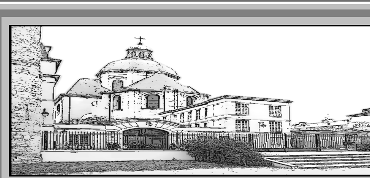
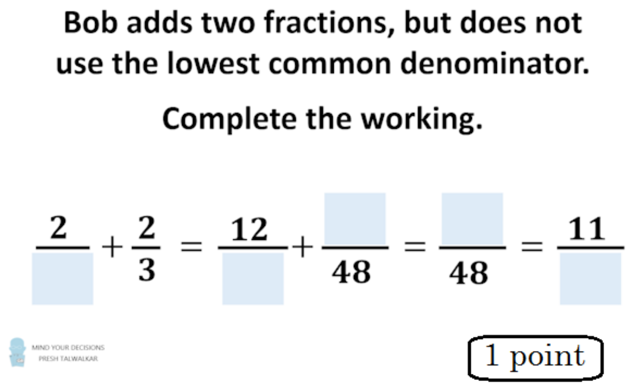
LYCEE CHARLEMAGNE
Noir vendredi 22 novembre
M.P.S.I.2



2024 2025

DS03



$\diamondsuit_1$ C'est qui ce colleur qui écrit si mal ?
Non, il a bien demandé d'exprimer $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ en fonction de $t = \tan(\theta/4)$.
Avec domaine de définition. 3 pt.

$\diamondsuit_2$ Calculez $\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{1+3.\cos^2(\theta)}$ en posant le changement de variable $t = \tan(\theta)$.
Mon ordinateur m'a donné $\frac{\pi}{6} - \frac{Arctan(\sqrt{3}/5)}{2}$. Avez vous la même chose ? 4 pt.

$\diamondsuit_3$ Décomposez en éléments simples $\frac{1}{(X+1).(X+2)}$. Résolvez l'équation différentielle $(1+t).(2+t).y'_t - y_t = 0$ $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$ avec condition initiale $y_0 = K$. L'élève constate $y_{t_0+1} = y_{t_0} + 2$ et $y_{t_{0+2}+2} = y_{t_0} + 3$. Retrouvez t_0 et y_0. 4 pt.

I$\sim$0) Pour tout n, on note $(S_n, \circ)$ le groupe des permutations de $[1, 2, \dots n]$. Pour toute permutation σ on note $p(\sigma)$ le nombre de points fixes ($Card\{k \mid \sigma(k) = k\}$) et $s(\sigma)$ le nombre de cycles dans la décomposition de σ en produit de cycles (on compte les monocycles).
On pose alors $P_n = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).X^{p(\sigma)}$ et $S_n(X) = \sum_{\sigma \in S_n} X^{s(\sigma)}$. Justifiez : 4 pt.

$P_0(X) = 1$	$P_1(X) = X$	$P_2(X) = X^2 - 1$	$P_3(X) = X^3 - 3.X + 2$	$P_4(X) = X^4 - 6.X^2 + 8.X - 3$
$S_0(X) = X$	$S_1(X) = X$	$S_2(X) = X^2 + X$	$S_3(X) = X^3 + 3.X^2 + 2.X$	$S_4(X) = X^4 + 6.X^3 + 11.X^2 + 6.X$

I$\sim$1) Calculez $P_5(X)$ et $S_5(X)$. 3 pt.

I$\sim$2) Factorisez $P_n(X)$ et $S_n(X)$ pour n de 2 à 5. 2 pt.

I$\sim$3) Justifiez que $P_n(X)$ est un polynôme de degré n de la forme $X^n - \binom{n}{2}.X^{n-2} + \dots$ (par un argument de dénombrement, et pas par récurrence !). 3 pt.
I$\sim$4) Calculez $P_n(1)$ et $S_n(1)$ pour tout n. 2 pt.
I$\sim$5) Justifiez que $S_n(X)$ est un polynôme de degré n et précisez les quatre coefficients ☺.X^n + ☻.$X^{n-1} + \dots +$ ☹.X + ☼. 2 pt.

II$\sim$0) Le déterminant d'une matrice carrée de taille n sur n, de terme général a_i^k(convention $a_{i \leftarrow ligne}^{k \leftarrow colonne}$) est $\sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)} \dots a_n^{\sigma(n)}$ (il y a donc $n!$ dont la moitié avec des signes plus et la moitié avec des signes moins).
On admet le résultat : le déterminant est un morphisme multiplicatif : $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$ pour tout couple de matrices (A, B) de taille n.
Justifiez $\det(I_n) = 1$, $\det(P^{-1}) = (\det(P))^{-1}$ pour P inversible et $\det(P^{-1}.M.P) = \det(M)$. 3 pt.

II$\sim$1) Justifiez que $P_6(X)$ est le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & X & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & X & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & X \end{pmatrix}$ notée M_X (vous pouvez même l'expliquer en taille n). 2 pt.

II∼2) Trouvez une matrice diagonale D vérifiant $M_1.P = P.D$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 2 pt.

II∼3) Résolvez l'équation $P.X = Y$ d'inconnue X (vecteur de taille 6) où Y est le vecteur colonne de composantes a à f (pensez à sommer les six équations pour commencer). 2 pt.

II∼4) Déduisez les 36 coefficients de P^{-1} et vérifiez $P^{-1}.P = I_6$. 2 pt.

II∼5) Déduisez $M_X = P.(D + (X-1).I_6).P^{-1}$ puis $\det(M_X) = (X-1)^5.(X+5)$. 3 pt.

II∼6) Retrouvez qui est qui (et justifiez) : 4 pt.

$\sum_{\sigma \in S_6} Sgn(\sigma)$	$\sum_{\sigma \in S_6} Sgn(\sigma).p(\sigma)$	$\sum_{\sigma \in S_6} \dfrac{Sgn(\sigma)}{p(\sigma)+1}$	$\prod_{\sigma \in S_6} Sgn(\sigma)$
7/8	0	1	1

III∼0) Pour tout k, on note $c_{n,k}$ le nombre d'éléments de S_n ayant k cycles.
Voici les éléments d'une démonstration, complétez les trous, et donnez la formule finale :
La méthode consiste simplement à établir une relation de récurrence sur les c_{n,k}. Nous allons, pour cela, dénombrer les permutations σ de S_n telles que ayant k cycles en les comptant séparément selon la valeur de $\sigma(n)$.

Si $\sigma(n) =$ [redacted], on remarque que se donner une telle permutation revient simplement à se donner une permutation de $1, \dots, n-1$ ayant [redacted] cycles (puisque n est tout seul dans son cycle). Il y a donc [redacted] permutations qui relèvent de ce cas.
Examinons maintenant le cas où $\sigma(n)$ est un entier m fixé strictement inférieur à n. L'entier n apparaît alors dans un cycle de σ qui est de longueur au moins 2 (puisqu'il contient au moins n et m) et on peut construire une permutation τ de $1, \dots, n-1$ simplement en retirant n de ce cycle et en laissant les autres cycles inchangés. Par construction, il est évident que τ a encore [redacted] cycles. Par ailleurs, on peut reconstruire σ à partir de τ et l'entier m comme suit : on regarde le cycle de τ qui contient m et, dans ce cycle, on insère l'entier n juste avant m. On déduit de cela qu'il y a [redacted] permutations à k cycles telles $\sigma(n) = m$ est égal à un entier $m < n$ fixé. On aboutit à [redacted].

III∼1) Déduisez $S_n(X) = (X+n-1).S_{n-1}(X)$, puis trouvez la formule générale pour $S_n(X)$. 3 pt.

III∼2) Montrez en dérivant $\ln(S_n(X))$ que la moyenne du nombre de cycles des $n!$ permutations de S_n est $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$. 3 pt.

IV∼0) Pour tout couple $(n,\ k)$ (avec $0 \leqslant k \leqslant n$) on note $F(n,\ k)$ le nombre de permutations de S_n ayant exactement k points fixes.
Et on pose $\omega_n = F(n, 0)$ (permutations sans aucun point fixe).
Justifiez : $F(n,\ n) = 1$, $F(n,\ n-1) = 0$, $F(N,\ k) = \dbinom{n}{k}.\omega_{n-k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F(n,\ k) = n!$. 3 pt.

IV∼1) Déduisez : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n-k}}{k!.(n-k)!} = 1$ et $\displaystyle\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}.\frac{\omega_{n+1-k}}{(n+1-k)!}$. 2 pt.

IV∼2) Montrez par récurrence sur n : $\displaystyle\frac{\omega_n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$. 4 pt.

IV∼3) Pour Secret-Santa, les 48 élèves de MPSI2 ont tiré chacun un nom au hasard dans Sucri, sans remise. Écrivez un script python qui calcule la probabilité qu'aucun élève n'ait tiré son propre nom (le résultat pourra être un flottant). 2 pt.

IV∼4) Mais on est en maths, pas en labo du bout du couloir. Écrivez un programme Python qui détermine dans combien des 48! tirages il n'y a aucun élève ayant tiré son propre nom (résultat int). 2 pt.

IV∼5) Montrez aussi par récurrence sur n : 2 pt.

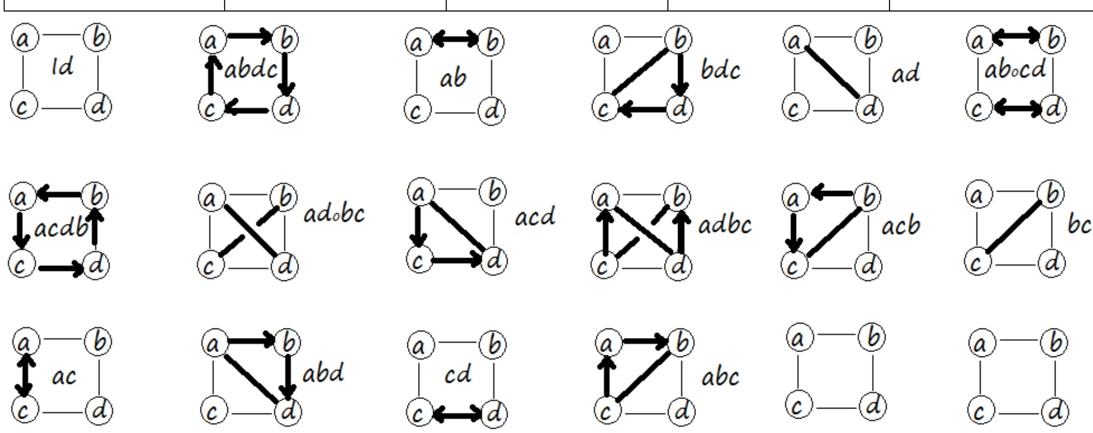
$$e^{-1} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}.e^{-t}.dt$$

IV∼6) Montrez pour tout n : 2 pt.

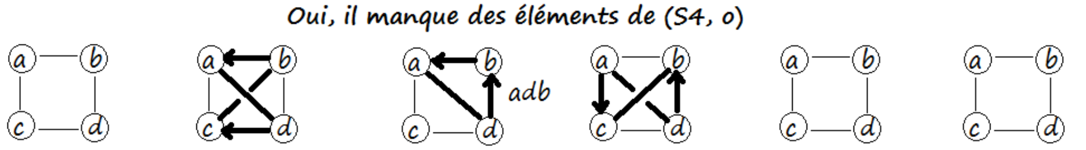
$$0 \leqslant \int_0^1 \left(\frac{(1-t)^n}{n!} - \frac{(1-t)^n.e^{-t}}{n!}\right).dt \text{ puis } 0 \leqslant \int_0^1 \left(\frac{(1-t)^n.e^{-t}}{n!}\right).dt \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$$

IV∼7) Donnez la limite de $\dfrac{\omega_n}{n!}$ quand n tend vers l'infini. 2 pt.

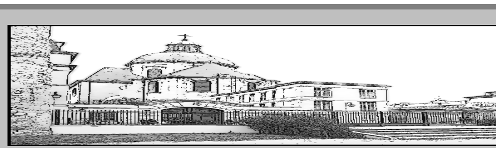
Id $\begin{vmatrix} a_1^1 & & & \\ & a_2^2 & & \\ & & a_3^3 & \\ & & & a_4^4 \end{vmatrix}$ $a_1^1.a_2^2.a_3^3.a_4^4$	$\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)}$ $\begin{vmatrix} & a_1^2 & & \\ a_2^1 & & & \\ & & & a_3^4 \\ & & a_4^3 & \end{vmatrix}$ $+a_1^2.a_2^1.a_3^4.a_4^3$	$\overrightarrow{(1\,3)} \circ \overrightarrow{(2\,4)}$ $\begin{vmatrix} & & a_1^3 & \\ & & & a_2^4 \\ a_3^1 & & & \\ & a_4^2 & & \end{vmatrix}$ $+a_1^3.a_2^4.a_3^1.a_4^2$	$\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)}$ $\begin{vmatrix} & & & a_1^4 \\ & & a_2^3 & \\ & a_3^2 & & \\ a_4^1 & & & \end{vmatrix}$ $+a_1^4.a_2^3.a_3^2.a_4^1$	$\overrightarrow{(1)} \circ \overrightarrow{(2\,3\,4)}$ $\begin{vmatrix} a_1^1 & & & \\ & & a_2^3 & \\ & & & a_3^4 \\ & a_4^2 & & \end{vmatrix}$ $+a_1^1.a_2^3.a_3^4.a_4^2$	$\overrightarrow{(1)} \circ \overrightarrow{(2\,4\,3)}$ $\begin{vmatrix} a_1^1 & & & \\ & & & a_2^4 \\ & a_3^2 & & \\ & & a_4^3 & \end{vmatrix}$ $+a_1^1.a_2^4.a_3^2.a_4^3$
$\overrightarrow{(2)} \circ \overrightarrow{(1\,3\,4)}$ $\begin{vmatrix} & & a_1^3 & \\ & a_2^2 & & \\ & & & a_3^4 \\ a_4^1 & & & \end{vmatrix}$ $+a_1^3.a_2^2.a_3^4.a_4^1$	$\overrightarrow{(2)} \circ \overrightarrow{(1\,4\,3)}$ $\begin{vmatrix} & & & a_1^4 \\ & a_2^2 & & \\ a_3^1 & & & \\ & & a_4^3 & \end{vmatrix}$ $+a_1^4.a_2^3.a_3^1.a_4^3$	$\overrightarrow{(3)} \circ \overrightarrow{(1\,2\,4)}$ $\begin{vmatrix} & a_1^2 & & \\ & & & a_2^4 \\ & & a_3^3 & \\ a_4^1 & & & \end{vmatrix}$ $+a_1^2.a_2^4.a_3^3.a_4^1$	$\overrightarrow{(3)} \circ \overrightarrow{(1\,4\,2)}$ $\begin{vmatrix} & & & a_1^4 \\ a_2^1 & & & \\ & & a_3^3 & \\ & a_4^2 & & \end{vmatrix}$ $+a_1^4.a_2^1.a_3^3.a_4^2$	$\overrightarrow{(4)} \circ \overrightarrow{(1\,2\,3)}$ $\begin{vmatrix} & a_1^2 & & \\ & & a_2^3 & \\ a_3^1 & & & \\ & & & a_4^4 \end{vmatrix}$ $+a_1^2.a_2^3.a_3^1.a_4^4$	$\overrightarrow{(4)} \circ \overrightarrow{(1\,3\,2)}$ $\begin{vmatrix} & & a_1^3 & \\ a_2^1 & & & \\ & a_3^2 & & \\ & & & a_4^4 \end{vmatrix}$ $+a_1^3.a_2^1.a_3^2.a_4^4$
$\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3)} \circ \overrightarrow{(4)}$ $\begin{vmatrix} & a_1^2 & & \\ a_2^1 & & & \\ & & a_3^3 & \\ & & & a_4^4 \end{vmatrix}$ $-a_1^2.a_2^1.a_3^3.a_4^4$	$\overrightarrow{(1\,3)} \circ \overrightarrow{(2)} \circ \overrightarrow{(4)}$ $\begin{vmatrix} & & a_1^3 & \\ & a_2^2 & & \\ a_3^1 & & & \\ & & & a_4^4 \end{vmatrix}$ $-a_1^3.a_2^2.a_3^1.a_4^4$	$\overrightarrow{(1\,4)} \circ \overrightarrow{(2)} \circ \overrightarrow{(3)}$ $\begin{vmatrix} & & & a_1^4 \\ & a_2^2 & & \\ & & a_3^3 & \\ a_4^1 & & & \end{vmatrix}$ $-a_1^4.a_2^2.a_3^3.a_4^1$	$\overrightarrow{(2\,3)} \circ \overrightarrow{(1)} \circ \overrightarrow{(4)}$ $\begin{vmatrix} a_1^1 & & & \\ & & a_2^3 & \\ & a_3^2 & & \\ & & & a_4^4 \end{vmatrix}$ $-a_1^1.a_2^3.a_3^2.a_4^4$	$\overrightarrow{(2\,4)} \circ \overrightarrow{(1)} \circ \overrightarrow{(3)}$ $\begin{vmatrix} a_1^1 & & & \\ & & & a_2^4 \\ & & a_3^3 & \\ & a_4^2 & & \end{vmatrix}$ $-a_1^1.a_2^4.a_3^3.a_4^2$	$\overrightarrow{(3\,4)} \circ \overrightarrow{(1)} \circ \overrightarrow{(2)}$ $\begin{vmatrix} a_1^1 & & & \\ & a_2^2 & & \\ & & & a_3^4 \\ & & a_4^3 & \end{vmatrix}$ $-a_1^1.a_2^2.a_3^4.a_4^3$
$\overrightarrow{(1\,2\,3\,4)}$ $\begin{vmatrix} & a_1^2 & & \\ & & a_2^3 & \\ & & & a_3^4 \\ a_4^1 & & & \end{vmatrix}$ $-a_1^2.a_2^3.a_3^4.a_4^1$	$\overrightarrow{(1\,2\,4\,3)}$ $\begin{vmatrix} & a_1^2 & & \\ & & & a_2^4 \\ a_3^1 & & & \\ & & a_4^3 & \end{vmatrix}$ $-a_1^2.a_2^4.a_3^1.a_4^3$	$\overrightarrow{(1\,3\,2\,4)}$ $\begin{vmatrix} & & a_1^3 & \\ & & & a_2^4 \\ & a_3^2 & & \\ a_4^1 & & & \end{vmatrix}$ $-a_1^3.a_2^4.a_3^2.a_4^1$	$\overrightarrow{(1\,3\,4\,2)}$ $\begin{vmatrix} & & a_1^3 & \\ a_2^1 & & & \\ & & & a_3^4 \\ & a_4^2 & & \end{vmatrix}$ $-a_1^3.a_2^1.a_3^4.a_4^2$	$\overrightarrow{(1\,4\,2\,3)}$ $\begin{vmatrix} & & & a_1^4 \\ & & a_2^3 & \\ a_3^1 & & & \\ & a_4^2 & & \end{vmatrix}$ $-a_1^4.a_2^3.a_3^1.a_4^2$	$\overrightarrow{(1\,4\,3\,2)}$ $\begin{vmatrix} & & & a_1^4 \\ a_2^1 & & & \\ & a_3^2 & & \\ & & a_4^3 & \end{vmatrix}$ $-a_1^4.a_2^1.a_3^2.a_4^3$



Oui, il manque des éléments de (S4, o)



LYCEE CHARLEMAGNE
Noir vendredi 22 novembre
M.P.S.I.2



2024 2025
DS03
CORRECTION

DS03 Exercices.

$$\frac{2}{\square}+\frac{2}{3}=\frac{12}{\square}+\frac{\square}{48}=\frac{\square}{48}=\frac{11}{\square}\qquad \frac{2}{8}+\frac{2}{3}=\frac{12}{48}+\frac{32}{48}=\frac{44}{48}=\frac{11}{12}$$

MIND YOUR DECISIONS PRESH TALWALKAR

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{d\theta}{1+3.\cos^2(\theta)}$ existe sans problème.
Si on nous dit de changer de variable en $t=\tan(\theta)$, c'est que ça va être mieux que l'universel $\tan(\theta/2)$.
On extrait $\theta=Arctan(t)$ et on différentie :
On calcule les nouvelles bornes sans difficulté : 0 et $\sqrt{3}$.
Et on doit remplacer aussi $\cos^2(\theta)$. Mais on connaît ses formules : $1+\tan^2(\theta)=\dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$ et donc $\cos^2(\theta)=\dfrac{1}{1+t^2}$.

L'intégrale devient donc $\displaystyle\int_{t=0}^{t=\sqrt{3}}\frac{1}{1+3.\frac{1}{1+t^2}}.\frac{dt}{1+t^2}$.

On simplifie en $\displaystyle\int_{t=0}^{t=\sqrt{3}}\frac{1}{1+t^2+3}.dt$ et même $\dfrac{1}{4}.\displaystyle\int_{t=0}^{t=\sqrt{3}}\frac{1}{1+(t/2)^2}.dt$.

On peut finalement intégrer en Arctangente (mais attention, $t\longmapsto Arcta(t/2)$ se dérive en $t\longmapsto\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1+(t/2)^2}$.
On a finalement

$$\int_0^{\pi/3}\frac{d\theta}{1+3.\cos^2(\theta)}=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dt}{4+t^2}=\frac{1}{4}.\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+(t/2)^2}=\frac{1}{2}.Arctan\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big]_0^{\sqrt{3}}=\frac{Arctan(\sqrt{3}/2)}{2}$$

et on ne peut hélàs pas simplifier davantage.

Mais mon ordinateur a donne $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{Arctan(\sqrt{3}/5)}{2}$. Ça ne ressemble pas tout à fait.

Mais aurait on quand même $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{Arctan(\sqrt{3}/5)}{2}=\dfrac{Arctan(\sqrt{3}/2)}{2}$?

Je propose de comparer $\dfrac{\pi}{3}-Arctan(\dfrac{\sqrt{3}}{5})$ et $Arctan(\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ en comparant leurs tangentes.

Le second angle a pour tangente $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Et le premier a pour tangente $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{5}}{1+\tan\left(\frac{\pi}{3}\right).\frac{\sqrt{3}}{5}}$ ce qui fait $\dfrac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{5}}{1+\frac{3}{5}}$. On simplifie et on trouve $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
C'est quand même bon signe !
Mais attention, l'égalité des tangentes ne prouve rien, ou en tout cas ne prouve pas tout.

Il reste à voir qu'ils sont dans le même intervalle d'injectivité de la tangente.
Or, $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{Arctan(\sqrt{3}/5)}{2}$ et $\dfrac{Arctan(\sqrt{3}/2)}{2}$ sont entre 0 et $\pi/2$.
Maintenant, l'égalité de leurs tangentes nous permet de conclure : il y a égalité.

Comme quoi les affirmations telles que « non, on n'a pas trouvé la même chose, puisque c'est $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{Arctan(\sqrt{3}/5)}{2}$ *et* $\dfrac{Arctan(\sqrt{3}/2)}{2}$ *» sont des affirmations de personne qui ne réfléchit pas.*

Donc pas des affirmations de vous.
Du moins j'espère.

Pourquoi mon ordinateur n'a pas trouvé la même formule (mais le même nombre) ?
Il n'a pas fait le même changement de variable.

Pour les tangentes en « arc quart », on demande donc $\theta \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Big] -2.\pi + 4.n.\pi,\ 2.\pi + 4.n.\pi \Big[$.

On imbrique les formules : $\cos(\theta) = \dfrac{1-T^2}{1+T^2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{2.T}{1+T^2}$ et $T = \dfrac{2.t}{1-t^2}$ (sauf pour les $\pi + k.\pi$ à traiter à part).

$$\cos(\theta) = \frac{t^4 - 6.t^2 + 1}{(1+t^2)^2} \ et\ \sin(\theta) = \frac{4.t - 4.t^3}{(1+t^2)^2}$$

et je vous jure qu'il y a un demi-point pour le cas $t = \pm 1$ à traiter à part car l'intermédiaire T n'existe pas.
On a bien en $\pi + 4.k.\pi$ (et $-\pi + 4.\pi$ avec k entier) :

$$\cos(\pi + 4.\pi) = \frac{1^4 - 6.1^2 + 1}{(1+1^2)^2} \ et\ \sin(\theta) = \frac{4.1 - 4.1^3}{(1+1^2)^2}$$

DS03 Equation différentielle. 

On décompose par la méthode qu'on veut, puis on vérifie

$$\frac{1}{(X+1).(X+2)} = \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X+2}$$

On écrit l'équation différentielle $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ (1+t).(2+t).y'_t - y_t = 0$ sous la forme du cours $y'_t + a_t.y_t = 0$ avec $a_t = -\dfrac{1}{(t+1).(t+2)}$ (on est sur $\mathbb{R}^+$, on peut diviser).

On applique alors les formules : une primitive de $t \longmapsto a_t$: $A = t \longmapsto \displaystyle\int_0^t a_u.du$
on met un signe moins : $-A_t = \int_0^t \frac{1}{(u+1).(u+2)}.du = \int_0^t \frac{1}{u+1}.du - \int_0^t \frac{1}{u+2}.du = \ln(t+1) - \ln(t+2) + \ln(2)$
on passe à l'exponentielle :

$$y_t = y_0.e^{-A_t} = y_0.\frac{2.(t+1)}{t+2}$$

et puisque y_0 vaut K, on a la formule $y_t = K.\dfrac{2.(t+1)}{t+2}$.

Rappel : on prend la primitive nulle en 0*, comme ça, le coefficient devant, c'est* y_0*.Ça évite cette démarche à contre sens où on écrit des formules pour ensuite « déterminer la constante à l'aide des conditions initiales ». Non. On réagit en regardant évoluer le système de l'état initial à l'état final. C'est quand même mieux que de vouloir tout mettre en calculs de Terminale qu'on ne comprend même pas.*

Maintenant, on a une condition en plus : $y_{t_0+1} = y_{t_0} + 2$ et $y_{t_{0+2}+2} = y_{t_0} + 3$. On reporte

$$\frac{2.K.(t_0+2)}{t_0+3} = \frac{2.K.(t_0+1)}{t_0+2} + 2\ et\ \frac{2.K.(t_0+3)}{t_0+4} = \frac{2.K.(t_0+1)}{t_0+2} + 3$$

On reformule

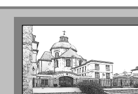
$$\frac{2.K.(t_0+2)^2}{(t_0+2).(t_0+3)} = \frac{2.K.(t_0+1).(t_0+3)}{(t_0+2).(t_0+3)} + \frac{2.(t_0+2).(t_0+3)}{(t_0+2).(t_0+3)}\ et\ l'autre$$

On efface les dénominateurs, on a deux équations $\begin{array}{lllll} 2.(t_0)^2 & -2.K & +10.t_0 & +12 & =0 \\ 3.(t_0)^2 & -4.K & +18.t_0 & +24 & =0 \end{array}$ qu'on résout.

On trouve deux solutions :

$t_0 = -2$	et $K = 0$	qui n'a pas de sens (dénominateur nul)
$t_0 = 0$	et $K = 6$	que l'on valide

$$\frac{2.6.(0+2)}{0+3} = \frac{2.6.(0+1)}{0+2} + 2\ et\ \frac{2.6.(0+3)}{0+4} = \frac{2.6.(0+1)}{0+2} + 3$$

DS03 Premiers calculs. 

Pour P_n de 0 à 3 et S_n on dresse la liste des permutations pour chacune on calcule sa signature, son nombre de points fixes et son nombre de cycles.
On n'aura plus qu'à sommer.

	permutation σ	$Sgn(\sigma)$ (signature)	$p(\sigma)$ (points fixes)	$s(\sigma)$ (cycles)	
$n=0$	$Id = \overrightarrow{(\ )}$	$+1$	0	1	$P_0(X) = X^0 = 1$ $S_1(X) = X^1 = X$
$n=1$	$Id = \overrightarrow{(1)}$	$+1$	1	1	$P_0(X) = X^1 = X$ $S_1(X) = X^1 = X$
$n=2$	$Id = \overrightarrow{(1)} \circ \overrightarrow{(2)}$	$+1$	2	2	$P_2(X) = +X^2 - X^0 = X^2 - 1$
	$\overrightarrow{(1\ 2)}$	-1	0	1	$S_2(X) = X^2 + X^1 = X.(X+1)$
$n=3$	$Id = \overrightarrow{(1)} \circ \overrightarrow{(2)} \circ \overrightarrow{(3)}$	$+1$	3	3	$P_3(X) = X^3 - 3.X^1 + 2.X^0$
	$\overrightarrow{(1\ 2)} \circ \overrightarrow{(3)}$	-1	1	2	
	$\overrightarrow{(1\ 3)} \circ \overrightarrow{(2)}$	-1	1	2	
	$\overrightarrow{(2\ 3)} \circ \overrightarrow{(1)}$	-1	1	2	
	$\overrightarrow{(1\ 2\ 3)}$	$+1$	0	1	$S_2(X) = X^3 + 3.X^2 + 2.X$
	$\overrightarrow{(1\ 3\ 2)}$	$+1$	0	1	

Pour S_4 et S_5 on ne dénombre pas les 24 puis 120 permutations. On les regroupe par type.

	modèle	nombre	signature	fixes	cycles	dans $P_n(X)$	dans $S_n(X)$
$n=4$	$\overrightarrow{(a)} \circ \overrightarrow{(b)} \circ \overrightarrow{(c)} \circ \overrightarrow{(d)}$	1	$+1$	4	4	X^4	X^4
	$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(c)} \circ \overrightarrow{(d)}$	6	-1	2	3	$-6.X^2$	$+6.X^3$
	$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(c\ d)}$	3	$+1$	0	2	$+3.X^0$	$+3.X^2$
	$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(d)}$	8	$+1$	1	2	$+8.X$	$+8.X^2$
	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)}$	6	-1	0	1	$-6.X^0$	$+6.X$
	Total	24				$X^4 - 6.X^2 +$ $+8.X - 3$	$X^4 + 6.X^3 +$ $+11.X^2 + 6.X$
$n=5$	$\overrightarrow{(a)} \circ \overrightarrow{(b)} \circ \overrightarrow{(c)} \circ \overrightarrow{(d)} \circ \overrightarrow{(e)}$	1	$+1$	5	5	X^5	X^5
	$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(c)} \circ \overrightarrow{(d)} \circ \overrightarrow{(e)}$	10	-1	3	4	$-10.X^3$	$+10.X^4$
	$\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(c\ d)} \circ \overrightarrow{(e)}$	15	$+1$	1	3	$+15.X^1$	$+15.X^3$
	$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(d)} \circ \overrightarrow{(e)}$	20	$+1$	2	3	$+20.X^2$	$+20.X^3$
	$\overrightarrow{(a\ b\ c)} \circ \overrightarrow{(d\ e)}$	20	-1	0	2	$-20.X^0$	$+20.X^2$
	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d)} \circ \overrightarrow{(e)}$	30	-1	1	2	$-30.X^1$	$+30.X^2$
	$\overrightarrow{(a\ b\ c\ d\ e)}$	24	$+1$	0	1	$+24.X^0$	$+24.X^1$
	Total	120				$X^5 - 10.X^3 + 20.X^2$ $-15.X + 4$	$X^5 + 10.X^4 + 35.X^3$ $+50.X^2 + 24.X$

On factorise alors, en trouvant des racines évidentes pour $n = 3$ et même $n = 4$ (une fois trouvée la racine évidente 1, on factorise et on utilise le discriminant ou on recommence).
Ensuite pour $n = 5$ on propose, on vérifie. Et ça marche.

$P_2(X) = X^2 - 1$	$= (X-1).(X+1)$	
$P_3(X) = X^3 - 3.X + 2$	$= (X-1)^2.(X+2)$	
$P_4(X) = X^4 - 6.X^2 + 8.X - 3$	$= (X-1)^3.(X+3)$	
$P_5(X) = X^5 - 10.X^3 + 20.X^2 - 15.X + 4$	$= (X-1)^4.(X+4)$	
$S_2(X) = X^2 + X$	$= X.(X+1)$	$n=2$
$S_3(X) = X^3 + 3.X^2 + 2.X$	$= X.(X+1).(X+2)$	$n=3$
$S_4(X) = X^4 + 6.X^3 + 11.X^2 + 6.X$	$= X.(X+1).(X+2).(X+3)$	$n=4$
$S_5(X) = X^5 + 10.X^4 + 35.X^3 + 50.X^2 + 24.X$	$= X.(X+1).(X+2).(X+3).(X+4)$	$n=5$

Évidemment, seul le crétin va généraliser sans preuve. Et le journaliste de CNews. [1]
Cela dit, ça peut nous guider pour la suite, pour avoir une idée de ce qu'on va vouloir prouver.

1. *Je sais, l'un implique l'autre. Et « journaliste » est « CNews » est contradictoire.*

Déjà, $P_n(X)$ et $S_n(X)$ sont des polynômes en tant que somme de termes qui ne valent que X^k ou $-X^4$.

Ce seront même des coefficients à entiers (relatifs pour $P_n(X)$ à cause des signatures, naturels pour $S_n(X)$).

Pour $P_n(X)$ il y a un terme en X^n, qui vient de $\sigma = Id$ (signature 1 et chacun se déplace en monocycle). Il n'y a aucun terme de degré plus élevé.
Pourquoi n'y a-t-il pas de terme de degré $n-1$?
Peut on envisager une permutation σ ayant exactement $n-1$ points fixes ? Il faudrait qu'il reste un dernier point, et il devrait bouger ! Mais comment faire avec une bijection ? Les $n-1$ autres images sont déjà prises. $p(\sigma) = n-1$ est impossible.

Regardons à présent le terme en X^{n-2}. Si une permutation a $n-2$ points fixes, c'est que, par complément, il lui reste deux points « non fixes » : a et b. Comme il y a déjà $n-2$ valeurs prises, et comme on interdit $\sigma(a) = a$, on n'a pas le choix : $\sigma(a)$ vaut b (et de même $\sigma(b)$ vaut a).
Bref, les permutations vérifient $p(\sigma) = 2$ sont les bicycles.
Tous les bicycles apportent un terme en $-X$ (signature -1).
Il il y a $\binom{n}{2}$ bicycles.

Le dénombrement suivant nous donnerait les tricycles, et il y en a $\binom{n}{3}.2$, avec signature 1.

Tous nos polynômes commencent par $X^n - \dfrac{n.(n-1)}{2}.X^{n-2} + \dfrac{n.(n-1).(n-2)}{3}.X^{n-3}$.

Le calcul de $P_n(1)$ donne $\sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma)$. On somme toutes les signatures (et qu'importe le nombre de points fixes).
Mais on sait qu'il y a $\dfrac{n!}{2}$ permutations de signature 1 et $\dfrac{n!}{2}$ permutations de signature -1.
La somme s'équilibre et vaut 0.

Qui a tenté une récurrence, tachant d'exprimer $P_{n+1}(1)$ à l'aide des précédentes ?

Pour $S_n(1)$ on calcule une somme de termes valant tous 1.
Mais combien y en a-t-il ? Un par permutation.
La somme vaut donc $n!$.

$S_n(X)$ est bien aussi un polynôme.

Une permutation de taille n ne peut pas avoir plus de n cycles. Et même, comment avoir exactement n cycles ? En prenant n monocycles et donc il n'y a que $\sigma = Id$. $S_n(X)$ est bien un polynôme de degré n et de terme dominant X^n.

Le terme constant est nul. On ne peut pas avoir aucun cycle. Il y a au moins le cycle contenant 0.

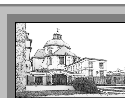
Pour le terme en X, on cherche les permutations formées d'un seul cycle.
C'est donc un cycle de taille n sur $[1, 2, \ldots n]$.
Un cycle est formé d'un mot de n lettres distinctes. Il y en a $n!$.
Mais le mot $a_1 a_2 \ldots a_n$ est équivalent à n mots : $a_2 a_3 \ldots a_n a_1$, $a_3 a_4 \ldots a_1 a_2$ et ainsi de suite.
Il y a donc $\dfrac{n!}{n}$ cycles de taille n. Ce qui fait $(n-1)!$.

Et le coefficient de X^{n-1} ? Chaque permutation faite de $n-1$ cycle apportera sont X^{n-1}.
Mais comment avoir $n-1$ cycles (non vides) avec seulement $n-1$ éléments ?
Il faut $n-2$ monocycles et un bicycle.
On traduit : $n-2$ éléments qui ne bougent pas, et deux éléments qui tournent. Un bicycle.

Et on les a dénombrés : il y en a $\binom{n}{2}$.

$$\begin{array}{rclllllll} P_n(X) & = & X^n & & +\binom{n}{2}.X^{n-2} & + & \ldots & +? & +? \\ S_n(X) & = & X^n & +\binom{n}{2}.X^{n-1} & ? & + & \ldots & +(n-1)!.X & \end{array}$$

DS03 Le déterminant vu comme morphisme.



Le relation (admise) $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$ va nous permettre de déduire pas mal de choses avec des cas particuliers :

$$A = B = I_n \text{ } donne \text{ } \det(I_n) = \det(I_n.I_n) = \det(I_n).\det(I_n) = (\det(I_n))^2$$

$\det(I_n)$ vaut 0 ou 1.

Ce serait bien, décevant qu'il vaille 0 et on semble savoir qu'en petite dimension, on avait trouvé 1.

Mais il faut un vrai argument.

Et si on prenait la formule $\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}\ldots a_n^{\sigma(n)}$ pour la matrice unité.
Les a_i^k sont nuls, sauf pour $i = k$ (termes diagonaux qui valent 1).
Mais alors le produit $a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}\ldots a_n^{\sigma(n)}$ contient toujours un terme nul $a_k^{\sigma(k)}$ pour $\sigma(k)$ différent de k.
Sauf pour $\sigma = Id$.
Il n'y a donc plus $n!$ termes dans la somme, mais un seul terme, égal à 1.

En maths, votre preuve d'intelligence, c'est de jongler entre définition, propriété (morphisme), résultats précédents ; et ne pas revenir à chaque fois à « ça a marché la fois précédente, je refais la même chose ».

Pour P inversible, on a $P.P^{-1} = I_n$ et donc le cas particulier

$$A = P, \ B = P^{-1} \text{ } donne \text{ } 1 = \det(I_n) = \det(P.P^{-1}) = \det(P).\det(P^{-1})$$

Les deux réels $\det(P)$ et $\det(P^{-1})$ ont pour produit 1, ils sont inverse l'un de l'autre.

A présent, avec trois matrices M, P et P^{-1}. On ne peut certes pas simplifier le produit matriciel (non commutatif) $P^{-1}.M.P$. Mais avec les trois réels $\det(m)$, $\det(P)$, $\det(P^{-1})$, tout est permis.

$$\det(P^{-1}.M.P) = \det(P^{-1}).\det(M).\det(P) = \det(P^{-1}).\det(P).\det(M)$$
$$\det(P^{-1}.M.P) = \det(P^{-1}.P).\det(M) = \det(I_n).\det(M) = \det(M)$$

DS03 Application de $P_6(X)$.

On peut maintenant développer déjà par la formule du binôme

$$\begin{array}{rcllllllll} P_6(X) & = & (X^5 & -5.X^4 & +10.X^3 & -10.X^2 & +5.X & -1) & \times & (X \quad +5) \\ & = & X^6 & -5.X^5 & +10.X^4 & -10.X^3 & +5.X^2 & -X & & \\ & & & +5.X^5 & -25.X^4 & +50.X^3 & -50.X^2 & +25.X & -5 & \\ P_6(X) & = & X^6 & & -15.X^4 & +40.X^3 & -45.X^2 & +20.X & -5 & \end{array}$$

Dans la somme $P_6(X)$, la contribution des permutations des permutations avec exactement trois points fixes est $40.X^3$.
Mais on ne peut pas déduire qu'il y a 40 permutations ayant exactement trois points fixes.

DS03 Polynôme $P_n(X)$ et déterminant de matrice.

Allons y en taille n comme dans le sujet de Polytechnique et E.N.S 2024 et développons $\det(M_X)$ où M_X est la matrice dont tous les termes valent 1, sauf ceux de la diagonale qui valent X. Proprement : $a_i^k = \left| \begin{array}{ccc} X & si & i=k \\ 1 & sinon & \end{array} \right|$.

Dans la grande somme $\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}\dots a_n^{\sigma(n)}$, chaque produit $a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}\dots a_n^{\sigma(n)}$ est fait de 1 et de X.
Il vaut donc $X^{quelquechose}$. Et quel est exposant de X ?
C'est le nombre de couples $(i,\ \sigma(i))$ avec $\sigma(i)=i$.
C'est donc le nombre de points fixes de σ.
Pour chaque permutation σ, le terme $Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}\dots a_n^{\sigma(n)}$ vaut donc $Sgn(\sigma).X^{p(\sigma)}$). C'est donc le terme de la somme $P_n(X)$.

La démonstration est bien valable en toute dimension. Et sans récurrence.
Ce qui sera plus long à écrire en dimension n sans théorème tout prêt, c'est la diagonalisation de M.

D'ailleurs, diagonalisons M_1 (celle avec des 1 même sur la diagonale)

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1\\-1&1&0&0&0&1\\0&-1&1&0&0&1\\0&0&-1&1&0&1\\0&0&0&-1&1&1\\0&0&0&0&-1&1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0&6 \end{pmatrix}$$

Quand une colonne avec un 1 et un -1 « tombe » sur M_1, les deux termes se simplifient, et on a une colonne de 0.
Quand la colonne avec que des 1 tombe sur la matrice M_1 on récupère une somme de six 1, et on a une colonne de 6.
Quelle matrice D va faire l'affaire ? Une avec pas mal de 0 (oui, une matrice diagonale, ça contient pas mal de 0, et même sur la diagonale, on peut en mettre

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0&6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1\\-1&1&0&0&0&1\\0&-1&1&0&0&1\\0&0&-1&1&0&1\\0&0&0&-1&1&1\\0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1\\-1&1&0&0&0&1\\0&-1&1&0&0&1\\0&0&-1&1&0&1\\0&0&0&-1&1&1\\0&0&0&0&-1&1 \end{pmatrix}$$

La relation $M_1.P = P.D$ ne va pas nous servir directement.

DS03 — Inversion de la matrice P.

L'étape suivante sert juste à vérifier que P est inversible.
En calculant son inverse.

On se donne six coefficients a_1 à a_6 et six inconnues x_1 à x_6 et on résout

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1\\-1&1&0&0&0&1\\0&-1&1&0&0&1\\0&0&-1&1&0&1\\0&0&0&-1&1&1\\0&0&0&0&-1&1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6 \end{pmatrix}$$

en écrivant un système pas trop laid de six équations à six inconnues. Et même spet équations en les additionnant toutes :

$$\begin{array}{cccccccccc} x_1 & & & & & +x_6 & = & a_1 & \\ -x_1 & +x_2 & & & & +x_6 & = & a_2 & \\ & -x_2 & +x_3 & & & +x_6 & = & a_3 & \\ & & -x_3 & +x_4 & & +x_6 & = & a_4 & \\ & & & -x_4 & +x_5 & +x_6 & = & a_5 & \\ & & & & -x_5 & +x_6 & = & a_6 & \\ & & & & & 6.x_6 & = & a_1 & +a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 \end{array}$$

Maintenant qu'on connaît x_6, on remonte et on trouve

$$x_5 = x_6 - a_6 = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5-5.a_6}{6}$$

et on continue à remonter. Il y a de tristes facteurs 6 partout, mais en tout cas, on trouve des formules explicites

$$\begin{array}{rclcrcl} x_1 & = & \dfrac{5.a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 - a_6}{6} & et & x_2 & = & \dfrac{4.a_1 + 4.a_2 - 2.a_3 - 2.a_4 - 2.a_5 - 2.a_6}{6} \\ x_3 & = & \dfrac{3.a_1 + 3.a_2 + 3.a_3 - 3.a_4 - 3.a_5 - 3.a_6}{6} & et & x_4 & = & \dfrac{2.a_1 + 2.a_2 + 2.a_3 + 2.a_4 - 4.a_5 - 4.a_6}{6} \\ x_5 & = & \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{6} & et & x_6 & = & \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{6} \end{array}$$

Passionnant !

Quel rapport avec le calcul de P^{-1} ? On n'a pas de formules dans le cours pour l'inversion des matrices.
Sauf qu'on a sû passer de $M.X = Y$ à $X = truc\ en\ Y$. Ceci revient à avoir multiplié à gauche par l'inverse de P :

$$(P.X = Y) \Leftrightarrow (X = P^{-1}.Y)$$

et justement on a exprime les x_ià l'aide des a_j. On le met sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 & -1/6 \\ 4/6 & 4/6 & -2/6 & -2/6 & -2/6 & -2/6 \\ 3/6 & 3/6 & 3/6 & -3/6 & -3/6 & -3/6 \\ 2/6 & 2/6 & 2/6 & 2/6 & -4/6 & -4/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & -5/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix}$$

On tient donc la matrice P^{-1} et il suffit de recopier ses trente six coefficients.

Comme quoi il faut savoir varier les points de vue.
Pour résoudre un système, il suffit d'inverser une matrice.
Pour inverser une matrice, il suffit de résoudre un système.
Et seul un programme de niveau epsilonesque vous dira « il n'y a qu'une chose à faire pour inverser une matrice, c'est appliquer des formules apprises par cœur ».
Non, on réfléchit, on change les angles de vue.

On peut ensuite vérifier de l'autre côté aussi, en mettant de côté le facteur 6 intempestif :

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Dis moi quel exercice tu as préféré dans le devoir d'aujourd'hui ?
Ah oui, toi aussi tu as bien aimé le calcul de P^{-1}, c'est vrai que c'était un passage rigolo que Babouche a bien aimé aussi.
Allez, on continue, sac à dos sacs à dos, tu me montres le chemin de la montagne magique, do-do-do-dora.

Pourquoi vérifier des deux côtés ? Avec une matrice carrée, on verra que ce n'est pas la peine.

Mais sinon, regardez. Je pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $P' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *J'ai* $P.P' = I_2$.

Mais P' *n'est inverse de* P *qu'à droite. En effet,* $P'.P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_3$.

DS03 Calcul explicite de $P_6(X)$.

Maintenant que P a un inverse, on peut faire intervenir P^{-1} dans des formules.
On part de $M_1.P = P.D$ et on multiplie à droite par P^{-1}

$$M_1 = P.D.P^{-1}$$

Mais surtout, on ne calcule plus des produits matriciels, on en a assez fait.

On calcule le membre le plus compliqué dans la formule $M_X = P.(D + (X - 1).I_6).P^{-1}$ par double distributivité

$$P.(D + (X - 1).I_6).P^{-1} = P.D.P^{-1} + (X - 1).P.I_6.P^{-1}$$

(le réel $X-1$ traverse les produits matriciels) mais $P.I_3.P^{-1}$ se simplifie

$$P.(D+(X-1).I_6).P^{-1} = P.D.P^{-1} + (X-1).I_6 = M_1 + (X-1).I_6$$

On constate $M_X = M_1 + (X-1).I_6$ en regardant
• hors de la diagonale : que des 0 chez l'une comme chez l'autre
• sur la diagonale $1+X-1$ donne bien X

On passe au déterminant et on refait le coup de $\det(P)$ qui rencontre $\det(P^{-1})$

$$\det(M_X) = (P.(D+(X-1).I_6).P^{-1}) = \det(P).\det(D+(X-1).I_6).\det(P^{-1})$$

Les deux réels $\det(P)$ et $\det(P^{-1})$ se rencontrent et se simplifient.

Mais la matrice $D+(X-1).I_6$ est une matrice diagonale $\begin{pmatrix} X-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6+X-1 \end{pmatrix}$.

Son déterminant est le produit des termes diagonaux. En effet, dans la somme $\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}\dots a_n^{\sigma(n)}$, seul le terme correspondant à $\sigma = Id$ est non nul (tous les autres contiennent au moins un 0).

Si on met tout bout à bout :

$$P_6(X) = \det(M_X) = \det(D+(X-1).I_6) = (X-1)^5.(X+5)$$

Le résultat restait valable en taille n quelconque

$$P_n(X) = \det(M_{X\ en\ taille\ n}) = \det(D_{taillen\ n} + (X-1).I_n) = (X-1)^{n-1}.(X+n-1)$$

On peut le vérifier pour nos petites valeurs de n.

DS03 Application de $P_6(X)$.

Pour calculer $\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma)$, il suffit de prendre $X=1$ dans $P_6(X) = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).X^{p(\sigma)}$.
On trouve (mais on le savait déjà avec $A_n$et $S_n - A_n$) : $\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma) = 0$.

Pour calculer $\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).p(\sigma)$, il suffit de dériver $P_6(X) = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).X^{p(\sigma)}$ en

$$P_6'(X) = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).p(\sigma).X^{p(\sigma)-1}$$

et d'évaluer en $X=1$. C'est classique, mais pas si évident diront certains.

Pour calculer $\sum_{\sigma\in S_n} \frac{Sgn(\sigma)}{p(\sigma)+1}$ cette fois, on intègre entre 0 et X (calcul formel)

$$\mathbb{P}_6(X) = \sum_{\sigma\in S_n} \frac{Sgn(\sigma)}{p(\sigma)+1}.X^{p(\sigma)+1}$$

et on substitue encore « $X=1$ ».
Cette fois, le calcul est plus lord, on doit estimer $\int_0^1 (x-1)^5.(x+5).dx$ qu'on va calculer par parties

$(x-1)^5$	$\hookleftarrow$	$-(x-1)^6/6$
$(x+5)$	$\hookrightarrow$	1

Le calcul se termine avec la valeur demandée.

DS03 Le retour des points fixes.

$F(n,\ n)$ a déjà été calculé, il vaut 1 car la seule permutation ayant n points fixes est Id.

Il n'est pas possible de laisser $n-1$ points fixes sans que le dernier le soit aussi (bijection).
On a donc $F(n,\ n-1) = 0$.

Avec la somme des $F(n,\ k)$ (n fixé et k variable), on somme finalement toutes les permutations chacune une fois et une seule. On a dénombré toutes les permutations, et il y en a $n!$.

Comment créer ensuite une permutation d'une liste de n éléments en demandant qu'il y ait exactement k points fixes ? Il faut déjà choisir ces points fixes : k parmi n.
Ensuite, il reste une permutation sur les $n-k$ points, et elle ne doit pas avoir de point fixe.
On multiplie donc et on a le résultat demandé (et on confirme au passage

$$F(n,\ n-1) = \binom{n}{n-1}.\omega_0 = n.F(1,\ 0) = 0$$

car il n'y a qu'une permutation dans S_1 et elle a hélas un point fixe).

On repart de la formule $\sum_{k=0}^{n} F(n,\ k) = n!$, on remplace par ce qu'on a dit juste avant

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!.(n-k)!}.\omega_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\omega_{n-k} = n!$$

Il ne reste plus qu'à diviser par $n!$ pour avoir le résultat demandé (et un point aussi, puisque tel est notre but).

Mais pour l'autre formule, on a des $n+1$. On reprend donc notre formule non pas au rang n mais au rang $n+1$ (avec donc plus de termes ans la somme)

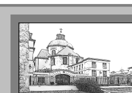
$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}.\frac{\omega_{n+1-k}}{(n+1-k)!} = 1$$

On isole le terme $k = 0$:

$$\frac{1}{0!}.\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}.\frac{\omega_{n+1-k}}{(n+1-k)!} = 1$$

On le met seul d'un côté $\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}.\frac{\omega_{n+1-k}}{(n+1-k)!}$.

DS03 Recurrence sur les ω_n.



On initialise la propriété $\frac{\omega_n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$ au rang 0.
Dans S_0 il n'y a qu'une permutation, et elle n'a pas de points fixe (puisqu'il n'y a même pas de point). On a donc bien $\omega_0 = 1$, puis $\frac{\omega_0}{0!} = 1 = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$(il n'y a que 1 dans la somme).

Par sécurité, je calcule pour $n = 1$. On a déjà dit qu'il n'y avait pas de permutation de la liste [1] n'ayant pas de points fixe. Le premier membre est nul, et la somme dans le second membre vaut aussi $\frac{1}{1} - \frac{1}{1}$.

Passons à l'hérédité. On suppose pour un n donné

$$\frac{\omega_1}{1} = 1,\ \frac{\omega_1}{1} = \sum_{i=0}^{1} \frac{(-1)^i}{i!},\ \frac{\omega_2}{1} = \sum_{i=0}^{2} \frac{(-1)^i}{i!}, \ldots \frac{\omega_n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

et on veut calculer $\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!}$.

Oui, on s'engage sur une récurrence à forte hérédité, car $\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!}$ s'exprime à l'aide de tous ceux qui l'ont précédé (celui qui parle juste de récurrence et ne prend pas « tous les k de 0 à n » a perdu une partie des points).

On remplace donc déjà avec des points de suspension

$$\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}.\frac{\omega_{n+1-k}}{(n+1-k)!} = 1 - \frac{1}{1!}.\frac{\omega_n}{n!} - \frac{1}{2!}.\frac{\omega_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{1}{3!}.\frac{\omega_{n-2}}{(n-2)!} - \ldots - \frac{1}{(n+1)!}.\frac{\omega_0}{0!}$$

En version propre, par renversement d'indexation ($p = n+1-k$)

$$\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(n+1-p)!}.\frac{\omega_p}{p!}$$

Mais il est temps d'utiliser notre hypothèse de récurrence, soit en version propre, soit en version points de suspension. Je commence par la version propre, car il suffit de se laisser porter (mais il y a des pièges)

$$\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(n+1-p)!}.\sum_{i=0}^{p} \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - \sum_{p=1}^{n} \Big(\sum_{i=0}^{p} \frac{1}{(n+1-p)!}.\frac{(-1)^i}{i!} \Big)$$

$$\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} = 1 - \sum_{0\leqslant i \leqslant p} \Big(\frac{1}{(n+1-p)!}.\frac{(-1)^i}{i!} \Big)$$

Et en version points de suspension, on remplit calmement un grand tableau

$$\begin{array}{llllllll}
\frac{\omega_{n+1}}{(n+1)!} & = 1 & -\frac{1}{1!}.\frac{\omega_n}{n!} & -\frac{1}{2!}.\frac{\omega_{n-1}}{(n-1)!} & -\frac{1}{3!}.\frac{\omega_{n-2}}{(n-2)!} & \ldots & & -\frac{1}{n!}.\frac{\omega_1}{1!} & -\frac{1}{(n+1)!}.\frac{\omega_0}{0!} \\
& = 1 & -\frac{1}{1!}.\Big(\frac{1}{0!} & -\frac{1}{1!} & +\frac{1}{2!} & \ldots & +\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} & +\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} & +\frac{(-1)^n}{n!}\Big) \\
& & -\frac{1}{2!}.\Big(\frac{1}{0!} & -\frac{1}{1!} & +\frac{1}{2!} & \ldots & +\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} & +\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\Big) & \\
& & -\frac{1}{3!}.\Big(\frac{1}{0!} & -\frac{1}{1!} & +\frac{1}{2!} & & +\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}\Big) & & \\
& & \vdots & & & & & & \\
& & -\frac{1}{n!}.\Big(\frac{1}{0!} & -\frac{1}{1!}\Big) & & & & & \\
& & -\frac{1}{(n+1)!}.\Big(\frac{1}{0!}\Big) & & & & & &
\end{array}$$

DS03 Secret-Christmas.

Quel est l'univers de ce problème probabiliste ? Les 48! tirages.
Chaque tirage est équiprobable.
Qui sont ces tirages où aucun élève n'a tiré son propre nom ? Ce sont les permutations sans point fixe.
Le quotient $\dfrac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$ est donc $\dfrac{\omega_{48}}{48!}$. C'est justement l'objet de la question précédente.

On doit donc juste calculer la somme alternée $\displaystyle\sum_{k=0}^{48} \frac{(-1)^k}{k!}$.

La première version est gentille, on se contente de flottants. On va donc créer un accumulateur nul, et ajouter un par un des termes en $(-1)^k/k!$.

Visions terriblement naïve : on crée une fonction factorielle, et on somme ensuite

```
def fact(k) :
....p = 1
....for i in range(1, k+1) :
........p *= i
....return p
s = 0
for k in range(n+1) :
....s += (-1)**k / facto(k)
```

*Et le correcteur vérifie les détails : (-1)**k et pas (-1)^k*
for i in range(1, k+1) pour ne pas multiplier par 0
*(-1)**k / facto(k) et pas (-1)**k // facto(k) qui donne toujours 0*

Mais ce programme est une horreur totale qui ne pourra jamais rapporter tous les points.

A chaque étape, on recalcule une factorielle. C'est ainsi qu'après avoir calculé la valeur exacte de `38 !` avec ses 38 facteurs, on recommence à zéro (ou plutôt à `p=1`) pour calculer `39 !`. Et on recommencera avec `40 !` et ainsi de suite.
Autant créer la factorielle au fur et à mesure de la boucle `k`.

De même, le `(-1)**k` est une horreur, alors qu'il suffit de lire la parité de `k`. Ou de changer de `signe` à chaque `k`.

```
s = 0
fact = 1
signe = 1
for k in range(n+1) :
....s += signe/fact
....fact *= k+1
....signe = -signe
```

Application numérique à titre informatif : 0.36787944117144245

Et pour la valeur exacte du nombre de permutations sans point fixe ?
Solution de facilité : on multiplier ce flottant par 48 ! pour récupérer le ω_{48} du numérateur.

Mais c'est encore se rouler dans la poussière avec des calculs approchés sans aucune fiabilité (hormis sur les ordres de grandeur).

Il faut calculer l'entier $\sum_{k=0}^{48} \frac{(-1)^k.48!}{k!}$. Et c'est bien un entier car chaque $\frac{48!}{k!}$ est un entier.
C'est $48.47.46\ldots(k+1)$.
On regarde notre somme, avec des points de suspension.
A partir de la fin

$k =$	48	47	46	45	44		2	1	0
	1	-48	$+48.47$	$-48.47.46$	$48.47.46.45$	$\ldots$	$+48.47\ldots3$	$-48.47\ldots3.2$	$+48.47\ldots3.2.1$

On va donc créer un accumulateur s et un produit qui grandit. Plus un clignotant.

```
s = 0
signe = 1
prod = 1
for k in range(49) :
....s += signe*produit
....produit *= 48-k
....signe = -signe
```

Application numérique :

$$S = 4\,566\,824\,330\,931\,624\,695\,767\,452\,273\,778\,667\,071\,025\,042\,534\,230\,906\,772\,538\,913$$

$$48! = 12\,413\,915\,592\,536\,072\,670\,862\,289\,047\,373\,375\,038\,521\,486\,354\,677\,760\,000\,000\,000$$

Si on nous le dit, on va démontrer la relation

$$e^{-1} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}.e^{-t}.dt$$

par récurrence sur n. On initialise en montrant

$$e^{-1} = \sum_{j=0}^{0} \frac{(-1)^j}{j!} + (-1)^{0+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!}.e^{-t}.dt$$

Le premier membre vaut e^{-1} et le second vaut $1 - \displaystyle\int_0^1 e^{-t}.dt$ c'est à dire $1 - \Big[-e^{-t}\Big]_{t=0}^{1}$. Il y a bien égalité.

Supposons pour un entier n fixé

$$e^{-1} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}.e^{-t}.dt$$

et essayons d'obtenir une chose similaire au rang $n+1$ c'est à dire

$$e^{-1} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^{n+2} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}.e^{-t}.dt$$

Pour cela, on part de $(-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}.e^{-t}.dt$ qu'on intègre par parties (franchement, vous aviez une autre idée, vous ?) :

e^{-t}	$\hookrightarrow$	$-e^{-t}$
$\dfrac{(1-t)^n}{n!}$	$\hookleftarrow$	$-\dfrac{(1-t)^{n+1}}{n!.(n+1)}$

$$(-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}.e^{-t}.dt = (-1)^{n+1}.\Big(\Big[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}.e^{-t}\Big] - \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}.e^{-t}.dt$$

et tout se passe très bien.

Ensuite, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \Big(\frac{(1-t)^n}{n!} - \frac{(1-t)^n.e^{-t}}{n!}\Big).dt$ est celle d'une application positive ($t \longmapsto \dfrac{(1-t)^n}{n!}.(1-e^{-t})$ avec e^{-t} plus petit que 1). Elle est positive.

Qui s'est pris la tête à dire « je vais calculer tout ça » ? On est en maths. On réfléchit avant de calculer. On se demande si ça vaut le coup de calculer ou si on veut juste des informations sur l'objet.

En séparant l'intégrale en deux, on obtient

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}.dt \geqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n.e^{-t}}{n!}.dt$$

Mais on peut aussi calculer l'intégrale majorante avec une primitive en $t \longmapsto -\dfrac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ (oui, il y a un signe moins à cause de « 1 moins t »). Et on peut aussi minorer par 0 car l'application intégrée est positive

$$\frac{1}{(n+1)!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}.dt \geqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n.e^{-t}}{n!}.dt \geqslant 0$$

L'intégrale non calculée $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n.e^{-t}}{n!}.dt$ est encadrée par 0 et un terme qui tend vers 0.
Par théorème d'encadrement (gendarmes pour les intimes) elle tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

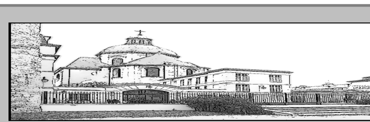
Par soustraction, on avait

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} = e^{-1} - +(-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}.e^{-t}.dt$$

et donc, la somme $\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$ converge vers e^{-1} quand n tend vers l'infini.

Le plus déprimant pour un prof, c'est de voir que sur des questions assez basiques comme celles ci, des élèves qu'on aime pourtant bien ne sont pas allés chercher les points, bloqués par le fait qu'ils n'ont pas traité les questions qu'il y avait avant ou parce qu'un sigma ça fait peu.

LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2024 DS03 2025
63- points