans $\mathbb{Z}_{/19.\mathbb{Z}}$ elle donne $(x+2)^2 = 5$ après réduction. Je ne vois pas trop, mais si je calcule le discriminant de $x^2+4.x+18$ (modulo 19, on l'a dans le corps !), on trouve $14-4.18 = -56 = 1$. C'est un carré parfait[1]. On a deux racines : $\dfrac{-4+1}{2} = \dfrac{-3}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$ et $\dfrac{-4-1}{2} = \dfrac{-5}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$.
On peut d'ailleurs les vérifier :

$$7^2+4\times 7+18 = 95 = 5\times 19 \textit{ et } 8^2+4\times 8+18 = 114 = 6\times 19$$

et mieux encore : $8+7 = 15 = -4$ et $8\times 7 = 56 = 18$ (oui, Viète).

Dans $\mathbb{Z}_{:30.\mathbb{Z}}$, on nous propose les racines, alors pourquoi pas vérifier

	x^2	$+4.x$	$+18$			
$x=2$	4	$+16$	$+18$	$=$	30	$=0$
$x=12$	144	$+48$	$+18$	$=$		
	24	$+18$	$+18$	$=$	60	$=0$
$x=14$	196	$+56$	$+18$			
	16	-4	$+18$	$=$	30	$=0$
$x=24=-6$	36	-24	$+18$	$=$	30	$=0$

On notera qu'on réagit en matheux et non en expérience de laboratoire. On réduit avant de sommer, de calculer tout, et comme ça, on ne traine pas des 690 comme un gentillet bourrin.

Est il normal d'avoir quatre racines pour une équation de degré 2 ?
Oui, car on est dans un anneau et pas dans un corps.
Factorisons dans notre anneau :

$$x^2+4.x+18 = (x+2)^2+14 = (x+2)^2-16 = (x+2-4).(x+2+4) = (x-2).(x+6)$$

Si on avait juste l'intégrité, on n'aurait que deux solutions : 2 et -6 (qui vaut 24).
Mais pour $x=12$, le produit donne 10×18 et ceci est nul, car un produit de facteurs peut être nul juste parce que les deux facteurs se débrouillent entre eux.

Si on nous donne `n`, le plus simple est de prendre un par un les élements de $\mathbb{Z}_{/n.\mathbb{Z}}$(donc les entiers de `range(n)`, et de tester pour chacun si il est solution. On calculera pour chacun l'entier `x*x+4*x+18`, on le réduira modulo `n`, et on regarder si on a trouvé `0`.
Il faudra penser à initialiser un compteur `c` à la valeur `0`.

```
def compte(n) :
....c = 0
....for x in range(n) :
........image = (x*x+4*x+18) % n
........if image == 0 :
............c += 1
....return c
```

IS07 Les tri-bicycles.

Pour fabriquer un bicycle de S_6 il suffit de choisir deux éléments parmi six. On trouve donc $\binom{6}{2}$ ce qui fait 15[2].

Si on cherche donc 15 tri-bicycles, on peut en dresser la liste, mais c'est un peu laborieux (s'assurer qu'on n'a pas mis deux fois le même).

1. le premier qui me parle encore de signe parce qu'il n'a pas compris que l'essentiel est « être un carré »e, je lui fais bouffer les dernières craies blanches qui me restent

2. c'est $\dfrac{6\times 5}{1\times 2}$ et ne perdez pas de temps avec $\dfrac{6!}{4!.2!}$, on est en maths, pas en train de répéter comme un perroquet pour avoir au moins 12 au bac

Les tri-bicycles sont des applications de la forme $\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(c\ d)} \circ \overrightarrow{(e\ f)}$ avec six lettres distinctes.
On va donc utiliser les six nombres de 1 à 6 une fois et une seule chacun..
Commençons par choisir la paire $\{a,\ b\}$. On a $\binom{6}{3}$ choix. Il reste alors quatre nombres. On en choisir deux parmi quatre : $\binom{4}{2}$.
Il ne reste qu'à « choisir » deux lettres parmi deux.
A ce stade, on a donc $\frac{6.5}{1.2}.\frac{4.3}{1.2}.\frac{2.1}{1.2}$ triplets de la forme $(\overrightarrow{(a\ b)},\ \overrightarrow{(c\ d)},\ \overrightarrow{(e\ f)})$: total 90.

Mais attention, plusieurs triplets $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ définissent le même tri-bicycle. En effet, on a

$$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(c\ d)} \circ \overrightarrow{(e\ f)} = \overrightarrow{(c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(e\ f)} = \overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(e\ f)} \circ \overrightarrow{(c\ d)} = \ldots = \overrightarrow{(e\ f)} \circ \overrightarrow{(c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b)}$$

Comme il y a six façons d'ordonner les trois bicycles, on re-divise par 6 et on a $\frac{90}{6}$ tri-bicycles.

Liste complète des 15 tri-bicycles.

(1 2).(3 4).(5 6)	(1 3).(2 4).(5 6)	(1 4).(2 3).(5 6)	(1 5).(2 3).(4 6)	(1 6).(2 3).(4 5)
(1 2).(3 5).(4 6)	(1 3).(2 5).(4 6)	(1 4).(2 5).(3 6)	(1 5).(2 4).(3 6)	(1 6).(2 4).(3 5)
(1 2).(3 6).(4 5)	(1 3).(2 6).(4 5)	(1 4).(2 6).(3 5)	(1 5).(2 6).(3 4)	(1 6).(2 5).(3 4)

Autre présentation.

Le nombre 1 est dans un bicycles. Reste à savoir avec qui il est. On a cinq choix pour définir son compagnon.
Un fois celui ci défini, il reste quatre éléments à mettre dans deux bicycles. Prenons le plus petit des quatre chiffres, décidons avec lequel des trois autres il va : trois choix. Une fois ce second mariage scellé, on marie les deux qui restent.

$$\left(\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)} \circ \overrightarrow{(5\,6)}\right) \circ \left(\overrightarrow{(1\,3)} \circ \overrightarrow{(2\,4)} \circ \overrightarrow{(5\,6)}\right) : \begin{array}{ccccccccccccc} & \overrightarrow{(5\,6)} & & \overrightarrow{(2\,4)} & & \overrightarrow{(1\,3)} & & \overrightarrow{(5\,6)} & & \overrightarrow{(3\,4)} & & \overrightarrow{(1\,2)} & \\ 1 & \mapsto & 1 & \mapsto & 1 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 4 & \mapsto & 4 \\ 2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3 \\ 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 1 & \mapsto & 1 & \mapsto & 1 & \mapsto & 2 \\ 4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 1 \\ 5 & \mapsto & 6 & \mapsto & 6 & \mapsto & 6 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 \\ 6 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 & \mapsto & 6 & \mapsto & 6 & \mapsto & 6 \end{array}$$

On reconnaît $\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}$ (double bicycle) et $\overrightarrow{(5\,6)}$ ne servait à rien, intervenant deux fois et commutant avec les autres).
Il est d'ordre 2.

$$\left(\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)} \circ \overrightarrow{(5\,6)}\right) \circ \left(\overrightarrow{(1\,3)} \circ \overrightarrow{(2\,5)} \circ \overrightarrow{(4\,6)}\right) : \begin{array}{ccccccccccccc} & \overrightarrow{(4\,6)} & & \overrightarrow{(2\,5)} & & \overrightarrow{(1\,3)} & & \overrightarrow{(5\,6)} & & \overrightarrow{(3\,4)} & & \overrightarrow{(1\,2)} & \\ 1 & \mapsto & 1 & \mapsto & 1 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 4 & \mapsto & 4 \\ 2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 & \mapsto & 6 & \mapsto & 6 & \mapsto & 6 \\ 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3 & \mapsto & 1 & \mapsto & 1 & \mapsto & 1 & \mapsto & 2 \\ 4 & \mapsto & 6 & \mapsto & 6 & \mapsto & 6 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 & \mapsto & 5 \\ 5 & \mapsto & 5 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2 & \mapsto & 1 \\ 6 & \mapsto & 4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 4 & \mapsto & 3 & \mapsto & 3 \end{array}$$

Cette fois, on identifie $\overrightarrow{(1\ 4\ 5)} \circ \overrightarrow{(2\ 6\ 3)}$. Double tricycle. Ordre 3.

IS07 Plongement de $(S_4, \circ)$ dans $(A_6,\ \circ)$.

Le titre est un peu ronflant, mais c'est bien ça.

On se donne σ dans S_4, il faut montrer que $\Phi(\sigma)$ est bien dans S_6 (par construction, on n fait bouger que des éléments de 1 à 4 ou éventuellement de 1 à 6).
Il faut aussi montrer que la signature de $\Phi(\sigma)$ vaut 1. Par disjonction de cas.
Si σ a déjà pour signature 1, par définition, $\Phi(\sigma)$ est égale à σ et a pour signature 1.
Si σ a pour signature -1, par définition, $\Phi(\sigma)$ est égale à $\sigma \circ \overrightarrow{(5\ 6)}$ et a pour signature $(-1) \times (-1)$ ce qui refait 1.

Pour l'injectivité, on se donne σ et σ' et on suppose $\Phi(\sigma) = \Phi(\sigma')$.
• Si σ et σ' sont dans A_4, on a tout de suite $\sigma = \sigma'$.
• Si σ et σ' sont toutes deux dans $S_4 - A_4$, on a $\sigma \circ \overrightarrow{(5\ 6)} = \sigma' \circ \overrightarrow{(5\ 6)}$ puis en composant, on a $\sigma = \sigma'$.
• Mais il reste le cas où l'une est dans A_4 et l'autre dans $S_4 - A_4$. On a alors $\sigma = \sigma' \circ \overrightarrow{(5\ 6)}$. Et là, on semble ne pas pouvoir simplifier. Mais on a une contradiction qui interdit ceci. En effet, $\sigma(5) = 5$ et $(\sigma' \circ \overrightarrow{(5\ 6)})(5) = 6$.
Ce cas cas n'étant pas envisageable, les seules issues possibles donnent $\sigma = \sigma'$.

J'aurai sans doutes de faux raisonnements basés sur « $\begin{array}{rl} \Phi : \sigma \longmapsto \sigma & : \text{injectif} \\ \Phi : \sigma \longmapsto \sigma \circ \overrightarrow{(5\ 6)} & : \text{injectif} \end{array}$ donc Φ injectif partout ».
Rappelons que $x \longmapsto |x|$ est injectif sur $[0,\ +\infty[$ (c'est Id) et sur $]-\infty,\ 0]$ (c'est $-Id$), mais pas sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Se planter sur ce type de raisonnement, pour moi c'est pire que ne pas savoir dériver le cosinus ou de dériver $\exp(0) = 1$ en $\exp'(0) = 1' = 0$, puisque c'est la base même de vos raisonnements logiques qui est corrompue... Vous ne voyez pas que vous n'avez pas envisagé toutes les possibilités.

On se donne maintenant σ et σ' et on doit comparer $\Phi(\sigma \circ \sigma')$ et $\Phi(\sigma) \circ \Phi(\sigma')$. On disjoncte les cas là aussi.

	$Sgn(\sigma) = 1$ $\Phi(\sigma) = \sigma$	$Sgn(\sigma) = 1$ $\Phi(\sigma) = \sigma \circ \overrightarrow{(5\ 6)}$
$Sgn(\sigma') = 1$ $\Phi(\sigma') = \sigma'$	$Sgn(\sigma \circ \sigma') = 1$ $\Phi(\sigma \circ \sigma') = \sigma \circ \sigma'$ évident	$Sgn(\sigma \circ \sigma') = -1$ $\Phi(\sigma \circ \sigma') = (\sigma \circ \sigma') \circ \overrightarrow{(5\ 6)}$ petit travail
$Sgn(\sigma) = 1$ $\Phi(\sigma') = \sigma \circ \overrightarrow{(5\ 6)}$	$Sgn(\sigma \circ \sigma') = -1$ $\Phi(\sigma \circ \sigma') = (\sigma \circ \sigma') \circ \overrightarrow{(5\ 6)}$ associativité	$Sgn(\sigma \circ \sigma') = 1$ $\Phi(\sigma \circ \sigma') = \sigma \circ \sigma'$ travail

Dans la case « petit travail », on doit comparer $\sigma \circ \sigma' \circ \overrightarrow{(5\ 6)}$ et $\sigma \circ \overrightarrow{(5\ 6)} \circ \sigma'$.
La clef est dans « les supports sont disjoints[3], σ' et $\overrightarrow{(5\ 6)}$ sont permutables ».

Pour la case « travail », on doit comparer $(\sigma \circ \overrightarrow{(5\ 6)}) \circ (\sigma' \circ \overrightarrow{(5\ 6)})$ avec $(\sigma \circ \overrightarrow{(5\ 6)}) \circ (\sigma' \circ \overrightarrow{(5\ 6)})$. mais avec le même argument de commutativité, il suffit de transiter par $(\sigma \circ \overrightarrow{(5\ 6)}) \circ (\overrightarrow{(5\ 6)} \circ \sigma')$ et de simplifier le bicycle au milieu.

On suppose qu'il existe cette fois un morphisme injectif de $(S_4, \circ)$ dans $(A_5, \circ)$.
On suppose donc juste des choses comme $\Psi(\sigma \circ \sigma') = \Psi(\sigma) \circ \Psi(\sigma')$.
Les éléments $\Psi(\sigma)$ sont alors des éléments de $(A_5, \circ)$.
L'élément neutre Id_{A_5} est alors présent, comme image de Id_{S_4}. En effet, on a $\Psi(Id) = \Psi(Id \circ Id) = \Psi(Idd) \circ \Psi(Id)$ et en « simplifiant par $\Psi(Id)$ »[4], on a $\Psi(Id) = Id$.
Si on prend deux éléments de l'ensemble image φ et φ', ils s'écrivent $\varphi = \Psi(\sigma)$ et $\varphi' = \Psi(\sigma')$ pour deux éléments σ et σ' de S_4. Leur composée $\varphi \circ \varphi'$ est alors $\Psi(\sigma) \circ \Psi(\sigma')$, et s'écrit $\Psi(\sigma \circ \sigma')$. C'est bien l'image d'un élément de S_4 par Ψ. La loi $\circ$ est interne sur l'ensemble des images.
Si on prend φ dans cet ensemble, on l'écrit $\Psi(\sigma)$ pour un σ bien choisi de S_4.

Maintenant que $\{\Psi(\sigma) \mid \sigma \in S_4\}$ est un sous-groupe de $(A_5, \circ)$, on sait que son cardinal divise le cardinal de A_5 (Lagrange). Et ce cardinal de A_5 vaut $\dfrac{5!}{4}$, ce qui fait 60.
Mais dans le même temps, comme Ψ est injective, il y a autant d'éléments dans S_4 que dans l'ensemble image $\{\Psi(\sigma) \mid \sigma \in S_4\}$. Il y en a donc 24.
Et on tient notre contradiction puisque 24 ne divise pas 60.

IS07 Nombre mystère à huit chiffres.

Comme ce nombre N est un multiple de 180, c'est a fortiori un multiple de 10. Son dernier chiffre est un 0 (assez normal si ils n'ont fait que décroitre).

Mais en tant que multiple de 18*à*, le voilà multiple de 4. Ses deux derniers chiffres sont donc 00, 20, 60 ou 80. Mais

3. σ' n'agit que sur 1 à 4 tandis que le bicycle agit sur 5 et 6
4. en fait, en composant par l'inverse

la décroissance stricte interdit 00. Et si on met 60 (ou à plus fort raison 80), qui sont les six chiffres devant ?[5]
Bref, notre nombre est de la forme $\overline{abcdef20}_{10}$ avec $9 \geqslant a > b > c > d > e > f > 2$.

Pas facile de caser six entiers entre 9 et 3. Il n'y en a que sept de disponibles. C'est donc qu'on en saute un et un seul de la liste [9, 8, 7, 6, 5, 4, 3]

Et il nous reste une information : multiple de 9 (car $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ il serait temps de le dire). La somme de ses chiffres et un multiple de 9.
Or, la somme $9+8+7+6+5+4+3$ vaut 42 (pas multiple de 9 évidemment). Le seul qu'on puisse enlever pour arriver à 36 (le multiple de 9 juste au dessous) est 6.
Le nombre cherché ne nous échappe donc pas :

$$98\,754\,320 \;=\; 180 \times 537\,524$$

et le quotient n'a aucun intérêt.

IS07 Fonctions périodiques.

Le problème est que les deux fonctions périodiques n'ont pas forcément la même période. Et peut être même des périodes incommensurables.

L'application cosinus est bien périodique, de période $2.\pi$. On atteste en effet : $\forall x,\ \cos(x+2.\pi) = \cos(x)$.

L'application « accélérée » $x \longmapsto \cos(\sqrt{2}.x)$ a pour période $\sqrt{2}.\pi$ puisque

$$\forall x,\ \cos(\sqrt{2}.(x+\sqrt{2}.\pi)) = \cos(\sqrt{2}.x+2.\pi) = \cos(\sqrt{2}.x)$$

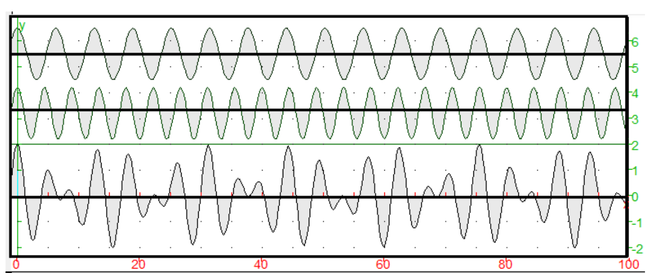
(et j'ai même appris par cœur que $x \longmapsto \cos(\omega.x)$ avait pour période $\dfrac{2.\pi}{\omega}$ avant même de me rendre compte que c'était normal car $\cos\left(\omega.\left(x+\dfrac{2.\pi}{\omega}\right)\right)$ donne bien ce qu'il faut.

Mais l'application $x \longmapsto \cos(x)+\cos(\sqrt{2}.x)$ n'a pas l'air périodique.

L'élève un peu naïf dira :
j'essaye $2.\pi$: $\cos(x+2.\pi)+\cos(\sqrt{2}.(x+2.\pi)) = \cos(x)+\cos(\sqrt{2}.x+2.\sqrt{2}.\pi) \neq \cos(x)+\cos(\sqrt{2}.x)$
j'essaye $\sqrt{2}.\pi$: $\cos(x+\sqrt{2}.\pi)+\cos(\sqrt{2}.(x+\sqrt{2}.\pi)) = \cos(x+\sqrt{2}.\pi)+\cos(\sqrt{2}.x) \neq \cos(x)+\cos(\sqrt{2}.x)$

J'ai deux reproches à lui présenter : x n'est pas quantifié, et donc, il y a peut être des x pour lesquels on a quand même $\cos(x+\sqrt{2}.\pi)+\cos(\sqrt{2}.x) \neq \cos(x)+\cos(\sqrt{2}.x)$ *(mais ça ne donnera pas une période, c'est vrai).*
Mais surtout, pourquoi la période serait elle une des deux et pas quelquechose de totalement inédit sorti du chapeau ?
Il faut donc une vraie preuve par l'absurde.

On montre déjà que la valeur 2 n'est atteinte qu'une fois. On a déjà $(f+g)(0) = \cos(0)+\cos(0) = 2$.
Mais peut on atteindre à nouveau la valeur 2 avec la somme de deux cosinus. Comme $\cos(x)$ et $\cos(\sqrt{2}.x)$ sont tous deux entre -1 et 1, la somme n'atteint 2 que quand les deux valent 1.
Mais quand est ce que $\cos(x)$ vaut 1 ? Quand x est de la forme $2.p.\pi$ avec p entier.
Puis quand est ce que $\cos(\sqrt{2}.x)$ vaut 1 ? Quand $\sqrt{2}.x$ est de la forme $2.q.\pi$ avec q entier (aucune raison que ce soit le même que p, n'abusons pas).



Mais alors, si on écrit bout à bout : $2.p.\pi = x = \sqrt{2}.q.\pi$ et si x est non nul, on peut diviser et obtenir $2.p = \sqrt{2}.q$ puis $\sqrt{2} = \dfrac{q}{p}$. Et ceci est contradictoire ($\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel).

Le seul réel vérifiant $(f+g)(x) = 2$ est donc $x = 0$.

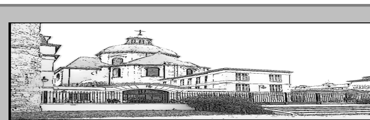
5. qui parmi vous a cherché en base 16 ?

Or, si notre application admettait une période qu'on va noter r, on aurait $(f(+g)(x+r) = (f+g)(x)$ pour tout x et en particulier $(f+g)(r) = 2$ pour $x = 0$ (la valeur prise en 0 est atteinte à nouveau à chaque début de période). Et c'est impossible.

La somme de deux fonctions périodiques n'a plus de raison d'être périodique.

Rassurez vous quand même, si vous avez une fonction $2.\pi$ *périodique, et une autre* $5.\pi$ *périodique, vous pouvez évidemment montrer que la somme est* $10.\pi$*périodique. Mais là, les deux périodes ont une commune mesure.*

LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2024 IS07 2025
30- points