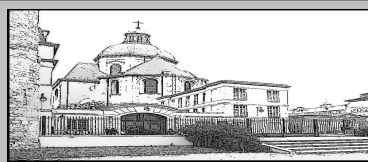


LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 18 novembre
M.P.S.I.2



2024

2025

TD08

<0>

Complétez la permutation suivante pour que sa signature vaille -1 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & * & 4 & * \end{pmatrix}$. Pouvez vous alors la

décomposer à l'aide de $\overrightarrow{123}$ et $\overrightarrow{234}$?

Et si on impose "signature égale à 1" ?

Rappel : la signature d'une permutation est $(-1)^k$ où k est le nombre de bicyclettes d'une décomposition de σ .

pour que ce soit une permutation, on n'a guère le choix

	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	ou	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
décomposition	$\overrightarrow{(12)} \circ \overrightarrow{(34)}$		$\overrightarrow{(1234)}$
signature	$(-1) \times (-1)$		$(-1)^3$
			c'est elle

Mais on ne peut pas la décomposer avec les tricycles.

$\overrightarrow{(123)}$ et $\overrightarrow{(234)}$ ont pour signature 1. En les composant de multiples façons, on n'aura que des permutations de signature 1 et jamais le quadricycle de signature -1 .

En revanche, le double bicyclette $\overrightarrow{(12)} \circ \overrightarrow{(34)}$ peut peut-être se décomposer avec $\overrightarrow{(123)}$ et $\overrightarrow{(234)}$.

Mais on n'en a aucune garantie. Au mieux, la signature ne donne pas de contradiction.

Et alors ? Il peut y en avoir une ailleurs sur un autre invariant que la signature !

Il n'y a que deux façons de prouver qu'une décomposition existe : • en donner une

• ou raisonner comme un chimiste

Bref, il n'y a qu'une façon de faire : en donner une.

Par exemple $\overrightarrow{(12)} \circ \overrightarrow{(34)} = \overrightarrow{(123)} \circ \overrightarrow{(234)}$

(le premier essai fut le bon, j'ai de la chance !).

<1>

On pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 10 & 5 & 4 & 6 & 14 & 11 & 1 & 8 & 15 & 2 & 7 & 9 & 13 & 12 \end{pmatrix}$. Déterminez sa signature, son ordre.

Résolvez $\sigma^n(1) = 13$ d'inconnue n dans \mathbb{N} .

Indiquez suivant la valeur de n le nombre de vrais cycles^a que contient σ^n .

a. un cycle de taille 1 n'est pas compté comme cycle

A faire.

<2>

♣ A partir de quelle valeur de n existe-t-il dans S_n une permutation σ qui contienne au moins un cycle de taille 4 et soit de signature 1.

Même question en exigeant de plus qu'il existe au moins une permutation φ vérifiant $\varphi \circ \varphi = \sigma$.

Pour un cycle de taille 4, il faut au moins 4 éléments.

Mais si on n'en a que quatre, la permutation a pour signature -1 .

Il faut donc ajouter un bicyclette et on a par exemple $\overrightarrow{(1234)} \circ \overrightarrow{(56)}$.

Mais cette permutation peut elle être le carré de quelqu'un ?

La réponse est non.

Si on élève au carré une permutation faite de cycles, on retrouve des cycles de même taille, ou des cycles qui se cassent en plusieurs cycles de même taille.

Par exemple $\overrightarrow{(1\ 2\ 3)}^2 = \overrightarrow{(1\ 3\ 2)}$
 $\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4)}^2 = \overrightarrow{(1\ 3)} \circ \overrightarrow{(2\ 4)}$
 $\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5)}^2 = \overrightarrow{(1\ 3\ 5\ 2\ 4)}$
 $\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)}^2 = \overrightarrow{(1\ 3\ 5)} \circ \overrightarrow{(2\ 4\ 6)}$

Ici, ni $\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4)}$ ni $\overrightarrow{(5\ 6)}$ ne peut être le carré de quelqu'un.
 Et ils ne peuvent être issus ensemble d'un même cycle qui se serait rompu.

Finalement, il faut prendre $n = 8 : \overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4)} \circ \overrightarrow{(5\ 6\ 7\ 8)}$ contient un quadricycle
 a pour signature 1
 est le carré de $\overrightarrow{(1\ 5\ 2\ 6\ 3\ 7\ 4\ 8)}$

◀3▶ ♡ On définit $f = x \mapsto \frac{15x^4 - 166x^3 + 621x^2 - 902x + 480}{24}$. Vérifiez que c'est (en dépit des apparences) un élément de S_5 (permutations de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$), et calculez sa signature.

On calcule les images

1	2	3	4	5
↓	↓	↓	↓	↓
2	3	4	1	5

On reconnaît $\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4)} \circ \overrightarrow{(5)}$, de signature -1 .

◀4▶ **La vraie définition de la signature.** On se donne un entier naturel n . On note S_n l'ensemble des $n!$ permutations de la liste $[1, \dots, n]$ notée L .

Pour toute permutation σ (bijection de L dans L), on pose $Sgn(\sigma) = \frac{\prod_{i < j \leq n} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{i < j \leq n} (j - i)}$.

♠₁ Vérifiez l'existence de cette quantité. Calculez $Sgn(Id)$.

Le numérateur est un produit de $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ entiers (positifs ou négatifs).
 Le dénominateur est un produit de $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ entiers strictement positifs : $j - i$.
 Le dénominateur est non nul, ce rationnel existe.

Pour l'identité, $Sgn(Id) = \frac{\prod_{i < j \leq n} (j - i)}{\prod_{i < j \leq n} (j - i)} = 1$ (numérateur égal au dénominateur).

♠₂ Calculez la signature du cycle $\overrightarrow{1\ 2\ 3}$ dans le cas $n = 3$ (ce cycle est défini par $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3$ et $\sigma(3) = 1$). Calculez la signature de ce cycle dans le cas $n = 4$. Dans le cas $n = 4$ calculez la signature de $\overrightarrow{1\ 2\ 3\ 4}$.

Pour n égal à 3, il y a trois termes

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$j = 1$			
$j = 2$	oui		
$j = 3$	oui	oui	

On calcule donc $\frac{(\sigma(2) - \sigma(1)) \cdot (\sigma(3) - \sigma(1)) \cdot (\sigma(3) - \sigma(2))}{(2-1) \cdot (3-1) \cdot (3-2)} = \frac{(3-2) \cdot (1-2) \cdot (1-3)}{(2-1) \cdot (3-1) \cdot (3-2)} = +1$.

Pour n égal à 4, il y a six termes :

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$j = 1$				
$j = 2$	oui			
$j = 3$	oui	oui		
$j = 4$	oui	oui	oui	

On calcule donc

$$\frac{(\sigma(2) - \sigma(1)) \cdot (\sigma(3) - \sigma(1)) \cdot (\sigma(4) - \sigma(1)) \cdot (\sigma(3) - \sigma(2)) \cdot (\sigma(4) - \sigma(2)) \cdot (\sigma(4) - \sigma(3))}{(2-1) \cdot (3-1) \cdot (4-1) \cdot (3-2) \cdot (4-2) \cdot (4-3)}$$

On trouve cette fois

$$\frac{(3-2) \cdot (1-2) \cdot (4-2) \cdot (1-3) \cdot (4-3) \cdot (4-1)}{(2-1) \cdot (3-1) \cdot (4-1) \cdot (3-2) \cdot (4-2) \cdot (4-3)}$$

On regarde les termes en $4 - 1$, $4 - 2$ et $4 - 3$. On les trouve en haut et en bas chacun.
On simplifie et il reste le même produit. La signature vaut encore $+1$.

On passe au quadricycle :

$$\frac{(\sigma(2) - \sigma(1)) \cdot (\sigma(3) - \sigma(1)) \cdot (\sigma(4) - \sigma(1)) \cdot (\sigma(3) - \sigma(2)) \cdot (\sigma(4) - \sigma(2)) \cdot (\sigma(4) - \sigma(3))}{(2 - 1) \cdot (3 - 1) \cdot (4 - 1) \cdot (3 - 2) \cdot (4 - 2) \cdot (4 - 3)}$$

On trouve

$$\frac{(3 - 2) \cdot (4 - 2) \cdot (1 - 2) \cdot (4 - 3) \cdot (1 - 3) \cdot (1 - 4)}{(2 - 1) \cdot (3 - 1) \cdot (4 - 1) \cdot (3 - 2) \cdot (4 - 2) \cdot (4 - 3)}$$

On a six termes en haut, six termes en bas.

Les mêmes ou presque. Tout ce qui change, c'est le signe.

On peut mettre le numérateur dans l'ordre :

$$\frac{(1 - 2) \cdot (1 - 3) \cdot (1 - 4) \cdot (3 - 2) \cdot (4 - 2) \cdot (4 - 3)}{(2 - 1) \cdot (3 - 1) \cdot (4 - 1) \cdot (3 - 2) \cdot (4 - 2) \cdot (4 - 3)}$$

On regarde juste les signes :

$$\frac{\ominus \cdot \ominus \cdot \ominus \cdot \oplus \cdot \oplus \cdot \oplus}{\oplus \cdot \oplus \cdot \oplus \cdot \oplus \cdot \oplus \cdot \oplus} = -1$$

♠₃ Montrez pour toute permutation σ :

$$\left(\text{Sgn}(\sigma) \right)^2 = \frac{\prod_{i < j} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{i < j} (j - i)} \cdot \frac{\prod_{j < i} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{j < i} (j - i)} = \frac{\prod_{i \neq j} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{i \neq j} (j - i)} = 1$$

On va montrer que la signature, définie sous cette forme compliquée, vaut toujours 1 ou -1 .

L'idée naturelle : comme on a une bijection, on va retrouver les mêmes termes en haut et en bas, au signe près.

Mais pour rendre ceci rigoureux, on va passer par le carré de la signature, et montrer qu'il vaut 1.

On commence par

$$\left(\text{Sgn}(\sigma) \right)^2 = \frac{\prod_{i < j} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{i < j} (j - i)} \cdot \frac{\prod_{i < j} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{i < j} (j - i)}$$

juste en écrivant deux fois le même terme.

Ensuite, on change de variable dans le second produit : $jj = i$ et $ii = j$.

$$\left(\text{Sgn}(\sigma) \right)^2 = \frac{\prod_{i < j} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{i < j} (j - i)} \cdot \frac{\prod_{jj < ii} (\sigma(ii) - \sigma(jj))}{\prod_{jj < ii} (ii - jj)}$$

On change le signe de chaque terme du numérateur du second produit, de même pour chaque terme du dénominateur.

Comme il y en a autant en haut qu'en bas (en fait $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$), les signes moins se compensent.

$$\left(\text{Sgn}(\sigma) \right)^2 = \frac{\prod_{i < j} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{i < j} (j - i)} \cdot \frac{\prod_{jj < ii} (\sigma(jj) - \sigma(ii))}{\prod_{jj < ii} (jj - ii)}$$

On enlève ces doubles lettres, car les variables sont muettes :

$$\left(\text{Sgn}(\sigma) \right)^2 = \frac{\prod_{i < j} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{i < j} (j - i)} \cdot \frac{\prod_{j < i} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{j < i} (j - i)}$$

On regroupe les deux termes du numérateur ensemble (on fera de même au dénominateur). On a une fois $i < j$ et la seconde fois $j < i$. Globalement, on a tous les cas, sauf $i = j$.

$$\left(\text{Sgn}(\sigma)\right)^2 = \frac{\prod_{i \neq j} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{i \neq j} (j - i)}$$

avec donc $n \cdot (n - 1)$ termes en haut comme en bas.

Mais comme σ est une bijection, on a les mêmes terme sen haut et en bas.

Posons en fait $u = \sigma(i)$ et $v = \sigma(j)$. On a alors $\prod_{i \neq j} (\sigma(j) - \sigma(i)) = \prod_{v \neq u} (v - u)$.

Et comme les variables sont muettes, ce terme est le même qu'en bas.

$$\left(\text{Sgn}(\sigma)\right)^2 = \frac{\prod_{v \neq u} (v - u)}{\prod_{i \neq j} (j - i)} = 1$$

Tout ça pour raconter ce qu'on visualise sur un exemple avec $n = 5$ et donc 10 termes.

Prenons $\sigma = \overrightarrow{(1\ 3\ 4)} \circ \overrightarrow{(2\ 5)}$ et calculons numérateur et dénominateur de $\frac{\prod_{i < j} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{i < j} (j - i)}$.

dénominateur	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	numérateur	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$j = 1$						$j = 1$					
$j = 2$	2 - 1					$j = 2$	5 - 3				
$j = 3$	3 - 1	3 - 2				$j = 3$	4 - 3	4 - 5			
$j = 4$	4 - 1	4 - 2	4 - 3			$j = 4$	1 - 3	1 - 5	1 - 4		
$j = 5$	5 - 1	5 - 2	5 - 3	5 - 4		$j = 5$	2 - 3	2 - 5	2 - 4	2 - 1	

Voyez vous bien les mêmes termes, au signe près, et à l'ordre près ?

♠₄ Déduisez que la signature ne peut valoir que 1 ou -1.

Bon, là c'est facile. Un nombre dont le carré vaut 1. ce ne peut être que 1 ou -1.

♠₅ On se donne deux permutations σ et φ . Montrez :

$$\text{Sgn}(\sigma \circ \varphi) = \frac{\prod_{i < j} (\sigma(\varphi(j)) - \sigma(\varphi(i)))}{\prod_{i < j} (\varphi(j) - \varphi(i))} \cdot \frac{\prod_{j < i} (\varphi(j) - \varphi(i))}{\prod_{j < i} (j - i)} = \text{Sgn}(\sigma) \cdot \text{Sgn}(\varphi)$$

Maintenant qu'on sait que la signature vaut 1 ou -1, on va montrer sa propriété fondamentale : la signature du produit¹ est le produit des signatures.

On part de la définition : $\text{Sgn}(\sigma \circ \varphi) = \frac{\prod_{i < j} (\sigma(\varphi(j)) - \sigma(\varphi(i)))}{1} \cdot \frac{1}{\prod_{j < i} (j - i)}$.

On insère un terme (non nul, il faut le dire) en haut et en bas, bien choisi :

$$\text{Sgn}(\sigma \circ \varphi) = \frac{\prod_{i < j} (\sigma(\varphi(j)) - \sigma(\varphi(i)))}{\prod_{i < j} (\varphi(j) - \varphi(i))} \cdot \frac{\prod_{j < i} (\varphi(j) - \varphi(i))}{\prod_{j < i} (j - i)}$$

On est heureux, on a déjà fait apparaitre la signature de φ .

Reste à montrer que $\frac{\prod_{i < j} (\sigma(\varphi(j)) - \sigma(\varphi(i)))}{\prod_{i < j} (\varphi(j) - \varphi(i))}$ est bien la signature de σ .

On effectue un changement de variable : $u = \varphi(i)$ et $v = \varphi(j)$ (encore ces lettres u et v facile à confondre graphiquement !).

1. je devrais dire « de la composée », mais c'est plus agréable avec produit, puisque composer des permutations, ce sera multiplier des matrices

Si on va un peu vite, c'est facile :
$$\frac{\prod_{i < j} (\sigma(\varphi(j)) - \sigma(\varphi(i)))}{\prod_{i < j} (\varphi(j) - \varphi(i))} = \frac{\prod_{?} (\sigma(v) - \sigma(u))}{\prod_{?} (v - u)} = \text{Sgn}(\sigma).$$

Mais quelle est la condition ? On avait $i < j$, mais on n'a plus $u < v$.

On a juste $u \neq v$.

En fait, il faut être plus rigoureux dans le changement d'indice • si $\varphi(i) < \varphi(j)$ alors $u = \varphi(i)$ et $v = \varphi(j)$
• si $\varphi(j) < \varphi(i)$ alors $u = \varphi(j)$ et $v = \varphi(i)$

On a toujours terme à terme $\frac{(\sigma(\varphi(j)) - \sigma(\varphi(i)))}{(\varphi(j) - \varphi(i))} = \frac{(\sigma(v) - \sigma(u))}{(v - u)}$ soit directement, soit avec deux signes moins.

La condition $\prod_{i < j}$ devient bien $\prod_{u < v}$ (avec autant de termes, puisque φ est bijective).

Cette fois, on a bien
$$\frac{\prod_{i < j} (\sigma(\varphi(j)) - \sigma(\varphi(i)))}{\prod_{i < j} (\varphi(j) - \varphi(i))} = \frac{\prod_{u < v} (\sigma(v) - \sigma(u))}{\prod_{u < v} (v - u)} = \text{Sgn}(\sigma).$$

♠₆ Montrez : $\text{Sgn}(\sigma^{-1}) = \frac{1}{\text{Sgn}(\sigma)}$ pour toute permutation σ . Comparez $\text{Sgn}(\sigma^{-1} \circ \varphi \circ \sigma)$ et $\text{Sgn}(\varphi)$ (ce qu'on appelle conjugaison).

On exploite juste le résultat précédent : $\text{Sgn}(\sigma) \cdot \text{Sgn}(\sigma^{-1}) = \text{Sgn}(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \text{Sgn}(\text{Id}) = 1$.

Oui, la signature de l'identité vaut 1, le numérateur est égal au dénominateur...

On a donc, en divisant : $\text{Sgn}(\sigma^{-1}) = \frac{1}{\text{Sgn}(\sigma)} = \text{Sgn}(\sigma)$ puisque $\text{Sgn}(\sigma)$ vaut 1 ou -1 . Je dois vous faire un dessin avec « l'inverse de 1 est 1, et l'inverse de -1 est -1 » ?

On notera que la formule $\text{Sgn}(\sigma^{-1}) = \frac{1}{\text{Sgn}(\sigma)}$ peut aussi s'obtenir par ré-indexation dans $\text{Sgn}(\sigma^{-1}) = \frac{\prod_{i < j} (\sigma^{-1}(j) - \sigma^{-1}(i))}{\prod_{i < j} (j - i)}$.

On a $\text{Sgn}(\sigma^{-1} \circ \varphi \circ \sigma) = \text{Sgn}(\sigma)$, et ceci doit vous rappeler $\det(P^{-1} \cdot M \cdot P) = \det(M)$ ainsi que $\text{Tr}(P^{-1} \cdot M \cdot P) = \text{Tr}(M)$ et de nombreux phénomènes du même type, qu'on appelle effectivement conjugaison : $M \mapsto P^{-1} \cdot M \cdot P$ avec P fixée.

Le calcul est direct : $\text{Sgn}(\sigma^{-1} \circ \varphi \circ \sigma) = \text{Sgn}(\sigma^{-1}) \cdot \text{Sgn}(\varphi) \cdot \text{Sgn}(\sigma)$ par propriété « image du produit/produit des images »

$\text{Sgn}(\sigma^{-1} \circ \varphi \circ \sigma) = \text{Sgn}(\sigma^{-1}) \cdot \text{Sgn}(\sigma) \cdot \text{Sgn}(\varphi)$ car là, on est dans \mathbb{R} (et même \mathbb{Z} , oui, je sais)

$\text{Sgn}(\sigma^{-1} \circ \varphi \circ \sigma) = 1 \cdot \text{Sgn}(\varphi)$ par propriété démontré juste avant

♠₇ On note $\tau_{i,j}$ la transposition qui échange i et j et laisse les autres éléments invariants ($\sigma(i) = j, \sigma(j) = i$ et $\sigma(k) = k$ pour $k \notin \{i, j\}$). Montrez $\text{Sgn}(\tau_{1,2}) = -1$.

La notation $\tau_{i,j}$ pour le simple bicycle $\overrightarrow{(i \ j)}$ est celle utilisée dans le programme.

Je ne l'aime que moyennement, car elle introduit une notation de plus pour rien.

Et aussi, ensuite, les élèves confondent les mots permutation (échange bijectif quelconque)

transposition (échange de seulement deux termes)

La transposition (ou bicycle) est la brique élémentaire avec laquelle on décompose ensuite toute permutation, étape par étape.

On va montrer que toutes les transpositions ont pour signature $m-1$.

Ceci permettra de valider la « définition » de la signature « décomposer en produit de transpositions,

compter les transpositions

et même juste la parité du nombre de transposition »

Commençons par la transposition la plus simple : juste deux termes.

Et montrons que sa signature vaut effectivement -1 .

On calcule donc $Sgn(\sigma) = \frac{\prod_{i < j \leq n} (\tau_{1,2}(j) - \tau_{1,2}(i))}{\prod_{i < j \leq n} (j - i)}$ ou même juste le signe de son numérateur $\prod_{i < j \leq n} (\tau_{1,2}(j) - \tau_{1,2}(i))$.

On va séparer en trois paquets de termes :

$$\prod_{i=1 < j=2 \leq n} (\tau_{1,2}(j) - \tau_{1,2}(i))$$

$$\prod_{i=1 < 2 < j \leq n} (\tau_{1,2}(j) - \tau_{1,2}(i))$$

$$\prod_{1 < i < j \leq n} (\tau_{1,2}(j) - \tau_{1,2}(i))$$

Le premier n'a qu'un terme : $(\tau_{1,2}(2) - \tau_{1,2}(1)) = (1 - 2)$: négatif.

Le second a $n - 2$ termes : $(\tau_{1,2}(3) - \tau_{1,2}(1)) \cdot (\tau_{1,2}(4) - \tau_{1,2}(1)) \dots (\tau_{1,2}(n) - \tau_{1,2}(1))$
c'est $(3 - 2) \cdot (4 - 2) \dots (n - 2)$ positif

Le dernier est fait de termes où $\tau_{1,2}$ n'a pas agi (i dépasse 1, donc j dépasse 2) :

$$\prod_{1 < i < j \leq n} (\tau_{1,2}(j) - \tau_{1,2}(i)) = \prod_{1 < i < j \leq n} (j - i)$$

Lui aussi est positif.

Le numérateur a un signe moins. le quotient vaut -1 .

numérateur		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	numérateur		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
Pour saisir	$j = 1$						et	$j = 1$					
	$j = 2$	1 - 2						$j = 2$	2 - 1				
	$j = 3$	3 - 2	3 - 1					$j = 3$	3 - 1	3 - 2			
	$j = 4$	4 - 2	4 - 1	4 - 3				$j = 4$	4 - 1	4 - 2	4 - 3		
	$j = 5$	5 - 2	5 - 1	5 - 3	5 - 4			$j = 5$	5 - 1	5 - 2	5 - 3	5 - 4	

En regardant bien, on voit un terme qui a changé de signe, et deux colonnes qui se sont échangées.

Pour l'instant, on connaît un bicycle dont la signature vaut -1 : $(1\ 2)$ (pardon, $\tau_{1,2}$).

On va généraliser aux autres.

♠₈ Qui est $\tau_{2,i} \circ \tau_{1,2} \circ \tau_{2,i}$? Qui est $\tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i}$? Déduisez que les transpositions $\tau_{i,j}$ ont toutes pour signature -1 .

$$\tau_{2,i} \circ \tau_{1,2} \circ \tau_{2,i}(1) = \tau_{2,i} \circ \tau_{1,2}(1) = \tau_{2,i}(2) = i$$

$$\tau_{2,i} \circ \tau_{1,2} \circ \tau_{2,i}(2) = \tau_{2,i} \circ \tau_{1,2}(i) = \tau_{2,i}(i) = 2$$

$$\tau_{2,i} \circ \tau_{1,2} \circ \tau_{2,i}(i) = \tau_{2,i} \circ \tau_{1,2}(2) = \tau_{2,i}(1) = 1$$

$$\tau_{2,i} \circ \tau_{1,2} \circ \tau_{2,i}(j) = \tau_{2,i} \circ \tau_{1,2}(j) = \tau_{2,i}(j) = j \text{ si } j \text{ n'est ni } 1, \text{ ni } 2 \text{ ni } i.$$

On résume : 2 n'a pas bougé, et on a interverti 1 et i : $\tau_{2,i} \circ \tau_{1,2} \circ \tau_{2,i} = \tau_{1,i}$.

Remarque : Pour que cette question ait un sens, il est sous-entendu que iu n'est égal ni à 1, ni à 2.

On calcule alors $Sgn(\tau_{1,i}) = Sgn(\tau_{2,i} \circ \tau_{1,2} \circ \tau_{2,i}) = Sgn(\tau_{2,i}) \cdot Sgn(\tau_{1,2}) \cdot Sgn(\tau_{2,i}) = Sgn(\tau_{1,2}) \cdot (Sgn(\tau_{2,i}))^2 = -1 \cdot 1$

On a progressé, tous les bicycles $(1\ i)$ ont pour signature -1 et pas seulement le premier.

$$\tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i} = \tau_{i,j} \text{ (suivez à la trace } 1, i \text{ et } j).$$

Comme on connaît les signatures des trois bicycles du premier membre, on a la signature du bicycle « générique » $(i\ j)$, et elle vaut -1 .

C'est bon, tous les bicycles ont pour signature -1 . Passons aux tricycles et cycles quelconques.

♠₉ Retrouvez : la signature d'une permutation dépend de la parité du nombre de transpositions dans la décomposition de σ en produit de transpositions.

Que dire de plus ? On décompose en produit de transpositions. Et si il y a en a p , en utilisant la formule « signature du produit égale produit des signatures », on a un produit de n nombres tous égaux à -1 , d'où $(-1)^n$.

♠₁₀ Simplifiez $\tau_{a,e} \circ \tau_{a,d} \circ \tau_{a,c} \circ \tau_{a,b}$. Calculez en fonction de k la signature d'un cycle $a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \dots a_k$.

	a	b	c	d	e
$\tau_{a,b}$	b	a	c	d	e
$\tau_{a,c}$	b	c	a	d	e
$\tau_{a,d}$	b	c	d	a	e
$\tau_{a,e}$	b	c	d	e	a
	$(a\ b\ c\ d\ e)$				

donc $\tau_{a,e} \circ \tau_{a,d} \circ \tau_{a,c} \circ \tau_{a,b} = \overrightarrow{(a\ b\ c\ d\ e)}$

Plus généralement, $(a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \dots a_k) = \overrightarrow{(a_1\ a_k)} \circ \dots \circ \overrightarrow{(a_1\ a_3)} \circ \overrightarrow{(a_1\ a_2)}$ (par exemple).
Un k -cycle se décompose en $(k-1)$ bicycles, et a donc pour signature $(-1)^{k-1}$.

Suivant vos goûts, vous appliquerez donc l'une des formules suivantes :

- calculer le grand nombre $\frac{\prod_{i < j \leq n} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{i < j \leq n} (j - i)}$
- juste regarder le signe du numérateur de ce grand nombre
 - calculer le « nombre d'inversions » (nombre de couples (i, j) avec $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$), et regarder juste la parité de ce nombre²
 - décomposer en produit de bicycles et regarder la parité de cette décomposition
 - décomposer en produit de cycles, calculer la signature de chaque k -cycle $((-1)^{k-1})$ et effectuer le produit de ces signatures³.

A part ça, vous n'avez pas besoin de retenir la définition de la signature.

Ce qui a été fait ici est juste pour s'assurer qu'elle existe bien.

Tout ce que devez faire ensuite, c'est savoir calculer des signatures, et appliquer $\text{Sgn}(\sigma \circ \varphi) = \text{Sgn}(\sigma) \cdot \text{Sgn}(\varphi)$.

Si non, le programme propose aussi de définir la signature comme morphisme de groupe de (S_n, \circ) dans $(\{-1, 1\}, \times)$.

Oui, (S_n, \circ) est un groupe (non commutatif, fait de $n!$ permutations). Et $(\{-1, 1\}, \times)$ est aussi un groupe (avec juste deux éléments).

Et morphisme, c'est « image du produit égale produit des images ». C'est la propriété caractéristique $\text{Sgn}(\sigma \circ \varphi) = \text{Sgn}(\sigma) \cdot \text{Sgn}(\varphi)$.

◀5▶ Donnez la signature de $x \mapsto x^5 \text{ mod } 7$ sur $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ après avoir vérifié que c'est bien une permutation.

x	0	1	2	3	4	5	6
$x^5 \text{ modulo } 7$	0	1	4	5	2	3	6

On les a rapidement pour 0 et 1. De même pour 6 égal à -1.

Pour 2, il n'est pas si lourd de regarder $2^4 = 2$ puis donc $2^5 = 4$.

On déduit alors le résultat pour -2. Et $3^2 = 2$ puis $3^4 = 4$ et $3^5 = 12 = 5$.

On a bien une permutation, c'est à dire une bijection de l'ensemble dans lui même.

On la décompose en cycles : $(\overrightarrow{0}) \circ (\overrightarrow{1}) \circ (\overrightarrow{2\ 4}) \circ (\overrightarrow{3\ 5}) \circ (\overrightarrow{6})$. La signature vaut 1.

Et si vous y tenez avec les $\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$:

6-0	6-1	6-4	6-5	6-2	6-3
6-0	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5
3-0	3-1	3-4	3-5	3-2	
5-0	5-1	5-2	5-3	5-4	
2-0	2-1	2-4	2-5		
4-0	4-1	4-2	4-3		
5-0	5-1	5-4			
3-0	3-1	3-2			
4-0	4-1				
2-0	2-1				
1-0					
1-0					

Multipliez tout et vous aurez 1.

Ou regardez juste le signe !

◀6▶ On écrit les uns derrière les autres les entiers de 1 à 100 : 123456789101112131415...979899100. Vous obtenez un grand entier N . Combien a-t-il de chiffres ? Vous avez maintenant le droit de barrer quarante chiffres de cet entier N . Le gagnant est celui dont le « N raccourci » est l'entier le plus grand possible. Que barrez vous ?
Informaticiens : écrivez un script qui prend en entrée n et retourne l'entier fait des n premiers entiers écrits les uns derrière les autres. Suivant votre niveau : vous avez le droit ou non aux fonctions `int` et `str`, ou alors vous ne travaillez qu'avec des entiers et des puissances de 10.

2. c'est la même notion que juste au dessus, non ?

3. en général, c'est la plus rapide

Pour créer ce nombre, on peut utiliser **Python** avec toutes ses fonctionnalités :

```
def GrandNombre(n) :
...Mot = ""
...for k in range(1,n+1) :
.....Mot += str(k)
...return int(Mot)
```

Notre nombre N a un certain nombre de chiffres.

Combien ? Les neuf premiers entiers en ont créé neuf

Les entiers de 10 à 99 en ont créé cent quatre vingt

Total : 192 chiffres.

L'entier 100 en ajoute trois.

123456789101112131415161718192021222324252627282930313233343536373839404142434445464748495051525
354555657585960616263646566676869707172737475767778798081828384858687888990919293949596979899100

On va en effacer quarante, il va rester un entier à 152 chiffres, quoi qu'on fasse.

Les réponses sont toutes entre 10^{151} et 10^{152} .

Parmi eux, les plus grands sont ceux qui commencent par un 9. On va donc tout effacer jusqu'à tomber sur un 9.

On efface 8 chiffres.

12345678910111213141516171819202122232425262728293031323334353637383940414243444546474849...899100

On a encore le droit d'en effacer 32 chiffres.

Si le chiffre suivant le 9 n'est pas un 9, on aura perdu face à

12345678910111213141516171819202122232425262728293031323334353637383940414243444546474849...899100

On a effacé encore dix neuf chiffres. On a encore droit à treize chiffres.

Impossible d'atteindre le 9 suivant. On peut avoir des 990... , 991... et jusqu'à un 995... :

1234567891011121314151617181920212223242526272829303132333435363738394041424344454647...899100

On ne pourra pas faire mieux.

Pour créer ce nombre sans utiliser **int** et **str** qui convertissent les entiers en chaînes et vice versa.

Imaginons qu'on en soit à 123456789101112 et qu'il faille lui coller derrière le 13.

On ne peut pas ajouter 13, on obtiendrait 123456789101125.

Mais on peut multiplier par 100 : 12345678910111200 puis ajouter 13 : 12345678910111213.

Il suffit donc à chaque étape de multiplier par 10, 100 ou 1000 et d'ajouter le nouveau nombre :

```
def GrandNombre(n) :
...Nombre = 0
...for k in range(n) :
.....Nombre *= 10
.....Nombre += k
...return Nombre
```

Sauf qu'il faut remplacer 10 par 100 puis par 1000. Bref, par une puissance de 10 qu'on va appeler **Puissance**, et initialiser à 10, et qui grandira au bon moment.

Mais quand faut il passer au suivant ? Quand k a un chiffre de plus. Et c'est justement quand k atteint la valeur **Puissance** !

```
def GrandNombre(n) :
...Nombre = 0
...Puissance = 10
...for k in range(n) :
.....if Nombre = Puissance :
.....Puissance *= 10
.....Nombre *= Puissance
.....Nombre += k
...return Nombre
```

◀7▶

Combien y a-t-il dans S_6 de cycles de taille 4 ?

Combien y a-t-il dans S_6 de cycles σ de taille 4 vérifiant $\sigma(1) = 1$?

Combien y a-t-il dans S_6 de cycles σ de taille 4 vérifiant $\sigma(1) = 2$?

Combien y a-t-il dans S_6 de permutations σ de signature 1 ?

Combien y a-t-il dans S_6 de permutations σ de signature 1, vérifiant $\sigma(1) = 2$?

Pour construire un cycle de taille 4 dans S_6 , il suffit de choisir les quatre éléments qu'on va faire bouger : $\binom{6}{4}$ choix, comme par exemple $\{1, 4, 5, 6\}$.

Ensuite, reste à savoir dans quel sens les faire tourner. Comme on sait que 1 va bouger, il suffit de savoir dans quel ordre les trois autres suivront :

(1 3 5 6)	(1 5 3 6)	(1 6 3 5)
(1 3 6 5)	(1 5 6 3)	(1 6 5 3)

Total : 90.

Si $\sigma(1)$ vaut 1, c'est que 1 ne bouge pas. Les éléments qui bougent sont donc 4 parmi 5.

Nouveau total : $\binom{5}{4} \cdot 3!$.

Si $\sigma(1) = 2$, c'est que 1 bouge. Et 2 aussi. Pour qu'ensuite on finisse par revenir sur 1.

Il reste à compléter le cycle avec deux éléments. A choisir parmi 4 : $\{3, 4, 5, 6\}$. Par exemple 4 et 5.

Et on complète le cycle : $\overrightarrow{(1\ 2\ 4\ 5)}$ ou $\overrightarrow{(1\ 2\ 5\ 4)}$.

Total : $\binom{4}{2} \cdot 2$.

La moitié des permutations a pour signature 1 et l'autre moitié a pour signature -1 . Donc $\frac{6!}{2}$.

◀8▶

♥ On note S_n l'ensemble des $n!$ permutations de la liste $[1, 2, \dots, n]$. Montrez $\sum_{\sigma \in S_n} \sigma(1) = \frac{(n+1)!}{2}$. Que vaut

$\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ k \leq n}} \sigma(k)$? (attention au nombre de termes)

Que vaut $\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \varphi \in S_n}} \sigma(\varphi(1))$ (attention au nombre de termes).

Dans la somme $\sum_{\sigma \in S_n} \sigma(1) = \frac{(n+1)!}{2}$ il y a $n!$ termes. Certains valent 1, d'autres valent 2 et ainsi de suite jusqu'à n .

Exemple

$\sigma = Id$	$\sigma(1) = 1$	$\sigma = \overrightarrow{(1\ 2)}$	$\sigma(1) = 2$	$\sigma = \overrightarrow{(1\ 3)}$	$\sigma(1) = 3$
$\sigma = \overrightarrow{(2\ 3)}$	$\sigma(1) = 1$	$\sigma = \overrightarrow{(1\ 2\ 3)}$	$\sigma(1) = 2$	$\sigma = \overrightarrow{(1\ 3\ 2)}$	$\sigma(1) = 3$

On peut donc découper notre somme suivant la valeur de $\sigma(1)$.

$$\sum_{\sigma \in S_n} \sigma(1) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=k}} \sigma(1) \right) = \sum_{k=1}^n k \cdot \text{Card}(\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = k)$$

puisque la somme agit alors comme un simple compteur.

Combien de permutations de σ vérifient $\sigma(1) = 1$? Il y en a $(n-1)!$. Ce sont en fait les $n-1$ permutations de la liste $[2, 3, \dots, n]$.

Mais ensuite, il y a autant de permutations vérifiant $\sigma(1) = 1$ que de permutations vérifiant $\sigma(1) = 2$. Il suffit de composer avec $\overrightarrow{(1\ k)}$.

On a donc finalement

$$\sum_{\sigma \in S_n} \sigma(1) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=k}} \sigma(1) \right) = \sum_{k=1}^n k \cdot (n-1)! = (n-1)! \cdot \sum_{k=1}^n k$$

et le produit $(n-1)! \cdot \frac{n \cdot (n+1)!}{2}$ donne $\frac{(n+1)!}{2}$.

Les variables de sommation étant indépendantes, on peut regrouper ensuite

$$\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ k \leq n}} \sigma(k) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\sum_{k \leq n} \sigma(k) \right)$$

Mais pour chaque bijection σ la somme $\sum_{k=1}^n \sigma(k)$ est la somme $\sum_{i=1}^n i$ ce qui donne encore $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

La variable σ intervient ensuite comme un compteur et notre grande somme vaut $n! \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

La somme double $\sum_{\sigma \in S_n} \left(\sum_{\varphi \in S_n} \sigma \circ \varphi(1) \right)$ se rémène déjà à la première.

Pour chaque σ donnée, la somme $\sum_{\varphi \in S_n} \sigma \circ \varphi(1)$ s'écrit en fait $\sum_{\varphi' \in S_n} \varphi'(1)$ par réindexation de l'ensemble de toutes les permutations ($\varphi' = \sigma \circ \varphi$).

Chacune vaut $\frac{(n+1)!}{2}$ comme vu au début.

Et σ intervient comme compteur : la somme cherchée vaut $n! \cdot \frac{(n+1)!}{2}$.

Et comme presque toujours dans ces exercices de dénombrement, pas de récurrence.

<9>

L'univers est fait des 720 permutations de la liste $[0, 1, 2, 3, 4, 5]$. On tire une permutation avec probabilité uniforme. Quelle est la probabilité que ce soit un cycle de taille 4 ?

Quelle est la probabilité qu'elle commute avec $\overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)}$?

On doit juste dénombrer les cycles de taille 4.

Pour construire un quadricycle, dire qui sont les quatre éléments : $\binom{6}{4}$ choix (on dit aussi $\binom{6}{2}$ puisqu'il suffit de dire qui sont les deux qu'on laisse de côté).

Et une fois choisis les quatre éléments, il y a 3! façons de construire le cycle : on fixe l'un des éléments, il a trois images possibles, puis deux puis une et le cycle est clos.

On a donc 15.6 cycles de taille 4 et la probabilité vaut $\frac{90}{720}$ (à simplifier si vous y tenez).

Une permutation commute avec $\overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)}$ si et seulement elle est de la forme $\overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)}^k \circ \varphi$ où φ est une permutation de ce qu'il reste : 0 et 2.

k peut valoir 1, 2, 3 ou 4 et on double par les permutations de $(1, 2)$.

Probabilité $\frac{4.2}{720}$.

(l'énoncé disait « elle », on repartait donc avec une permutation, et pas un quadricycle).

Justification :

Que dit en effet la condition $\sigma \circ \overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)} = \overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)} \circ \sigma$?

Par exemple, pour 2 elle dit $\sigma(2) = \overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)} \circ \sigma(2)$. Comme $\sigma(2)$ ne bouge pas par le cycle, c'est que $\sigma(2)$ vaut 2 ou 0.

Il ne va de même avec $\sigma(0)$.

Comme $\sigma(0)$ et $\sigma(2)$ ont pris les valeurs 1 et 2, les autres n'ont plus le droit de les prendre.

En revanche, pour 1, on a $\sigma(4) = \overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)} \circ \sigma(1)$.

De même, pour 4 : $\sigma(5) = \overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)} \circ \sigma(4)$

Et enfin : $\sigma(3) = \overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)} \circ \sigma(5)$ et $\sigma(1) = \overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)} \circ \sigma(3)$.

Si l'on choisit par exemple $\sigma(1) = 1$, on trouve $\sigma(4) = 4$ puis $\sigma(5) = 5$ et $\sigma(3) = 3$.

Mais si l'on choisit $\sigma(1) = 5$, on trouve $\sigma(4) = 3$ et ainsi de suite, on a cette fois $\overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)}^2$ sur la liste $[1, 3, 4, 5]$.

<10>

♣ On définit : $T = \left\{ \frac{k \cdot (k+1)}{2} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ (ensemble des nombres triangulaires).

On définit $\sigma(n) = n - 1$ si $n \notin T$, et $\sigma(n) = \frac{k^2 + 3k}{2}$ si n est l'élément $\frac{k \cdot (k+1)}{2}$.

Complétez

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\sigma(n)$																	

Vérifiez que σ va bien de \mathbb{N} dans \mathbb{N} et est bijective (permutation de \mathbb{N}).

Pouvez vous la décomposer en produit de cycles de supports disjoints ? Pouvez vous lui donner un ordre ?^a

Résolvez l'équation $\sigma^{10}(n) = n$ d'inconnue entière n .

Résolvez l'équation $\sigma^{2015}(n) = 2018$ d'inconnue entière n .

a. Rappe : l'ordre d'une permutation φ est le plus petit entier p non nul vérifiant $\varphi^p = Id$

Qui sont les nombres triangulaires ?

$$0 = 0$$

$$1 = 0 + 1$$

Ceux qui sont somme d'entiers consécutifs : $3 = 0 + 1 + 2$ et

$$6 = 0 + 1 + 2 + 3$$

$$10 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4$$

$$T_n = \sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
dans T ?	o	o		o			o				o					o				
$\sigma(n)$	0	2	1	5	3	4	9	6	7	8	14	10	11	12	13	20	15	16	17	18

L'image des éléments de T :

n	0	1	3	6	10	n
$n = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$	$\frac{0 \cdot (0+1)}{2}$	$\frac{1 \cdot (1+1)}{2}$	$\frac{2 \cdot (2+1)}{2}$	$\frac{3 \cdot (3+1)}{2}$	$\frac{4 \cdot (4+1)}{2}$	$\frac{k \cdot (k+1)}{2}$
$\frac{k^2 + 3k}{2} = \sigma(n)$	$\frac{0^2 + 3 \cdot 0}{2} = 0$	$\frac{1^2 + 3 \cdot 1}{2} = 2$	$\frac{2^2 + 3 \cdot 2}{2} = 5$	$\frac{3^2 + 3 \cdot 3}{2} = 9$	$\frac{4^2 + 3 \cdot 4}{2} = 14$	$\frac{k^2 + 3k}{2} = ?$

La clef, peu visible est $\frac{k^2 + 3k}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} - 1$.

L'image d'un nombre triangulaire est (presque) un nombre triangulaire.

Déjà, cette remarque garantit que les nombres de T ont une image dans \mathbb{N} eux aussi. Chaque entier a une image. Application.

Chaque image est bien dans \mathbb{N} . Application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

Un élément qui est dans T a une image entière de la forme $\frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} - 1$, c'est un entier naturel (forme $\frac{k^2 + 3k}{2}$ pour la positivité).

Un élément qui n'est pas dans T a une image $n - 1$ dans \mathbb{Z} .

Peut elle ne pas être dans \mathbb{N} (c'est à dire « être négative » ?). Mais seul 0 aurait une image négative. Et il est dans T donc non concerné.

Passons à l'injectivité.

On prend a et b d'images égales : $\sigma(a) = \sigma(b)$. On veut montrer $a = b$.

Il faut étudier les différents cas.

• a et b hors de T . On a alors $a - 1 = b - 1$ d'où effectivement $a = b$.

• a est dans T et b n'y est pas. On écrit $a = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$. L'égalité $\sigma(a) = \sigma(b)$ donne $\frac{k^2 + 3k}{2} = b - 1$ d'où

$$b = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$$

b serait dans T contradiction.

• a n'est pas dans T et b est dans T . Même raisonnement par symétrie des rôles.

• a et b sont dans T . On part de $\frac{k^2 + 3k}{2} = \sigma(a) = \sigma(b) = \frac{p^2 + 3p}{2}$.

On obtient $k = p$ (stricte croissance de $t \mapsto \frac{t^2 + 3t}{2}$). On reporte : $a = \frac{k \cdot (k+1)}{2} = \frac{p \cdot (p+1)}{2} = b$.

Les quatre cas ont été étudiés : $a = b$.

Attention : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Il ne suffit pas de dire « } \sigma \text{ est injective de } T \text{ dans } \mathbb{N} \\ \sigma \text{ est injective de } \mathbb{N} - T \text{ dans } \mathbb{N} \\ \text{donc } \sigma \text{ est injective de } \mathbb{N} \text{ dans } \mathbb{N} \text{ »} \end{array} \right.$

Syntaxiquement, c'est joli, mais c'est n'importe quoi.

La valeur absolue est injective sur \mathbb{R}^+ et injective sur \mathbb{R}^- . Mais elle n'est pas injective sur \mathbb{R} .

De même, le raisonnement au dessus n'étudie dans la disjonction de cas pour $\sigma(a) = \sigma(b)$ que deux des quatre cas :

	$a \in T$	$a \notin T$
$b \in T$	X	
$b \notin T$		X

Surjectivité.

Décomposition en produit de cycles.

Le problème est qu'il va y en avoir une infinité. Mais σ a été construite pour avoir

$$\sigma = \overrightarrow{(0)} \circ \overrightarrow{(12)} \circ \overrightarrow{(543)} \circ \overrightarrow{(9876)} \circ \overrightarrow{(1413121110)} \circ \dots$$

avec une infinité de cycles, de longueur de plus en plus grande...

◁11▷

On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ (les $n!$ bijections de cet ensemble dans lui-même). On note P_n le sous ensemble $\{\sigma \in S_n \mid \forall k \in \{1, \dots, n\}, \sigma(k) \neq k\}$ (permutations sans point fixe).

Justifiez	n	0	1	2	3	4	5
	$\text{Card}(P_n)$ (noté p_n)	1	0	1	2	9	44

Montrez : $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = n.(p_n + p_{n-1})$.

Attention, ce n'est pas parce qu'il y a un n dans la formule qu'il faut réagir « oh, je vais faire une récurrence ». Ce serait en effet totalement idiot, car il faudrait, pour passer de n à $n+1$ avoir une vision sur p_n, p_{n+1}, p_{n+2} et p_{n+3} ! Pure folie. Non, c'est une formule que vous allez démontrer directement, par un dénombrement judicieux, et qui servira ensuite à des récurrences (cerveau>>>>réflexes).

Une piste : si on regarde σ dans P_{n+1} , alors $\sigma(n+1)$ est un entier entre 1 et n , qu'on va noter k et qui a deux possibilités : $\sigma(k) = n+1$ ou $\sigma(k) \neq n+1$.

Prouvez alors : $p_n = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ (là, d'accord, faites une récurrence).

Déduisez $\frac{p_n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$ (proportion de permutations « partout mélangeantes » parmi toutes les permutations).

◁12▷

On donne $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Résolvez $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ d'inconnue ensembliste B .

Résolvez $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ d'inconnue ensembliste B . ($P(E)$ est l'ensemble des parties de E).

Une solution évidente est $B = A$ puisqu'alors $P(A \cup B) = P(A)$ et $P(A) \cup P(B) = P(A)$.

Une autre est $B = \emptyset$ puisque $P(A \cup B) = P(A)$ et $P(A) \cup P(B) = P(A) \cup \{\emptyset\} = P(A)$ (car \emptyset est déjà dans $P(A)$).

On propose aussi $B = \{0\}$ et on vérifie $P(A \cup B) = P(A)$ et $P(A) \cup P(B) = P(A) \cup \{\emptyset, \{0\}\} = P(A)$ (car \emptyset et $\{0\}$ sont déjà dans $P(A)$).

Et même, toute partie B incluse dans A convient (on a alors $P(B) \subset P(A)$ et donc $P(A \cup B) = P(A)$ puis $P(A) \cup P(B) = P(A)$).

A ce stade : $P(A) \subset S$ (tous les B de $P(A)$ sont solutions).

Mais si B contient A , on a aussi $\forall X \in P(A), X \in P(B)$.

Preuve : on prend X dans $P(A)$.

$X \in P(A)$ signifie $X \subset A$.

Comme on a aussi $A \subset B$, par transitivité, on déduit $X \subset B$.

On reconnaît $X \in P(B)$.

Avec $P(A) \subset P(B)$ (c'est ce qu'on vient d'écrire), on a $P(A) \cup P(B) = P(B)$.

Et avec $A \subset B$, on a $P(A \cup B) = P(B)$.

A ce stade : $S = \{B \mid (A \subset B) \text{ ou } (B \subset A)\}$ (assez normal par symétrie des rôles).

Si vous avez des doutes, prenez $B = \mathbb{N}$. On a alors $P(A \cup B) = P(\mathbb{N})$ et $P(A) \cup P(B) = P(\mathbb{N})$ car ajouter les seize parties plus haut ne change pas grand chose (et même rien) à $P(\mathbb{N})$.

Dans $P(A)$ il y a seize éléments (parties de A) :

\emptyset	$\{0\}$	$\{0, 1\}$	$\{1, 2, 4\}$	$\{0, 1, 2, 4\}$
	$\{1\}$	$\{0, 2\}$	$\{0, 2, 4\}$	
	$\{2\}$	$\{0, 3\}$	$\{0, 1, 4\}$	
	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$	
		$\{1, 3\}$		
		$\{2, 3\}$		

$A \cup B$ aura au moins quatre éléments (disons $4 + n$). Et $P(A \cup B)$ aura 2^{4+n} éléments.

Dans $P(A) \cup P(B)$ il y a $2^4 + 2^b - \dots$ éléments (il faut décomposer les parties à la fois dans $P(A)$ et dans $P(B)$),

comme \emptyset).

Peut on avoir $2^{4+n} = 2^4 + 2^b - \dots$?

Attention toutefois, ce type de raisonnement ne tient pas si B est infini. Il faut donc un raisonnement par analyse et synthèse.

Supposons $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

On sait déjà $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$.

En effet, si un certain X est dans $P(A) \cup P(B)$, il est soit dans $P(A)$, soit dans $P(B)$.

Si X est dans $P(A)$, il est dans $P(A \cup B)$ (passage de $X \subset A$ à $X \subset A \cup B$).

Si X est dans $P(B)$, il est dans $P(A \cup B)$ (passage de $X \subset B$ à $X \subset A \cup B$).

On va donc exploiter $P(A \cup B) \subset P(A) \cup P(B)$, seule partie pertinente de l'hypothèse.

Parmi les parties de $A \cup B$, il y a justement $A \cup B$.

C'est donc par hypothèse un élément de $P(A) \cup P(B)$. Ce qui signifie : $A \cup B$ est dans $P(A)$ ou $A \cup B$ est dans $P(B)$.

Dans le premier cas, on aboutit à $A \cup B \subset A$, et ceci donne $B \subset A$ (on y avait pensé).

Dans le second cas, on aboutit à $A \cup B \subset B$ et ceci donne $A \subset B$ (on y avait pensé).

On a donc prouvé $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B) \Rightarrow (A \subset B \text{ ou } B \subset A)$.

Et la réciproque a été développée au début.

On a une équivalence.

Passons au second problème : $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

Une solution évidente : $B = A$.

Mais aussi $B = \emptyset$.

Ce qu'on sait déjà et qui ne servira donc pas : $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.

*On a donc tout de suite $P(A \cap B) \subset P(A)$ puis $P(A \cap B) \subset P(B)$
et donc $P(A \cap B) \subset P(A) \cap P(B)$.*

Mais on sait aussi : $P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B)$.

Soit X dans $P(A) \cap P(B)$.

On traduit : $X \in P(A)$ et $X \in P(B)$.

On revient à la définition : $X \subset A$ et $X \subset B$.

On déduit $X \subset A \cap B$.

On reconnaît $X \in P(A \cap B)$.

On aurait pu raisonner par équivalences.

En fait, l'égalité $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ est dans le cours.

Bilan : $\forall B, P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

Conclusion presque propre : $S = \text{tous les ensembles } B$.

Conclusion plus propre : $S = \{B \mid B \text{ ensemble}\}$.

Et je suis embêté car il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.

◁13▷

♥♣ Donnez les seize parties de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$.

Sur l'ensemble de ces parties, on définit la relation \leq par $A \leq B$ si et seulement si $1 \in A \Rightarrow 1 \in B$. Rappelez les définitions de "réflexive", "symétrique", "antisymétrique" et "transitive". Lesquelles de ces propriétés vérifie \leq ?

Résolvez $A \leq \{0, 2\}$ d'inconnue A . Résolvez $\{0, 2\} \leq A$ d'inconnue A .

On donne la liste des seize parties en fonction de leur cardinal :

\emptyset		$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$
$\{0, 1, 2\}$	$\{0, 1, 3\}$	$\{0, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3\}$		$\{0, 1, 2, 3\}$

La relation \leq prend deux ensembles et fait une affirmation $1 \in A \Rightarrow 1 \in B$ qui s'écrit aussi $1 \notin A$ ou $1 \in B$. Par exemple $1 \in \{1, 3, 4\} \Rightarrow 1 \in \{2, 3\}$ (fausse) ou $1 \in \{1, 3, 4\} \Rightarrow 1 \in \{1, 3\}$ (vraie).

réflexive	$\forall A, A \leq A$	vrai	$1 \in A \Rightarrow 1 \in A$
symétrique	$\forall(A, B),$ $(A \leq B) \Rightarrow (B \leq A)$	faux	$1 \in \emptyset \Rightarrow 1 \in \{1, 2\}$ mais $1 \in \{1, 2\} \not\Rightarrow 1 \in \emptyset$
antisymétrique	$\forall(A, B),$ $(A \leq B \text{ et } B \leq A) \Rightarrow A = B$	faux	$\{1, 2\} \Rightarrow 1 \in \{1\}$ et $1 \in \{1\} \Rightarrow 1 \in \{1, 2\}$
transitive	$\forall(A, B, C),$ $(A \leq B \text{ et } B \leq C) \Rightarrow A \leq C$	vrai	$((1 \in A \Rightarrow 1 \in B) \text{ et } (1 \in B \Rightarrow 1 \in C))$ $\Rightarrow (1 \in A \Rightarrow 1 \in C)$

On cherche les parties A vérifiant $1 \in A \Rightarrow 1 \in \{0, 2\}$. Comme la conclusion est fausse, il est impossible que le prémisses le soit. Par exemple on ne peut pas écrire $1 \in \{1, 3\} \Rightarrow 1 \in \{0, 2\}$. En revanche, comme $Faux \Rightarrow Faux$ est vrai, on peut écrire $1 \in \{0, 3\} \Rightarrow 1 \in \{0, 2\}$.

On a donc $S = \left\{ \emptyset, \{0\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{2, 3\}, \{0, 2, 3\} \right\}$ (l'ensemble des huit parties ne contenant pas 1).

On résout ensuite $1 \in \{0, 2\} \Rightarrow 1 \in A$ d'inconnue A (partie de $\{0, 1, 2, 3\}$). C'est sur le modèle $Faux \Rightarrow$ (sans importance). On peut donc prendre pour A toutes les parties, contenant ou non 1 : S a seize éléments dont la liste figure plus haut.

Si vous avez apprécié cet exercice, vous êtes sur le chemin de l'étoile.

Si vous ne comprenez même pas cet exercice, c'est que vous n'avez toujours pas quitté la Terminale ou le "simple calcul pour la Physique élémentaire".

Vous êtes sur la route de la PSI, mais vous pouvez aussi pendre le chemin de l'étoile si vous réussissez à casser votre mauvaise approche des mathématiques (en abandonnant donc enfin le "simple outil" pour y voir le "langage des raisonnements"). D'ailleurs, il y a des PSI étoiles. Et elles permettent d'intégrer de très bonnes écoles, même sans être une bête en maths...

◁14▷

On appelle *ordre* d'une permutation σ de S_n le plus petit entier naturel non nul d vérifiant $\sigma^d = Id$. Montrez que toute permutation a effectivement un ordre. Les questions 1 à 5 sont ♥ et on passe ensuite à ♠/♣.

1- Déterminez l'ordre d'un cycle.

2- Déterminez l'ordre de $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 8 & 2 & 15 & 11 & 3 & 5 & 13 & 4 & 12 & 1 & 10 & 6 & 14 & 9 \end{matrix}$.

3- Montrez que σ et $\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$ ont le même ordre.

4- Pouvez donner l'ordre de $\sigma \circ \sigma'$ en fonction de l'ordre de σ et de l'ordre de σ' quand σ et σ' commutent.

5- Déterminez l'ordre de $i \mapsto 3i \pmod{19}$ dans S_{19} .

6- Combien y a-t-il de permutations d'ordre 8 dans S_8 ?

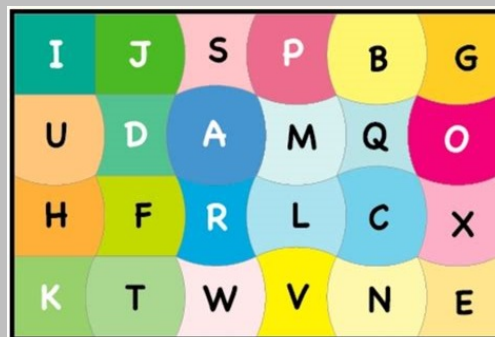
7- Combien l'équation $\text{ordre}(\sigma) = 3$ a-t-elle de solutions dans S_6 ?

8- Combien l'équation $\text{ordre}(\sigma) = 4$ a-t-elle de solutions dans S_7 ?

9- Pour quelles valeurs de n existe-t-il dans S_n une permutation d'ordre 120 ?

10- Déterminez pour tout n de 1 à 15 le maximum de l'application "ordre" sur S_n .

Voici les pièces du jeu de Curvica.
 Déterminez les classes d'équivalence pour chacune des relations suivantes
 « avoir le même périmètre que »
 « avoir la même aire que »
 « avoir le même périmètre et la même aire que ».
 Assemblez quatre pièces de même périmètre pour en faire un rectangle.
 Trouvez deux pièces de même périmètre, possédant chacune deux axes de symétrie.
 Assemblez quatre pièces formant un carré. Même question avec neuf pièces.



◀15▶

Pour une relation d'équivalence \mathcal{R} , la classe d'équivalence d'un élément a est l'ensemble $\{b \in E \mid a\mathcal{R}b\}$. Bref, on met dans chaque classe les éléments en relation entre eux.

Pour le périmètre, il y a à chaque fois quatre segments ou arcs de cercle. Il suffit de compter alors pour chacun le nombre de segments et le nombre d'arcs, puis de regrouper. Que les arcs soient « convexes » ou « concaves » ne change rien à leur longueur.

4 segments		I									
3 segments	1 arc	J	K								
2 segments	2 arcs	G	U	D	H	F	T	E			
1 segments	3 arcs	S	P	B	O	X	W	V	N		
	4 arcs	A	M	Q	R	L	C				
périmètre		classe									

On a ici cinq d'équivalence (chaque modèle possible est là une fois).

On recommence avec les airs, en partant de l'aire du carré et en ajoutant ou soustrayant des portions de lune.
 Par exemple, le I a pour aire « un carré ».

Le J a pour aire « un carré plus une lune », mais le P a la même aire (venant de « un carré plus deux lunes moins une »).

1 carré		I	G	M	H	F	L			
1 carré moins	1 lune	X	K	W	V					
1 carré plus	1 lune	J	P	O	W	N				
1 carré moins	2 lunes	D	R	E						
1 carré plus	2 lunes	U	C	T						
1 carré moins	3 lunes	S								
1 carré plus	3 lunes	B								
1 carré moins	4 lunes	Q								
1 carré plus	4 lunes	A								
aire		classe								

On a ici cinq neuf d'équivalence (chaque modèle possible est là une fois).

Et si on définit la relation d'équivalence qui demande les deux à la fois ?

La solution est encore dans un tableau.

	4 segments	3 segments 1 arc	2 segments 2 arcs	1 segment 3 arcs	4 arcs
moins 4 lunes					Q
moins 3 lunes				S	
moins 2 lunes			DE		R
moins 1 lune		K		XWV	
1 carré	I		GHF		ML
plus 1 lune		J		POWN	
plus 2 lunes			UT		C
plus 3 lunes				B	
plus 4 lunes					A

On a cette fois quinze classes d'équivalences dont plusieurs sont des singletons.

On retrouve par projection verticale (ou horizontale) les classes d'équivalence de la première relation (et de la seconde).

◁16▷ ♡ Montrez que si dans un groupe $(G, *)$ on trouve deux éléments a et b vérifiant $a * b = a$, alors b est le neutre du groupe.

On rappelle que le neutre c'est $\forall x, x * b = x$ alors qu'ici on a $\exists a, a * b = a$, plus l'information : on a un groupe.

Le neutre n doit vérifier $\forall x, x * n = x$ et pas juste $\exists a, a * n = a$ comme ici.

Mais voilà, on part de $a * b = a$, et on note n le neutre et α le symétrique de a .

On a alors $\alpha * (a * b) = \alpha * a$ et en simplifiant : $(\alpha * a) * b = n$, puis $n * b = n$ et enfin $b = n$.

◁17▷ Voici les notes des élèves à l'École Nationale Supérieure des Technologies du Routage Informatique et du Numérique de Grenoble

L'admission étant à 180, combien de points a-t-il manqué en maths à l'étudiant Filtonpuliféfroï pour être admis ?

Étudiant	Maths	Physique	Informatique	Total
Trefermlaporte	12	10	14	189
Sejusqu'aubodelanui	12	15	14	209
Filtonpuliféfroï	10	10	10	155

Un bonus à qui comprend mes mauvais jeux de mots.

Et tu dis « entre et ferme la porte ». « Et tu dances jusqu'au bout de la nuit », « et tu dis enfile ton pull il fait froid ». J'ai les points ? Quant au nom de l'école, que sera son sigle ?

Et si on notait m, p et i les trois coefficients ? On a alors

$$\begin{pmatrix} 12 & 10 & 14 \\ 12 & 15 & 14 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ p \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 189 \\ 209 \\ 155 \end{pmatrix}$$

Il suffit d'inverser la matrice : $\begin{pmatrix} m \\ p \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 14 \\ 12 & 15 & 14 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 189 \\ 209 \\ 155 \end{pmatrix}$.

On trouve $\begin{pmatrix} m \\ p \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 189 \\ 209 \\ 155 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5,5 \end{pmatrix}$ (oh la belle école, les beaux coefficients).

Si on ne sait pas inverser les matrices, il suffit de résoudre le système. Par substitutions si on y tient.

Par combinaisons. Car il y a un élève à considérer :

$$7 \times \text{Filtonpuliféfroï} - 4 \times \text{Sejusqu'aubodelanui} - \text{Trefermlaporte}$$

Maths	Physique	Informatique
$7 \times 10 - 4 \times 12 - 12$	$7 \times 10 - 4 \times 15 - 10$	$7 \times 10 - 4 \times 14 - 14$
10	0	0

Il est pratique cet élève. Pour lui, seules comptent les maths (note 10). Avec coefficient m . Et il a $7 \times 189 - 4 \times 209 - 155$ points.

Et l'élève

$$\text{Sejusqu'aubodelanui} - \text{Trefermlaporte}$$

vous permet de retrouver le coefficient de la physique.

Et c'est

$$3 \cdot \text{Trefermlaporte} + 2 \times \text{Sejusqu'aubodelanui} - 6 \times \text{Filtonpuliféfroï}$$

qui n'a fait que de l'informatique...

Lui, il vous donnera le coefficient de l'informatique.

Remarque : Vous saisissez le lien avec les coefficients de P^{-1} .
 Vous comprenez pourquoi trois élèves suffisent à tout reconstituer.
 Sauf si un élève a 0 partout.
 si deux élèves ont exactement les mêmes notes
 un élève a le double (ou le triple) des notes d'un autre
 un élève est combinaison de deux autres
 Dans ces cas là, vous n'avez pas assez d'informations pour conclure.
 Et en fait, la matrice des notes n'est pas inversible.

Maintenant que vous avez les coefficients, il manque 25 points au dernier. Quatre points coefficient 6.

18 E est un ensemble fini. On pose $\mathbb{P} = P(P(E))$ et on définit sur \mathbb{P} la relation \lesssim par $X \lesssim Y$ si et seulement si $\forall B \in Y, \exists A \in X, B \subset A$.
Attention, $P(E)$ est l'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de E (comme $P(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ si $E = \{a,b,c\}$). Et $P(P(E))$ est donc fait des parties dont les éléments sont eux même des parties (par exemple $\{\{a\}, \{b,c\}, \{a,b,e\}, \emptyset\} \in P(P(E))$ si $E = \{a,b,c,d,e\}$, et pour ce E , $P(P(E))$ a 2^{32} éléments dont la liste ne sera pas donnée ici).

Quand E est de cardinal n , $P(E)$ est de cardinal 2^n et $P(P(E))$ est de cardinal $2^{(2^n)}$.

$Card(E)$	0	1	2	3
$Card(P(E))$	1	2	4	8
$Card(P(P(E)))$	2	4	16	256

Et c'est vite l'horreur.

Pour cette question : $E = \{a, b, c, d, e\}$. Donnez le cardinal de \mathbb{P} . Comparez (en justifiant) pour \lesssim les deux parties suivantes :

$X = \{\{a,b,c\}, \{d,e\}\}$ et $Y = \{\{a,b,c\}, \{a,b\}, \{d,e\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\}$.

Ayant posé $X = \{\{a,b,c\}, \{d,e\}\}$ et $Y = \{\{a,b,c\}, \{a,b\}, \{d,e\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\}$ on a à la fois $X \lesssim Y$ et $Y \lesssim X$. Il faut dans un premier temps montrer que toute partie de l'ensemble Y est incluse dans une partie de X au moins :

la partie de Y	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$\{d,e\}$	$\{c\}$	$\{d\}$	$\{e\}$
est incluse dans	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{d,e\}$	$\{a,b,c\}$	$\{d,e\}$	$\{d,e\}$

Ceci règle un sens, passons à l'autre :

la partie de X	$\{a,b,c\}$	$\{d,e\}$
est incluse dans	$\{a,b,c\}$	$\{d,e\}$

Ceci nous servira plus loin pour dire que la relation n'est pas antisymétrique : on peut avoir à la fois « $X \lesssim Y$ et $Y \lesssim X$ » sans pour autant avoir $Y = X$.

On revient au cas général. Montrez que la relation \lesssim est réflexive, transitive. Est-ce une relation d'ordre ?

Cette relation est réflexive.

On se donne une partie de parties X et on vérifie $X \lesssim X : \forall B \in X, \exists A \in X, B \subset A$.

Pour B donnée appartenant à X , il suffit de prendre $A = B$ (appartenant effectivement à X).

Elle est transitive.

On se donne deux gros ensembles de parties de parties X, Y et Z .

On suppose $X \lesssim Y$ et $Y \lesssim Z$.

On veut montrer $X \lesssim Z$, c'est à dire $\forall C \in Z, \exists A \in X, Z \subset X$.

Ça se prouve même sans avoir compris la définition.

On se donne C appartenant à Z .

Alors, par « $Y \lesssim Z$ », on sait qu'il existe B appartenant à Y vérifiant $C \subset B$.

Mais pour ce B , on sait qu'il existe A (appartenant à X) vérifiant $B \subset A$.

Par transitivité, il existe donc ce A vérifiant

Et comme on l'a dit, c'est raté pour l'antisymétrie.

Ce ne sera pas une relation d'ordre (R.A.T.).

Ni d'équivalence d'ailleurs.

Pour cette question : $E = \{a, b, c\}$.

Combien chacune des quatre équations suivantes a-t-elle de solutions : $X \lesssim \emptyset, X \lesssim \{\emptyset\}, \emptyset \lesssim X, \{\emptyset\} \lesssim X$.

Pour cette question : $E = \{a, b, c\}$. Il y a 8 parties

\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$
$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b\}$

Et on peut créer 2^8 ensembles de parties comme $\{\{a,b\}, \{a,c\}, \{a\}, \emptyset\}$ ou même $\{\emptyset\}$ (on a juste pioché dans la première case) à ne pas confondre avec \emptyset (là, on n'a rien pris).

$X \lesssim \emptyset$ se lit : $\forall B \in \emptyset, \exists A \in X, B \subset A$

Comme il n'y a aucun B à tester, c'est toujours vrai.

Toutes les parties de parties X conviennent, il y a 2^8 solutions.

$X \lesssim \{\emptyset\}$ se lit $\forall B \in \{\emptyset\}, \exists A \in X, B \subset A$.

Mais qui est le seul B qu'on puisse prendre dans $\{\emptyset\}$? C'est $B = \emptyset$. C'est donc juste pour lui qu'on doit vérifier si il existe A dans X vérifiant $\emptyset \subset A$.

Mais ça, c'est toujours vrai, pour toute partie A (singleton, paire, ensemble vide).

C'est donc toujours vrai... dès lors qu'il y a quand même au moins une partie dans X .

On peut accepter $X = \{\{a\}, \{a,b\}\}$ ou même $X = \{\{a\}, \emptyset\}$ ou même $X = \{\{a\}, \emptyset\}$.

Mais pas $X = \emptyset$ (car alors X n'existe pas).

Il y a donc une solution de moins : $S = P(P(E)) - \{\emptyset\}$.

$\emptyset \lesssim X$ se lit : $\forall B \in X, \exists A \in \emptyset, B \subset A$.

Mais il n'y a pas de A dans \emptyset ! C'est donc impossible dès que vous avez une partie B .

Seule façon de s'en sortir : X est telle qu'il n'y ait aucun B dedans : $X = \emptyset$.

C'est peu, mais c'est une solution.

$\{\emptyset\} \lesssim X$ se lit $\forall B \in X, \exists A \in \{\emptyset\}, B \subset A$

Mais le seul A possible dans $\{\emptyset\}$ est $A = \emptyset$. Peut on avoir $B \subset \emptyset$?

Oui, mais seulement pour $B = \emptyset$.

Le seul B possible dans X est l'ensemble vide.

On a une solution : $X = \{\emptyset\}$.

Et la solution $X = \emptyset$ pour laquelle il n'y a pas de B (et donc la question ne se pose pas de trouver A).

Bilan :	Équation	$X \lesssim \emptyset$	$X \lesssim \{\emptyset\}$	$\emptyset \lesssim X$	$\{\emptyset\} \lesssim X$
	Nombre de solutions	2^8	$2^8 - 1$	1	2
	Solutions	$X \subset P(E)$	$X \subset P(E)$ mais $X \neq \emptyset$	$X = \emptyset$	$X = \emptyset$ et $X = \{\emptyset\}$

Combien pouvez vous trouver X vérifiant $\{\{a, b, c\}, \{b\}\} \lesssim X \lesssim \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c\}\}$.

La condition $\{\{a, b, c\}, \{b\}\} \lesssim X$ dit que tout élément B de x (partie de E) doit être inclus dans $\{a, b, c\}$ ou dans $\{b\}$.

Mais tous les éléments de X sont inclus dans $\{a, b, c\}$. Aucune condition de ce côté.

De l'autre côté, on veut que $\{a, b\}, \{b, c\}$ et $\{c\}$ soient inclus dans des éléments de X .

Plusieurs cas.

Si $\{a, b, c\}$ est un des éléments de X , c'est gagné. Et on choisit les autres éléments au hasard parmi les 7 autres parties disponibles. On a 2^7 solutions.

Si $\{a, b, c\}$ n'est pas un des éléments de E , il faut que $\{a, b\}$ en soit un, de même que $\{b, c\}$. Une fois que vous avez $\{b, c\}$, plus de problème si vous prenez $B = \{c\}$, il sera inclus dans $\{b, c\}$.

Vous devez donc prendre $X = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \dots\}$ et dans les trois petits points, vous mettez ou non d'autres parties.

Des autres parties choisies dans la liste $[\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}]$. D'où 2^5 solutions.

◀ 19 ▶ On pose $a_0 = \alpha, a_1 = \beta$ et $a_{n+2} = a_{n+1} \cdot a_n$. Calculez a_n pour tout n .

Si α ou β est nul, c'est facile, on tombe très vite sur 0 et on y reste.

Sinon, on calcule les premiers, histoire d'émettre une conjecture :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	α	β	$\alpha \cdot \beta$	$\alpha \cdot \beta^2$	$\alpha^2 \cdot \beta^3$	$\alpha^3 \cdot \beta^5$	$\alpha^5 \cdot \beta^8$	$\alpha^8 \cdot \beta^{13}$	$\alpha^{13} \cdot \beta^{21}$

La récurrence vient très vite, avec une formule tout de suite explicite : $a_n = \alpha^{F_n} \cdot \beta^{F_{n+1}}$ où (F_n) (avec des parenthèses) est une suite de Fibonacci ($F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$), initialisée par 1 et 0.

Elle est initialisée : $a_0 = \alpha^1 \cdot \beta^0$ et $a_1 = \alpha^1 \cdot \beta^0$.

Supposons, pour un n donné, la formule vraie au rang n : $a_n = \alpha^{F_{n+1}} \cdot \beta^{F_n}$ et $a_{n+1} = \alpha^{F_{n+2}} \cdot \beta^{F_{n+1}}$. On multiplie :

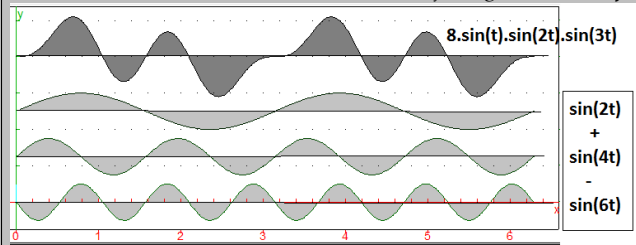
$$a_{n+2} = \alpha^{F_{n+1}} \cdot \beta^{F_n} \cdot \alpha^{F_{n+2}} \cdot \beta^{F_{n+1}} = \alpha^{F_{n+1}+F_{n+2}} \cdot \beta^{F_n+F_{n+1}} = \alpha^{F_{n+3}} \cdot \beta^{F_{n+2}}$$

La formule est validée par récurrence.

◀20▶

Montrez : $\int_0^{\pi/6} \sin(t) \cdot \sin(2t) \cdot \sin(3t) \cdot dt = \frac{7}{96}$.

Mais surtout, évitez le truc de Terminale « j'intègre autant de fois par parties qu'il faut » ; pensez à linéariser.



Elles apprécient les charges libres.
Quelle rude éjection.
Avide de ferveur, il nous inonde de spams.
Ce vélib' à terre a mal aussi.

On linéarise : $\sin(t) \cdot \sin(3t) = \frac{\cos(3t-t) - \cos(3t+t)}{2} = \frac{\cos(2t) - \cos(4t)}{2}$.

On linéarise : $\sin(2t) \cdot \frac{\cos(2t)}{2} = \frac{\sin(4t)}{4}$ et $\sin(2t) \cdot \frac{\cos(4t)}{2} = \frac{\sin(4t+2t) - \sin(4t-2t)}{4}$.

On additionne tout : $\sin(t) \cdot \sin(3t) = \frac{\sin(4t) - \sin(6t) + \sin(2t)}{4}$.

Il n'y a plus qu'à intégrer en $t \mapsto \frac{\cos(4t)}{16} + \frac{\cos(6t)}{24} - \frac{\cos(2t)}{8}$.

Pour les valeurs en $\frac{\pi}{6}$, on tourne plus ou moins autour du cercle trigonométrique.

◀21▶

Calculez $\int_0^1 t^2 \cdot e^t \cdot dt$ quitte à intégrer assez par parties.

Calculez $\int_0^1 t \cdot \text{Arctan}(t) \cdot dt$ en choisissant bien votre primitive de $t \mapsto 2t$ lors de l'intégration par parties.

t^2	\leftrightarrow	$2t$	\leftrightarrow	2	\leftrightarrow	0
e^t	\leftrightarrow	e^t	\leftrightarrow	e^t	\leftrightarrow	e^t

Comme suggéré, on intègre trois fois par parties, d'où alternance de signes, et ici (astuce) un dernier terme nul

$$\int_0^1 t^2 \cdot e^t \cdot dt = [t^2 \cdot e^t]_0^1 - \int_0^1 2t \cdot e^t \cdot dt$$

$$\int_0^1 t^2 \cdot e^t \cdot dt = [t^2 \cdot e^t]_0^1 - [2t \cdot e^t]_0^1 + \int_0^1 2 \cdot e^t \cdot dt$$

$$\int_0^1 t^2 \cdot e^t \cdot dt = [t^2 \cdot e^t]_0^1 - [2t \cdot e^t]_0^1 + [2 \cdot e^t]_0^1 - \int_0^1 0 \cdot e^t \cdot dt$$

On peut aussi proposer et vérifier $t \mapsto (t^2 - 2t + 2) \cdot e^t$.

On trouve $\int_0^1 t^2 \cdot e^t \cdot dt = e - 2$ (positif, c'est bon).

$\text{Arctan}(t)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{1+t^2}$
t	\leftrightarrow	$\frac{t^2+1}{2}$

Génialement, le terme de compensation vaut $\int_0^1 \frac{t^2+1}{t^2+1} \cdot dt$. Finalement $\int_0^1 t \cdot \text{Arctan}(t) \cdot dt = \frac{\pi-2}{4}$

◀22▶

Pouvez vous placer les quatre couples de $\{a, b\} \times \{0, 1\}$ dans le tableau de taille 2 sur 2 de sorte à ce que chaque lettre soit visible une fois et une seule sur chaque ligne, et chaque chiffre une fois et une seule sur chaque colonne.
Pouvez vous placer les neuf couples de $\{a, b, c\} \times \{0, 1, 2\}$ dans le tableau de taille 3 sur 3 de sorte à ce que chaque lettre soit visible une fois et une seule sur chaque ligne, et chaque chiffre une fois et une seule sur chaque colonne.

Pouvez vous placer les seize couples de $\{a, b, c, d\} \times \{0, 1, 2, 4\}$ dans le tableau de taille 4 sur 4 de sorte à ce que chaque lettre soit visible une fois et une seule sur chaque ligne, et chaque chiffre une fois et une seule sur chaque colonne.

En taille 2, c'est impossible.

Plaçons $(a, 1)$ dans une case.

$(a, 1)$	

Sur sa ligne, il faut un b et un 2. C'est donc que l'autre élément de sa ligne est $(b, 2)$:

$(a, 1)$	$(b, 2)$

Mais sur sa colonne, il faut un b et un 2 :

$(a, 1)$	$(b, 2)$
$(b, 2)$	

C'est fini il y a un élément en double.

Pour les triplets, on tente, et on trouve des solutions surtout si on joue souvent au Su-Do-Ku :

$(a, 1)$	$(b, 2)$	$(c, 3)$
$(c, 2)$	$(a, 3)$	$(b, 1)$
$(b, 3)$	$(c, 1)$	$(a, 2)$

Et une fois qu'on a une solution, on en a d'autres, en échangeant deux lignes, et/ou deux colonnes :

$(c, 2)$	$(a, 3)$	$(b, 1)$
$(a, 1)$	$(b, 2)$	$(c, 3)$
$(b, 3)$	$(c, 1)$	$(a, 2)$

 et

$(b, 2)$	$(a, 1)$	$(c, 3)$
$(a, 3)$	$(c, 2)$	$(b, 1)$
$(c, 1)$	$(b, 3)$	$(a, 2)$

 et

$(a, 3)$	$(c, 2)$	$(b, 1)$
$(b, 2)$	$(a, 1)$	$(c, 3)$
$(c, 1)$	$(b, 3)$	$(a, 2)$

Je ne dis pas que j'ai toutes les solutions ainsi à partir d'une seule.

On cherche aussi en taille 4.

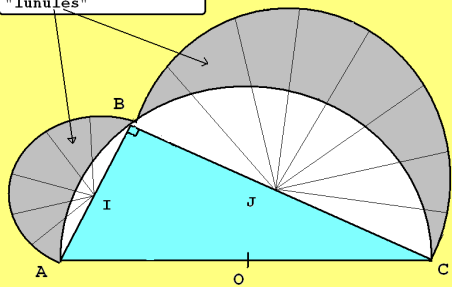
$(a, 1)$	$(b, 2)$	$(c, 3)$	$(d, 4)$
$(b, 4)$	$(a, 3)$	$(d, 2)$	$(c, 1)$
$(c, 2)$	$(d, 1)$	$(a, 4)$	$(b, 3)$
$(d, 3)$	$(c, 4)$	$(b, 1)$	$(a, 2)$

Ce sont les carrés gréco-latins, dits aussi « carrés d'Euler ».

Vous pouvez en chercher en taille 5 ;

Mais n'essayez pas en taille 6. C'est impossible.

Comparez l'aire du triangle et la somme des aires des deux "lunules"



Existe-t-il un triangle rectangle à côtés entiers dont un des côtés mesure 2017 ?

Existe-t-il un triangle rectangle à côtés entiers dont le périmètre vaut 2017 ?

Existe-t-il un triangle rectangle à côtés entiers dont l'aire vaut 2017 ?

Construisez un triangle rectangle dont les côtés sont entiers, mais aussi la hauteur.

Quelles sont, entre 0 et 200 les aires possibles pour des triangles rectangles (c'est lassant, donnez un algorithme).

Comparez l'aire du triangle et la somme des aires des deux lunules.

Pour l'exercice de géométrie, c'est juste le théorème de Pythagore.

Comparez l'aire du triangle et la somme des aires des deux "lunules"

Aires ?

Les deux demi-disques ont pour aires $\pi.a^2/2$ et $\pi.b^2/2$.

Puis on soustrait le demi-disque d'aire $\pi.c^2/2$.

On ajoute ensuite le triangle d'aires $a.b/2$.

Par soustraction, l'aire des lunules vaut $\pi.a^2/2 + \pi.b^2/2 + a.b/2 - \pi.c^2/2$

Par le théorème de Pythagore, il ne reste que $a.b/2$. Les deux aires sont égales.

24

La suite (\bullet_n) est définie par $\bullet_{n+2} = \bullet_{n+1} + 20.\bullet_n$ avec \bullet_0 et \bullet_1 donnés. Déterminez a et b pour avoir $\bullet_0 = a + b$ et $\bullet_1 = 5.a - 4.b$. Montrez alors pour tout n : $\bullet_n = a.5^n + b.(-4)^n$.
Pouvez vous choisir \bullet_0 et \bullet_1 pour avoir $\bullet_{2018} = 2018$ et $\bullet_{2019} = 2019$?

Équation caractéristique : $\lambda^2 = \lambda + 20$.

Spectre : $\{-4, 5\}$.

Forme des suites : $\exists(A, B), \forall n, \bullet_n = A.5^n + B.(-4)^n$ avec A et B dépendant des conditions initiales.

Mais l'énoncé semble dire « on ne va pas faire ça, on va le jouer Terminale ».

Ou en tout cas, on va faire de la diagonalisation sans le voir.

$\bullet_0 = a + b$ et $\bullet_1 = 5.a - 4.b$ permet de déterminer a et b , par le calcul...

...ou par les matrices : $\begin{pmatrix} \bullet_0 \\ \bullet_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \bullet_0 \\ \bullet_1 \end{pmatrix}$.

On la joue vraiment Terminale :

Notons P_n la propriété $\bullet_n = a.5^n + b.(-4)^n$

Initialisation : P_0 et P_1 sont vraies.

On se donne n quelconque, et on suppose P_n et P_{n+1} vraies.

$$\begin{aligned} \bullet_n &= a.5^n + b.(-4)^n \\ \bullet_{n+1} &= a.5.5^n + b.(-4).(-4)^n \end{aligned}$$

On combine :

$$\begin{aligned} 20.\bullet_n + \bullet_{n+1} &= a.(20 + 5).5^n + b.(20 - 4).(-4)^n \\ \bullet_{n+2} &= a.5^{n+2} + b.(-4)^{n+2} \end{aligned}$$

L'hérédité est établie. la formule est validée pour tout n .

On veut $\bullet_{2018} = 2018$ et $\bullet_{2019} = 2019$. Il suffit de bien choisir a et b , donc \bullet_0 et \bullet_1 .

Version « je calcule tout »... eh bien je calcule tout.

Version rapide : on veut juste $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}^{2018} \cdot \begin{pmatrix} \bullet_0 \\ \bullet_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2018 \\ 2019 \end{pmatrix}$,

il suffit d'imposer $\begin{pmatrix} \bullet_0 \\ \bullet_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}^{-2018} \cdot \begin{pmatrix} 2018 \\ 2019 \end{pmatrix}$,

sachant que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}^{-2018}$ existe car $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

Si on veut quand même calculer : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}^{-2018} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-4)^{-2018} & 0 \\ 0 & 5^{-2018} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}$.

Vous reconnaissez $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$? Elle a été écrite plus haut quand on a cherché a et b ...

◀25▶

♥ Déterminez $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k} \right]$.

Déterminez $B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^k} \right]$ et $C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left] 0, \frac{1}{2^k} \right]$.

Rappel : $\bigcap_{i \in I} A_i = \{ x \mid \forall i \in I, x \in A_i \}$ et $\bigcup_{i \in I} A_i = \{ x \mid \exists i \in I, x \in A_i \}$

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k} \right] =]0, 1]$$

car les intervalles se « collent bout à bout ».

On n'a que des réels strictement positifs.

Mais tout réel x de $]0, 1]$ est dans un de ces intervalles $\left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k} \right]$ pour n bien choisi.

Comment je le choisis ? $n = \left\lceil \frac{-\ln(x)}{\ln(2)} \right\rceil$.

Dans B il y a toujours 0.

Mais c'est tout.

En effet, si un x est dans b , alors pour tout n , on a $\frac{-1}{2^n} < x \leq \frac{1}{2^n}$. En passant à la limite (et aux inégalité larges) : $0 \leq x \leq 0$.

B est donc le singleton $\{0\}$.

Et C est vide. Tout réel x finit par être exclu pour n assez grand.

◀26▶

Ayant constaté que \exp est un morphisme de groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ ($\forall (a, b), e^{(a+b)} = e^a \times e^b$), un élève de MPSI2 veut en faire un morphisme d'anneau. L'anneau de départ est donc logiquement $(\mathbb{R}, +, \times)$. Et l'anneau d'arrivée devrait être $(\mathbb{R}^{+*}, \times, \otimes)$, avec une loi \otimes à définir.

On demande donc $e^{a \times b} = e^a \otimes e^b$. Ceci nous amène à définir la loi \otimes par $\alpha \otimes \beta = e^{\ln(\alpha) \times \ln(\beta)}$, si ça marche.

Montrez que 1 serait absorbant pour de la loi \otimes .

Qui est le neutre de la loi \otimes ? La loi \otimes est elle associative ? Est elle distributive sur \times ?

◀27▶

♥ Montrez qu'il n'existe pas de matrice réelle carrée de taille 2 M vérifiant $M^2 = A$ (avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$).

indication : c'est déterminant.

Trouvez une solution dans $M_2(\mathbb{C})$, que vous pourrez chercher sous la forme $a.I_2 + b.A$.

Méthode Terminale : on pose quatre coefficients, on écrit quatre équations, on tente de résoudre et comme tout part en c... on déduit qu'il n'y a pas de solution.

je vous la décommande fortement...

Méthode Prépas : on raisonne par l'absurde et regardant les choses sous le bon angle.

S'il y a une solution M elle vérifie $M^2 = A$ et donc $\det(M^2) = \det(A)$.

Mais $\det(M.M) = \det(M) \cdot \det(M)$. C'est le carré d'un réel. Il est positif. Alors que $\det(A)$ vaut -1 .

Impossible.

Attention en revanche, si on avait trouvé $\det(A) = 1$, on aurait juste pu dire « si il y a une solution, son déterminant vaut 1 ou -1 ». mais rien ne dit qu'il y ait vraiment une solution.

Votre point de vue en tant qu'ingénieur c'est de dire « il n'y a pas de contradiction avec le déterminant, mais il y en a peut être une ailleurs... »

Dans \mathbb{C} , on cherche une matrice de déterminant i . mais c'est un faible indice.

Comme propose, on la cherche sous la forme $a.I_2 + b.A$, pourquoi pas... Si ça échoue, on engueulera le colleur d'avoir proposé une fausse piste. Et sinon, on prendra sur soi toute la gloire.

$$\text{Et } \begin{pmatrix} a+b & 2.b \\ b & a+b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a+b & 2.b \\ b & a+b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+b & 2.b \\ b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 2.a.b + 3.b^2 & 4.a.b + 4.b^2 \\ 2.a.b + 2.b^2 & a^2 + 2.a.b + 3.b^2 \end{pmatrix}$$

Exigeons $a^2 + 2.a.b + 3.b^2 = 1$ et $2.a.b + 2.b^2 = 1$ si c'est possible...

Il « suffit » de prendre $b = i.a$ et $a = \frac{1}{\rho}$ avec $\rho^2 = 2.i - 2$ (en gros, avec une notation malpropre : $a = \frac{1}{\sqrt{2.i - 2}}$, et

tout va bien.

La matrice opposée convient « aussi bien ».

◀28▶

Représentez graphiquement $x \mapsto x \cdot \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ (notée f). On définit sur \mathbb{R}^{+*} les relations \Subset et \equiv par

$a \Subset b$	$a \equiv b$
---------------	--------------

$a \Subset b$	$a \equiv b$
---------------	--------------

Sont ce des relations d'ordre, d'équivalence ?

$f(a) \leq f(b)$	$f(a) = f(b)$
------------------	---------------

$f(a) \leq f(b)$	$f(a) = f(b)$
------------------	---------------

Pour la relation d'ordre si c'en est une, indiquez si il y a un plus petit élément. Pour la relation d'équivalence, indiquez en fonction de a le nombre d'éléments de la classe de a .

Même question avec $f = x \mapsto x \cdot \sin(x)$.

Montrons par exemple que \equiv est une relation d'équivalence. Proprement, c'est à dire EN QUANTIFIANT proprement, en introduisant des variables, en n'abusant pas des \Rightarrow et autres \Leftrightarrow et autres abréviations de cours de physique ou de mauvais cours de maths.

Réflexivité :

on se donne a , on a $a \equiv a$.

En effet, on a bien $f(a) = f(a)$.

Rappel : L'élève qui rédige $\forall a, a \equiv a \Leftrightarrow f(a) = f(a)$ a certes compris ce qu'il fallait démontrer. Mais il n'a rien démontré, et a tout perverti en utilisant mal le symbolisme mathématique.

Il veut dire « pour tout a , $a \equiv a$ est vrai, en effet $f(a) = f(a)$ ».

Mais il exprime : pour tout a , on a $a \equiv a$ si et seulement si $f(a) = f(a)$. Et ça, c'est juste la définition.

L'écriture $a \equiv a \Leftrightarrow f(a) = f(a)$ est une équivalence qui dit juste « si et seulement si ».

Elle ne dit pas « les deux sont vrais ».

Il est légitime d'écrire $a \neq a \Leftrightarrow f(a) \neq f(a)$. C'est du type Faux \Leftrightarrow Faux. Et ça, c'est vrai. Pourtant, vous n'avez pas envie de l'écrire.

L'élève qui veut user et abuser des \Leftrightarrow devrait écrire on sait $a \equiv a \Leftrightarrow f(a) = f(a)$ (vrai car définition)

or $f(a) = f(a)$ est vrai (évidemment)

donc $a \equiv a$ est vrai aussi.

Quand je vous dit que vous ne maîtrisez pas l'usage des \Rightarrow ...

Symétrie.

On se donne a et b . On suppose $a \equiv b$.

On traduit $f(a) = f(b)$.

On a immédiatement $f(b) = f(a)$.

On reconnaît $b \equiv a$.

Transitivité.

On se donne a , b et c . On suppose $a \equiv b$ et $b \equiv c$.

On traduit $f(a) = f(b)$ et $f(b) = f(c)$.

On a immédiatement $f(a) = f(c)$ (transitivité usuelle de l'égalité).

On reconnaît $a \equiv c$.

En gros, toute autre rédaction est de la foutaise.

Donc en toute rigueur : vous avez tous 0 point. Et ceux des lycées de la Montagne Sainte Geneviève vous passent devant car eux, ils ont le recul et la rigueur.

Pour la relation \Subset on a réflexivité et transitivité.

Mais pas antisymétrie.

Si on se donne a et b et suppose $a \Subset b$ et $b \Subset a$, on aboutit à $f(a) = f(b)$. Et pas forcément $a = b$ puisque f n'est pas injective (exhiber un contre-exemple avec a et b entre 0 et 1 par tableau de variations, et pas forcément par valeurs, mais $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ en sont un).

\Subset n'est donc pas une relation d'ordre.

Il n'y a pas de relation d'ordre, c'est fini, on n'en parle plus.

x	$]0, e^{-1}[$	e^{-1}	$]e^{-1}, 1[$	$[1, +\infty[$
nombre d'éléments dans sa classe	2	1	2	1

◀29▶

On rappelle que la relation « divise » est une relation d'ordre sur \mathbb{N} . Montrez que \mathbb{N}^* a un plus petit élément, et un plus grand élément.

Le plus petit élément est 1. Il divise tout le monde.

Qui sont les majorants de \mathbb{N}^* ? Ce sont les entiers M divisibles par tous les autres entiers.

Il n'y en a qu'un finalement, c'est 0.

Et le plus petit élément de $\{0\}$ est 0 (même pour l'ordre « divise »⁴).

La borne supérieure de \mathbb{N}^* est donc 0 (non atteinte, hors de l'ensemble, comme 1 pour $[0, 1[$ dans \mathbb{R} avec l'ordre usuel).

◀30▶ Calculez le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ est le produit des déterminants.

Et comme dans le lot $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

a un déterminant nul, c'est fini... On trouve 0.

Posé en I.S. ou D.S. cet exercice conduit dans un tiers des copies au calcul de la matrice produit, puis de son déterminant.

On a besoin de tout pour faire une monde, y compris d'élèves qui savent calculer.

Mais on a aussi besoin d'élèves qui savent raisonner avant de calculer.

◀31▶ ♥ On doit résoudre $y_t' + |t^2 - 1| \cdot y_t = 0$ d'inconnue y fonction de t avec condition initiale $y_0 = 1$. On demande de calculer y_5 . L'élève Toitakour-Ahuiteur résout sur $[0, 1]$, calcule y_1 , puis résout sur $[1, 5]$ en utilisant la condition initiale en 1 et calcule enfin y_5 . Donnez plus directement la réponse.

Il suffit de poser $a = t \mapsto |t^2 - 1|$ et de noter A une de ses primitives.

La solution est alors $y_t = y_0 \cdot e^{-A_t} = e^{-A_t}$.

On calcule en 5 ?

Ah oui, mais on n'a pas de primitive de a !

Mais si ! Pas sous la forme d'une formule, mais sous la forme d'une intégrale : $A_5 = \int_0^5 |t^2 - 1| \cdot dt$.

Et pour calculer ça, on est matheux et pas bouffeur de formules toutes prêtes.

On découpe par relation de Chasles. C'est souvent la solution pour les intégrales.

$$A_5 = \int_0^5 |t^2 - 1| \cdot dt = \int_0^1 (1 - t^2) \cdot dt + \int_1^5 (t^2 - 1) \cdot dt$$

$$A_5 = \left[\frac{3 \cdot t - t^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{t^3 - 3 \cdot t}{3} \right]_1^5 = 38 \text{ (et le terme en 1 compte « double » dans le calcul de primitive).}$$

Une fois de plus, une intégrale est un truc qui se calcule en maths (et même en physique).

Une primitive est un truc qu'on apprend par cœur pour les maths (et surtout en physique).

◀32▶ ♥ Vrai ou faux : pour qu'une somme de carrés de complexes soit nulle, il suffit que chaque complexe soit nul.

Pour qu'une somme de carrés de complexes soit nulle, il suffit que chaque complexe le soit. C'est oui, car c'est le sens

$$(z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n (z_k)^2 = 0 \right)$$

Évidemment, l'affirmation avec « il faut » est erronée : $1^2 + i^2 = 0$ par exemple.

◀33▶ La matrice $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ & -4 & -10 \end{pmatrix}$ a pour vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et admet pour valeur propre -2 .
Diagonalisez la.

4. 0 divise 0 puisque 0 « de droite » est un multiple de 0 « de gauche »

On traduit qu'un premier vecteur est propre : $\begin{pmatrix} 7 & -2 & a \\ b & -4 & -10 \\ c & d & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour un réel α .

La première ligne donne la valeur de α : 3 et ceci permet d'obtenir un coefficient de la seconde et une relation sur ceux de la troisième :

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & a \\ 14 & -4 & -10 \\ -2.d & d & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On passe à l'autre vecteur : $\begin{pmatrix} 7 & -2 & a \\ 14 & -4 & -10 \\ -2.d & d & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cette fois, β est nul (deuxième ligne) :

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 \\ 14 & -4 & -10 \\ -2.d & d & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on progresse.

On a deux valeurs propres, il en manque une, et on nous la donne ! La trace est la somme des trois valeurs propres (M et D ont la même trace) : $7 - 4 + d = 3 + 0 - 2$. d vaut -2 .

On cherche un vecteur propre de valeur propre -2 : $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 \\ 14 & -4 & -10 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On trouve le dernier vecteur propre (ou un de ses multiples), et on termine :

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 \\ 14 & -4 & -10 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On a donc une matrice P inversible (de déterminant -1 , merci !) :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

◀34▶

♡ L'application $n \mapsto (n \bmod 5, n \bmod 13)$ est elle injective sur $\text{range}(64)$?
L'application $n \mapsto (n \bmod 11, n \bmod 13)$ est elle injective sur $\text{range}(143)$?

La première question demande : peut on trouver a et b dans $\text{range}(64)$ vérifiant $(a \% 5, a \% 13) = (b \% 5, b \% 13)$.

Ceci vient à demander que $b - a$ soit à la fois multiple de 5 et de 13.

$b - a$ est multiple de 65 (car 5 et 13 sont premiers entre eux).

Mais dans $\text{range}(65)$, la différence de deux éléments ne peut pas atteindre 65 ni même ses multiples.

Sauf 0.

On aboutit à $a = b$.

De même $(a \% 11, a \% 13) = (b \% 11, b \% 13)$ donne $a = b [11]$ et $a = b [13]$ (je reprends le formalisme matheux et pas Python).

$b - a$ est multiple de 11 et de 13. C'est un multiple de 143.

Mais si on a pris $0 \leq a \leq 142$ et $0 \leq b \leq 142$ (donc $-142 \leq -a \leq 0$), on a $-142 \leq b - a \leq 142$.

Le seul multiple de 143 disponible est 0.

$f(a) = f(b)$ implique $a = b$.

◀35▶

Montrez que $n \mapsto n + (-1)^n$ est une bijection de \mathbb{N} .

On prend un entier naturel, et on associe un nouvel entier naturel ($n + (-1)^n$ est positif, même pour « n petit »).

Pour tout entier naturel b il existe un unique entier a vérifiant $a + (-1)^a = b$.

Raisonnons par analyse, pour trouver la seule solution possible a .

Après, on fera la synthèse et on montrera que c'est bien la solution.

Analyse (condition nécessaire)

Il faut bien choisir a , pour avoir $a + 1 = b$ ou $a - 1 = b$.

On constate que a est de parité opposée à celle de b (ajouter ou soustraire 1, ça vous change la congruence modulo 2).

On disjuncte les cas.

b pair. Alors a est impair. Mais $(-1)^a$ vaut donc -1 . L'équation devient $a - 1 = b$ soit $a = b + 1$.

b impair. Alors a est pair. Mais $(-1)^a$ vaut donc 1. L'équation devient $a + 1 = b$ soit $a = b - 1$.
On synthétise $a = f^{-1}(b) = b + (-1)^b$.

Synthèse.

On vérifie alors $f(a) = b$. Par disjonction de cas.

En fait, c'est un peu con, mais $f^{-1} = f$.

Et voici f :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	2.p	2.p+1	...
$f(a)$	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8		2.p+1	2.p	

On échange les éléments deux à deux. Normal que l'opération inverse soit « on recommence ».

◀36▶ ♡ Montrez que $x \mapsto \frac{a.x + b}{c.x + d}$ est injective sur son domaine de définition, sauf si $a.d$ est égal à $b.c$.

On se donne x et y et on suppose $\frac{a.x + b}{c.x + d} = \frac{a.y + b}{c.y + d}$.

Par produit en croix : $(a.x + b).(c.y + d) = (a.y + b).(c.x + d)$.

On développe, les $b.d$ et les $a.c.x.y$ s'en vont.

Il reste en simplifiant $(a.b - d.c).(x - y) = 0$.

Par intégrité, si $a.d - b.c$ est non nul : $x = y$.

Si non, on a une application constante comme $x \mapsto \frac{4.x + 6}{2.x + 3}$ (de domaine $] -\infty, -2/3[\cup] -2/3, +\infty[$).

Remarque : | Le passage par « la dérivée est positive » n'est pas une preuve.
| La positivité de la dérivée ne donne que la croissance par intervalle.
| L'application est strictement croissante (donc injective) sur $] -\infty, -d/c[$,
| puis que $] -d/c, +\infty[$.
| Mais qui dit qu'elle ne repasse pas aux mêmes endroits d'un intervalle à l'autre ?

◀37▶ Montrez que ni $x \mapsto x^2$ ni $x \mapsto (x + 1)^2$ n'est injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , tandis que $x \mapsto (x^2, (x + 1)^2)$ est injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 .

1 et -1 ont la même image par $x \mapsto x^2$. Défaut d'injectivité.

0 et -2 ont la même image par $x \mapsto (x + 1)^2$. Défaut d'injectivité.

Mais ensuite, à un réel, on associe un couple : $1 \mapsto (1, 4)$

$$-1 \mapsto (1, 0)$$

$$0 \mapsto (0, 1)$$

$$-2 \mapsto (4, 1)$$

Deux réels différents vont avoir des images différentes.

Par contraposée, prenons a et b ayant la même image (objectif : $a = b$).

On traduit : $(a^2, (a + 1)^2) = (b^2, (b + 1)^2)$.

On sépare : $a^2 = b^2$ et $(a + 1)^2 = (b + 1)^2$.

$$a = b \quad a + 1 = b + 1$$

On obtient : $\begin{matrix} \text{ou} & \text{et} & \text{ou} \\ a = -b & & a + 1 = -b - 1 \end{matrix}$.

Par distributivité, ceci donne quatre possibilités :

	$(a = b$	et	$a + 1 = b + 1)$	solution 1	
	ou	$(a = b$	et	$a + 1 = -b - 1)$	solution 2
	ou	$(a = -b$	et	$a + 1 = b + 1)$	solution 3
	ou	$(a = -b$	et	$a + 1 = -b - 1)$	solution 4

On résout à chaque fois $\begin{matrix} (a = b) & \text{solution 1} \\ \text{ou} & (a = b = -1) & \text{solution 2} \\ \text{ou} & (a = b = 0) & \text{solution 3} \\ \text{ou} & \text{impossible} & \text{solution 4} \end{matrix}$. Dans tous les cas qui survivent : $a = b$.

◀38▶

Vrai ou faux :

Le support de $\overrightarrow{(1\ 3)} \circ \overrightarrow{(1\ 2\ 3)} \circ \overrightarrow{(1\ 2)}$ est $\{3\}$. $\overrightarrow{(1\ 2\ 3)}^{-1} = \overrightarrow{(3\ 2\ 1)}$.

Le produit de deux cycles à supports non disjoints est un cycle.

Si n est pair, A_n ne contient pas d'élément d'ordre 2. A_5 contient $\frac{1}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2}$ éléments d'ordre 2. A_4 admet quatre sous-groupe de cardinal 3. A_5 est engendré par les bi-bicycles.La signature d'une permutation de S_n est $(-1)^{n-o}$ où o désigne le nombre d'orbites de la permutationLe support de $\overrightarrow{(1\ 3)} \circ \overrightarrow{(1\ 2\ 3)} \circ \overrightarrow{(1\ 2)}$ est $\{3\}$.

Faux

Même sans déterminer $\overrightarrow{(1\ 3)} \circ \overrightarrow{(1\ 2\ 3)} \circ \overrightarrow{(1\ 2)}$ (qui d'ailleurs est Id), comment le support pourrait-il être un singleton ? Un seul élément bouge ? Mais où va-t-il ?

Ici, le support est vide.

 $\overrightarrow{(1\ 2\ 3)}^{-1} = \overrightarrow{(3\ 2\ 1)}$.

Vrai

Le produit de deux cycles à supports non disjoints est un cycle.

Faux

Pour deux cycles avec un élément commun, le résultat est valable.

Mais si ils en ont deux ou plus, tout peut se perdre.

Prenons même deux fois le même cycle (alors là, on a des éléments communs), de taille 4.

La composée est formée de deux bicycles

$$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} = \overrightarrow{(a\ c)} \circ \overrightarrow{(b\ d)}$$

Si n est pair, A_n ne contient pas d'élément d'ordre 2.

Faux

Dans A_4 , il y a $\overrightarrow{(1\ 2)} \circ \overrightarrow{(3\ 4)}$ (signature 1) et il est d'ordre 2. A_5 contient $\frac{1}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2}$ éléments d'ordre 2.

Faux

Il faut dénombrer les bicycles : il y en a $\binom{5}{2}$ ce qui fait 10.

Il y a ensuite les bi-bicycles. Il y en a 15.

En effet, il suffit de dire qui est exclu (cinq choix), et ensuite avec quatre éléments a, b, c et d on construit $\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(c\ d)}$, $\overrightarrow{(a\ c)} \circ \overrightarrow{(b\ d)}$ et $\overrightarrow{(a\ d)} \circ \overrightarrow{(b\ c)}$.

On arrive à un total de 25. Ce qui ne fait pas 15.

 A_4 admet quatre sous-groupe de cardinal 3.

Vrai

{	Id	$\overrightarrow{(1\ 2\ 3)}$	$\overrightarrow{(3\ 2\ 1)}$	}
{	Id	$\overrightarrow{(1\ 2\ 4)}$	$\overrightarrow{(4\ 2\ 1)}$	}
{	Id	$\overrightarrow{(1\ 3\ 4)}$	$\overrightarrow{(4\ 3\ 1)}$	}
{	Id	$\overrightarrow{(2\ 3\ 4)}$	$\overrightarrow{(4\ 3\ 1)}$	}

 A_5 est engendré par les bi-bicycles.

Vrai

On sait déjà que A_n est engendré par les tricycles.

Reste à engendrer les tricycles avec des bi-bicycles

$$\overrightarrow{(a\ b\ c)} = \left(\overrightarrow{(d\ e)} \circ \overrightarrow{(a\ c)} \right) \circ \left(\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(d\ e)} \right)$$

On notera que pour A_4v on n'a pas assez d'éléments disponibles pour utiliser cette « astuce ».

La signature d'une permutation de S_n est $(-1)^{n-o}$ où o désigne le nombre d'orbites de la permutation.

Vrai

On décompose la permutation en produit de cycles de supports disjoints. Y compris les monocycles. D'ailleurs, il y a o orbites. Et finalement, les n entiers de 1 à n sont chacun dans une et une seule orbite. Bref, la réunion des orbites est de taille n .

On note k_1 à k_o les longueurs des cycles de notre écriture. On sait que la somme des k_i vaut n justement. Et chaque cycle a pour signature $(-1)^{k_i-1}$.

La signature totale se calcule (morphisme)

$$\text{Sgn}(\sigma) = \prod_{i=1}^o (-1)^{k_i-1} = (-1)^{\sum_i (k_i-1)} = (-1)^{\sum_i k_i - \sum_i 1} = (-1)^{n-o}$$

Exemple :

$$\sigma = \overrightarrow{(1\ 5\ 4)} \circ \overrightarrow{(2\ 6\ 10)} \circ \overrightarrow{(3\ 7)} \circ \overrightarrow{(8)} \circ \overrightarrow{(9\ 11)}$$

Signature = $(-1)^{3-1} \cdot (-1)^{3-1} \cdot (-1)^{2-1} \cdot (-1)^{1-1} \cdot (-1)^{2-1} = (-1)^{(3-1)+(3-1)+(2-1)+(1-1)+(2-1)}$
et dans l'exposant, on regroupe $3 + 3 + 2 + 1 + 2$ (longueur totale appelée n) et $-1 - 1 - 1 - 1 - 1$ (nombre d'orbites).

◀39▶

Trouvez une permutation σ dans S_6 vérifiant $\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4)} = \sigma^{-1} \circ \overrightarrow{(3\ 4\ 5\ 6)} \circ \sigma$.

Il y a 720 permutations dans S_6 , il suffit de les tester toutes, non ?

Non.

Raisonnons par analyse. La synthèse viendra après.

On veut finalement (en composant à gauche)

$$\sigma \circ \overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4)} = \overrightarrow{(3\ 4\ 5\ 6)} \circ \sigma$$

en $x = 1$:	$\sigma(2) =$	
en $x = 2$:	$\sigma(3) =$	
en $x = 3$:	$\sigma(4) =$	
en $x = 4$:	$\sigma(1) =$	
en $x = 5$:	$\sigma(5) =$	
en $x = 6$:	$\sigma(6) =$	

On analyse un par un :

◀40▶

Vrai ou faux :

a - $x \mapsto [x + 0.5]$ est impaire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

b - $x \mapsto [x + 0.5]$ est impaire de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

c - $x \mapsto [x + 0.5]$ est impaire de $\mathbb{R} - \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ dans \mathbb{Z} .

d - $x \mapsto [x^2]$ est paire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

e - $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall y \in \mathbb{R}^{+*}, x \leq y) \Rightarrow (x \leq 0)$

f - $\forall (A, B), (A \cap B = A \Delta B) \Leftrightarrow (A = B = \emptyset)$

g - $[\sqrt{e^{42}}] = [\sqrt{e^{42}}]$.

Si on trace le graphe de $x \mapsto [x + 0.5]$, on a quand même un graphe sympathique.

				$[1.5, 2.5[\mapsto 2$
			$[0.5, 1.5[\mapsto 1$	
		$[-0.5, 0.5[\mapsto 0$		
	$[-1.5, -0.5[\mapsto -1$			
$[-2.5, -1.5[\mapsto -2$				

Mais on a un problème avec les sauts.

a - Faux. On donne un contre-exemple.

$$f(0,5) = [0.5 + 0.5] = 1 \text{ et } f(-0.5) = [-0.5 + 0.5] = [0] = 0$$

les deux images ne sont pas opposées.

b - Faux. L'application va de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ dans \mathbb{Z} et pas dans $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ justement.

c - Vrai. On n'a plus le problème des sauts sur les entiers.

Prenons un réel x qui n'est pas dans $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ (c'est à dire pas de la forme $\frac{n}{2}$ avec n entier).
(on enlève les entiers et les « demi-entiers »)

a finir

d - On a, sans problème :

$$[(-x)^2] = [x^2]$$

puisque pour tout réel x on a déjà $(-x)^2 = x^2$.

f - On se donne deux ensemble A et B .

Si A et B sont vides, alors on a $A\Delta B = \emptyset\Delta\emptyset = \emptyset$ et $A\cap B = \emptyset\cap\emptyset = \emptyset$ et on a bien égalité.

Réciproquement, si on suppose $A\Delta B = A\cap B$, on aboutit sur le dessin à une incohérence, à moins d'avoir A et B vides.

Mais il faut une vraie preuve.

On sait qu'on a toujours

$$(A\Delta B)\Delta(A\cap B) = A\cup B$$

Je l'ai en passant par les indicatrices

$$(1_A + 1_B - 2.1_A.1_B) + 1_A.1_B - 2.(1_A + 1_B - 2.1_A.1_B).(1_A.1_B) = \dots = 1_A + 1_B - 1_A.1_B$$

Dans le cas qui nous intéresse ici, on a donc

$$A\cup B = (A\Delta B)\Delta(A\cap B) = (A\cap B)\Delta(A\cap B) = \emptyset$$

Il ne reste qu'à écrire $A\subset(A\cup B) = \emptyset$ pour arriver à $A = \emptyset$ puis aussi $B = \emptyset$ par symétrie des rôles.

g - La formule $[\sqrt{e^{42}}] = [\sqrt{[e^{42}]}]$ n'est pas propre à e^{42} .

Pour tout réel x positif on a $[\sqrt{x}] = [\sqrt{[x]}]$.

Posons $n = [\sqrt{x}]$. Ceci signifie $n \leq \sqrt{x} < n+1$ (et n entier).

On élève au carré : $n^2 \leq x < (n+1)^2$.

L'entier n^2 est un entier plus petit que x .

Et $[x]$ est « le plus grand entier plus petit que x ». J'en déduis

$$n^2 \leq [x] < (n+1)^2$$

Plus simplement, je dis que $t \mapsto [t]$ est croissante au sens large, et j'ai donc

$$(n^2 \leq x < (n+1)^2) \Rightarrow (n^2 = [n^2] \leq [x] \leq [(n+1)^2] = (n+1)^2)$$

et $[x]$ ne peut pas être égale à $(n+1)^2$.

Je passe à la racine carrée (croissante) : $n \leq \sqrt{[x]} < n+1$. Et comme n est entier, je reconnais $[\sqrt{[x]}] = n$.

~0)

Wallis sur \mathbb{R}^+ .

I~0) Pour tout réel x positif ou nul, on pose $f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x . dt$. Calculez $f(0)$, $f(1)$.

L'existence de chaque $f(x)$ pour x positif est garantie par un argument de continuité (le sujet de Mines-Ponts regarde aussi pour x dans $] -1, 0]$, mais ce sont des intégrales impropres).

$$f(0) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^0 . dt = \int_0^{\pi/2} 1 . dt = \frac{\pi}{2}$$

$$f(1) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^1 . dt = [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = 1$$

I~1) Montrez que f est une application décroissante (prétendre dériver f à ce stade serait pure folie).

Pour la décroissance, on revient à la simple définition : $\forall(x, y) \in [0, +\infty[^2, (x \leq y) \Rightarrow (f(x) \geq f(y))$
On se donne donc x et y et on suppose $x \leq y$. On écrit alors pour tout t de $[0, \pi/2]$:

$$(\sin(t))^x \geq (\sin(t))^y$$

car $\sin(t)$ est entre 0 et 1 (rappel : $(\frac{1}{2})^x$ diminue quand x augmente). On intègre pour t de 0 à $\pi/2$

$$f(x) = \int_{t=0}^{\pi/2} (\sin(t))^x dt \geq \int_{t=0}^{\pi/2} (\sin(t))^y dt = f(y)$$

A retenir : pour les intégrales à paramètres et autres objets un peu compliqués, il est bien souvent plus simple de regarder la monotonie juste par soustraction, et sûrement pas avec des réflexes de Terminale « pour le sens de variation, je dérive ».

D'ailleurs, petite question : qui est la dérivée de $x \mapsto \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x dt$? On dérive par rapport à x , l'exposant !

I~2) Montrez pour tout x : $(x+1).f(x) = (x+2).f(x+2)$.

La formule $(x+1).f(x) = (x+2).f(x+2)$ est notre intégration par parties classique. On n'oublie pas de préciser qui on dérive et qui on intègre, et on n'oublie pas les dt . Le fait que x ne soit pas entiers ne pose pas de problème.

$\sin(t)$	\leftrightarrow	$-\cos(t)$
$(\sin(t))^{x+1}$	\leftrightarrow	$(x+1).(\sin(t))^x \cdot \cos(t)$

$$f(x+2) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{x+1} \cdot (\sin(t))^x dt = \left[-\cos(t) \cdot (\sin(t))^{x+1} \right]_0^{\pi/2} + (x+1) \cdot \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x \cdot \cos^2(t) dt$$

Le crochet est nul, en $\pi/2$ grâce au cosinus, en 0 grâce au sinus qui a un exposant suffisant (même pour x dans $]0, 1[$).

$$f(x+2) = (x+1) \cdot \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x \cdot (1 - \sin^2(t)) dt = (x+1) \cdot (f(x) - f(x+2))$$

On fait passer de l'autre côté et la boucle est bouclée.

I~3) Justifiez $\forall n \in \mathbb{N}, f(n).f(n+1) = \frac{\pi}{2.(n+1)}$.

On pose $g(n) = (n+1).f(n).f(n+1)$. On repart de $(n+1).f(n) = (n+2).f(n+2)$ et on multiplie par $f(n+1)$

$$g(n) = (n+1).f(n).f(n+1) = (n+2).f(n+2).f(n+1) = g(n+1)$$

La suite g est constante. Elle est donc égale à son premier terme. Et il vaut $\frac{\pi}{2}$.

I~4) x est un réel de $[1, +\infty[$, on pose $n = [x]$ (partie entière). Montrez : $f(n) \geq f(x) \geq f(n+2)$
et $f(n).f(n-1) \geq (f(x))^2 \geq f(n+1).f(n+2)$

On se donne donc x et on pose $n = [x]$ (partie entière par défaut).

Par construction, on a donc $n \leq x < n+1 \leq n+2$. L'encadrement

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+2)$$

résulte de la décroissance de f . On se dit qu'on a intérêt à en écrire un autre : $n-1 \leq x \leq n+1$

$$f(n-1) \geq f(x) \geq f(n+1) \geq 0$$

J'ai ajouté l'information de positivité pour pouvoir multiplier membre à membre les inégalités et obtenir

$$f(n-1).f(n) \geq (f(x))^2 \geq f(n+1).f(n+2) \geq 0$$

I~5) Déduisez $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2.x}}$.

Mais on peut alors remplacer par ce qu'on obtenu juste avant pour les entiers, et aussi passer à la racine carrée (application croissante)

$$\sqrt{\frac{\pi}{2.n}} = \sqrt{f(n-1).f(n)} \geq f(x) \geq \sqrt{f(n+1).f(n+2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2.(n+1)}}$$

On sent qu'on n'est plus très loin de l'équivalent demandé. Sauf qu'il y a des n et pas des x . Mais on approche.

On divise par $\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$ (positif, ce qui ne change pas le sens des inégalités⁵)

$$\sqrt{\frac{x}{n}} \geq \frac{f(x)}{\sqrt{\pi/(2x)}} \geq \sqrt{\frac{x}{2(n+1)}}$$

On a envie de faire appel aux gendarmes en disant que « à l'infini, x et n c'est pareil, puisque n est la partie entière de x ».

C'est vrai, mais il faut le faire proprement. On repart de $n \leq x \leq n+1$ et on divise par n :

$$1 \leq \frac{x}{n} \leq 1 + \frac{1}{n} \text{ et } \frac{n}{n+1} \leq \frac{x}{n+1} \leq 1 \text{ avec } n = [x]$$

Quand x tend vers l'infini, n et $n+1$ le font aussi par minoration. Les quotients tendent vers 1.

Grand classique : $\frac{x}{[x]}$ tend vers 1 quand x tend vers l'infini. Autrement dit : $x \sim_{x \rightarrow +\infty} [x]$, ce que vous écrirez $x \simeq [x]$ qui ne veut rien dire, mais qui s'écrit aussi $x = [x] + O(1)$ donc $x = [x] + o(x)_{x \rightarrow +\infty}$ avec toute la rigueur des notations en petit o et grand O .

Ayant les encadrements et les limites des encadrants, on a bien $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$ et pas juste pour les entiers.

Remarque : le sujet de Mines-Ponts écrivait juste $f(n) \cdot f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$ puis que $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$

Il fallait savoir passer de n (entier) à x (réel), en utilisant justement la décroissance de f .

Une vidéo de notre Ayoub et les maths revient en détails sur les pièges et étapes de ce passage.

II~0) Calculez $f(2n)$ pour tout entier naturel n .

C'est du cours. On met en boucle $f(0) = \frac{\pi}{2}$ et $f(2n+2) = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot f(2n)$.

On arrive à

$$f(2n) = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1.2.3.4.5.6 \dots (2n-1) \cdot (2n)}{(2.4.6 \dots (2n))^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

La formule définitive est $\frac{(2n)!}{2^{2n+1} \cdot (n!)^2} \cdot \pi$ ou même $\binom{2n}{n} \cdot \frac{\pi}{2^{2n+1}}$ qu'on démontre alors par récurrence sur n en utilisant la formule $f(2n+2) = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot f(2n)$.

Dérivation.

III~0) On pose $D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) \cdot dt$. Montrez $D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(u)) \cdot du$ puis déduisez $2D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t)) \cdot dt - \frac{\pi \cdot \ln(2)}{2}$.

On a posé $D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) \cdot dt$. On veut des cosinus ? On rappelle que le cosinus fait la même chose que le sinus sur $[0, \pi/2]$ mais dans l'autre sens.

On va donc poser $u = \frac{\pi}{2} - t$, l'intégrale devient $D_1 = \int_{\pi/2}^0 \ln(\cos(u)) \cdot (-du)$ puis naturellement $D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(u)) \cdot du$. On additionne :

$$D_1 + D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) \cdot dt + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) \cdot dt = \int_{t=0}^{t=\pi/2} (\ln(\sin(t)) + \ln(\cos(t))) \cdot dt$$

5. sur sa copie, le non scientifique ne cite même pas l'argument, c'est un moins que rien ; le physicien cite l'argument « je divise », et le matheux prend la peine de dire « et le sens ne change pas car... » (il surveille tout et sait où sont les pièges)

$$2.D_1 = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(\sin(\theta)) \cdot \frac{d\theta}{2} - \int_0^{\pi/2} \ln(2) \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(\sin(\theta)) \cdot d\theta - \frac{\pi \cdot \ln(2)}{2}$$

III~1) Montrez aussi $D_1 = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\theta)) \cdot d\theta$ et aussi déduisez $D_1 = -\frac{\ln(2) \cdot \pi}{2}$.

Dans l'intégrale $\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \ln(\sin(\theta)) \cdot d\theta$ se cache D_1 par relation de Chasles

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \ln(\sin(\theta)) \cdot d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \ln(\sin(\theta)) \cdot d\theta + \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\theta)) \cdot d\theta = D_1 + \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\theta)) \cdot d\theta$$

Il reste le terme $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\theta)) \cdot d\theta$ qui fait justement l'objet d'une autre question. Peut on utiliser ce qui précède pour montrer qu'il est égal à D_1 ? Il faudrait faire partir les $\pi \cdot \ln(2)$. Et surtout, on sent bien que le raisonnement sera plutôt

$$\left. \begin{aligned} 2.D_1 &= \frac{1}{2} \cdot \left(D_1 + \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\theta)) \cdot d\theta \right) - \frac{\pi \cdot \ln(2)}{2} \\ D_1 &= \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\theta)) \cdot d\theta \end{aligned} \right\} \text{ donc } D_1 = -\frac{\pi \cdot \ln(2)}{2}$$

Comment passer alors de $D_1 = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \ln(\sin(t)) \cdot dt$ à $D_1 = \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\theta)) \cdot d\theta$?

Mais par un changement de variable !

De $\frac{\pi}{2}$ à π , le sinus fait ce qu'il a fait de 0 à $\frac{\pi}{2}$, mais en redescendant. On pose donc $\theta = \pi - t$.

Les bornes se renversent, mais dt donne $-d\theta$. Ensuite le sinus ne change pas (Bioche connaît). On a bien l'égalité voulue. On reporte, simplifie et on trouve la valeur de D_1 .

Coup de génie de cette méthode.

On a calculé l'intégrale sans utiliser de primitive. Juste en la transformant en elle même et en « presque elle même » par changements de variable et trigonométrie.

Pour moi, calculer une intégrale sans revenir comme (presque) toujours à une primitive, c'est de la poésie pure !

III~2) Histoire de ne pas travailler sur ce qui n'existe pas : justifiez l'existence de chacune de ces limites

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) \cdot dt, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(t) \cdot dt \text{ et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(\sin(t)) \cdot dt.$$

La première limite ne pose en fait aucun problème. On a même envie de dire

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) \cdot dt = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) \cdot dt$$

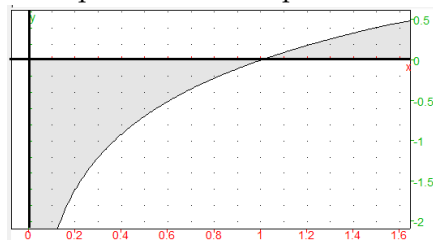
avec l'argument « puisqu'il n'y a aucun problème en 0 ».

En effet, la forme indéterminée $\frac{\sin(t)}{t}$ tend vers 1 en 0. On peut donc dire qu'on a affaire à l'intégrale d'une application continue sur un segment.

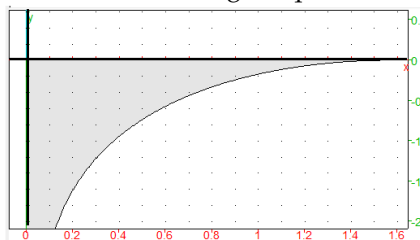
En toute rigueur, on définit : $\phi = t \mapsto \begin{cases} \ln(\sin(t))/t & \text{si } t \in]0, \pi/2] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. On écrit alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) \cdot dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \psi(t) \cdot dt = \int_0^{\pi/2} \psi(t) \cdot dt$$

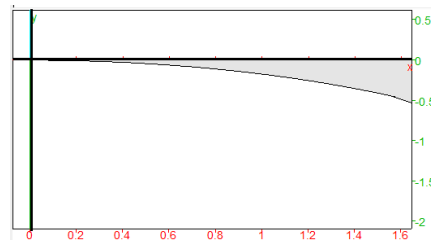
Pour qui ne voit même pas la difficulté : les trois aires algébriques sont finies



Intégrale de $\ln(t)$
primitive explicite



Intégrale de $\ln(\sin(t))$
addition des deux autres



Intégrale de $\ln(\sin(t)/t)$
application continue

La seconde limite existe car on a un classique. Pour tout ε strictement positif

$$\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(t).dt = \left[t \cdot \ln(t) - t \right]_{\varepsilon}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \cdot \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + \varepsilon - \varepsilon \cdot \ln(\varepsilon)$$

Le terme $\varepsilon \cdot \ln(\varepsilon)$ tend vers 0 en 0 (forme indéterminée de Sup se ramenant à $-\frac{\ln(X)}{X}$ quand X tend vers $+\infty$).

$$\int_0^{\pi/2} \ln(t).dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(t).dt = \frac{\pi}{2} \cdot \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$$

Erreur de l'élève gentillet de Terminale sur ce type de question :

« pour prouver l'existence d'une limite, je me ramène à croissante majorée puis je conclus »

Mais si le calcul donne une limite, c'est bien la preuve qu'elle existe.

Converger = admettre une limite.

Trouver une limite = preuve que ça converge !

Dire que si il y a une limite alors elle vaut... = arnaque

Il ne reste plus qu'à additionner les deux limites qui existent pour conclure que la dernière existe.

Proprement : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right).dt$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(t).dt$ existent, donc leur somme existe et peut être fusionnée en $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right).dt + \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(t).dt \right)$ puis $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \left(\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) + \ln(t) \right).dt \right)$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \left(\ln(\sin(t)) \right).dt \right)$.

Rappel :

le théorème c'est « si $\lim_{a \rightarrow 0} f(a)$ et $\lim_{a \rightarrow 0} g(a)$ existent, alors $\lim_{a \rightarrow 0} (f(a) + g(a))$ existe (et c'est la somme des limites) ».

Ce n'est pas « $\lim_{a \rightarrow 0} (f(a) + g(a)) = \lim_{a \rightarrow 0} f(a) + \lim_{a \rightarrow 0} g(a)$ ».

dans cette dernière affirmation l'élève prétend naïvement que toutes les limites existent déjà !

IV~0) Montrez pour tout x strictement positif et pour tout a dans $]0, 1[$: $0 \leq \frac{a^x - 1}{x} - \ln(a) \leq x \cdot \frac{a^2}{2}$ (on pourra dériver deux fois $\varphi_a = (x \mapsto a^x)$).

On doit prouver un encadrement avec des a et des x en même temps. Taylor ?

$$0 \leq \frac{a^x - 1}{x} - \ln(a) \leq \frac{x \cdot (\ln(a))^2}{2}$$

On fixe a et on définit $x \mapsto a^x$ qu'on écrit $x \mapsto e^{x \cdot \ln(a)}$. On dérive deux fois (par rapport à x)

$$(x \mapsto e^{x \cdot \ln(a)})' = (x \mapsto \ln(a) \cdot e^{x \cdot \ln(a)})$$

$$(x \mapsto e^{x \cdot \ln(a)})'' = (x \mapsto (\ln(a))^2 \cdot e^{x \cdot \ln(a)})$$

On écrit la formule de Taylor à l'ordre 2 pour cette application (toujours a fixé, et x positif ou nul)

$$\varphi_a(0+x) = \varphi_a(0) + x \cdot \varphi_a'(0) + x^2 \cdot \int_0^x (1-u) \cdot \varphi_a''(0+u \cdot x) \cdot du$$

en prenant garde que t est déjà une variable, pour l'intégrale il faut donc en utiliser une autre, qui est ici u .

$$a^x = 1 + x \cdot \ln(a) + x^2 \cdot \int_0^x (1-u) \cdot (\ln(a))^2 \cdot e^{u \cdot x \cdot \ln(a)} \cdot du$$

On soustrait 1, on divise par x strictement positif

$$\frac{a^x - 1}{x} = \ln(a) + x \cdot \int_0^x (1-u) \cdot (\ln(a))^2 \cdot e^{u \cdot x \cdot \ln(a)} \cdot du$$

On soustrait encore $\ln(a)$ et on regarde cette intégrale

$$\frac{a^x - 1}{x} - \ln(a) = x \cdot \int_0^x (1-u) \cdot (\ln(a))^2 \cdot e^{u \cdot x \cdot \ln(a)} \cdot du$$

Dans l'intégrale, tout est positif (carré de réel, exponentielle...), et x est positif

$$\frac{a^x - 1}{x} - \ln(a) \geq 0$$

Mais ensuite, dans l'exponentielle, $u.x$ est positif et $\ln(a)$ est négatif. Donc l'exponentielle est plus petite que 1

$$\frac{a^x - 1}{x} - \ln(a) = x \cdot \int_0^x (1-u) \cdot (\ln(a))^2 \cdot e^{u.x \ln(a)} \cdot du \leq x \cdot \int_0^x (1-u) \cdot (\ln(a))^2 \cdot du = \frac{x \cdot (\ln(a))^2}{2}$$

IV~1) Montrez pour tout t de $]0, \pi/2]$ et tout x strictement positif $0 \leq \frac{(\sin(t))^x - 1}{x} - \ln(\sin(t)) \leq \frac{x \cdot (\ln(\sin(t)))^2}{2}$.

A quoi ceci va-t-il bien servir ?

On l'applique pour x strictement positif et $\sin(t)$ entre 0 et 1 (t entre 0 et $\pi/2$)

$$0 \leq \frac{(\sin(t))^x - 1}{x} - \ln(\sin(t)) \leq \frac{x \cdot (\ln(\sin(t)))^2}{2}$$

IV~2) Déduisez $0 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} - D_0 \leq \frac{x \cdot D_2}{2}$ avec $D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) \cdot dt$.

On intègre pour t de 0 à $\frac{\pi}{2}$

$$0 \leq \int_{t=0}^{\pi/2} \left(\frac{(\sin(t))^x - 1}{x} - \ln(\sin(t)) \right) \cdot dt \leq \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{x \cdot (\ln(\sin(t)))^2}{2}$$

On sépare par linéarité (on sort ce qui dépend de x et pas de t , la variable d'intégration c'est t), et on reconnaît différentes quantités déjà croisées

$$0 \leq \frac{f(x) - \frac{\pi}{2}}{x} - D_1 \leq \frac{x}{2} \cdot \int_{t=0}^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^2 \cdot dt$$

Le réel $\frac{\pi}{2}$ est apparu ici en tant que $\int_0^{\pi/2} 1 \cdot dt$ c'est à dire en tant que $f(0)$.

IV~3) Déduisez que f est dérivable à droite en 0 et calculer $f'(0)$.

Cette formule contient un taux d'accroissement de f .

Et c'est un bel encadrement.

Quand x tend vers 0, le majorant tend vers 0, le minorant reste égal à 0.

On déduit que $\frac{f(x) - f(0)}{x} - D_1$ converge vers 0.

On reconnaît par addition que $\frac{f(x) - f(0)}{x}$ converge vers D_1 quand x tend vers 0 (x positif).

Les taux d'accroissement ont une limite, l'application est dérivable à droite en 0. Et sa dérivée est D_1 .

$$f'(0) = D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) \cdot dt = -\frac{\pi \cdot \ln(2)}{2}$$

On vient de dériver la fonction de Wallis quand elle est fonction d'une valeur réelle ($f(x)$) et non plus entière (W_n).

Que π soit là, d'accord. Mais que $\ln(2)$ soit là !

En Spé, vous aurez des théorèmes pour dériver sous le signe somme. En fait, ici

$$\left(x \mapsto \int_{t=0}^{\pi/2} (\sin(t))^x \cdot dt \right)' = \left(x \mapsto \int_{t=0}^{\pi/2} \left(x \mapsto (\sin(t))^x \right)' \cdot dt \right)$$

Il faut bien dire par rapport à qui on intègre et par rapport à qui on dérive, et après c'est évident.

Petit détail : il faudrait justifier l'existence de D_2 , comme on le fit pour D_1 en comparant avec $\int_0^{\pi/2} (\ln(t))^2 \cdot dt$.

Un travail similaire en 1 donnera $f'(1) = \ln(2) - 1$ (c'est dans le sujet Mines-Ponts).

Dérivée seconde.

V~0) a et b sont deux réels strictement positifs.

On pose $\rho = \frac{b-a}{b+a}$ et on définit $\phi = x \mapsto \ln(a^2 \cdot \cos^2(x) + b^2 \cdot \sin^2(x))$. Déterminez ϕ' .

L'application ϕ est définie partout, car sinus et cosinus n'arrivent pas à s'annuler en même temps.

On dérive sans efforts : $\phi' = x \mapsto \frac{-a^2 \cdot 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + b^2 \cdot 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{a^2 \cdot \cos^2(x) + b^2 \cdot \sin^2(x)}$

J'en ferai même $\phi' = x \mapsto \sin(2x) \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^2 \cdot \cos^2(x) + b^2 \cdot \sin^2(x)}$

et pourquoi pas $\phi' = x \mapsto \sin(2x) \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^2 + (b^2 - a^2) \cdot \sin^2(x)}$ en remplaçant \cos^2 par $1 - \sin^2$.

V~1) Montrez que pour tout x , $4 \cdot \sum_{k=1}^n \rho^k \cdot \sin(2k \cdot x)$ converge vers $\phi'(x)$ quand n tend vers l'infini.

La somme $4 \cdot \sum_{k=1}^n \rho^k \cdot \sin(2k \cdot x)$ doit cacher une série géométrique, en passant en écriture complexe (Dirichlet et ses amis).

On considère $4 \cdot \sum_{k=0}^n \rho^k \cdot e^{2i \cdot k \cdot x}$ dont on prendra la partie imaginaire, on voit effectivement la série géométrique de raison $\rho \cdot e^{2i \cdot x}$.

Le terme $k = 0$ donne un réel, on peut le prendre ou non.

On obtient $4 \cdot \frac{1 - \rho^{n+1} \cdot e^{2i \cdot (n+1) \cdot x}}{1 - \rho \cdot e^{2i \cdot k \cdot x}}$.

Quand n tend vers l'infini comme demandé, $e^{2i \cdot (n+1) \cdot x}$ a pour module 1, et ρ^{n+1} tend vers 0. En effet, $b - a$ est plus petit que $b + a$ et on a posé $\rho = \frac{b-a}{b+a}$.

Il nous reste

$$4 \cdot \sum_{k=1}^n \rho^k \cdot \sin(2k \cdot x) = \Im m \left(\frac{1}{1 - \rho \cdot e^{2i \cdot x}} \right) = \Im m \left(\frac{1 - \rho \cdot e^{-2i \cdot x}}{(1 - \rho \cdot e^{2i \cdot x}) \cdot (1 - \rho \cdot e^{-2i \cdot x})} \right)$$

Le dénominateur est devenu réel. Seule nous intéresse la partie imaginaire du numérateur : $-\rho \cdot \sin(2x)$. Bonne piste. On a le $\sin(2x)$ du numérateur de $\phi'(x)$.

Quant au dénominateur, il se développe

$$(1 - \rho \cdot e^{2i \cdot x}) \cdot (1 - \rho \cdot e^{-2i \cdot x}) = 1 - \rho \cdot (e^{2i \cdot x} + e^{-2i \cdot x}) + \rho^2 = 1 - 2 \cdot \frac{b-a}{b+a} \cdot \cos(2x) + \frac{(b-a)^2}{(b+a)^2}$$

Est il besoin de rappeler : $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. On développe, on regroupe

$$(1 - \rho \cdot e^{2i \cdot x}) \cdot (1 - \rho \cdot e^{-2i \cdot x}) = \frac{(b+a)^2}{(b+a)^2} - 2 \cdot \frac{(b^2 - a^2) \cdot (\cos^2(x) - \sin^2(x))}{(b+a)^2} + \frac{(b-a)^2}{(b+a)^2}$$

et on finit par retrouver notre $a^2 \cdot \cos^2(x) + b^2 \cdot \sin^2(x)$.

Enfin, quand $(b+a)^2$ remonte au numérateur, il rencontre $\frac{b-a}{b+a}$ et donne le $b^2 - a^2$ qui nous manquait.

V~2) Déduisez pour tout x positif : $\phi(x) = 2 \cdot \ln \left(\frac{a+b}{2} \right) - 2 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k \cdot x)}{k} \cdot \rho^k$.

Une fois calculé ϕ'' on intègre deux fois.

V~3) (ne pas traiter) Déduisez $\int_0^\pi (\phi(x))^2 dx = 4\pi \left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)^2 + 2\pi \sigma(\rho^2)$ avec $\sigma = \left(x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} \right)$.

V~4) (ne pas traiter) On pose alors $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $b_n = \frac{n}{n+1}$ et $\phi_n = t \mapsto \ln((a_n)^2 \cdot \cos^2(t) + (b_n)^2 \cdot \sin^2(t))$. Déduisez $f''(0) = \frac{\pi \cdot (\ln(2))^2}{2} + \frac{\pi^3}{24}$.

Application au problème des allumettes de Banach.

VI~0)

Un fumeur^a porte toujours sur lui deux boîtes d'allumettes A et B, chacune contenant initialement n allumettes (n désigne un entier strictement positif, donné). Chaque fois qu'il veut une allumette, il choisit une boîte au hasard (le probabilité du choix de chaque boîte vaut toujours $1/2$), et il y prend une allumette ; il jette ensuite l'allumette après l'avoir utilisée (et même si il constate que la boîte est alors vide, il la remet dans sa poche). Inévitablement arrive un moment où, pour la première fois, il trouve une boîte vide. On désigne alors par R_n la variable aléatoire égale au nombre d'allumettes restant alors dans l'autre boîte.

Exemple de situation avec n égal à 3 : « initialement chaque boîte contient trois allumettes ; il prend dans la B, puis la A, puis la B à nouveau, et encore la B (à ce stade, la B est vide, la A contient encore deux allumettes), il prend dans la A, puis il veut prendre dans la boîte B, et là il s'arrête car il vient de trouver une boîte vide. L'autre boîte (la A) contient une allumette : $R_3 = 1$ ».

a. imaginé en fait par Hugo Steinhaus, mais attribué par lui à son ami Stefan Banach ; tous deux étaient des fumeurs de pipes et mathématiciens polonais du début du vingtième siècle dont vous croiserez le nom dans le cours de seconde année ou comme livre référence en analyse

VI~1) Calculez $P(R_n > n)$ et $P(R_n = n)$.

Dans l'approche avec n allumettes dans chaque boîte, est-il possible qu'à la fin il y ait strictement plus d'allumettes dans la seconde boîte qu'il n'y en avait au départ ?

La réponse est « non ». On a donc $P(R_n > n) = 0$

Même si l'énoncé ne dit rien en ce sens. Il se peut qu'un de ses collègues facétieux remette des allumettes dans ses poches dès qu'il a le dos tourné. C'est comme toutes les hypothèses implicites en physique.

Et qu'en est-il de $R_n = n$? Il faut qu'à la fin de l'expérience, il choisisse une boîte vide, tandis que l'autre contient toujours ses n allumettes.

C'est donc qu'il a à chaque fois tiré la même boîte qu'au premier tirage. Mais combien de fois de suite ? $n - 1$ fois pour épuiser les allumettes, et une fois de plus pour dire « mais j'ai vraiment pas de chance ». Comme les tirages

sont indépendants et équiprobables, on a $P(R_n = n) = \frac{1}{2^n}$

Autre approche avec les mots en ABBA avec n égal à 4 pour comprendre.

L'événement $R_4 = 4$ correspond à deux événements incompatibles :

AAAAA et BBBB (« je n'ai tiré que des A et au dernier coup j'ai trouvé boîte vide » ou « je n'ai tiré que des B et pas de chance au dernier coup encore B »). Chacun a pour probabilité $\frac{1}{2^5}$ (c'est $\frac{1}{2^{n+1}}$ car il faut épuiser les n allumettes

puis jouer de malchance), mais on multiplie par 2 car il y a deux façons d'y arriver. On trouve $2 \times \frac{1}{2^{n+1}}$.

Vous pouvez faire un arbre avec deux branches qui nous concernent.

VI~2) Calculez $P(R_2 = k)$ pour chaque entier k de 0 à 2.

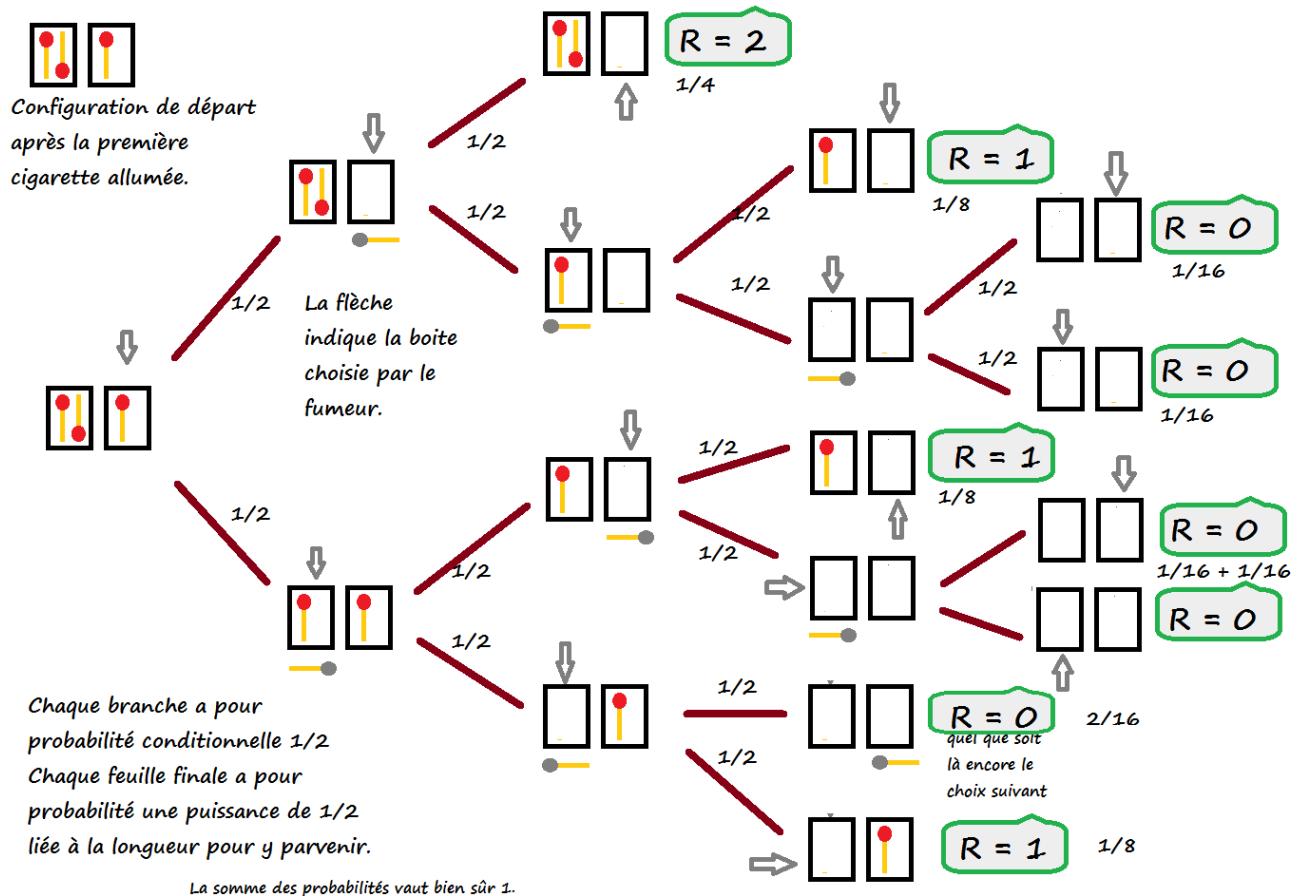
Passons à $n = 2$ (quatre allumettes équi-réparties dans deux boîtes, l'expérience ne durera pas plus de cinq pipes). On peut faire un arbre façon Terminale.

Il prend une boîte au hasard et en retire une allumette.

Nous voilà avec deux boîtes ayant respectivement deux et une allumette(s).

C'est à que commence l'arbre avec ses branches.

Stefan veut fumer. Laquelle des deux boîtes prend-il ?



L'arbre étant tracé, on regarde les valeurs de R_2 et on somme les probabilités des branches finissant par $R_2 = k$, pour chaque k .

k	0	1	2
$P(R_2 = k)$	$6 \times \frac{1}{16}$	$3 \times \frac{1}{8}$	$1 \times \frac{1}{4}$

On retrouve $P(R_n = n) = 2^{-n}$. Et la somme des trois probabilités vaut bien 1 : $\frac{6}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} = 1$.

Passons au cas $n = 1$.

Trop facile.

Deux boîtes, une allumette dans chacune.

Le fumeur choisit une boîte au hasard. Elle contient une allumette. Il l'allume, et maintenant la boîte est vide. Il la remet dans sa poche.

Situation : une boîte vide, une boîte avec une allumette.

Il veut à nouveau fumer⁶. Il choisit une boîte au hasard.

- Si c'est la boîte vide (probabilité $1/2$), il s'arrête, il sait que l'autre boîte contient une allumette.
- Si c'est la boîte avec encore une allumette (probabilité $1/2$), il grille l'allumette, et il a maintenant deux boîtes vides. On sait que de manière sûre, au tirage suivant, il aura à coup sûr une boîte vide (les deux le sont). Il s'arrêtera, et il saura que l'autre boîte est vide.

Les deux événements $R_1 = 0$ et $R_1 = 1$ sont équiprobables : $P(R_1 = 0) = P(R_1 = 1) = \frac{1}{2}$

Et bien sûr, il n'est pas possible qu'à la fin, une fois qu'il tire une boîte vide il y ait plus d'une allumette dans l'autre (sauf si on lui en a ajouté sans lui dire).

Sinon, on pouvait dire aussi $P(R_1 = 1) = \frac{1}{2}$ car c'est l'événement « j'ai tiré deux fois de suite la même boîte ».

6. qui va me dire « l'expérience ne se termine jamais, car après une première pipe, le fumeur décide d'arrêter de fumer et ne sort plus jamais ses allumettes ; ce n'est pas incompatible avec l'énoncé « chaque fois qu'il veut une allumette », avec « faux implique tout »

Reformulation utilisable pour la suite.

On note A et B les deux boîtes, et on écrit des mots $ABBA$ et autres pour dire quelle boîte il a tiré à chaque étape (exemple : ABB il a tiré la boîte A (et grillé son allumette), puis la boîte B (et grillé aussi son allumette), puis tiré la boîte B et dit « oh, mais elle est vide ».

A		B			
AA	AB		BA		BB
fin	ABA	ABB	BAA	BAB	fin
$R_1 = 1$	fin	fin	fin	fin	$R_1 = 1$
	$R_1 = 0$	$R_1 = 0$	$R_1 = 0$	$R_1 = 0$	

VI~3)

Complétez pour $n = 3$	$P(R_3 = 0)$	$P(R_3 = 1)$	$P(R_3 = 2)$	$P(R_3 = 3)$	Total = ...
		$2 \cdot 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$			

Avec courage, on attaque les boîtes à trois allumettes.

Passons à $n = 3$. On a deux boîtes avec trois allumettes chacune.

On va donc partir sur le graphe du point $(3, 3)$.

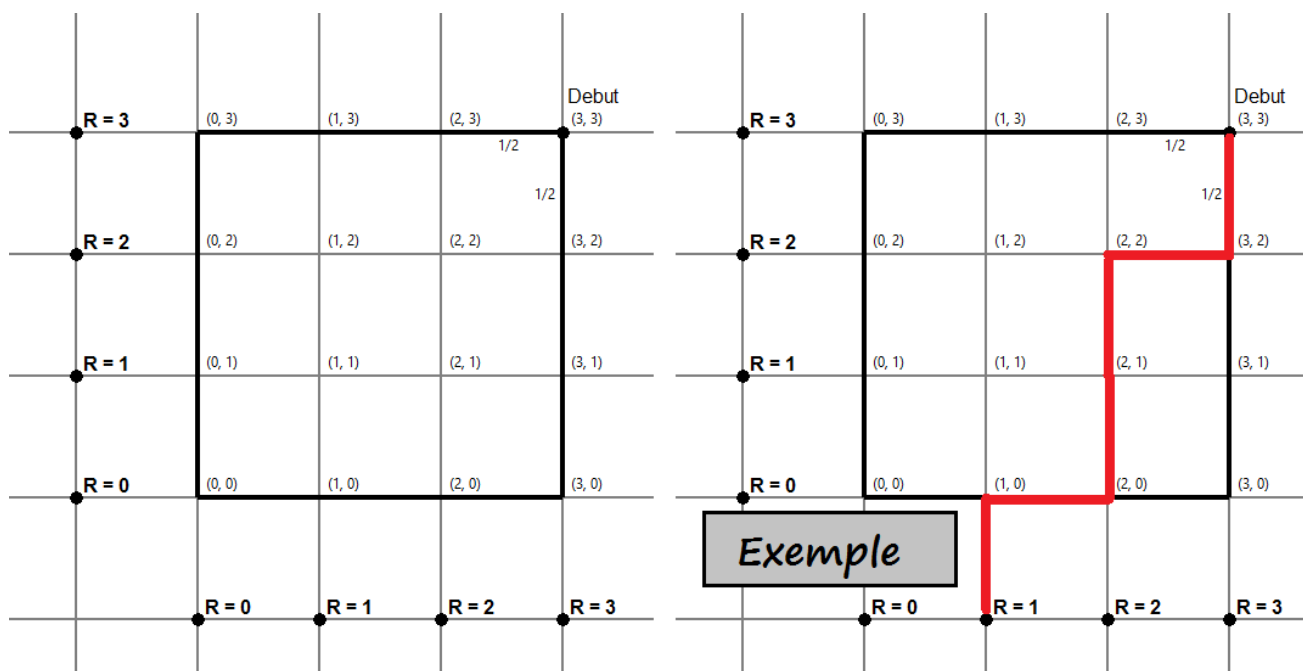
Et à chaque fois, on va enlever une allumette d'une des deux boîtes.

Bref, on passe de (a, b) à $(a - 1, b)$ ou $(a, b - 1)$ suivant la boîte puisée (-1 car on grille une allumette).

Sur le graphe « puiser dans A » nous fait régresser vers la gauche, « puiser dans B » nous fait descendre. Et il est interdit de remonter ou avancer à droite.

Ici, on a visualisé le trajet $BABBAB$ qui se termine effectivement.

Si ce n'est pas visible ici, tournez la page.



Le long des axes, l'une des boîtes est vide. Mais si ce n'est pas dans elle que l'on puise, on ne s'arrête pas.

C'est ce qu'il est advenu en passant de $(2, 0)$ à $(1, 0)$.

En revanche, si par exemple on part de $(1, 0)$ et choisit la boîte B , on s'empare d'une boîte vide et on s'arrête.

On retrouve bien qu'on peut terminer en $(0, 0)$ après divers trajets possibles. Dès lors, qu'on prenne la boîte A ou la boîte B , on s'arrête et R_3 vaut 0.

Un trajet de longueur k sur le graphe a pour probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^k$, puisqu'il est fait de k lettres A et B , et que chacune a pour probabilité $\frac{1}{2}$ d'être choisie.

On retrouve ce qu'on a dit : il n'y a que deux chemins conduisant à $R_3 = 3$: AAAA et BBBB.

Pour arriver à $R_3 = 2$, les chemins sont de longueur 5 comme sur l'exemple. Reste à trouver les mots.

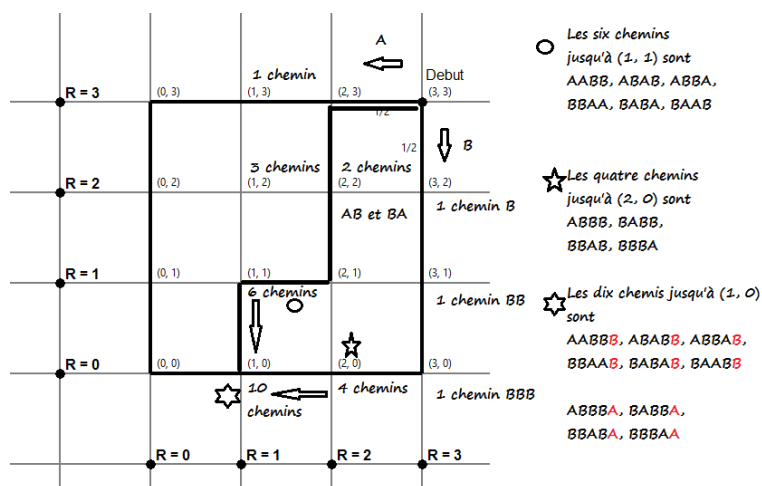
Pour arriver à $R_3 = 1$, les chemins sont de longueur 6. Reste à trouver les mots.

Enfin, avec des mots de longueur 7 on va arriver à $R_3 = 0$.

valeur finale de R_3	0		1		2		3
longueur du chemin	7		6		5		4
probabilité de chaque chemin	$\left(\frac{1}{2}\right)^7$		$\left(\frac{1}{2}\right)^6$		$\left(\frac{1}{2}\right)^5$		$\left(\frac{1}{2}\right)^4$
chemins	AAABBBA	ABAABBA	AAABBA	ABAABA	AAABA	BBBAB	AAAA
	AABABBA	...	AABBAA	BAAABA	AABAA	BBABB	BBBB
	ABAABBA	BBBAAAB	ABBAAA	AABBAA	ABAAA	BABBB	
	BAAABBA	...	BBAAAA	ABABAA	BAAAA	ABBBB	
	AABBABA	BBABAAB	AABABA	...			
nombre de chemins	2×20		2×10		2×4		2
probabilité finale	$2 \times 20 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7$		$2 \times 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6$		$2 \times 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$		$2 \times 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$

On vérifie que la somme des quatre probabilités vaut 1. C'est quand même la moindre des choses en probabilités.

Mais comment a-t-on dénombré les chemins ?



On peut chercher sur un arbre qui se met à ressembler au triangle de Pascal^a.

On regarde déjà dans le quadrillage combien de chemins mènent de l'origine à ce point. Et on voit que si on veut aller de (3, 3) à (1, 0), il faut passer par (1, 1) (et poursuivre avec une lettre B) ou par (2, 0) (et finir par un A). Il y avait 6 chemins jusqu'à (1, 0) et 4 chemins jusqu'à (2, 0). Il y en a donc 10 jusqu'en (1, 0).

^a. il faut être en maths pour qu'un arbre ressemble à un triangle !

		1 (0, 3)	1 (1, 3)	1 (2, 3)	Debut (3, 3)
R = 3				1/2	
				1/2	
R = 2		4 (0, 2)	3 (1, 2)	2 (2, 2)	1 (3, 2)
R = 1		10 (0, 1)	6 (1, 1)	3 (2, 1)	1 (3, 1)
R = 0		20 (0, 0)	10 (1, 0)	4 (2, 0)	1 (3, 0)
	R = 0	R = 1	R = 2	R = 3	

On remplit les différentes cases.

Mais finalement, les mots de (3, 3) à (0, 0) sont des mots de 6 lettres dont 3 A et 3 B.

Il suffit de choisir les places de A. Trois parmi 6.

On généralise.

Comment aller de (n, n) à un point du bord $(k, 0)$?

De quelle longueur est le mot ?

Combien de A, combien de B ?

				Debut (3, 3)
R = 3	(0, 3)	(1, 3)	(2, 3)	1/2
				1/2
R = 2	(0, 2)	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)
R = 1	(0, 1)	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)
R = 0	(0, 0)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)
	R = 0	R = 1	R = 2	R = 3

Exemple

Le module `random` contient la fonction `randrange` qui tire des entiers au hasard (`randrange(2)` donne 0 ou 1, avec probabilité 1/2 pour chacun).
Écrivez un script Python qui prend en entrée un entier naturel n et simule le problème du fumeur et retourne le nombre d'allumettes R_n .
Écrivez une procédure qui prend en entrée n et N (N sera grand) et retourne la valeur moyenne de R_n sur N expériences.
Et pour un histogramme ?

Pour simuler, on va créer deux variables `a` et `b` qu'on initialise à `n`.

```
a, b = n, n
```

On fait ensuite des tirages aléatoires : `randrange(2)`
Si ce tirage vaut 0, on dit qu'on pioche dans la boîte A (ou du moins on essaye, elle est peut être vide).
Si ce tirage vaut 1, on dit qu'on pioche dans la boîte B.

```
if randrange(2) == 0 :
    ...#compléter
else :
    ...#compléter
```

Regardons le cas où la boîte dans laquelle on pioche n'est pas vide, on brûle une allumette donc on a un `a -= 1` classique.


```

if randrange(2) == 0 :
...if a != 0 :
.....a -= 1
...else :
.....#compléter
else :
...if a != 0 :
.....a -= 1
...else :
.....#compléter

```

Mais si on a pris une boîte vide, on s'arrête et on regarde le contenu de l'autre :

Mais on fait ça combien de fois ?

On ne peut pas le savoir à l'avance.

On crée quel type de boucle ? `for` ? `while` ?

Il y a trois solutions, plus ou moins propres.

On pose a priori le maximum de tirages possibles : $2*n+1$.

```

if randrange(2) == 0 :
...if a != 0 :
.....a -= 1
...else :
.....return(b)
else :
...if a != 0 :
.....a -= 1
...else :
.....return(a)

```

Et on s'en moque, car de toutes façons, on sortira par un `return` avant d'avoir fini la boucle impérative. Pas grave.⁷

```

for k in range(2*n+1) :
...if randrange(2) == 0 :
.....#voir plus haut
...else :
.....#voir plus haut

```

On sait qu'on finira par sortir, donc on utilise un très risqué `while True` : qui pourrait nous placer en boucle folle.

```

while True :
...if randrange(2) == 0 :
.....#voir plus haut
...else :
.....#voir plus haut

```

On se dit qu'il est plus prudent de poser une condition (qui ne surviendra sans doute pas, mais soyons prudent)

```

while a != -1 and b != -1 :
...if randrange(2) == 0 :
.....#voir plus haut
...else :
.....#voir plus haut

```

Je propose même de faire « comme si ». Si on a tiré une boîte vide, on passe son contenu à -1 . Pas grave ; ça permet de sortir de la boucle.

Une fois sorti, quel est le contenu de l'autre boîte ?

Sans test ?

On calcule la somme des deux nombres. L'un vaut R_n et l'autre vaut -1 . La somme utile est donc $a+b+1$.

```

def banach(n) :
...a, b = n, n
...while a != -1 and b != -1 :
.....if randrange(2) == 0 :
.....a -= 1
.....else :
.....b -= 1
...return(a+b+1)

```

Et pour mettre l'expérience en boucle ?

Une boucle impérative `for`. C'est tout. Et un accumulateur qui grandit.

⁷. pas grave quand on programme en Python, moche en informatique propre

```
def babanach(n, N) :
...S = 0
...for k in range(N) :
.....S += banach(n)
...return(S/N)
```

Et pour un histogramme

```
def histobanach(n, N) :
...histo = [0]*(n+1) #il y a n+1 valeurs possibles
...for k in range(N) : #on répète l'expérience N fois
.....histo[banach(n)] += 1 #on incrémente une case de l'histogramme
...for p in range(n+1) : #on a fini, on reprend les cases une par une
.....histo[p] /= N #on divise pour passer des cumuls statistiques aux probabilités
...return(histo)
```

VII~0) Exprimez $P(R_n = k)$ (qu'on notera $p_n(k)$) à l'aide de $\binom{2.n - k}{k}$.

On nous laisse deviner une formule (si je vous l'avais donnée, vous l'auriez utilisée sans preuve pour les questions précédentes !).

On nous met quand même sur la piste avec un coefficient binomial : n parmi $2.n - k$.

Comment interpréter qu'il reste k allumettes dans la boîte qui n'est pas vide (et 0 dans la boîte qui est vide) ?

On avait $2.n$ allumettes, et on en a brûlé $2.n - k$.

Mais pas n'importe comment puisqu'à la fin, l'une des boîtes est vide, et c'est elle qu'on choisit (et on s'arrête alors).

On est parti de (n, n) et on est arrivé à $(k, 0)$ (ou $(0, k)$). Et on a choisi la boîte vide.

Les chemins de (n, n) à $(k, 0)$ sont des mots de $2.n - k$ lettres A et B qui alternent. Il y a n lettres B.

Il faut placer les n lettres B dans n des $2.n - k$ cases. C'est un facteur $\binom{2.n - k}{n}$ qui intervient donc.

Mais chaque chemin est ensuite fait de $2.n - k$ segments qui ont chacun une probabilité de $\frac{1}{2}$.

Multiplions le nombre de segments par la probabilité de chacun : $\binom{2.n - k}{n} \cdot \frac{1}{2^{2.n - k}}$.

Ensuite, une fois arrivé à $(k, 0)$ il faut choisir la boîte B d'où $\binom{2.n - k}{n} \cdot \frac{1}{2^{2.n - k}} \cdot \frac{1}{2}$.

Mais il y a aussi les chemins jusqu'à $(0, k)$ (probabilité $\binom{2.n - k}{n} \cdot \frac{1}{2^{2.n - k}} \cdot \frac{1}{2}$), puis le choix de la boîte A (probabilité $1/2$).

On arrive finalement à $P(R_n = k) = \binom{2.n - k}{n} \cdot \frac{1}{2^{2.n - k}}$

D'autres preuves sont peut être aussi possibles

Mais je doute que la phrase commençant par « prouvons par récurrence... ».

Surtout qu'on ne sait pas si il va s'agir d'une récurrence sur n ou k .

VII~1) Montrez pour n dans \mathbb{N} et k dans $[0, n - 1] \cap \mathbb{N}$: $2.(n - k).p_n(k) = (2.n + 1).p_n(k + 1) - (k + 1).p_n(k + 1)$.

La formule $2.(n - k).p_n(k) = (2.n + 1).p_n(k + 1) - (k + 1).p_n(k + 1)$ est une formule à prouver directement. On l'écrit même

$$2.(n - k).p_n(k) = (2.n - k).p_n(k + 1)$$

Et éventuellement elle servira à des récurrences après. Mais sur les nombres d'indices présents en même temps, on se dit que le mot « récurrence » serait encore une mauvaise idée.

On va calculer la différence, avec la formule obtenue auparavant

$$2.(n-k).p_n(k) - (2.n+k).p_n(k+1) = 2.(n-k) \cdot \binom{2.n-k}{n} \cdot \frac{1}{2^{2.n-k}} - (2.n+k) \cdot \binom{2.n-k-1}{n} \cdot \frac{1}{2^{2.n-k-1}}$$

On factorise les puissances de 2 :

$$2.(n-k).p_n(k) - (2.n+k).p_n(k+1) = \left(2.(n-k) \cdot \binom{2.n-k}{n} - (2.n+k) \cdot \binom{2.n-k-1}{n} \cdot 2\right) \cdot 2^{k-2.n}$$

On revient à des factorielles si ça peut servir (et on sort encore un 2)

$$2.(n-k).p_n(k) - (2.n+k).p_n(k+1) = \left((n-k) \cdot \frac{(2.n-k)!}{n!(n-k)!} - (2.n+k) \cdot \frac{(2.n-k-1)!}{n!(n-k-1)!}\right) \cdot 2^{k+1-2.n}$$

On simplifie les factorielles qui le veulent bien : $\frac{(n-k)}{(n-k)!} = \frac{1}{(n-k-1)!}$ et $(2.n-k) \cdot (2.n-k)! = (2.n-k)!$

$$2.(n-k).p_n(k) - (2.n+k).p_n(k+1) = \left(\frac{(2.n-k)!}{n!(n-k-1)!} - \frac{(2.n-k)!}{n!(n-k-1)!}\right) \cdot 2^{k+1-2.n} = 0$$

La différence est nulle, c'est ce qu'on attendait.

On utilise $p \times (p!) = (p+1)!$ et ses variantes comme $\frac{p!}{p} = (p-1)!$. Si vous n'y arrivez pas, je ne sais pas ce que je vais faire de vous.

On se demande pourquoi on a séparé dans le membre de droite. Pour rendre le calcul plus compliqué ? Non, il doit y avoir une idée.

VII~2) On pose $E(R_n) = \sum_{k=0}^n k.p_n(k)$ (la moyenne, dite aussi espérance). Déduisez l'existence de trois coefficients réels a , b et c à préciser tels que $E(R_n) = (a.n + b).P_n(0) + c$.

On part de la définition de $E(R_n)$ et de notre formule $2.(n-k).p_n(k) = (2.n+1).p_n(k+1) - (k+1).p_n(k+1)$ que l'on somme de $k=0$ à $n-1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2.(n-k).p_n(k) = \sum_{k=0}^{n-1} (2.n+1).p_n(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1).p_n(k+1)$$

On sépare en plusieurs sommes (formule $\sum_k (a_k + b_k) = \sum_k a_k + \sum_k b_k$) et on sort les termes ne dépendant pas de la variable de sommation (formule $\sum_k n.a_k = n \cdot \sum_k a_k$)

$$2.n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} p_n(k) - 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k.p_n(k) = (2.n+1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} p_n(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1).p_n(k+1)$$

On décale les indices dans la dernière somme

$$2.n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} p_n(k) - 2 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k.p_n(k) = (2.n+1) \cdot \sum_{k'=1}^n p_n(k') - \sum_{k'=1}^n k'.p_n(k')$$

Il est temps d'écrire $E(R_n) = \sum_{k=0}^n k.p_n(k)$ et de remplacer $\sum_{k=0}^{n-1} k.p_n(k) = E(R_n) - n.p_n(n)$ et aussi $\sum_{k=1}^n k.p_n(k) = E(R_n)$

$$2.n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} p_n(k) - 2 \cdot (E(R_n) - n.p_n(n)) = (2.n+1) \cdot \sum_{k=1}^n p_n(k') - E(R_n)$$

Mais il faut aussi réfléchir. Que vaut $\sum_{k=0}^n p_n(k)$? C'est la somme de toutes les probabilités. Elle vaut 1. On donc

$\sum_{k=1}^n p_n(k) = 1 - p_n(0)$ et $\sum_{k=1}^{n-1} p_n(k) = 1 - p_n(n)$. On en est donc à

$$2.n \cdot (1 - p_n(n)) - 2 \cdot (E(R_n) - n.p_n(n)) = (2.n+1) \cdot (1 - p_n(0)) - E(R_n)$$

On développe et simplifie un $2.n.p_n(n)$ dans le premier membre

$$2.n - 2.E(R_n) = (2.n + 1).(1 - p_n(0)) - E(R_n)$$

puis un $2.n$ de part et d'autre

$$-2.E(R_n) = -(2.n + 1).p_n(0) + 1 - E(R_n)$$

On isole le terme qui nous intéresse (c'est $E(R_n)$)

$$E(R_n) = (2.n + 1).p_n(0) - 1$$

La formule attendue (espérée désespérément) est $E(R_n) = (2.n + 1).p_n(0) - 1 = \frac{2.n + 1}{2^{2.n}} \cdot \binom{2.n}{n} - 1$

Les premières valeurs sont $0, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{19}{16}, \frac{187}{128}$ et c'est de plus en plus laid.

VII~3) Exprimez $p_n(0)$ à l'aide de $f(2.n)$.

On a trouvé d'une part $f(n) = \binom{2.n}{n} \cdot \frac{\pi}{2^{2.n+1}}$ et d'autre part $P(R_n = 0) = \binom{2.n}{n} \cdot \frac{1}{2^{2.n}}$.

On a donc $P(R_n = 0) = \frac{2}{\pi} \cdot f(n) = \frac{2}{\pi} \cdot W_{2.n}$ pour reprendre nos notations habituelles.

VII~4) Déterminez $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(0)$ et donnez un équivalent de la forme $a.n^\alpha$ de $p_n(0)$ quand n tend vers l'infini.

Avec l'équivalent de la première partie $f(2.n) \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4.n}}$ et comme les équivalents passent aux produits :

$$P(R_n = 0) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n.\pi}}$$

Pour répondre à la question : $P(R_n = 0) \sim a.n^\alpha$ avec $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Et voilà comment π se met à intervenir avec des histoires de fumeur et d'allumettes.

VII~5) Déterminez $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n$ et donnez un équivalent de la forme $a.n^\alpha$ de E_n quand n tend vers l'infini.

On a prouvé : $E(R_n) = (2.n + 1).P(R_n = 0) - 1$.

Les équivalents passent aux produits :

$$(2.n + 1).P(R_n = 0) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2.n + 1}{\sqrt{n.\pi}} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2.n}{\sqrt{n.\pi}} = \frac{2.\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

Comme ce terme tend vers l'infini, le fait d'ajouter ou soustraire 1 ne change rien à l'équivalent

$$E(R_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2.\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

Cette fois, la constante réelle vaut $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ et l'exposant vaut $\frac{1}{2}$.

La partie équivalent, dérivation, calcul de D_0 est issue de Mines-Ponts 2023 (filiale MP).

Le sujet Mines-Ponts contenait pas mal de questions en plus.

La partie allumettes vient d'Agro 1982. Je venais d'entrer à l'ENS !

41 Montrez que $ch(\ln(3 + 2.\sqrt{2}))$ ou $sh(\ln(3 + 2.\sqrt{2}))$ est rationnel.

$ch(\ln(3 + 2.\sqrt{2}))$	$= \frac{e^{\ln(3+2.\sqrt{2})} + e^{-\ln(3+2.\sqrt{2})}}{2}$	$ch(\ln(3 + 2.\sqrt{2}))$	$= \frac{e^{\ln(3+2.\sqrt{2})} - e^{-\ln(3+2.\sqrt{2})}}{2}$
	$= \frac{3 + 2.\sqrt{2} + \frac{1}{3 + 2.\sqrt{2}}}{2}$		$= \frac{3 + 2.\sqrt{2} - \frac{1}{3 + 2.\sqrt{2}}}{2}$
	$= \frac{3 + 2.\sqrt{2} + \frac{3 - 2.\sqrt{2}}{3^2 - (2.\sqrt{2})^2}}{2}$		$= \frac{3 + 2.\sqrt{2} - \frac{3 - 2.\sqrt{2}}{3^2 - (2.\sqrt{2})^2}}{2}$
	$= \frac{3 + 2.\sqrt{2} + 3 - 2.\sqrt{2}}{2} = 3$		$= \frac{3 + 2.\sqrt{2} - 3 + 2.\sqrt{2}}{2} = 2.\sqrt{2}$

Un des deux est rationnel (le cosinus hyperbolique). L'affirmation est donc vraie.

42 > Résolvez : « $ch(\ln(n + 4.\sqrt{3})) \in \mathbb{Q}$ » d'inconnue n dans \mathbb{Z} .

$$ch(\ln(n + 4.\sqrt{3})) = \frac{n + 4.\sqrt{3} + \frac{1}{4 + n.\sqrt{3}}}{2} = \frac{n + 4.\sqrt{3} + \frac{n - 4.\sqrt{3}}{n^2 - 3.16}}{2} = \frac{(n^2 - 48).(n + 4.\sqrt{3}) + n - 4.\sqrt{3}}{2.(n^2 - 48)}$$

Mais avant de commencer à résoudre l'équation, considérons son domaine :

l'application ch n'a aucune exigence (oui, « application »)

le logarithme exige : $n \geq -4.\sqrt{3}$.

Le domaine sur lequel on va travailler est $] -4.\sqrt{3}, +\infty[$

Dans la quantité écrite plus haut, le dénominateur est rationnel (et même entier). Par équivalence (dans un sens « multiplication par $2.(n^2 - 48)$ » et dans l'autre par « division par $2.(n^2 - 48)$ ») :

$$(ch(\ln(n + 4.\sqrt{3})) \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow ((n^2 - 48).(n + 4.\sqrt{3}) + n - 4.\sqrt{3} \in \mathbb{Q})$$

De même, par addition ou soustraction du rationnel $(n^2 - 48).n + n$

$$(ch(\ln(n + 4.\sqrt{3})) \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow ((n^2 - 48).4.\sqrt{3} - 4.\sqrt{3} \in \mathbb{Q})$$

Comme $\sqrt{3}$ est irrationnel, la seule solution est $(n^2 - 48 - 1).4 = 0$.

On trouve deux solutions : $n = 7$ et $n = -7$.

Mais -7 n'est pas dans notre domaine (de peu, mais $-7 = -\sqrt{49} < -\sqrt{48} = -4.\sqrt{3}$). On peut conclure : $S = \{7\}$

43 > Résolvez $\log_3((\log_2(x))^5) = 5$ d'inconnue réelle x .

Pour que $\log_3((\log_2(x))^5) = 5$ ait un sens il faut que x soit strictement positif, de même que $\log_2(x)$ (ce qui impose $x > 1$).

L'équation devient $5.\log_3((\log_2(x))) = 5$ ce qui donne $\frac{\ln(\log_2(x))}{\ln(3)} = 1$ puis $\ln(\log_2(x)) = \ln(3)$. Par passage à l'exponentielle (injective) : $\log_2(x) = 3$ et enfin $x = 2^3$. L'unique solution est donc $x = 8$

44 > Résolvez $\frac{(n-1)! + (n+1)!}{n^3 - 1} = 24$ d'inconnue entière n .

Pour résoudre $\frac{(n-1)! + (n+1)!}{n^3 - 1} = 24$, on simplifie le premier membre en factorisant le numérateur par $(n-1)!$ et le dénominateur par $n-1$ (classiques : $n^2 - 1 = (n-1).(n+1)$ et $n^3 - 1 = (n-1).(n^2 + n + 1)$)

$$\frac{(n-1)! + (n+1)!}{(n-1).(n^2 + n + 1)} = \frac{(n-1).(n+1+1)}{(n-1).(n^2 + n + 1)} = \frac{(n-1).(n^2 + n + 1)}{(n-1).(n^2 + n + 1)} = \frac{(n-1)!}{n-1} = (n-2)!$$

L'équation devient juste $(n-2)! = 4!$. L'unique solution est $n = 6$

On pouvait la deviner, mais qui pouvait garantir qu'il n'y avait qu'elle ?

45 > n est un entier naturel donné. Pour tout k de 0 à n , on définit $I_{n,k} = \int_{x=0}^1 \frac{x^k (1-x)^{n-k}}{k! (n-k)!} dx$. Montrez pour tout k de 0 à $n-1$: $I_{n,k+1} = I_{n,k} = \frac{1}{(n+1)!}$.

Chaque intégrale $I_{n,k}$ et $I_{n,k+1}$ existe par continuité des fonctions sous le signe somme.

Les puissances de k nous donnent envie d'intégrer $I_{n,k+1}$ par parties

$\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$	\hookrightarrow	$\frac{(k+1).x^{k+1-1}}{(k+1)!} = \frac{x^k}{k!}$
$\frac{(1-x)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}$	\hookleftarrow	$\frac{(1-x)^{n-k}}{(n-k).(n-k-1)!} = \frac{(1-x)^{n-k}}{(n-k)!}$

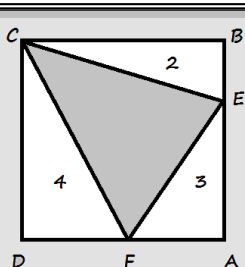
$$I_{n,k} = \int_{x=0}^1 \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{(1-x)^{n-k}}{(n-k)!} dx = \left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{-(1-x)^{n-k}}{(n-k)!} \right]_{x=0}^1 + \int_0^1 \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{(1-x)^{n-k}}{(n-k)!} dx$$

Les deux termes du « terme crochet » sont nuls (à cause de $\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ en 0 et à cause de $\frac{-(1-x)^{n-k}}{(n-k)!}$ en 1, car il n'y a même pas de 0^0).

Il reste $I_{n,k+1} = I_{n,k}$.

Mais alors, la suite $(I_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ est donc constante. Mais alors que vaut elle ? Calculons la pour une valeur de k bien choisie, comme $k = n$. On a alors

$$I_{n,k} = I_{n,n} = \int_0^1 \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{(1-x)^0}{0!} \cdot dx = \int_0^1 \frac{x^n}{n!} \cdot dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!}$$



(A B C D) est un carré.
 * (F A E) a pour aire 3 u.a.
 * (E B C) a pour aire 2 u.a.
 * (C D F) a pour aire 4 u.a.

Quelle est l'aire du triangle gris ?

#0 Rappel : si n est un entier, $\text{str}(n)$ est la chaîne de caractères représentant n (exemple : $\text{str}(2023)$ donne '2023' avec guillemets).

Le test `a in mot` vérifie si le caractère `a` est dans la chaîne de caractères `mot` (exemple 'n' in 'bonjour' donne True et 'n' in 'au revoir' donne False).

La factielle de l'entier n (notée ici $n?$) est le produit des entiers de 1 à n ne contenant pas de chiffre 0.

Par exemple $22?$ vaut $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18 \times 19 \times 21 \times 22$. Justifiez : $2023? = 1999?$. Ecrivez un script python qui prend en entrée n et calcule sa factielle.

On note x le côté (inconnu) du carré, et on introduit quelques longueurs : $a = AE$, $b = BE$, $d = DF$.

On sait par exemple $\frac{x \cdot b}{2} = 2$ et $\frac{x \cdot d}{2} = 4$ (aires EBC et aire CDF).

On déduit tout de suite $d = 2 \cdot b$. Par soustraction : $a = x - b$ et $a' = x - d = x - 2 \cdot b$.

On calcule l'aire de FAE : $(x - b) \cdot (x - 2 \cdot b) = 6$.

Mais en remplaçant b par $\frac{4}{x}$ (on l'a dit avec EBC), on trouve finalement $x^2 + \frac{32}{x^2} = 18$.

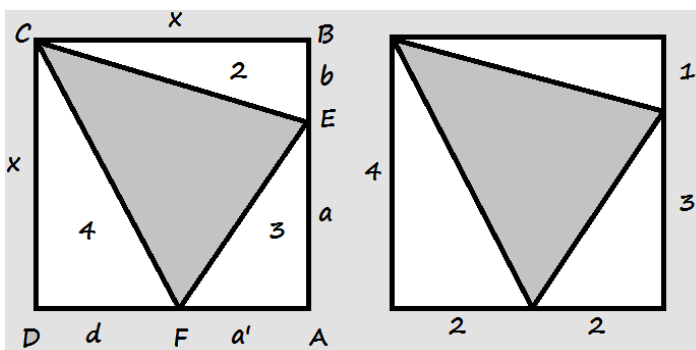
C'est une équation du second degré en x^2 dont les racines sont 16 et 2.

x étant positif, il peut valoir 4 ou $\sqrt{2}$.

La solution $x = \sqrt{2}$ conduit à $b = 2 \cdot \sqrt{2}$ et $a < 0$ ce qui est absurde.

Il ne reste que $x = 4$. On reporte dans les autres mesures.

L'aire qu'il reste est donc $16 - 4 - 3 - 2$ ce qui fait 7.



Pour passer de $1999?$ à $2023?$ il faut multiplier par 2000, 2001, 2002 et ainsi de suite jusqu'à 2023. mais tous ces nombres contiennent un chiffre 0. On ne les garde pas.

```
def factrelle(n) :
...p = 1
...for k in range(1, n+1) :
.....if not('0' in str(k)) :
.....p *= k
...return(p)
```

Et ça n'a strictement aucun intérêt.

◀47▶ Vrai ou faux : $\text{Card}(P(P(P(P(P(\emptyset))))) > 30\,000$.

On rappelle que si E a n éléments, alors $P(E)$ en a 2^n . On va appliquer ce résultat à $E = \emptyset$ puis $E = P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ et $E = P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ et ainsi de suite.

ensemble	$E = \emptyset$	$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$	$P(P(\emptyset))$	$P(P(P(\emptyset)))$	$P(P(P(P(\emptyset))))$	$P(P(P(P(P(\emptyset))))$
cardinal	0	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^4 = 16$	$2^{16} = 2^{10} \cdot 2^6$

Avec 2^6 on a dépassé 30 et avec 2^{10} on a dépassé 1000 (32 et 1024).

◀48▶ On suppose que $\sqrt{5}$ est rationnel, d'écriture irréductible $\frac{p}{q}$. Montrez qu'il existe a et b entiers vérifiant $a \cdot p \cdot \sqrt{5} + b \cdot q \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5}$. Déduisez $\sqrt{5} = 5 \cdot a \cdot q + b \cdot p$. Concluez.

On part de $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$. La formule $a.p.\sqrt{5} + b.q.\sqrt{5} = \sqrt{5}$ fait penser à une identité de Bézout.

Il suffit d'en écrire une entre p et q premiers entre eux : $\exists(a, b) \in \mathbb{Z}^2, a.p + b.q = 1$. On la multiplie ensuite par $\sqrt{5}$.

Mais qui est $q.\sqrt{5}$? C'est p puisque $\frac{p}{q} = \sqrt{5}$.

A ce stade : $\sqrt{5} = a.p.\sqrt{5} + b.p$.

Et qui est $\sqrt{5}.p$? C'est $\sqrt{5}.\sqrt{5}.q$ ce qui fait $5.q$.

A présent : $\sqrt{5} = a.5.q + b.p$. Comme demandé.

Mais alors $\sqrt{5}$ est une combinaison d'entiers. C'est un entier !

Et comme $\sqrt{5}$ est strictement entre 2 et 3, on a une contradiction.

En généralisant l'idée : \sqrt{n} est soit entier, soit irrationnel.

◀49▶ Le système $\begin{cases} 5.x + 3.y = 1 \\ 6.x + 7.y = 2 \end{cases}$ a pour solution $(50, 1)$ » dit le premier élève. « Non, ce système n'a pas de solution » dit le second. C'est juste que la question est « résoudre dans $(\mathbb{Z}/p.\mathbb{Z}, +, \cdot)$ » mais le professeur a très mal écrit l'entier premier p modulo lequel on travaille. Quelle valeur a lu le premier élève? Et le second?

Le système $\begin{cases} 5.x + 3.y = 1 \\ 6.x + 7.y = 2 \end{cases}$ s'écrit $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et se résout :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Qu'est ce qui va nous empêcher d'avoir une solution?

Ce serait que 17 soit nul.

C'est bien pourquoi l'élève qui travaille dans $(\mathbb{Z}_{17.\mathbb{Z}}, +, \cdot)$ ne trouve pas de solution.

On a deux équations : $5.x + 3.y = 1$ et $6.x + 7.y = 2$.

On passe de la première à la seconde en multipliant par 8 : $5 \times 8 = 40 = 6$ et $3 \times 8 = 24 = 7$.

Les deux équations donnent $6.x + 7.y = 8$ et $6.x + 7.y = 2$.

C'est incompatible.

En revanche, celui qui trouve la solution $(10, 1)$ travaille modulo p avec p différent de 17. Mais combien vaut p ?

Il suffit de reporter : $\begin{cases} 5.10 + 3.1 = 53 \\ 6.10 + 7.1 = 67 \end{cases}$ alors qu'on veut $\begin{cases} 5.x + 3.y = 1 \\ 6.x + 7.y = 2 \end{cases}$.

C'est donc qu'on a $53 = 1 [p]$ et $67 = 2 [p]$. En soustrayant : $14 = 1 [p]$.

Nécessairement, p vaut 13 et c'est suffisant $53 = 52 + 1 = 1 [p]$ et $67 = 65 + 2 = 2 [p]$.