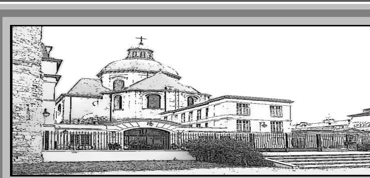
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 18 novembre
$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025

TD08

◃0▹ ♡ Complétez la permutation suivante pour que sa signature vaille -1 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & * & 4 & * \end{pmatrix}$. Pouvez vous alors la décomposer à l'aide de $\overrightarrow{1\ 2\ 3}$ et $\overrightarrow{2\ 3\ 4}$?
Et si on impose "signature égale à 1" ?
Rappel : la signature d'une permutation est $(-1)^k$ où k est le nombre de bicycles d'une décomposition de σ.

◃1▹ ♡ On pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 10 & 5 & 4 & 6 & 14 & 11 & 1 & 8 & 15 & 2 & 7 & 9 & 13 & 12 \end{pmatrix}$. Déterminez sa signature, son ordre.
Résolvez $\sigma^n(1) = 13$ d'inconnue n dans $\mathbb{N}$.
Indiquez suivant la valeur de n le nombre de vrais cycles [1] que contient σ^n.

◃2▹ ♣ A partir de quelle valeur de n existe-t-il dans S_n une permutation σqui contienne au moins un cycle de taille 4 et soit de signature 1.
Même question en exigeant de plus qu'il existe au moins une permutation φ vérifiant $\varphi \circ \varphi = \sigma$.

◃3▹ ♡ On définit $f = x \longmapsto \dfrac{15.x^4 - 166.x^3 + 621.x^2 - 902.x + 480}{24}$. Vérifiez que c'est *(en dépit des apparences)* un élément de S_5 (permutations de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$), et calculez sa signature.

◃4▹ **La vraie définition de la signature.** On se donne un entier naturel n. On note S_n l'ensemble des $n!$ permutations de la liste $[1, \dots n]$ notée L.

Pour toute permutation σ (bijection de L dans L), on pose $Sgn(\sigma) = \dfrac{\prod_{i<j\leq n} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{i<j\leq n} (j - i)}$.

♠$_1$ Vérifiez l'existence de cette quantité. Calculez $Sgn(Id)$.

♠$_2$ Calculez la signature du cycle $\overrightarrow{1\ 2\ 3}$ dans le cas $n = 3$ *(ce cycle est défini par $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$ et $\sigma(3) = 1$)*. Calculez la signature de ce cycle dans le cas $n = 4$. Dans le cas $n = 4$ calculez la signature de $\overrightarrow{1\ 2\ 3\ 4}$.

♠$_3$ Montrez pour toute permutation σ :

$$\Big(Sgn(\sigma)\Big)^2 = \frac{\prod_{i<j}(\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{i<j}(j - i)} . \frac{\prod_{j<i}(\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{j<i}(j - i)} = \frac{\prod_{i\neq j}(\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{i\neq j}(j - i)} = 1$$

♠$_4$ Déduisez que la signature ne peut valoir que 1 ou -1.

♠$_5$ On se donne deux permutations σ et φ. Montrez :

$$Sgn(\sigma \circ \varphi) = \frac{\prod_{i<j}(\sigma(\varphi(j)) - \sigma(\varphi(i)))}{\prod_{i<j}(\varphi(j) - \varphi(i))} . \frac{\prod_{j<i}(\varphi(j) - \varphi(i))}{\prod_{j<i}(j - i)} = Sgn(\sigma).Sgn(\varphi)$$

♠$_6$ Montrez : $Sgn(\sigma^{-1}) = \dfrac{1}{Sgn(\sigma)}$ pour toute permutation σ. Comparez $Sgn(\sigma^{-1} \circ \varphi \circ \sigma)$ et $Sgn(\varphi)$ *(ce qu'on appelle conjugaison)*.

1. un cycle de taille 1 n'est pas compté comme cycle

♠$_7$ On note $\tau_{i,j}$ la transposition qui échange i et j et laisse les autres éléments invariants *($\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ et $\sigma(k) = k$ pour $k \notin \{i,\ j\}$)*. Montrez $Sgn(\tau_{1,2}) = -1$.

♠$_8$ Qui est $\tau_{2,i} \circ \tau_{1,2} \circ \tau_{2,i}$? Qui est $\tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i}$? Déduisez que les transpositions $\tau_{i,j}$ ont toutes pour signature -1.

♠$_9$ Retrouvez : la signature d'une permutation dépend de la parité du nombre de transpositions dans la décomposition de σ en produit de transpositions.

♠$_{10}$ Simplifiez $\tau_{a,e} \circ \tau_{a,d} \circ \tau_{a,c} \circ \tau_{a,b}$. Calculez en fonction de k la signature d'un cycle $\overrightarrow{a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \dots a_k}$.

◁5▷ Donnez la signature de $x \longmapsto x^5 \ mod\ 7$ sur $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ après avoir vérifié que c'est bien une permutation.

◁6▷ ♣ On écrit les uns derrière les autres les entiers de 1 à 100 : 123456789101112131415 . . . 979899100. Vous obtenez un grand entier N. Combien a-t-il de chiffres ? Vous avez maintenant le droit de barrer quarante chiffres de cet entier N. Le gagnant est celui dont le « N raccourci » est l'entier le plus grand possible. Que barrez vous ?

♯ Informaticiens : écrivez un script qui prend en entrée n et retourne l'entier fait des n premiers entiers écrits les uns derrière les autres. Suivant votre niveau : vous avez le droit ou non aux fonctions `int` et str, ou alors vous ne travaillez qu'avec des entiers et des puissances de 10.

◁7▷ Combien y a-t-il dans S_6 de cycles de taille 4 ?
Combien y a-t-il dans S_6 de cycles σ de taille 4 vérifiant $\sigma(1) = 1$?
Combien y a-t-il dans S_6 de cycles σ de taille 4 vérifiant $\sigma(1) = 2$?
Combien y a-t-il dans S_6 de permutations σ de signature 1 ?
Combien y a-t-il dans S_6 de permutations σ de signature 1, vérifiant $\sigma(1) = 2$?

◁8▷ ♡ On note S_n l'ensemble des $n!$ permutations de la liste $[1, 2, \dots n]$. Montrez $\displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \sigma(1) = \frac{(n+1)!}{2}$. Que vaut $\displaystyle\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ k \leq n}} \sigma(k)$? *(attention au nombre de termes)*

Que vaut $\displaystyle\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \varphi \in S_n}} \sigma(\varphi((1))$ *(attention au nombre de termes)*.

◁9▷ L'univers est fait des 720 permutations de la liste $[0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5]$. On tire une permutation avec probabilité uniforme. Quelle est la probabilité que ce soit un cycle de taille 4 ?
Quelle est la probabilité qu'elle commute avec $\overrightarrow{(1\ 4\ 5\ 3)}$?

◁10▷ ♣ On définit : $T = \left\{ \dfrac{k.(k+1)}{2} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ *(ensemble des nombres triangulaires)*.
On définit $\sigma(n) = n - 1$ si $n \notin T$, et $\sigma(n) = \dfrac{k^2 + 3.k}{2}$ si n est l'élément $\dfrac{k.(k+1)}{2}$.

Complétez

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\sigma(n)$																	

Vérifiez que σ va bien de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et est bijective *(permutation de $\mathbb{N}$)*.
Pouvez vous la décomposer en produit de cycles de supports disjoints ? Pouvez vous lui donner un ordre ? [2]
Résolvez l'équation $\sigma^{10}(n) = n$ d'inconnue entière n.
Résolvez l'équation $\sigma^{2015}(n) = 2018$ d'inconnue entière n.

◁11▷ On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1,\ \dots n\}$ (les $n!$ bijections de cet ensemble dans lui même). On note P_n le sous ensemble $\{\sigma \in S_n \mid \forall k \in \{1,\ \dots n\},\ \sigma(x) \neq x\}$ (permutations sans poitn fixe).

Justifiez

n	0	1	2	3	4	5
$Card(P_n)$ (noté p_n)	1	0	1	2	9	44

Montrez : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = n.(p_n + p_{n-1})$.

Attention, ce n'est pas parce qu'il y a un n dans la formule qu'il faut réagir « oh, je vais faire une récurrence ». Ce serait en effet totalement idiot, car il faudrait, pour passer de n à n + 1 avoir une vision sur p_n,p_{n+1},p_{n+2} et p_{n+3} ! Pure folie.

---

2. Rappe : l'ordre d'une permutation φ est le plus petit entier p non nul vérifiant $\varphi^p = Id$

Non, c'est une formule que vous allez démontrer directement, par un dénombrement jusidiceux, et qui servira ensuite à des récurrences (cerveau>>>>réflexes).
Une piste : si on regarde σ dans P_{n+1}, alors $\sigma(n+1)$ est un entier entre 1 et n, quu'on va noter k et qui a deux possibilités : $\sigma(k) = n+1$ ou $\sigma(k) \neq n+1$.

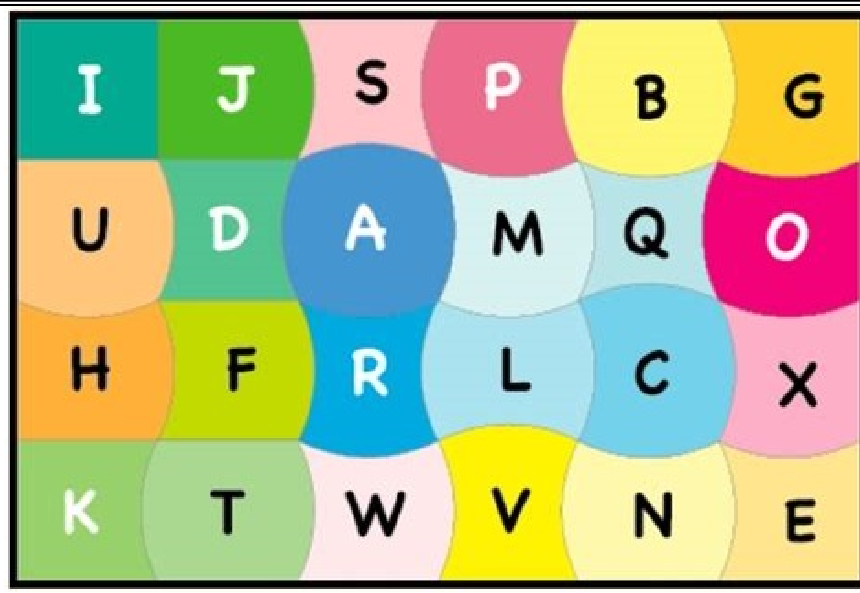
Prouvez alors : $p_n = n!.\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ (là, d'accord, faires une récurrence).
Déduisez $\frac{p_n}{n!} \longrightarrow_{n\to+\infty} \frac{1}{e}$ (proportion de permutations « partout mélangeantes » parmi toutes les permutations).

◁ 12 ▷ On donne $A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$. Résolvez $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ d'inconnue ensembliste B.
Résolvez $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ d'inconnue ensembliste B. ($P(E)$ est l'ensemble des parties de E).

◁ 13 ▷ ♡♣ Donnez les seize parties de l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.
Sur l'ensemble de ces parties, on définit la relation $\leqslant$ par $A \leqslant B$ si et seulement si $1 \in A \Rightarrow 1 \in B$. Rappelez les définitions de "réflexive", "symétrique", "antisymétrique" et "transitive". Lesquelles de ces propriétés vérifie $\leqslant$?
Résolvez $A \leqslant \{0,\ 2\}$ d'inconnue A. Résolvez $\{0,\ 2\} \leqslant A$ d'inconnue A.

◁ 14 ▷ On appelle *ordre* d'une permutation σ de S_n le plus petit entier naturel non nul d vérifiant $\sigma^d = Id$. Montrez que toute permutation a effectivement un ordre. Les questions 1 à 5 sont ♡ et on passe ensuite à ♠/♣.
1– Déterminez l'ordre d'un cycle.
2– Déterminez l'ordre de $\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 8 & 2 & 15 & 11 & 3 & 5 & 13 & 4 & 12 & 1 & 10 & 6 & 14 & 9 \end{array}$.
3– Montrez que σ et $\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$ ont le même ordre.
4– Pouvez donner l'ordre de $\sigma \circ \sigma'$ en fonction de l'ordre de σ et de l'ordre de σ' quand σ et σ' commutent.
5– Déterminez l'ordre de $i \longmapsto 3.i \quad mod \quad 19$ dans S_{19}.
6– Combien y a-t-il de permutations d'ordre 8 dans S_8 ?
7– Combien l'équation $ordre(\sigma) = 3$ a-t-elle de solutions dans S_6 ?
8– Combien l'équation $ordre(\sigma) = 4$ a-t-elle de solutions dans S_7 ?
9– Pour quelles valeurs de n existe-t-il dans S_n une permutation d'ordre 120 ?
10– Déterminez pour tout n de 1 à 15 le maximum de l'application "ordre" sur S_n.

Voici les pièces du jeu de Curvica. Déterminez les classes d'équivalence pour chacune des relations suivantes
« avoir le même périmètre que »
« avoir la même aire que »
« avoir le même périmètre et la même aire que ».
Assemblez quatre pièces de même périmètre pour en faire un rectangle.
Trouvez deux pièces de même périmètre, possédant chacune deux axes de symétrie.
Assemblez quatre pièces formant un carré. Même question avec neuf
◁ 15 ▷ pièces.



Pour une relation d'équivalence $\Re$, la classe d'équivalence d'un élément a est l'ensemble $\{b \in E \mid a \Re b\}$. Bref, on met dans chaque classe les éléments en relation entre eux.

◁ 16 ▷ ♡ Montrez que si dans un groupe $(G, *)$ on trouve deux éléments a et b vérifiant $a * b = a$, alors b est le neutre du groupe.
On rappelle que le neutre c'est $\forall x,\ x * b = x$ alors qu'ici on a $\exists a,\ a * b = a$, plus l'information : on a un groupe.

◁ 17 ▷ Voici les notes des élèves à l'École Nationale Supérieure des Technologies du Routage Informatique et du Numérique de Grenoble

Étudiant	Maths	Physique	Informatique	Total
Tréfermlaporte	12	10	14	189
Sejusqu'auboudelanui	12	15	14	209
Filtonpuliféfroi	10	10	10	155

L'admission étant à 180, combien de points a-t-il manqué en maths à l'étudiant Filtonpuliféfroi pour être admis ?

Un bonus à qui comprend mes mauvais jeux de mots.

◁ 18 ▷ E est un ensemble fini. On pose $\mathbb{P} = P(P(E))$ et on définit sur $\mathbb{P}$ la relation $\lesssim$ par $X \lesssim Y$ si et seulement si $\forall B \in Y,\ \exists A \in X,\ B \subset A$.
Attention, $P(E)$ est l'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de E
(comme $P(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ si $E = \{a,b,c\}$). Et $P(P(E))$ est donc fait des parties dont les éléments sont eux même des parties (par exemple $\{\{a\},\ \{b,c\},\ \{a,b,e\},\ \emptyset\} \in P(P(E))$ si $E = \{a,b,c,d,e\}$, et pour ce E, $P(P(E))$ a 2^{32} éléments dont la liste ne sera pas donnée ici).

Pour cette question : $E = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$. Donnez le cardinal de $\mathbb{P}$. Comparez (en justifiant) pour $\lesssim$ les deux parties suivantes :
$X = \{\{a,b,c\},\ \{d,e\}\}$ et $Y = \{\{a,b,c\},\ \{a,b\},\ \{d,e\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{e\}\}$.

On revient au cas général. Montrez que le relation $\lesssim$ est réflexive, transitive. Est-ce une relation d'ordre ?

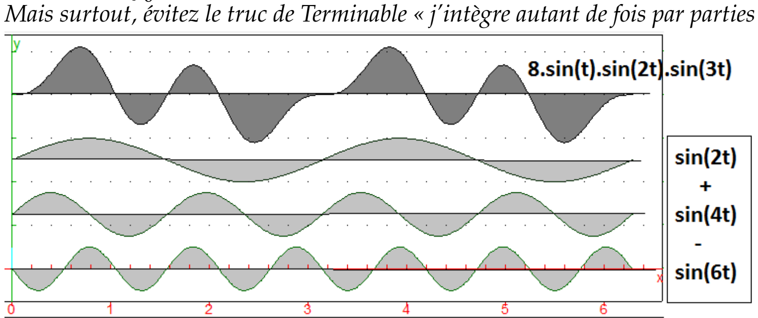
Pour cette question : $E = \{a,\ b,\ c\}$.
Combien chacune des quatre équations suivantes a-t-elle de solutions : $X \lesssim \emptyset$, $X \lesssim \{\emptyset\}$, $\emptyset \lesssim X$, $\{\emptyset\} \lesssim X$.

Combien pouvez vous trouver X vérifiant $\{\{a,\ b,\ c\},\ \{b\}\} \lesssim X \lesssim \{\{a,b\},\ \{b,c\},\ \{c\}\}$.

◁ 19 ▷ On pose $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ et $a_{n+2} = a_{n+1}.a_n$. Calculez a_n pour tout n.

◁ 20 ▷ Montrez : $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \sin(t).\sin(2.t); \sin(3.t).dt = \frac{7}{96}$.

Mais surtout, évitez le truc de Terminable « j'intègre autant de fois par parties qu'il faut » ; pensez à linéariser.



Elles apprécient les charges libres.
Quelle rude éjection.
Avide de ferveur, il nous inonde de spams.
Ce vélib' à terre a mal aussi.

◁ 21 ▷ Calculez $\displaystyle\int_0^1 t^2.e^t.dt$ quitte à intégrer assez par parties.

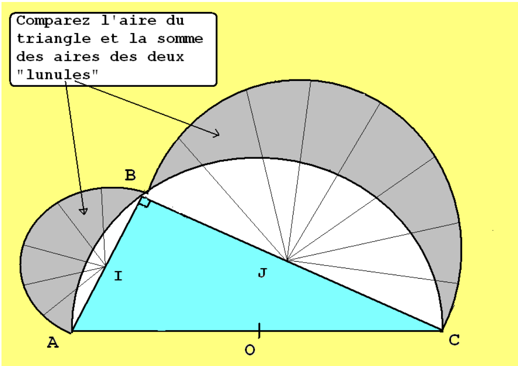
Calculez $\displaystyle\int_0^1 t.Arctan(t).dt$ en choisissant bien votre primitive de $t \longmapsto 2.t$ lors de l'intégration par parties.

◁ 22 ▷ Pouvez vous placer les quatre couples de $\{a,b\} \times \{0,1\}$ dans le tableau de taille 2 sur 2 de sorte à ce que chaque lettre soit visible une fois et une seule sur chaque ligne, et chaque chiffre une fois et une seule sur chaque colonne.

Pouvez vous placer les neuf couples de $\{a,b,c\} \times \{0,1,2\}$ dans le tableau de taille 3 sur 3 dans le tableau de sorte à ce que chaque lettre soit visible une fois et une seule sur chaque ligne, et chaque chiffre une fois et une seule sur chaque colonne.

Pouvez vous placer les seize couples de $\{a,b,c,d\} \times \{0,1,2,4\}$ dans le tableau de taille 4 sur 4 de sorte à ce que chaque lettre soit visible une fois et une seule sur chaque ligne, et chaque chiffre une fois et une seule sur chaque colonne.

◁23▷



Existe-t-il un triangle rectangle à côtés entiers dont un des côtés mesure 2017 ?
Existe-t-il un triangle rectangle à côtés entiers dont le périmètre vaut 2017 ?
Existe-t-il un triangle rectangle à côtés entiers dont l'aire vaut 2017 ?
Construisez un triangle rectangle dont les côtés sont entiers, mais aussi la hauteur.
Quelles sont, entre 0 et 200 les aires possibles pour des triangles rectangles (c'est lassant, donnez un algorithme).
Comparez l'aire du triangle et la somme des aires des deux lunules.

◁24▷ ♡ La suite $(☻_n)$ est définie par $☻_{n+2} = ☻_{n+1} + 20.☻_n$ avec $☻_0$ et $☻_1$ donnés. Déterminez a et b pour avoir $☻_0 = a+b$ et $☻_1 = 5.a - 4.b$. Montrez alors pour tout n : $☻_n = a.5^n + b.(-4)^n$.
Pouvez vous choisir $☻_0$ et $☻_1$ pour avoir $☻_{2018} = 2018$ et $☻_{2019} = 2019$?

◁25▷ ♡ Déterminez $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}},\ \frac{1}{2^k}\right]$.
Déterminez $B = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left]-\frac{1}{2^k},\ \frac{1}{2^k}\right]$ et $C = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left]0,\ \frac{1}{2^k}\right]$.
Rappel : $\bigcap_{i\in I} A_i = \{\ |\ \forall i \in I,\ x \in A_i\}$ et $\bigcup_{i\in I} A_i = \{\ |\ \exists i \in I,\ x \in A_i\}$

◁26▷ Ayant constaté que expest un morphisme de groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ $(\forall(a,b),\ e^{(a+b)} = e^a \times e^b)$, un élève de MPSI2 veut en faire un morphisme d'anneau. L'anneau de départ est donc logiquement $(\mathbb{R}, +, \times)$. Et l'anneau d'arrivée devrait être $(\mathbb{R}^{+*}, \times, \otimes)$, avec une loi $\otimes$ à définir.
On demande donc $e^{a\times b} = e^a \otimes e^b$. Ceci nous amène à définir la loi $\otimes$ par $\alpha \otimes \beta = e^{\ln(a)\times\ln(b)}$, si ça marche.
Montrez que 1 serait absorbant pour de la loi $\otimes$.
Qui est le neutre de la loi $\otimes$? La loi $\otimes$ est elle associative ? Est elle distributive sur $\times$?

◁27▷ ♡ Montrez qu'il n'existe pas de matrice réelle carrée de taille 2 M vérifiant $M^2 = A$ (avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$). indication : c'est déterminant.
Trouvez une solution dans $M_2(\mathbb{C})$, que vous pourrez chercher sous la forme $a.I_2 + b.A$.

◁28▷ Représentez graphiquement $x \longmapsto x.\ln(x)$ sur $]0,\ +\infty[$ *(notée f)*. On définit sur $\mathbb{R}^{+*}$ les relations $\Subset$ et $\eqcirc$ par

$a \Subset b$	$a \eqcirc b$
$f(a) \leqslant f(b)$	$f(a) = f(b)$

. Sont ce des relations d'ordre, d'équivalence ?
Pour la relation d'ordre si c'en est une, indiquez si il y a un plus petit élément. Pour la relation d'équivalence, indiquez en fonction de a le nombre d'éléments de la classe de a.
Même question avec $f = x \longmapsto x.\sin(x)$.

◁29▷ On rappelle que la relation « divise » est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. Montrez que $\mathbb{N}^*$ a un plus petit élément, et un plus grand élément.

◁30▷ Calculez le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

◁31▷ ♡ On doit résoudre $y'_t + |t^2 - 1|.y_t = 0$ d'inconnue y fonction de t avec condition initiale $y_0 = 1$. On demande de calculer y_5. L'élève Toitakour-Ahuiteur résout sur $[0,\ 1]$, calcule y_1, puis résout sur $[1,\ 5]$ en utilisant la condition initiale en 1 et calcule enfin y_5. Donnez plus directement la réponse.

◁32▷ ♡ Vrai ou faux : pour qu'une somme de carrés de complexes soit nulle, il suffit que chaque complexe soit nul.

◁33▷ La matrice $\begin{pmatrix} 7 & -2 & \\ & -4 & -10 \\ & & \end{pmatrix}$ a pour vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et admet pour valeur propre -2. Diagonalisez la.
Un vecter propre de M c'est un vecteur U non nul (avec un réel λ associé) vérifiant $M.U = \lambda.U$.

Une valeur propre, c'est un réel μ (avec un vecteur V non nul associé) vérifiant $M.V = \mu.V$.
Diagonaliser, c'est trouver une matrice inversible P dont les vecteurs colonne sont des vecteurs propres et une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres associées ; en taille 2 : $M.\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ à & \mu \end{pmatrix}$.

◁34▷ ♡ L'application $n \longmapsto (n \mod 5,\ n \mod 13)$ est elle injective sur range(64) ?
L'application $n \longmapsto (n \mod 11,\ n \mod 13)$ est elle injective sur range(143) ?

◁35▷ Montrez que $n \longmapsto n + (-1)^n$ est une bijection de $\mathbb{N}$.

◁36▷ ♡ Montrez que $x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$ est injective sur son domaine de définition, sauf si $a.d$ est égal à $b.c$.

◁37▷ ♡ Montrez que ni $x \longmapsto x^2$ ni $x \longmapsto (x+1)^2$ n'est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, tandis que $x \longmapsto (x^2,\ (x+1)^2)$ est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

◁38▷ Vrai ou faux :
Le support de $\overrightarrow{(1\ 3)} \circ \overrightarrow{(1\ 2\ 3)} \circ \overrightarrow{(1\ 2)}$ est $\{3\}$.
$\overrightarrow{(1\ 2\ 3)}^{-1} = \overrightarrow{(3\ 2\ 1)}$.
Le produit de deux cycles à supports non disjoints est un cycle.
Si n est pair, A_n ne contient pas d'élément d'ordre 2.
A_5 contient $\dfrac{1}{2}.\dbinom{5}{2}.\dbinom{3}{2}$ éléments d'ordre \$2\$.
A_4 admet quatre sous-groupe de cardinal 3.
A_5 est engendré par les bi-bicycles.
La signature d'une permutation de S_n est $(-1)^{n-o}$ où o désigne le nombre d'orbites de la permutation

◁39▷ Trouvez une permutation σ dans S_6 vérifiant $\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4)} = \sigma^{-1} \circ \overrightarrow{(3\ 4\ 5\ 6)} \circ \sigma$.

◁40▷ Vrai ou faux :
a - $x \longmapsto [x+0.5]$ est impaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
b - $x \longmapsto [x+0.5]$ est impaire de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
c - $x \longmapsto [x+0.5]$ est impaire de $\mathbb{R} - \dfrac{1}{2}.\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.
d - $x \longmapsto [x^2]$ est paire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
e - $\forall x \in \mathbb{R},\ (\forall y \in \mathbb{R}^{+*},\ x \leqslant y) \Rightarrow (x \leqslant 0)$
f - $\forall (A,\ B),\ (A \cap B = A \Delta B) \Leftrightarrow (A = B = \emptyset)$
g - $[\sqrt{e^{42}}] = [\sqrt{[e^{42}]}]$.

◁41▷

Wallis sur $\mathbb{R}^+$.

I∼0) Pour tout réel x positif ou nul, on pose $f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x.dt$. Calculez $f(0)$, $f(1)$.
I∼1) Montrez que f est une application décroissante (prétendre dériver f à ce stade serait pure folie).
I∼2) Montrez pour tout x : $(x+1).f(x) = (x+2).f(x+2)$.
I∼3) Justifiez $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n).f(n+1) = \dfrac{\pi}{2.(n+1)}$.
I∼4) x est un réel de $[1,\ +\infty[$, on pose $n = [x]$ (partie entière). Montrez : $f(n) \geqslant f(x) \geqslant f(n+2)$ et $f(n).f(n-1) \geqslant (f(x))^2 \geqslant f(n+1).f(n+2)$
I∼5) Déduisez $f(x) \sim_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{2.x}}$.

II∼0) Calculez $f(2.n)$ pour tout entier naturel n.

Dérivation.

III∼0) On pose $D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)).dt$. Montrez $D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(u)).du$ puis déduisez $2.D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2.t)).dt -$

$\dfrac{\pi.\ln(2)}{2}$.

III∼1) Montrez aussi $D_1 = \displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(\theta)).d\theta$ et aussi déduisez $D_1 = -\dfrac{\ln(2).\pi}{2}$.

III∼2) Histoire de ne pas travailler sur ce qui n'existe pas : justifiez l'existence de chacune de ces limites $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln\Big(\frac{\sin(t)}{t}\Big).dt$, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(t).dt$ et $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \ln(\sin(t)).dt$.

IV∼0) Montrez pour tout x strictement positif et pour tout a dans $]0,\ 1[$: $0 \leqslant \frac{a^x-1}{x} - \ln(a) \leqslant x.\dfrac{a^2}{2}$ (on pourra dériver deux fois $\varphi_a = (x \longmapsto a^x)$).

IV∼1) Montrez pour tout t de $]0,\ \pi/2]$ et tout x strictement positif $0 \leqslant \dfrac{(\sin(t))^x - 1}{x} - \ln(\sin(t)) \leqslant \dfrac{x.(\ln(\sin(t))^2}{2}$.

IV∼2) Déduisez $0 \leqslant \dfrac{f(x)-f(0)}{x} - D_0 \leqslant \dfrac{x.D_2}{2}$ avec $D_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)).dt$.

IV∼3) Déduisez que f est dérivable à droite en 0 et calculer $f'(0)$.

Dérivée seconde.

V∼0) a et b sont deux réels strictement positifs.

On pose $\rho = \dfrac{b-a}{b+a}$ et on définit $\phi = x \longmapsto \ln(a^2.\cos^2(x) + b^2.\sin^2(x))$. Déterminez ϕ' .

V∼1) Montrez que pour tout x, $4.\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \rho^k.\sin(2.k.x)$ converge vers $\phi'(x)$ quand n tend vers l'infini.

V∼2) Déduisez pour tout x positif : $\phi(x) = 2.\ln\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big) - 2.\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2.k.x)}{k}.\rho^k$.

V∼3) (ne pas traiter) Déduisez $\displaystyle\int_0^{\pi} (\phi(x))^2.dx = 4.\pi.\Big(\ln\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big)^2 + 2.\pi.\sigma(\rho^2)$ avec $\sigma = \Big(x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}\Big)$.

V∼4) (ne pas traiter) On pose alors $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $b_n = \dfrac{n}{n+1}$ et $\phi_n = t \longmapsto \ln((a_n)^2.\cos^2(t) + (b_n)^2.\sin^2(t))$.

Déduisez $f''(0) = \dfrac{\pi.(\ln(2))^2}{2} + \dfrac{\pi^3}{24}$.

Application au problème des allumettes de Banach.

VI∼0) Un fumeur[3] porte toujours sur lui deux boites d'allumettes A et B, chacune contenant initialement n allumettes (n désigne un entier strictement positif, donné). Chaque fois qu'il veut une allumette, il choisit une boite au hasard (le probabilité du choix de chaque boite vaut toujours $1/2$), et il y prend une allumette ; il jette ensuite l'allumette après l'avoir utilisée (et même si il constate que la boite est alors vide, il la remet dans sa poche). Inévitablement arrive un moment où, pour la première fois, il trouve une boite vide. On désigne alors par R_n la variable aléatoire égale au nombre d'allumettes restant alors dans l'autre boite.

> *Exemple de situation avec n égal à 3 : « initialement chaque boite contient trois allumettes ; il prend dans la B, puis la A, puis la B à nouveau, et encore la B (à ce stade, la B est vide, la A contient encore deux allumettes), il prend dans la A, puis il veut prendre dans la boite B, et là il s'arrête car il vient de trouver une boite vide. L'autre boite (la A) contient une allumette :* $R_3 = 1$ *».*

Montrez : $P(R_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$ et calculez $P(R_1 = 0)$.

VI∼1) Calculez $P(R_n > n)$ et $P(R_n = n)$.

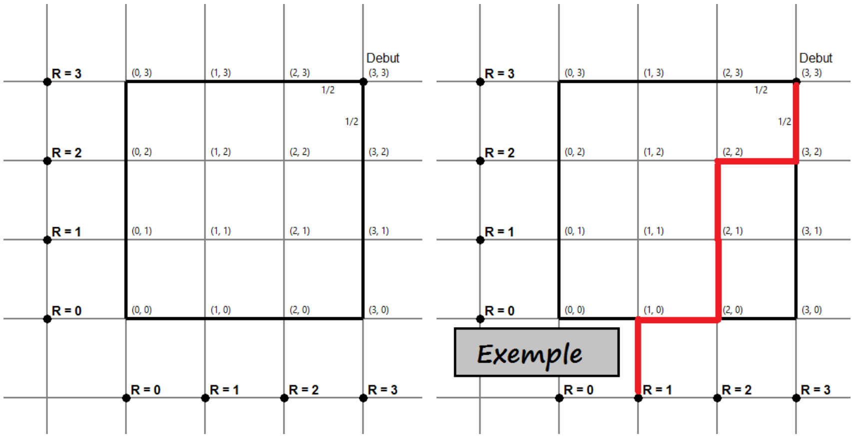
VI∼2) Calculez $P(R_2 = k)$ pour chaque entier k de 0 à 2.

VI∼3)

Complétez pour $n = 3$	$P(R_3 = 0)$	$P(R_3 = 1)$	$P(R_3 = 2)$	$P(R_3 = 3)$	
		$2.10.\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^6$			Total = ...

---

3. imaginé en fait par Hugo Steinhaus, mais attribué par lui à son ami Stefan Banach ; tous deux étaient des fumeurs de pipes et mathématiciens polonais du début du vingtième siècle dont vous croiserez le nom dan le cours de seconde année ou comme livre référence en analyse



Le module **random** contient la fonction **randrange** qui tire des entiers au hasard (`randrange(2)` donne `0` ou `1`, avec probabilité 1/2 pour chacun).
Écrivez un script `Python` qui prend en entrée un entier naturel n et simule le problème du fumeur et retourne le nombre d'allumettes R_n.
Écrivez une procédure qui prend en entrée n et N (N sera grand) et retourne la valeur moyenne de R_n sur N expériences.
Et pour un histogramme ?

VII∼0) Exprimez $P(R_n = k)$ (qu'on notera $p_n(k)$) à l'aide de $\begin{pmatrix} 2.n-k \\ k \end{pmatrix}$.
VII∼1) Montrez pour n dans $\mathbb{N}$ et k dans $[0,\ n-1] \cap \mathbb{N}$: $2.(n-k).p_n(k) = (2.n+1).p_n(k+1) - (k+1).p_n(k+1)$.
VII∼2) On pose $E(R_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} k.p_n(k)$ (la moyenne, dite aussi espérance). Déduisez l'existence de trois coefficients réels a, b et c à préciser tels que $E(R_n) = (a.n+b).P_n(0) + c$.
VII∼3) Exprimez $p_n(0)$ à l'aide de $f(2.n)$.
VII∼4) Déterminez $\lim_{n\to+\infty} p_n(0)$ et donnez un équivalent de la forme $a.n^\alpha$ de $p_n(0)$ quand n tend vers l'infini.
VII∼5) Déterminez $\lim_{n\to+\infty} E_n$ et donnez un équivalent de la forme $a.n^\alpha$ de E_n quand n tend vers l'infini.
La partie équivalent, dérivation, calcul de D_0 est issue de Mines-Ponts 2023 (filière MP).

◃42▹ Montrez que $ch(\ln(3+2.\sqrt{2}))$ ou $sh(\ln(3+2.\sqrt{2}))$ est rationnel.

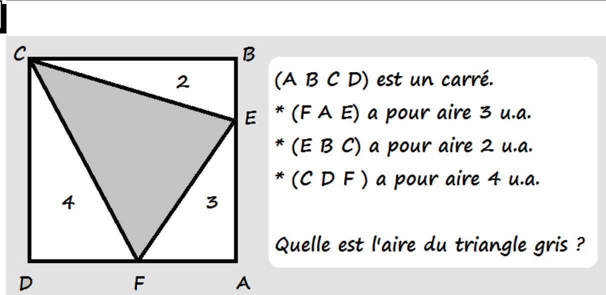
◃43▹ Résolvez : « $ch(\ln(n+4.\sqrt{3})) \in \mathbb{Q}$ » d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$.

◃44▹ Résolvez $\log_3((\log_2(x))^5) = 5$ d'inconnue réelle x.

◃45▹ Résolvez $\dfrac{(n-1)!+(n+1)!}{n^3-1} = 24$ d'inconnue entière n.

◃46▹ n est un entier naturel donné. Pour tout k de 0 à n, on définit $I_{n,k} = \displaystyle\int_{x=0}^{1} \frac{x^k}{k!}.\frac{(1-x)^{n-k}}{(n-k)!}.dx$. Montrez pour tout k de 0 à $n-1$: $I_{n,k+1} = I_{n,k} = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

◃47▹



$\sharp_0$ Rappel : si **n** est un entier, `str(n)` est la chaine de caractères représentant **n** (exemple : `str(2023)` donne `'2023'` avec guillemets.
Le test `a in mot` vérifie si le caractère **a** est dans la chaine de caractères `mot` (exemple `'n' in 'bonjour'` donne `True` et `'n' in 'au revoir'` donne `False`).
La factrielle de l'entier n (notée ici $n?$) est le produit des entiers de 1 à n ne contenant pas de chiffre 0.
Par exemple 22? vaut $1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times11\times12\times13\times14\times15\times16\times17\times18\times19\times21\times22$.
Justifiez : $2023? = 1999?$. Ecrivez un script `python` qui prend en entrée **n** et calcule sa factrielle.

◃48▹ Vrai ou faux : $Card(P(P(P(P(P(\emptyset)))))) > 30\,000$.

◃49▹ On suppose que $\sqrt{5}$ est rationnel, d'écriture irréductible $\dfrac{p}{q}$. Montrez qu'il existe a et b entiers vérifiant $a.p.\sqrt{5} + b.q.\sqrt{5} = \sqrt{5}$. Déduisez $\sqrt{5} = 5.a.q + b.p$. Concluez.

◃50▹ Le système $\left\{\begin{array}{ccccc} 5.x & + & 3.y & = & 1 \\ 6.x & + & 7.y & = & 2 \end{array}\right|$ a pour solution $(50,\ 1)$ » dit le premier élève. « Non, ce système n'a pas de solution » dit le second. C'est juste que la question est « résoudre dans $(\mathbb{Z}_{/p.\mathbb{Z}}, +, .)$ » mais le professeur a très mal écrit l'entier premier p modulo lequel on travaille. Quelle valeur a lu le premier élève ? Et le second ?