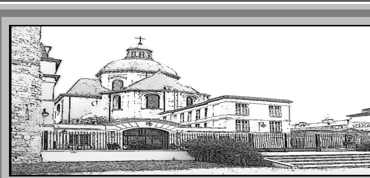
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 25 novembre
M.P.S.I.2



2024 2025

TD09

◁0▷

Notwen Caasi

On va démontrer et utiliser la formule d'inversion de Newton
C'est une formule avec des sommes ; pour information, la version « intégrale » et pas « somme » de ce type de résultats, c'est la transformée de Laplace et la transformée de Laplace inverse (avec juste un signe qui change)... mais peut être n'avez vous jamais croisé la transformée de Laplace, alors je dis ça comme ça.

♡ 0 ♡ En développant $(1+X)^p.(1+X)^q$ montrez : $\sum_{i+j=n}\binom{p}{i}.\binom{q}{j}=\binom{p+q}{n}$.

(a_n) et (b_n) sont deux suites de complexes vérifiant $\forall p,\ \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}.a_k=b_p$.

On développe donc $(1+X)^p.(1+X)^q$ de deux façons. Dans l'une, on a $\Big(\sum_{i\leqslant p}\binom{p}{i}.X^i\Big).\Big(\sum_{j\leqslant q}\binom{q}{j}.X^j\Big)$ qu'on pousse le vice jusqu'à écrire en somme double $\sum_{\substack{i\leqslant p\\ j\leqslant q}}\binom{p}{i}.\binom{q}{j}.X^{i+j}$. Dans l'autre, on a simplement $\sum_{n\leqslant p+q}\binom{p+q}{n}.X^n$.

En identifiant le coefficient de X^n entre les deux formules, on trouve $\sum_{i+j=n}\binom{p}{i}.\binom{q}{j}=\binom{p+q}{n}$.

♡ 0 ♡ Montrez alors $\forall q,\ \sum_{p=0}^{q}(-1)^{p+q}.\binom{q}{p}.b_p=a_q$ *(c'est ça la formule d'inversion de Newton, si les b_n se construisent à l'aide des a_k et de binomiaux, alors les a_p se construisent à l'aide des b_i et de binomiaux).*

Si les deux suites (a_n) et (b_n) sont liées par la relation $\forall p,\ \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}.a_k=b_p$, on va montrer la relation $\forall q,\ \sum_{i=0}^{q}(-1)^{i+q}.\binom{q}{i}.b_i=a_q$ en partant du membre de gauche (le plus compliqué) pour arriver au membre de droite (le plus simple). On utilisera en cours de route la relation $\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}.a_k=b_p$ pour les indices dont on aura besoin.

On se fixé donc q et on calcule $\sum_{p=0}^{q}(-1)^{p+q}.\binom{q}{p}.b_p$ en y remplaçant b_p par sa valeur :

$$\sum_{p=0}^{q}(-1)^{p+q}.\binom{q}{p}.b_p=\sum_{p=0}^{q}(-1)^{p+q}.\binom{q}{p}.\Big(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}.a_k\Big)$$

On en fait une somme unique :

$$\sum_{p=0}^{q}(-1)^{p+q}.\binom{q}{p}.b_p=\sum_{0\leqslant k\leqslant p\leqslant q}(-1)^{p+q}.\binom{q}{p}.\binom{p}{k}.a_k$$

On renverse même :

$$\sum_{p=0}^{q}(-1)^{p+q}.\binom{q}{p}.b_p=\sum_{k=0}^{q}\Big(\sum_{k\leqslant p\leqslant q}(-1)^{p+q}.\binom{q}{p}.\binom{p}{k}\Big).a_k$$

Dans cette somme, il y a un terme en a_q pour k égal à q. Son coefficient est $\Big(\sum_{q\leqslant p\leqslant q}(-1)^{p+q}.\binom{q}{p}.\binom{p}{q}\Big)$ c'est à dire $(-1)^{2.q}.\binom{q}{q}.\binom{q}{q}$. Il vaut 1. C'est un bon début, il y a exactement un a_q dans notre somme. Reste à espérer que le reste soit nul.
Qui est ce reste ? Regardons le coefficient d'un a_k avec k strictement plus petit que q :

$$\sum_{k\leqslant p\leqslant q}(-1)^{p+q}.\binom{q}{p}.\binom{p}{k}$$

(à présent, q et k sont fixés, et la variable qui bouge est p).
Ce coefficient se simplifie en

$$\sum_{p=k}^{q}(-1)^{p+q}.\frac{q!}{p!.(q-p)!}.\frac{p!}{k!.(p-k)!}$$

On sort ce qui ne dépend pas de la variable de sommation p :

$$(-1)^q.\frac{q!}{k!}.\sum_{p=k}^{q}(-1)^p.\frac{1}{(q-p)!.(p-k)!}$$

On tente d'y voir un coefficient binomial

$$(-1)^q.\frac{q!}{(q-k)!.k!}.\sum_{p=k}^{q}(-1)^p.\frac{(q-k)!}{(q-p)!.(q-k)!}$$

On le voit bel et bien, on en voit même deux :

$$(-1)^q.\binom{q}{k}.\sum_{p=k}^{q}(-1)^p.\binom{q-k}{p-k}$$

On ré-indexe pour le plaisir :

$$(-1)^q.\binom{q}{k}.\sum_{i=O}^{q-k}(-1)^{i+k}.\binom{q-k}{i}$$

(c'est p qui était muet, on l'a remplacé par $i=p-k$).
On reconnaît un développement

$$(-1)^q.(-1)^k.\binom{q}{k}.(1-1)^{q-k}$$

Comme cette fois, k est différent de q, il reste juste un 0 à une puissance strictement positive. Ce nombre est nul.
On résume :

$$\sum_{k=0}^{q}\Big(\sum_{k\leqslant p\leqslant q}(-1)^{p+q}.\binom{q}{p}.\binom{p}{k}\Big).a_k=\sum_{k=0}^{q-1}0.a_k+1.a_q$$

C'est la formule attendue. On a prouvé la formule d'inversion de Pascal.

On note qu'en repartant de $\forall q,\ \sum_{i=0}^{q}(-1)^{i+q}.\binom{q}{i}.b_i=a_q$, on peut aussi remonter à $\forall p,\ \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}.a_k=b_p$, à l'aide du résultat précédent, en remplaçant les a_k de la démonstration précédente par des $(-1)^k.b_k$. Bref, la formule de Pascal est réversible.

♡ 0 ♡ Que donne-t-elle si (a_n) est une suite géometrique (a^n) ?

On propose d'appliquer la formule d'inversion dans le cas où la suite (a_n) est une suite géométrique (a^n).
Mais qui est (b_n) ? C'est à nous de le dire : $b_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a_k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^k=(1+a)^n$ par la formule du binôme.

Que donne notre formule géniale : $a_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}.\binom{n}{k}.b_k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.(-1)^{n+k}.(1+a)^k$. Mais comme $n+k$ et $n-k$ ont la même parité, on obtient

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.(-1)^{n-k}.(1+a)^k=(-1+1+a)^n=a^n$$

♠ 0 ♠ Que donne-t-elle si (a_n) est la suite de Fibonacci ?

On propose de prendre cette fois la suite de Fibonacci dans le rôle de a. On a donc $(a_n)=(1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89\ldots)$ et pour tout n $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$.
Mais qui est alors la suite (b_n) ?

On la calcule ? $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.F_k$. Et alors ?
On regarde les premières valeurs pour conjecturer quelquechose.
Six points à la clef, il doit y avoir du travail, mais ça peut valoir la chandelle.

n	0	1	2	3	4	5
somme	1.1	$1.1+1.1$	$1.1+2.1+1.2$	$1.1+3.1+3.2+1.3$	$1.1+4.1+6.2+4.3+1.5$	$1.1+5.1+10.2+10.3+5.5+1.8$
valeur	1	2	5	13	34	89

On se dit qu'il doit y avoir un truc. Et si on regarde de près, on croit retrouver des termes de la suite de Fibonacci. Mais un terme sur deux.
Et on conjecture donc : $\boxed{b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.F_k = F_{2.n} \text{ pour tout } n.}$
On teste pour 6 : $1.1 + 6.1 + 15.2 + 20.3 + 15.5 + 6.8 + 1.13 = 233$.
Et effectivement la suite de Fibonacci continuait : $(\dots 55,\ 89,\ 144,\ 233, \dots)$.

Il est temps de prouver $\forall n,\ b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.F_k = F_{2.n}$ et on en déduira par renversement de la formule de Newton :
$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k}.\binom{n}{k}.F_{2.k} = F_n}$ pour tout n.

On peut partir de la fin :

$$F_{2.n} = F_{2.n-1} + F_{2.n-2} = (F_{2.n-2} + F_{2.n-3}) + (F_{2.n-3} + F_{2.n-4}) = F_{2.n-2} + 2.F_{2.n-3} + F_{2.n-4}$$

On remplace chacun des termes par une somme de deux termes qu'on regroupe :
$F_{2.n} = F_{2.n-1} + F_{2.n-2} = (F_{2.n-2} + F_{2.n-3}) + (F_{2.n-3} + F_{2.n-4}) =$
. $= (F_{2.n-3} + F_{2.n-4}) + 2.(F_{2.n-'} + F_{2.n-5}) + (F_{2.n-(} + F_{2.n-6})$

On est arrivé à $F_{2.n} = F_{2.n-3} + 3.F_{2.n-4} + 3.F_{2.n-5} + F_{2.n-6}$.
On généralise en remontant de k cases :

$$F_{2.n} = F_{2.n-k} + \binom{k}{2}.F_{2.n-k-1} + \dots + F_{2.n-2.k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}.F_{2.n-k-i}$$

On démontre cette formule ci par récurrence sur k *(pas faite ici)*.
Et on l'arrête à k égal à n.

On peut aussi partir de la formule explicite obtenue par diagonalisation : $F_n = \alpha.\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \beta.\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$ avec α et β dépendant des conditions initiales.
On remplace :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.F_k = \alpha.\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^k + \beta.\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^k = \alpha.\Big(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \beta.\Big(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$$

Par chance : $\Big(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) = \Big(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Big) = \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^2$ et $\Big(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big) = \Big(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\Big) = \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^2$.
On arrange : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.F_k = \alpha.\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^2\Big)^n + \beta.\Big(\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)\Big)^n = \alpha.\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{2.n} + \beta.\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{2.n} = F_{2.n}$.

Il y a d'autres démonstrations.

$\boxed{\sharp}$ J'ai tapé `Matrice(5)`. Inversez la. Pensez à ce qu'elle donne multipliée par un vecteur colonne des a_k.

```
def Matrice(n) :
....L=[1]+[0]*n
....M=[L]
....for k in range(n) :
........NL = [1]
............for i in range(1, n+1) :
................NL.append(L[i-1]+L[i])
........M.append(NL)
........L = NL[ : ]
....return M
```

Et maintenant un autre exercice `Python` qui n'a rien à voir avec l'inversion de Newton : écrivez un script qui cherche les `N` premiers entiers dont le carré commence par 2019.
Par exemple : $14\,211^2 = 201\,952\,521$.

On a défini une procédure qui prend en entrée un entier `n` *(c'est un entier puisqu'il sert à des `range`)*.

```
def Matrice(n) :
....L=[1]+[0]*n
```

On crée une liste faite d'un `1` suivi de `n` zéros.

```
....M=[L]
```

On la met dans `M`, en tant que liste. C'est ainsi que l'on a à ce stade `L=[1, 0, 0, 0, 0, 0]` et `M=[[1, 0, 0, 0, 0, 0]]` *(liste de listes)*.

```
....for k in range(n) :
```

On va créer n nouvelles lignes par `M.append(NL)`.

```
........NL = [1]
```

On re-crée une nouvelle liste à chaque fois, avec juste un `1`.

```
............for i in range(1, n+1) :
................NL.append(L[i-1]+L[i])
```

Chaque terme est la somme des deux termes de la ligne au dessus *(au dessus, car la première fois, `L` est `[1, 0, 0, 0, 0, 0]`, mais on la remplace ensuite par une copie de la ligne `NL` qu'on vient de construire)*.
La formule est donc $m^i_k = m^{i-1}_{k-1} + m^i_{k-1}$. On reconnait la formule de Pascal.

```
........M.append(NL)
........L = NL[ : ]
```

A chaque ligne créée, on la colle dans `M` et on remplace `L` par `NL`.

	`L` avant boucle sur `i`	`NL` après boucle sur i	`L` après boucle sur `i`	`M`
0	`[1,0,0,0,0,0]`			[[1,0,0,0,0,0]]
1	`[1,0,0,0,0,0]`	`[1,1,0,0,0,0]`	`[1,1,0,0,0,0]`	[[1,0,0,0,0,0], [1,1,0,0,0,0]]
2	`[1,1,0,0,0,0]`	`[1,2,1,0,0,0]`	`[1,2,1,0,0,0]`	[[1,0,0,0,0,0], [1,1,0,0,0,0], [1,2,1,0,0,0]]
3	`[1,2,1,0,0,0]`	`[1,3,3,1,0,0]`	`[1,3,3,1,0,0]`	[[1,0,0,0,0,0], [1,1,0,0,0,0],...[1,3,3,1,0,0]]

et ainsi de suite.
Pour `n` égal à `5`, on trouve la liste de listes suivante
`[[1,0,0,0,0,0], [1,1,0,0,0,0], [1,2,1,0,0,0], [1,3,3,1,0,0], [1,4,6,4,1,0], [1,5,10,10,5,1]]`

qu'on interprète $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

En effet, on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$ $(b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . a_k)$

et donc $a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}.\binom{n}{k}.b_k$ soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$.

Or, la relation $M.A = B$ est équivalente à $A = M^{-1}.B$.

On cherche des entiers, comme 1421 dont le carré commence par 2019 ($1421^2 = 2019241$).

On va donc avancer dans les entiers, à partir de 100 parce que sinon le carré n'est même pas assez long.
Pour chaque entier, on va calculer son carré, extraire les quatre premiers chiffres, comparer au motif.

Si « ça matche », on incrémente un compteur, on mémorise l'entier et le carré, et on passe à l'entier suivant.

Sinon, ben on passe à l'entier suivant.

```
def ChecheMotifDebutCarre(N, motif = '2019') : #valeur par défaut
....Trouve = [ ] #pour l'instant rien trouvé
....n = 100
....while len(Trouve) < N :
........Carre = n*n #calcul
........Debut = str(carre)[ :4] #merci str qui convertit un nombre en mot
........if Debut = motif : #le test
............Trouve.append([n, carre]) #c'est une solution de plus
........n += 1 #sinon on n'avancera pas
....return Trouve
```

Si vous n'avez pas pensé à la fonction qui convertit un nombre en chaine de caractères, on le fait directement sous forme de liste :

```
L = [ ]
while carre != 0 :
....chiffre = carre%10
....carre = carre//10
....L = [chiffre]+L
```

et on compare ensuite `L[ :4]` à `['2', '0', '1', '9']`

Cadeau : $44\,938^2 = 2\,019\,423\,844$ puis $142\,122^2 = 20\,198\,662\,884$ ou $1\,420\,948^2 = 2\,019\,093\,218\,704$ et j'en ai des dizaines d'autres.

Pour tout n, on note μ_n le nombre de permutations σ de $range(n)$ vérifiant $\forall i,\ \sigma(i) \neq i$.

◊ 0 ◊ Justifiez en donnant la liste des permutations :

n	0	1	2	3	4
μ_n	1	0	1	2	9

. Justifiez $\mu_5 = 44$.

D'un pur point de vue logique, il y a une permutation de $range(0)$ *(l'ensemble vide)* ; c'est l'application qui ne fait rien *(d'un ensemble pas bien gros dans lui même)*.

Et elle n'a effectivement aucun point fixe, puisqu'elle n'a aucun point. On a bien $\mu_0 = 1$.

Mais avouez que si je vous avais demandé de calculer μ_0 vous auriez voulu répondre 0.

On prend l'ensemble $range(1)$, c'est à dire $\{0\}$. Il y a une application de $\{0\}$ dans lui même : l'identité. mais elle a le défaut d'avoir un point fixe : $\mu_1 = 0 < 1! = 1$.

Sur $range(2)$ [1], il y a deux bijections : Id et $\overrightarrow{(0\ 1)}$. On élimine évidemment l'identité. Il reste $\overrightarrow{(0\ 1)}$: $\mu_2 = 1 < 2! = 2$.

Sur l'ensemble à trois éléments, il y a l'identité, trois cycles de taille 2 *(refusés aussi à cause d'un point fixe pour chacun)* et deux cycles de taille 3 inverses l'un de l'autre : $\mu_3 = 2 < 3! = 6$.

---

1. je sais, il y a un abus de langage, un range n'est pas un ensemble

Sur l'ensemble à quatre éléments, on a divers types de permutations, et on compte leurs points fixes :

forme/exemple	Id	$\overrightarrow{(1\ 2)}$	$\overrightarrow{(1\ 2\ 3)}$	$\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4)}$	$\overrightarrow{(1\ 2)} \circ \overrightarrow{(3\ 4)}$
points fixes	4	2	1	0	0
accepté	non	non	non	oui	oui
nombre	1	$\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = 6$	$\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}.2 = 8$	$3! = 6$	3

Pour dénombrer les cycles d'ordre 4. On sait que tout le monde tourne. Comme 1 tourne, on choisit son image : 3 choix. Puis l'image de son image : 2 (choix) , et le dernier élément est imposé, c'est celui qui reste. On a donc 3! cycles de taille 4, dont voici d'ailleurs la liste :

$\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4)}$	$\overrightarrow{(1\ 2\ 4\ 3)}$	$\overrightarrow{(1\ 3\ 2\ 4)}$	$\overrightarrow{(1\ 3\ 4\ 2)}$	$\overrightarrow{(1\ 4\ 2\ 3)}$	$\overrightarrow{(1\ 4\ 3\ 2)}$

On rappelle qu'on commence l'écriture d'un cycle par l'élément que l'on veut : $\overrightarrow{(1\ 2\ 3\ 4)} = \overrightarrow{(2\ 3\ 4\ 1)}$; c'est bien le même.
Pour les doubles bicycles, tout le monde bouge. Il suffit de savoir avec qui le1 est marié. Une fois qu'il a fait son choix, les deux autres se mettent en couple.

$\overrightarrow{(1\ 2)} \circ \overrightarrow{(3\ 4)}$	$\overrightarrow{(1\ 3)} \circ \overrightarrow{(2\ 4)}$	$\overrightarrow{(1\ 4)} \circ \overrightarrow{(2\ 3)}$

Sur les $1 + 6 + 6 + 6 + 3$ permutations, on n'en garde que 9.

$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&3&4&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&4&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 4&3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&1&4&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 4&3&2&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&4&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&1&4&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 4&1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&4&1&2\end{pmatrix}$	

Sur l'ensemble à 5 éléments, il y a déjà 120 permutations. On ne va pas en dresser la liste et faire du tri. Mais on va chercher la forme de ces permutations en fonction du nombre de cycles dont elles sont faites. Sachant qu'il ne faut laisser aucun point fixe, on n'a que deux modèles possibles :

un cycle de taille 5	un cycle de taille 3 et un de taille 2

On interdit en effet les cycles de taille 1 (points fixes), et donc par complément ceux de taille 4.
Pour un cycle de taille 5 de la forme $\overrightarrow{(a\ b\ c\ d\ e)}$, on sait que 1 fait partie du cycle. On va donc l'écrire $\overrightarrow{(1\ b\ c\ d\ e)}$. On a quatre choix pour b, puis il reste trois choix pour c, deux pour d et on n'a plus de choix pour e.
Pour un couple de cycles $\overrightarrow{(a\ b)} \circ \overrightarrow{(c\ d\ e)}$, il faut choisir les supports. On a $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ choix pour a et b. Mais alors on n'a plus le choix pour c, d et e, ce sont les trois éléments qui restent. Comme $\overrightarrow{(a\ b)}$ et $\overrightarrow{(b\ a)}$ sont la même chose, on n'a pas à orienter le cycle de taille 2. Et pour le cycle de taille 3, une fois choisis les trois éléments, il y a deux sens de rotation.

	un cycle de taille 5	un cycle de taille 3 et un de taille 2
choix des éléments	1	10
choix de sens de rotation	24	2
total	24	20

on somme

$$\boxed{\mu_5 = 44}$$

On peut aussi partir des 120 permutations et soustraire celles dont on ne veut pas, en fonction du nombre de points fixes qu'elles sont : 1, 2, 3, 4 ou 5.
Une fois qu'on a choisi les points fixes, il reste une permutation sans point fixe sur l'ensemble des autres points.

aucun point fixe	μ_5
un point fixe	$\binom{5}{1}.\mu_4$
deux points fixes	$\binom{5}{2}.\mu_3$
trois points fixes	$\binom{5}{3}.\mu_2$
quatre points fixes	impossible
cinq points fixes	1

On ne peut pas avoir exactement quatre points fixes. Sinon, où va le cinquième ?
Pour deux points fixes, par exemple, on choisit qui seront les points fixes : $\binom{5}{2}$ choix. Une fois qu'on les a choisis, il reste trois points à permuter, sans point fixe : μ_3. On effectue donc le produit.

On a donc $120 = \mu_5 + 5.\mu_4 + 10.\mu_3 + 10.\mu_2 + 5.\mu_1 + 1.\mu_0$ (les deux derniers termes sont cohérents avec ce qui a été écrit au dessus).

Par soustraction : $\mu_5 = 120 - 5.9 - 10.2 - 10.1 - 0 - 1 = 44$.

Prouvez par un argument de dénombrement : $\mu_n \leqslant n!$ puis $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\mu_k = n!$.

La majoration $\mu_n \leqslant n!$ est d'une grande simplicité. On se donne n et on dénombre des permutations ayant une particularité. Mais il y a $n!$ permutations, et on va en enlever. La majoration coule de source.

Pour $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\mu_k = n!$, on se dit qu'on va dénombrer toutes les permutations *(résultat en $n!$)*.

• Il y a celles n'ayant aucun point fixe : μ_n.

• Il y a celles ayant exactement un point fixe. Il faut choisir ce point fixe a_1 : $\binom{n}{1}$ choix, et ensuite il reste $n-1$ points à faire bouger, sans qu'aucun d'eux n'ait de point fixe : μ_{n-1} permutations.

• Il y a celles ayant exactement deux points fixes a_1 et a_2 avec $\binom{n}{2}$ choix ; il ne reste plus qu'à faire bouger les $n-2$ points qui restent, en leur demandant de n'avoir aucun point fixe.

• Plus généralement, il y a celles ayant exactement k points fixes. On choisit les k points fixes a_1 à a_k avec $\binom{n}{k}$ choix. Une fois qu'on a choisi ces points, il en reste $n-k$ à faire bouger, sans aucun point fixe. On multiplie : $\binom{n}{k}.\mu_k$.

On somme sur toutes les valeurs de k et chaque permutation de range(n) est croisée une fois et une seule dans ce dénombrement.
La somme $\binom{n}{k}.\mu_k$ vaut bien $n!$.

Une fois de plus, aucune récurrence. Mais j'ai l'impression de me répéter.

On notera que le terme $\binom{n}{n-1}.\mu_1$ doit compter les permutations ayant $n-1$ points fixes. C'est louche. Si il y a n places et que $n-1$ personnes ne bougent pas, que fait la dernière ? C'est impossible. Mais ce n'est pas grave, μ_1 est nul.
D'un autre côté, $\binom{n}{n}.\mu_0$ compte les permutations ayant n points fixes. Il n'y en a qu'une, c'est Id. Et le terme $\binom{n}{n}.\mu_0$ vaut bien 1,c'est heureux.

♡ 0 ♡ Déduisez : $\mu_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+n}.\binom{n}{i}.i!$. Calculez μ_6.

On est pleinement dans le cas de la formule d'inversion de Newton. On appelle (a_n) la suite (μ_n) et on appelle (b_n) la suite $(n!)$.
On a prouve $\forall n,\ b_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a_k$. On déduit $\forall n,\ a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}.\binom{n}{k}.b_k$.

On reformule : $\boxed{\mu_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}.k!}$

On en profite pour vérifier notre calcul de μ_5 :

$$\sum_{k=0}^{5}(-1)^{5+k}.\binom{5}{k}.k! = (-1)^5.1.0! + (-1)^6.5.1! + (-1)^7.10.2! + (-1)^8.10.3! + (-1)^9.5.4! + (-1)^{10}.1.5!$$

On (re)trouve $-1+5-20+60-120+120=44$.

Avec la même formule

1	6	15	20	15	6	1
1	1	2	6	24	120	720
1	-6	$+30$	-120	$+360$	-720	$+720$

$\boxed{\mu_6 \text{ vaut } 265}$

Je vous offre les suivants :

1	0	1	2	9	44	265	1 854	14 833	133 496	1 334 961	14 684 570	176 214 841

♡ 0 ♡ Montrez : $\frac{\mu_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.[a]

[a] par exemple, $\frac{\mu_8}{8!} = \frac{14833}{40320} \simeq 0,37$ correspond à une probabilité simple : 8 personnes ayant déposé chacune son téléphone sur la table, elles repartent précipitamment et prennent chacune un téléphone au hasard ; quelle est la probabilité qu'aucune n'ait repris son propre téléphone

On va établir $\frac{\mu_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. On part de la formule précédente et on divise :

$$\frac{\mu_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n+k}}{n!}.\binom{n}{k}.k!$$

Or, en revenant à la formule de base *(celle qui sert peu finalement)* : $\binom{n}{k}.\frac{k!}{n!} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}.\frac{k!}{n!}$. On a donc :

$$\frac{\mu_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n+k}}{(n-k)!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n+(n-i)}}{i!}$$

par un changement de variable que je tairai ici. Il n'y a plus qu'à dire $(-1)^{2.n-i} = (-1)^{-i} = (-1)^i$.

♢ 0 ♢ Déduisez que $\frac{\mu_n}{n!}$ converge vers $\frac{1}{e}$ quand n tend vers l'infini (proportion de permutations sans points fixes). Peut on écrire alors $\mu_n \sim \frac{n!}{e}$?

A quoi vous fait penser la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$? A une formule de Taylor $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.h^k$ avec f qui ne change pas à la dérivation et h égal à -1.

Prenons donc l'exponentielle entre 0 et -1 : $e^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1.(-1)^k.}{k!} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.e^{-t.1}.dt$.

Si on parvient à montrer que le reste intégrale tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on aura montré par soustraction que $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ converge vers $\frac{1}{e}$ quand n tend vers l'infini.

Le $(-1)^{n+1}$ n'y change rien, contentons nous de prouver que $\frac{1}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.e^{-t}.dt$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

On minore par 0 et on majore par $\frac{1}{n!}.\int_0^1 1.1.dt$, et le théorème d'encadrement permet de conclure.

Bilan : $\mu_n \sim \frac{n!}{e}$. C'est totalement légitime, c'est même la définition d'un équivalent.

Proportionnellement, moins d'un tiers des permutations n'ont aucun point fixe, et le reste en a au moins un.

Pour tout N donné, on note $S(N,k)$ le nombre de surjections de $range(N)$ dans $range(k)$. Justifiez et complétez :

	$N=0$	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$
$k=0$		0	0	0	0
$k=1$		1	1	1	1
$k=2$	0	0	2		
$k=3$	0	0	0		36
$k=4$	0	0	0		

Pour tout N donné, on note $S(N,k)$ le nombre de surjections de $range(N)$ dans $range(k)$.
Quand l'ensemble de départ est vide, il n'y a pas trente six applications, il n'y en a qu'une : ne rien faire. Il n'y a donc aucune image. L'application de $\emptyset$ dans $\{0\}$ ne peut pas être surjective, puisque 1 n'a pas d'antécédent.

	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$
$k = 0$	1		
$k = 1$	0		
$k = 2$	0		
$k = 3$	0		
$k = 4$	0		

En revanche, de $\emptyset$ dans lui même, elle est surjective puisqu'il n'y a pas d'élément sans antécédent *(il n'y a pas d'élément à l'arrivée...)*.
D'un ensemble à n éléments dans lui même, toute application surjective devient automatiquement injective, et bijective *(si il y a n personnes et n chaises, et au moins un cul sur chaque chaise, c'est qu'il y a exactement une personne et une seule par chaise)*.
Les surjections de $\{0, \dots n-1\}$ dans lui même sont des bijections. Il y en a $n!$ *(n choix pour l'image du premier élément, puis $n-1$ pour le suivant et ainsi de suite)*. La diagonale est remplie de factorielles.

	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
$k = 0$	1				
$k = 1$	0	1			
$k = 2$	0	0	2		
$k = 3$	0	0	0	6	
$k = 4$	0	0	0	0	26

Si l'ensemble d'arrivée est trop petit, une application ne pourra pas être surjective.

Sous la diagonale, il n'y a que des 0.

Si l'ensemble d'arrivée est vide, on ne peut pas définir d'images, on ne peut donc pas définir d'application. Elles ne pourront pas être surjectives.
La première ligne est faite de 0 *(sauf en position $(0,0)$)*.
Si l'ensemble d'arrivé est de cardinal 1, les applications sont constantes. Le pluriel n'est plus de rigueur. On n'a qu'une application, et elle est surjective.
La deuxième ligne est truffée de 1.

	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
$k = 0$	1	0	0	0	0
$k = 1$	0	1	1	1	1
$k = 2$	0	0	2		
$k = 3$	0	0	0	6	
$k = 4$	0	0	0	0	26

Prenons un ensemble de départ à trois éléments $\{0,1,2\}$ et un ensemble d'arrivée n'en ayant que deux. Il y a 8 applications *(deux choix pour l'image de 0, puis deux choix pour l'image de 1 et enfin deux choix pour l'image de 2)*. Mais il faut enlever celles qui ne sont pas surjectives.
Il n'y en a que deux qui ne le soient pas : l'application constate égale à a, et l'application constante égale à b. Dès lors, $S(3,2) = 2^3 - 2$.

	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
$k = 0$	1	0	0	0	0
$k = 1$	0	1	1	1	1
$k = 2$	0	0	2		
$k = 3$	0	0	0	6	
$k = 4$	0	0	0	0	26

De même, si l'ensemble de départ devient $\{0,1,2,3\}$ et que l'ensemble d'arrivée reste $\{a,b\}$, il y a cette fois 16 applications *(proprement 2^n)*. On les accepte toutes, sauf les deux qui ne sont pas surjectives : les applications constantes. $S(4,2)$ vaut $16-2$ c'est à dire 14.

Il manque la dernière case. Il faut dénombrer les applications de $\{0,1,2,3\}$ dans $\{a,b,c\}$ qui sont surjectives.

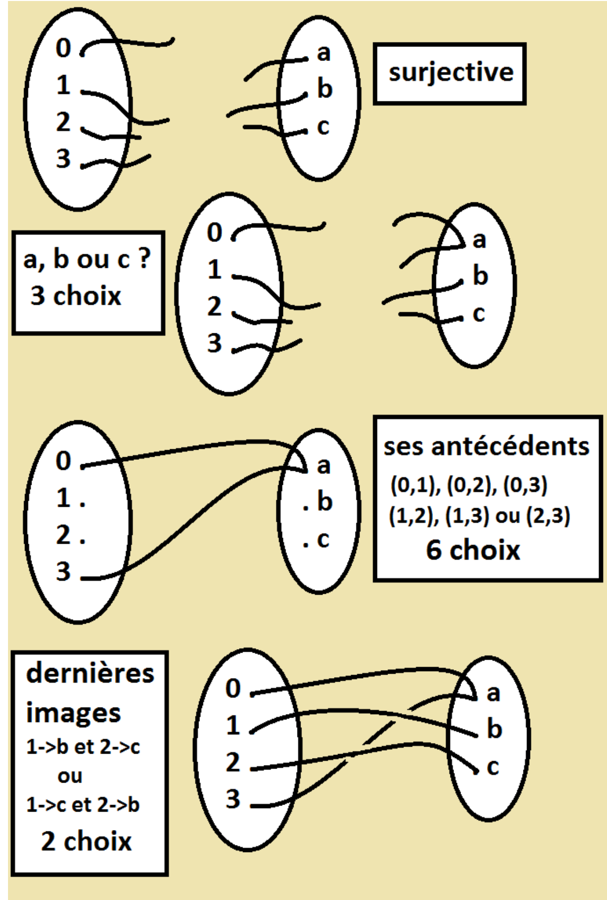
Il faut donc que 0, 1, 2 et 3 aient une image chacun, mais il faut aussi qu'au moins une flèche arrive sur a, au moins une sur b et au moins une sur c.
On voit alors que l'un des trois éléments$a$, b ou c sera atteinte par exactement deux flèches.

Choisissons qui est atteint deux fois : 3 choix.
On va dire que c'est a qui a deux antécédents.

Il faut choisir ses deux antécédents : deux parmi 4 *(ce qui fait* $\binom{4}{2}$ *soit 6).*
On va dire que c'est 0 et 3.

Il reste à associer les deux éléments qui restent dans $\{0,1,2,3\}$ aux deux éléments qui restent dans $\{a,b,c\}$: 2! choix.
On va dire $1 \longrightarrow b$ et $2 \longrightarrow c$.

On arrive au produit $3 \times 6 \times 2$, c'est à dire 36.



Démontrez la formule : $\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}.S(N,k) = p^N$ pour tout p de $\mathbb{N}$.

La formule $\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}.S(N,k) = p^N$ est issue d'un dénombrement et pas d'une récurrence.

> *Sincèrement, sur qui porterait elle ? Sur N le cardinal de l'ensemble de départ ? Sur p le nombre de termes de la somme. Comment faire avancer l'hérédité ? On met un élément de plus dans l'ensemble de départ ? Ou on donne un peu plus de possibilités à l'arrivée ?*
> *p et N sont donnés. On a partout des $S(N,k)$ c'est donc que l'ensemble de départ est* $\{0,1,\ldots N-1\}$.

On lit un p^N. Dans ce nombre, on reconnaît le nombre d'applications de $\{0,1,\ldots N-1\}$ dans $\{0,1,\ldots p-1\}$.
Je justifie. Pour construire une application de $\{0,1,\ldots N-1\}$ dans $\{0,1,\ldots p-1\}$, je dois choisir l'image de 0 *(p choix)* puis l'image de 1 (p choix indépendants des précédents) et ainsi de suite. On a donc $p \times p \times \ldots \times p$ de $range(N)$ dans $range(p)$.
Parmi ces applications, certaines sont peut être surjectives. D'autres non.
Ce qui est sûr, c'est que chaque application f a un ensemble image ($Im(f) = \{f(x) \mid x \in range(N)\}$), dont le cardinal est un entier entre 0 et p *(l'ensemble image est inclus dans l'ensemble d'arrivée)*.
Mais une fois qu'on a choisi l'ensemble image, l'application f de vient surjective de $range(N)$ dans $Im(f)$.

On a donc $\binom{p}{k}.S(N,k)$ applications surjectives de $range(N)$ dans $range(p)$ dont l'ensemble image est de cardinal k.
On somme sur k et on a toutes les applications de $range(N)$ dans $range(p)$.

C'est la formule demandée.

Déduisez une formule pour $S(N,q)$. Calculez le nombre de surjections d'un ensemble à 8 éléments vers un ensemble à 6 éléments. Combien y a-t-il d'applications d'un ensemble à huit éléments dans lui même dont l'ensemble image soit exactement de cardinal 6 ? Sachant qu'on trouve 5 362 560 à la question précédente, si je vous demande d'en donner la liste, quand pourrez vous me rendre votre copie ?

On se dit qu'on va utiliser la formule d'inversion de Newton. Avec quelle suite (a_p) et quelle suite (b_q) ? On a des $S(N,k)$. Il ne faut qu'une variable.
On va donc fixer N et faire des sommes sur k.
En posant donc pour tout k $a_k = S(N,k)$, on a $\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}.a_k = p^N$ pour tout p. On va donc poser $b_p = p^N$ pour tout p *(dépend de p, et N est fixé)*.

La formule d'inversion livre les a_p : $\boxed{S(N,p) = a_p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{p+k}.k^N}$ *(l'exposant N est fixé)*.

On peut la vérifier pour N égal à 4 et p égal à 3 déjà croisé :

$$S(4,3) = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}.(-1)^{k+3}.k^4 = -1.0^4 + 3.1^4 - 3.2^4 + 1.3^4 = 3 - 48 + 81 = 36$$

On demande de calculer le nombre de surjections d'un ensemble à 8 éléments vers un ensemble à 6 éléments. C'est $S(8,6)$. Sympa

$\binom{6}{0} = 1$	$\binom{6}{1} = 6$	$\binom{6}{2} = 15$	$\binom{6}{3} = 30$	$\binom{6}{4} = 15$	$\binom{6}{5} = 6$	$\binom{6}{6} = 1$
$0^8 = 0$	$1^8 = 1$	$2^8 = 256$	$3^8 = 6\,561$	$4^8 = 65\,536$	$5^8 = 390\,625$	$6^8 = 1\,679\,616$
0	-6	$+3\,840$	$-131\,220$	$+983\,040$	$-2\,343\,750$	$+1\,679\,616$

Si vraiment on s'embête, on mène le calcul jusqu'au bout : $\boxed{191\,520}$

On n'en donnera pas la liste. Et on se demande quel esprit malade peut avoir osé poser une telle question calculatoire à ses élèves sans calculatrice.

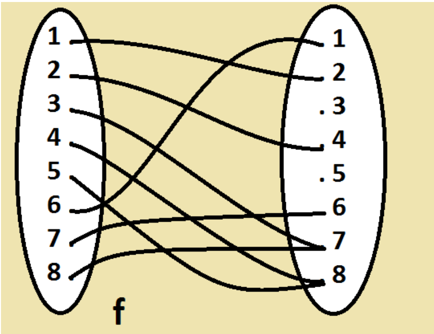
On veut dénombrer les applications d'un ensemble à huit éléments dans lui même dont l'ensemble image soit exactement de cardinal 6.
ce n'est pas le calcul précédent ?

Non, il faut choisir l'ensemble image, fait de six éléments parmi huit.

Une fois ce choix effectué, on demande d'avoir une surjection de l'ensemble à huit éléments vers ce qu'il reste à l'arrivé : six éléments. C'est cette fois ci le calcul précédent. La réponse littérale est donc $\binom{8}{6}.N(8,6)$.

Et la valeur est 5 362 560. On n'en donnera pas la liste.

Disons qu'avec de la dextérité, on trace en dix secondes un graphe de fonction comme celui ci contre.



On en fera six par minute. Soit 180 par heure (en deux heures, on est loin d'avoir tout fait). On en sera à 8640 par jour. En arrondissant à 5 000 000 et 8 000, on va quand même avoir besoin de six cent jours. Sans prendre de pause. C'est bête, mais les concours auront eu lieu entre-temps. Ce serait idiot de les rater.

Et si on en trace cinquante par page bien tassées, ça fera quand même un livre de cent mille pages. Les Misérables sont battus. Et même les 2 400 pages de Proust à la recherche du temps perdu. Non, on laisse tomber.

◁1▷ Qui est ce nombre dont l'écriture binaire est $\overline{0.0\overline{0011}00110011\ldots}_2$ *(pour ceux qui ne l'ont pas compris, la barre au dessus de 0011 c'est pour dire qui est le motif périodique, et la grande barre au dessus, c'est pour préciser qu'on n'est pas en base* 10*)*.

Pour interpréter le nombre d'écriture binaire $0.0\overline{0011}00110011\ldots$ on développe

2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}	2^{-11}	2^{-12}	$\ldots$	$2^{-2-4.k}$	$2^{-3-4.k}$	$2^{-4-4.k}$	$2^{-5-4.k}$	$\ldots$
0.	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	$\ldots$	0	0	1	1	$\ldots$

On peut le jouer à la physicienne avec les premiers termes :

$$x \simeq \frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^9}=\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}=\frac{51}{512}\simeq\frac{1}{10}$$

Proprement, on coupe à un rang N *(ou plutôt* $4.N$*)* et on a une série géométrique :

$$\sum_{k=0}^{N}\left(2^{-4-4.k}+2^{-4-5.k}\right)=\frac{2^{-4}+2^{-5}-2^{-4-4.(N+1)}-2^{-5-4.(N+1)}}{1-2^{-4}}$$

(la raison est $2^{-4}\neq 1$*).*
On fait tendre N vers l'infini et il reste

$$\frac{\frac{1}{16}+\frac{1}{32}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{\frac{3}{32}}{\frac{15}{16}}=\frac{1}{10}$$

C'est bon, vous connaissez donc le $\boxed{\text{développement en base 2 de } \frac{1}{10}}$ que vous écrivez souvent $0,1$ car vous travaillez en décimal.

On pouvait aussi poser $x = 0,000110011001100\dots$ et déplacer la virgule en multipliant par une puissance de 2.

$2^4.x$	$= 00001,100110011001100\dots$
x	$= 0,0001100110011\dots$
$2^4.x - x$	$= 1,1$

On a donc $15.x = 1+\frac{1}{2}$. On retrouve $x=\frac{1}{10}$.

En base -2, les dénominateurs sont les mêmes, mais les signes changent aux numérateurs.
Je vous l'offre : $0,01\overline{1011}1101110111\dots_{-2}$ le motif qui se répète est 0111. Cherchez en la preuve.

◁2▷ Calculez $\int_0^{\pi/3}\cos^5(t).dt$ en mettant sous la forme $P(\sin(t)).\cos(t)$.

Cette intégrale existe et s'écrit $\int_0^{\pi/3}(1-\sin^2(t))^2.\cos(t).dt$.

On peut développe en $\int_0^{\pi/3}\sin^4(t).\cos(t).dt - 2.\int_0^{\pi/3}\sin^2(t).\cos(t).dt+\int_0^{\pi/3}\cos(t).dt$.

On peut intégrer en $\left[\frac{\sin^5(t)}{5}-\frac{2.\sin^3(t)}{3}+\sin(t)\right]_0^{\pi/3}$.

On peut même changer explicitement de variable en $s=\sin(t)$ et finir par calculer $\int_0^{\sqrt{3}/2}(1-s^2)^2.ds$.

On trouve $\frac{49.\sqrt{3}}{160}$ et on s'en moque.

◁3▷ Complétez $Arctan(3)+Arcsin(*)=3.\frac{\pi}{4}$ en passant par exemple à la tangente de chaque côté.

On note x l'inconnue : $Arcsin(x)=\frac{3}{4}.\pi - Arctan(3)$.

On passe au sinus [2] : $x=\sin\left(\frac{3.\pi}{4}-Arctan(x)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.\cos\left(Arctan(3)\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}.\sin\left(Actan(3)\right)$.
On remplace :

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{\sqrt{1+3^2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{3}{\sqrt{1+3^2}}$$

On trouve $x=\frac{\sqrt{5}}{10}.(1+3.\sqrt{3})$.

La condition est nécessaire, mais aussi suffisante. L'application $Arcsin$ est croissante, et passe de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.
Elle passera donc une fois (T.V.I.) et une seule (croissance) par $\frac{3}{4}.\pi - Arctan(3)$ (entre $\frac{3}{4}.\pi-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3.\pi}{4}$.

L'équation a une et une seule racine, et on a montré qu'elle ne pouvait avoir qu'une valeur.
C'est elle.

2. équivalence ?

◁4▷ **Résolvez $\int_0^x \frac{dt}{t^2-6.t+10} = \frac{\pi}{4}$ d'inconnue rationnelle x.**

On commence par calculer l'intégrale $\int_0^x \frac{dt}{t^2-6.t+10}$ qui existe pour tout x (dénominateur jamais nul, application continue).

On met sous forme canonique : $\int_0^x \frac{dt}{(t-3)^2+1}$ puis on intègre $\Big[Arctan(t-3)\Big]_0^x$.

Les calculs étant faits, on passe à l'équation : $Arctan(x-3) - Arctan(-3) = \frac{\pi}{4}$.

On isole : $Arctan(x-3) = \frac{\pi}{4} - Arctan(3)$.

On passe à la tangente *($\tan(Arctan(\ldots)$ est le bon sens, mais on ne raisonne que par implication)* :

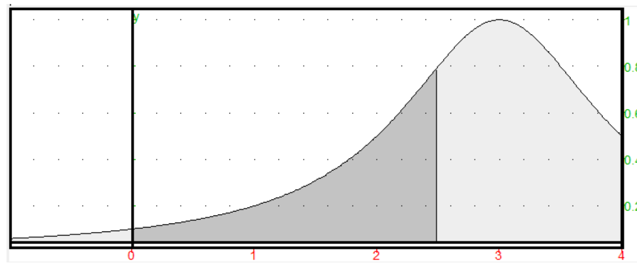
$$x - 3 = \tan\left(\frac{\pi}{4} - Arctan(3)\right)$$

Mais cette solution (unique) est elle rationnelle ?

On exploite la formule en $\tan(a-b)$: $x - 3 = \frac{1-3}{1+1.3}$.

On isole : $\boxed{x = \frac{1-3}{1+1.3} + 3 = \frac{5}{2}}$

Oui, il fallait vérifier que notre solution est rationnelle, donc on ne s'arrête pas à la formule avec des Arctan.



Comme on est passé à la tangente, il faut vérifier $Arctan\left(\frac{5}{2} - 3\right) = \frac{\pi}{4} - Arctan(3)$.

Il y a égalité des tangentes, et les deux angles sont entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Une faute de frappe m'a fait poser l'équation peu différente

$$\int_0^x \frac{dt}{t^2+6.t+10} = \frac{\pi}{4}$$

Le calcul est similaire : $\int_0^x \frac{dt}{(t+3)^2+1} = Arctan(x+3) - Arctan(3)$.

L'équation est alors $Arctan(x+3) = \frac{\pi}{4} + Arctan(3)$.

On passe à la tangente. Et toute la question est là.

On obtient $x + 3 = \frac{1+3}{1-3}$ soit $x = -5$.

Mais alors, il faut revenir en arrière.

Est ce cohérent : $\int_0^{-5} \frac{dt}{t^2+6.t+10} \overset{?}{=} \frac{\pi}{4}$.

Le premier membre est négatif (intégrale d'une application positive, mais prise dans le mauvais sens). le second membre est positif.

Pas cohérent.

En fait, $\int_0^{-5} \frac{dt}{t^2+6.t+10} = -\frac{3.\pi}{4}$.

La question ne se limitait donc pas à savez vous calculer une intégrale et calculer $\tan(a+b)$.
La question était une question de maths.
Quand on passe à la tangente, c'est comme quand on passe au carré, on perd de l'information.
On a juste une implication, et pas une équivalence.
Mais évidemment, vous sortez de Terminale, vous croyez qu'une question de maths c'est juste trois formules et du calcul.
Non, c'est une question. Et ça nécessite un cerveau !

◁5▷ **♡ Déterminez les primitives de $x \longmapsto \frac{1}{e^{2.x}+3.e^x+2}$ (éléments simples, changement de variable...).**

Le dénominateur est toujours strictement positif, l'application est continue, l'intégrale existe sur tout segment.

On va se débarrasser de ces exponentielles en posant $e^x = t$ (C^1 difféomorphisme) :

$$\int \frac{dx}{e^{2.x}+3.e^x+2} = \int \frac{dt}{t.(t^2+3.t+2)}$$

On décompose évidemment en éléments simples : $\dfrac{1}{t.(t+1).(t+2)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1} + \dfrac{c}{t+2}$.

On détermine a, b et c par la méthode des pôles :
- multiplie par t fais tendre t vers 0 : $a = \dfrac{1}{2}$
- multiplie par $t+1$ fais tendre t vers -1 : $b = -1$
- multiplie par $t+2$ fais tendre t vers -2 : $a = \dfrac{1}{2}$
- vérifie en regardant l'équivalent en $+\infty$

Il ne reste plus qu'à intégrer en $\dfrac{1}{2}.\ln(t) - \ln(t+1) + \dfrac{1}{2}.\ln(t+2)$.
Mais on ne s'arrête surtout pas là, car on a changé de variable. Il faut revenir àx (d'où l'intérêt d'avoir mis en valeur le changement de variable par un cadre adéquat) : une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{e^{2.x}+3.e^x+2}$ est $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{2}.\ln\left(\dfrac{e^x.(e^x+2)}{(e^x+1)^2}\right)}$ par exemple.

A retenir : le pas oublier de revenir à la variable initiale.
ne pas écrire « la primitive est » mais bien « une primitive est ».[a]

[a]. J'avais commencé à adorer le serveur sur lequel vous aviez le Q.C.M. de logique booléenne en S.I.I. puis je suis tombé sur « la primitive de ... est .. ; » sur ses Q.C.M. de maths de Terminale, et j'ai failli casser mon ordinateur...

Un catcheur, un physicien et un mathématicien sont sujets à une expérience : on les enferme dans une pièce avec chacun une boîte d'épinards, fermée, et sans ouvre-boite. Au bout de 24 heures, on va voir ce qu'il sont devenus.
Le catcheur réussit à ouvrir sa boîte : « Eh bien, j'ai simplement violemment projeté la boîte contre le mur. L'impact a été tel qu'elle s'est ouverte », explique-t-il.
Le physicien réussit également à ouvrir sa boîte : « J'ai observé le solide, et calculé ses points de rupture. J'ai alors effectué une pression de manière à exercer une force maximale sur ceux-ci, et la boîte s'est tout naturellement ouverte. »
Le mathématicien, enfin, est retrouvé prostré dans un coin de la pièce, la sueur ruisselant sur son visage, et sa boîte de conserve, fermée, entre les pieds : « Admettons que la boîte est ouverte... Admettons que... »
Une variante propose : À l'arrivée de l'expérimentateur, la boîte est encore fermée et le mathématicien a disparu. Mais d'étranges bruits proviennent de la boîte... Quand l'expérimentateur l'ouvre, il découvre le mathématicien : « Argh ! Une erreur de signe quelque part ! »
Une dernière alternative : Le physicien se débrouille comme cela a été décrit ci-dessus, et le mathématicien est sauvé à temps. Il est alors mené vers les cellules des autres sujets de l'expérience. Au catcheur il dit alors : « Oh, une méthode vraiment grossière. » Dans la cellule du physicien, il regarde la boîte puis les formules, pointe du doigt un tableau et annonce : « Eh bien, ces limites ne peuvent être interverties, et cette intégrale n'existe pas dans $\mathbb{R}$ ».

◃6▹ ♡ On veut calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.dx$ notée I par changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. Exprimez x à l'aide de u. Calculez dx.
Justifiez $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{4.u^2}{(1+u^2)^2}.du$ (attention, les bornes sont en u et plus en x, d'accord ?).
Intégrez par parties (en dérivant u). Justifiez : $I = \dfrac{\pi}{2} - 1$.
Calculez aussi I en changeant de variable : $x = \cos(2.\theta)$. Exprimez dx à l'aide de θ et $d\theta$ et exprimez $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ à l'aide de θ. Retrouvez la valeur de I.

On élève au carré $u^2 = \dfrac{1-x}{1+x}$ donc $u^2.(1+x) = 1-x$ et finalement $x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.
Quand u va de 0 à 1, x va de 1 à 0 (en décroissant, oui !). Et quand x va de 0 à 1, u va de 1 à 0.
On dérive : $\dfrac{dx}{du} = \dfrac{-4.u}{(1+u^2)^2}$ (tiens, un signe moins).
L'intégrale devient $\displaystyle\int_{u=1}^{u=0} u.\frac{-4.u}{(1+u^2)^2}.du$ On remet les bornes dans l'ordre et le signe moins s'en va.

Comme proposé, on intègre par parties

u	$\hookrightarrow$	1
$\dfrac{4.u}{(1+u^2)^2}$	$\hookleftarrow$	$\dfrac{-2}{1+u^2}$

On a cette fois $\displaystyle\int_0^1 u.\frac{4.u}{(1+u^2)^2}.du = \left[\frac{-2.u}{1+u^2}\right]_0^1 + 2.\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}$.
Le terme de compensation s'intègre en Arctangente. On a le résultat demandé.

Reprenons $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.dx$ en posant $x = \cos(2.\theta)$ ou plutôt $\theta = \frac{Arccos(x)}{2}$.
On a $dx = -2.\sin(2.\theta).d\theta$. Les bornes deviennent $\pi/4$ et 0.
Et $\frac{1-\cos(2.\theta)}{1+\cos(2.\theta)} = \frac{2.\sin^2(\theta)}{2.\cos^2(\theta)}$ (trigonométrie).
L'intégrale devient $\int_{\pi/4}^0 \sqrt{\tan^2(\theta)}.(-2.\sin(2.\theta)).d\theta$. Bien parti.
On efface toute valeur absolue car l'intervalle est bien choisi $\int_{\pi/4}^0 \tan(\theta).(-2.\sin(2.\theta)).d\theta$.
On retape les bornes $2.\int_0^{\pi/4} \tan(\theta).\sin(2.\theta).d\theta$.
On remplace $\sin(2.\theta)$ par $2.\sin(\theta).\cos(\theta)$. On a maintenant $4.\int_0^{\pi/4} \sin^2(\theta).d\theta$.
On linéarise : $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2.\theta)}{2}$ et on peut intégrer en $\Big[2.\theta - \sin(2.\theta)\Big]_0^{\pi/4}$.

◁7▷ ♡ Calculez $\int_0^{5.\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta$. (gare au piège).

Ce n'est pas $\int_0^{5.\pi} \theta.d\theta$. En effet, $Arccos(\cos(\theta))$ ne se simplifie pas.
L'application $\theta \longmapsto Arccos(\cos(\theta))$ est $2.\pi$ périodique (merci le cosinus).
Il suffit de calculer donc $\int_0^{\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta + \int_{\pi}^{3.\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta + \int_{3.\pi}^{5.\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta$ par relation de Chasles.
Et $\int_{\pi}^{3.\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta$ est égal à $\int_{-\pi}^{\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta$. De même pour $\int_{3.\pi}^{5.\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta$.
On a donc $\int_0^{5.\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta = \int_0^{\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta + 2.\int_{-\pi}^{\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta$.
Mais l'application $\theta \longmapsto Arccos(\cos(\theta))$ est paire. On a donc $\int_{-\pi}^{\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta = 2.\int_0^{\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta$.
Il vient $\int_0^{5.\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta = 5.\int_0^{\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta$.
Et maintenant, on est sur l'intervalle « de bijectivité » : $\int_0^{\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta = \int_0^{\pi} \theta.d\theta$.
Conclusion : $\boxed{\int_0^{5.\pi} Arccos(\cos(\theta)).d\theta = \frac{5.\pi^2}{2}}$
Graphiquement, avec la fonction en dents de scie, tout devient évident.

◁8▷ Calculez $\int_a^b x^k.dx$ pour a et b strictement positifs et k réel, par le changement de variable $x = e^t$.

Puisqu'on nous le demande ainsi :

$$\int_{x=a}^{x=b} x^k.dx = \int_{t=\ln(a)}^{t=\ln(b)} e^{t.k}.(e^t.dt) = \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} e^{t.(k+1)}.dt = \Big[\frac{e^{t.(k+1)}}{k+1}\Big]_{\ln(a)}^{\ln(b)}$$

Et on arrive bien à $\frac{b^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+1}}{k+1}$.

Et on confirme la validité même si k est juste réel et pas entier.
Et même complexe ?
Et on traite à part le cas $k = -1$.

◁9▷ ♡ Calculez $\int_0^{\pi} Arctan(\sin(x)).\cos(x).dx$.

Existence assurée. Changement de variable $s = \sin(x)$: $\int_{x=0}^{x=\pi} Arctan(\sin(x)).\cos(x).dx = \Big[F(\sin(x))\Big]_0^{\pi}$ en notant F une primitive d'Arctangente.
On trouve 0.
Et c'est normal. Tout ce qu'on fait de 0 à $\frac{\pi}{2}$ est défait de $\frac{\pi}{2}$ à π.

On peut aussi donner une primitive : $x \longmapsto Arctan(\sin(x)).\sin(x) - \frac{\ln(1+\sin^2(x))}{2}$.

On a aussi une belle idée : on change de variable $t = \pi - x$.

$$I = \int_{x=0}^{x=\pi} Arctan(\sin(x)).\cos(x).dx = \int_{t=\pi}^{t=0} Arctan(\sin(\pi-t)).\cos(\pi-t).(-dt)$$

$$I = \int_{x=0}^{x=\pi} Arctan(\sin(x)).\cos(x).dx = \int_{t=0}^{t=\pi} Arctan(\sin(\pi-t)).\cos(\pi-t).dt$$

$$I = \int_{x=0}^{x=\pi} Arctan(\sin(x)).\cos(x).dx = -\int_{t=0}^{t=\pi} Arctan(\sin(t)).\cos(t).dt$$

$I = -I$: elle est nulle !

◁10▷ ♣ Calculez (à la main) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^n$ pour n de 0 à 9. Le corps de base est celui des entiers de 0 à 10 pour l'addition et la multiplication modulo 11. Résolvez $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue entière n.

Comme il n'y a que 11 valeurs possibles pour chaque coefficient, autant y aller « à la main », en calculant les premières puissances pour deviner quelquechose.

$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 22 \\ 11 & 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^9 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	

Une fois qu'on a $M^{10} = I_2$, tout est fini.
Plus besoin de récurrence !

On écrit $M^{10.n} = (M^{10})^n = (I_2)^n = I_2$ pour tout n.

On prolonge : $M^{10.n+r} = M^{10.n}.M^r = M^r$.

On en déduit la périodicité de période 10 :

n modulo 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M^n	I_2	M	$5.I_2$	$5.M$	$3.I_2$	$3.M$	$4.I_2$	$4.M$	$9.I_2$	$9.M$
plus concis que ça, tu meurs...										

Remarque :
Ici, le professeur/correcteur sera très déçu par m'élève qui perdra un temps fou à faire des récurrences.
Ou même par celui qui dira « avec de longues récurrences, on montrerait que.. ».
Il faut que vous ayez conscience que certains passages du type périodicité en arithmétique ne nécessitent rien de plus que des choses comme $M^{10.n} = (M^{10})^n = (I_2)^n = I_2$.
On vous demande non seulement de savoir raisonner/calculer, mais aussi de comprendre le prix à payer (ou non) pour certaines étapes.
On n'aime pas les automates qui disent « une entier n donc une récurrence »
« un entier n donc des calculs simples mais longs ».
Non ! « Zéro calcul », c'est quand même mieux !

On note qu'ayant obtenu $M^2 = 5.I_2$, on pouvait avancer sans calcul : $M^4 = 5^2.I_2 = 25.I_2 = 3.I_2$
$M^6 = 5^3.I_2 = 4.I_2$
$M^8 = 5^4.I_2 = 9.I_2$
$M^{10} = 5^5.I_2 = 1.I_2$

Comme on a la liste de toutes les possibilités, on peut raisonner par équivalences : $\boxed{(M^n = I_2) \Leftrightarrow (n = 0\ [10])}$
Et qui sont les idiots qui vont écrire $(M^n = I_2) \Leftrightarrow (n = 10.k)$ qui n'a aucune sens, puisqu'il y a là un k non quantifié ?
On pourra, si on tient à rédiger les maths comme un pied (un pied juste, mais quand même lourd [3]) :
$(M^n = I_2) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ n = 10.k)$.

Sinon, on peut aussi diagonaliser.

trace		déterminant
$11 = 0$		$30 - 2 = 6$
équation caractéristique		discriminant
$x^2 - 0.x + 6 = 0$		$-24 = 9 = 3^2$
valeurs propres		matrice diagonale choisie
$\frac{3}{2} = \frac{14}{2} = 7$ et $\frac{-3}{2} = \frac{8}{2} = 4$		$\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

On résout ensuite $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ pour trouver une matrice de passage « simple » (des 1 sur la première ligne).
On trouve $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (mais si, tout est modulo 11, ne l'oubliez pas).
On a donc $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 7^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.
Par un résultat connu, associé au nom de Fermat :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 7^{10} & 0 \\ 0 & 4^{10} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◃11▹ Calculez $\displaystyle\int_0^{Arctan(1/2)} \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta) - \sin(\theta)}.d\theta$ par le changement de variable $t = \tan(\theta)$.

L'existence ? cos et sinsont égaux en $\frac{\pi}{4}$ (c'est $Arctan(1)$) et ici on s'arrête avant.

Sinon, c'est bien Bioche qui nous le suggère. Par $\theta \longmapsto \theta + \pi$, sinus et cosinus changent de signe, la fraction ne change pas, et de $d\theta$ non plus.

On a alors sur l'intervalle où sinus, cosinus et tangente sont positifs :
on sait $\cos(\theta) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ *(venant de* $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$*)* et
$\sin(\theta) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ *(puisque* $\sin = \tan . \cos$*)*
On intègre :

$$\int_0^{1/2} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}.\frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{1/2} \frac{dt}{(1-t).(1+t^2)}$$

Il faut décomposer en éléments simples : $\frac{1}{(1-t).(1+t^2)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b.t+c}{1+t^2}$ *(la difficulté quand on n'a pas l'habitude, c'est d'avoir le bon nombre de constantes, la bonne forme).*

$\frac{1}{(1-t).(1+t^2)} = \frac{1}{2}.\Big(\frac{t+1}{1+t^2} - \frac{1}{t-1}\Big)$ et on vérifie, puis on propose.
On termine avec du logarithme et de l'arctangente :

3. au fait, vous savez comment on dit en anglais « quel pied juste » (au sens d'équitable) ? « what a fair foot » (lisez le à voix haute, mais pas à côté de vos parents)

$$\boxed{\int_0^{Arctan(1/2)} \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)-\sin(\theta)}.d\theta = \frac{\ln(5)}{4} + \frac{Arctan(1/2)}{2}}$$

Et pourquoi Bioche avait raison ? parce que tout s'exprime sous le signe somme à l'aide de la tangente, avec sa dérivée en facteur : $\frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)-\sin(\theta)} = \frac{1}{1-\frac{\sin(t)}{\cos(t)}} = \frac{1}{1-t} = (1+t^2).\frac{1}{(1+t^2).(1-t)}$.

◃12▹ ♡ Calculez $\int_0^{\pi} \frac{\sin(t).dt}{1+\cos^2(t)}$. On pose $I = \int_0^{\pi} \frac{t.\sin(t).dt}{1+\cos^2(t)}$. Effectuez le changement de variable $u = \pi - t$. Déduisez la valeur de I.

La première intégrale est en $\frac{u'}{1+u^2}$. On intègre en $t \longmapsto -Arctan(\cos(t))$ et on trouve $Arctan(1) - Arctan(-1)$ ce qui fait $\frac{\pi}{2}$.

Dans I dont l'existence est assurée, on pose donc comme suggéré $u = \pi - t$ qui nous fait parcourir l'intervalle en sens inverse (classique $\int_0^a \ldots$ devient $-\int_a^0 \ldots$ par $u = a - t$).

On trouve $I = \int_{\pi}^0 \frac{(\pi-u).\sin(u)}{1+\cos^2(u)}.(-du)$ et on sépare :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-u).\sin(u)}{1+\cos^2(u)}.du = \pi.\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t).dt} - I$$

On bascule, on divise par 2 : $\boxed{I = \frac{1}{2}.\pi.\frac{\pi}{2}}$

◃13▹ Montrez : $\int_0^{\pi/3} \sin^2(t).\cos^3(t).dt \in \left\{\frac{11.\sqrt{3}}{160}, \frac{9}{128}, \frac{47}{480}\right\}$ *(en indiquant laquelle des trois est la bonne ; vous pourrez faire un changement de variable très simple en sinus).*

L'existence de $\int_0^{\pi/3} \sin^2(t).\cos^3(t).dt$ ne pose pas de problème.

On la sépare en $\int_0^{\pi/3} \sin^2(t).\cos^2(t).\cos(t).dt$ puis avec Pythagore, elle devient $\int_0^{\pi/3} \sin^2(t).(1-\sin^2(t)).\cos(t).dt$.

On peut changer de variable en sinus :

$$\int_{s=0}^{s=\sqrt{3}/2} s^2.(1-s^2).ds$$

On intègre en $\left[\frac{s^3}{3} - \frac{s^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}/2}$. Il reste un $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en facteur, et on a ensuite $\frac{3/4}{3} - \frac{(3/4)^2}{5}$. C'est $\boxed{\frac{11.\sqrt{3}}{160}}$ qui emporte la mise.

La clef est dans les puissances paires qui permettent de convertir des cosinus en sinus (ou des sinus en cosinus).
Puis dans la puissance impaire qui permet de mettre de côté un $\cos = \sin'$.

◃14▹ Complétez les étapes qui manquent.
Supposons l'existence d'une solution (a, b, c) à l'équation $a^4 + b^4 = c^2$ et montrons qu'il en existe une autre, (x, y, z), telle que $z < c$. La méthode de descente infinie permet alors de conclure.

Puisque (a^2, b^2, c) est alors un triplet pythagoricien primitif et que (quitte à intervertir a et b si nécessaire) a est impair, il existe un couple (p, q) d'entiers strictement positifs et premiers entre eux tel que $a^2 = p^2 - q^2$, $b^2 = 2.p.q$ et $c = p^2 + q^2$.
De même, puisque (a, q, p) est un triplet pythagoricien primitif, il existe un couple (m, n) d'entiers strictement positifs et premiers entre eux tel que $a = m^2 - n^2$, $q = 2.m.n$ et $p = m^2 + n^2$.
Puisque p et $2.q$ sont premiers entre eux et que $2.p.q$ est un carré, p et $2.q$ sont des carrés.
De même, puisque $2.q$ (donc $m.n$) est un carré, m et n sont des carrés.
Donc il existe des entiers strictement positifs x, y et z (premiers entre eux) tels que $m = x^2$, $n = y^2$ et $x^4 + y^4 = z^2$.
Comme $z^2 = p < c^2$, la preuve est établie.

On part de $a^4 + b^4 = c^2$; on suppose que a et b n'ont pas de diviseur commun.

En effet, sinon, on écrirait $a = d.a'$ et $b = d.b'$ avec d un facteur commun premier.
L'équation devient $d^4.(a'^4 + b'^4) = c^2$.
c^2 est divisible par d^4, donc c est un multiple de d^2 (car d est premier).
On écrit $c = d.c'$ et on reporte : $d^4.(a'^4 + b'^4) = d^4.c'^2$.
On simplifie, on a une solution plus petite.
Et on recommence avec tous les facteurs premiers communs à a et b.
Au final, a et b sont premiers entre eux.

On repart de $a^4 + b^4 = c^2$qu'on écrit $(a^2)^2 + (b^2)^2 = c^2$.
C'est un triplet pythagoricien.
On a donc un couple (p, q) (issu d'une tangente q/p d'écriture irréductible) vérifiant $a^2 = p^2 - q^2$ et $b^2 = 2.p.q$ (et $c = p^2 + q^2$).

b est pair, donc a est celui qui est impair, pour qu'ils n'aient pas de facteur commun.

On repart de $a^2 + q^2 = p^2$.
a et q sont premiers entre eux, sinon le facteur commun diviserait a puis b (par $b = 2.p.q$), ce qui contredirait « premiers entre eux ».

Il existe donc deux entiers qui l'engendrent : m et n (premiers entre eux).
Pour ce couple : $a = n^2 - m^2$ et $q = 2.m.n$ (a ne peut pas être celui en $2.m.n$ puisqu'il est impair) et $p = m^2 + n^2$.

Regardons quand même $b^2 = 2.p.q$.
Le produit $2.p.q$ est donc un carré parfait : $2^{2.\alpha}.3^{2.\beta}.5^{3.\gamma}\ldots$ (issu de la décomposition de b sous la forme $b = 2^\alpha.3^\beta.5^\gamma\ldots$).
Mais comme p et q sont premiers entre eux, l'exposant $2.\beta$ par exemple ne peut venir que de p ou de q, mais ce ne peut être « un facteur 3 vient de p et un autre de q.
C'est donc que (au facteur 2 près), p et q sont déjà des carrés parfaits.

Lequel prend le facteur 2 ? Il faut que je trouve un argument.

On écrit donc $q = 2.d^2$ où d est un entier et $p = z^2$ pour un entier z.

Mais reprenons la formule $2.m.n = q$; elle donne $m.n = d^2$.
L'entier $m.n$ est à son tour un carré parfait.

C'est donc que (et sans facteur 2 voyageur) : n et m sont des carrés parfaits.

On écrit donc $m = x^2$ et $n = y^2$. Et toujours $p = z^2$ obtenu plus haut.

Mais on avait obtenu aussi au deuxième triplet pythagoricien :
$a = n^2 - m^2$ et $q = 2.m.n$ et $p = m^2 + n^2$.
C'est le dernier qui nous intéresse : $z^2 = (x^2)^2 + (y^2)^2$.
On a un nouveau triplet du problème de degré 4.

Et les entiers sont plus petits que les précédents $a^4 + b^4 = c^2$ puisqu'on est passé aux racines carrées en gros).

On a prouvé que l'existence d'une solution entraînait l'existence d'une nouvelle solution, contredisant le caractère minimal de la première.

C'était la géniale preuve de Fermat de $x^4 + y^4 = z^4$ n'a pas de solutions dans $(\mathbb{N}^*)^3$.
Par « descente infinie ».

◃15▹ Montrez qu'on n'a évidemment pas $\forall x,\ Arctan(x) = \dfrac{Arcsin(x)}{Arccos(x)}$.

Trouvez quand même (graphiquement ?) le nombre de solutions de $Arctan(x) = \dfrac{Arcsin(x)}{Arccos(x)}$ d'inconnue réelle x (dans quoi ?).

Déjà effectivement, ce n'est pas parce qu'on a $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ qu'il faut prétendre $Arctan = \dfrac{Arcsin}{Arccos}$. C'est quoi cette invention purement formelle, juste parce que « sur le papier ça sonne bien » alors qu'on n'a aucun argument.

Il s'est quand même trouvé des élèves pour inventer ça, des colleurs me l'ont dit.
t même : $\dfrac{Arcsin}{Arccos} = \dfrac{sin}{cos} = \tan$*en simplifiant par Arc.*

Déjà, les deux fonctions $x \longmapsto Arctan(a)$ et $x \longmapsto \dfrac{Arcsin}{Arccos}$ n'ont pas le même domaine.
La première prend la longueur x entre $-\infty$ et $+\infty$.
La seconde la prend entre -1 et 1 .

Rappelons que x est une longueur dans $Arctan(x)$. N'allez pas me raconter des choses sur « x modulo π" ou autres, juste parce que vous avez aperçu le mot tangente.

Tenez, même en 1, c'est absurde : $Arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{Arcsin(1)}{Arccos(1)} = +\infty$ si j'ose dire ou écrire.

Cela dit, en 0 on a $Arctan(0) = \dfrac{Arcins(0)}{Arccos(0)}$.

Maintenant, comment trouver des x pour lesquels c'est vrai ? A part $x = 0$. On sait qu'on devra les chercher entre -1 et 1 pour que tout ait un sens.

Premier réflexe : tracer deux graphes : $Arctan$ et $\dfrac{Arcsin}{Arccos}$. A la calculatrice pour le second, car on devine que sa dérivée sera laide.
Et même les deux graphes sur un même dessin.
Et pourquoi pas le graphe de la différence.

On devine deux racines, dont une connue. Pour l'autre, entre 0 et 1, on ne devine pas sa valeur exacte.

On teste les valeurs pour lesquelles on a des informations ? Mais pour $Arctan$, il y a 0, 1, $\sqrt{3}$ et $1/\sqrt{3}$. Et seules 0, 1, -1 sont agréables pour $Arcsin$ et $Arccos$.

Fait on ensuite une étude de la fonction différence $x \longmapsto Arctan(x) - \dfrac{Arcsin(x)}{Arccos(x)}$?

On devine une dérivée très laide.

Déjà, au lieu d'étudier l'équation $Arctan(x) = \dfrac{Arcsin(x)}{Arccos(x)}$ on va étudier $Arctan(x).Arccos(x) - Arcsin(x) = 0$.
La fonction auxiliaire $x \longmapsto Arctan(x).Arccos(x) - Arcsin(x)$ sera moins lourde.

Ensuite, on se souvient que l'on a $Arcsin + Arccos = \dfrac{\pi}{2}$. (c'est du cours et ça vient de $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$.

On va donc résoudre $x \longmapsto Arctan(x).Arccos(x) + Arccos(x) - \dfrac{\pi}{2}$.

Cette fonction sera plus légère à étudier et dériver.

Mais qui est finalement l'inconnue ? C'est x. Mais si on la remplaçait par $Arccos(x)$?

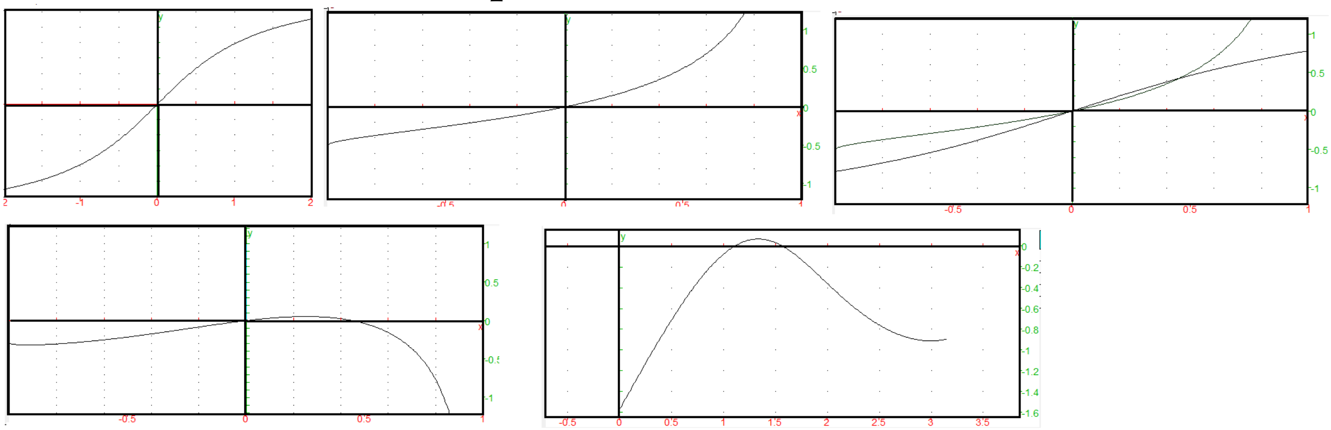
Rappel capital : x est une longueur et $Arccos(x)$ est un angle. Ayez toujours cette approche homogène et physique à l'esprit.

On pose donc $\theta = Arccos(x)$ entre 0 et π (et par là même $x = \cos(\theta)$).
L'équation devient $Arctan(\cos(\theta)).\theta + \theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Attention, on a des formules pour $\cos(Arctan(x))$ mais rien pour $Arctan(\cos(\theta))$.

On va donc créer $f = \theta \longmapsto \theta.Atctan(\cos(\theta)) + \theta - \dfrac{\pi}{2}$ et l'étudier sommairement pour lui appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et voir l'unicité des racines sur certains intervalles de stricte monotonie.

On lui connaît une racine évidente : $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (c'est $x = 0$ dans l'équation initiale).



◁ 16 ▷

La liste L est faite des stations de métro, sous la forme pour chacune

0	nom	string
1	code	string longueur 4
2	adresse	string
3	lignes	liste d'entiers
4	abscisse sur le graphe	integer
5	ordonnée sur le graphe	integer
6	liste des successeurs	liste de codes

Écrivez un script qui prend en entrée un numéro de ligne et retourne une liste de toutes ses stations.
Écrivez un script qui va trouver le numéro de la ligne la plus longue (en nombre de stations).
Écrivez un script qui va trouver le numéro de la ligne qui coupe le plus d'autres lignes.

```
def ListeStations(k) : #int -> list of list
....Ligne = [ ]
....for Station in L :
........if k in Station[3] :
............Liste.append(Station)
....return(Ligne)
```

```
def CompteStations(k) : #int -> list of
list
....c = 0 #compteur
....for Station in L : #du classique
........if k in Station[3] :
............c += 1
....return(c)
```

```
maxi, memo = 0, 0 #initialisation
for Index in range(20) : #sait on jamais,
il y a peut être 20 lignes
....Valeur = CompteStations(Index) :
........if Valeur > Maxi :
............Maxi = Valeur
............Memo = Index
print(Memo, Maxi)
```

```
Maxi, Memos = 0, [ ]
for Index in range(20) : #sait on jamais,
il y a peut être 20 lignes
....Valeur = CompteStations(Index) :
........if Valeur > Maxi :
............Maxi = Valeur
............Memos = [ ]
........if Valeur == Maxi :
............Memos.append(Index)
print(Memo, Maxi)
```

C'est la ligne 7 (et la 8) avec 38 stations dont voici la liste.

[Aubervilliers Pantin Quatre Chemins', 'Cadet', 'Censier Daubenton', 'Chaussée d'Antin La Fayette', 'Château-Landon', 'Châtelet', 'Corentin Cariou', 'Crimée', 'Fort d'Aubervilliers', 'Gare de l'Est - Verdun', 'Jussieu', 'La Courneuve 8 Mai 1945', 'Le Kremlin-Bicêtre', 'Le Peletier', 'Les Gobelins', 'Louis Blanc', 'Mairie d'Ivry', 'Maison Blanche', 'Opéra', 'Palais Royal Musée du Louvre', 'Pierre et Marie Curie', 'Place Monge - Jardin des Plantes Arènes de Lutèce', 'Place d'Italie', 'Poissonnière', 'Pont Neuf', 'Pont-Marie - Cité des Arts', 'Porte de Choisy', 'Porte de la Villette - Cité des Sciences', 'Porte d'Italie', 'Porte d'Ivry', 'Pyramides', 'Riquet', 'Stalingrad', 'Sully-Morland', 'Tolbiac', 'Villejuif Louis Aragon', 'Villejuif Léo Lagrange', 'Villejuif Paul Vaillant-Couturier - Hôpital Paul Brousse']

Comme on a un ex-aequo, on devrait proposer

On crée déjà un tableau qui va indiquer si deux lignes se coupent ou non.
On part de l'a-priori qu'aucune ligne ne coupe une autre au début.
On parcourt les stations une à une.
Chaque fois que dans la liste des lignes d'une station il y a deux indices `i` et `k` distincts, c'est qu'il y a une correspondance. On met donc `T[i][k]` à `True`.

```
#table des correspondances entre lignes
NbL = 20
T = [[False for k in range(NbL)] for i in range(NbL)]
for Station in L :
....Lignes = Station[3]
....for i in Lignes :
........for k in Lignes :
............if i != k :
................T[i][k] = True
```

La condition `i != k`, c'est pour ne pas dire « il y a une correspondances à Saint-Paul entre la ligne 1 et la ligne 1 », ce qui n'est pas faux, mais manque quand même de pertinence.

On déchiffre ensuite ce tableau ligne par ligne :

```
NbC = [0 for i in range(NbL)]
for i in range(NbL) :
....for k in range(NbL) :
........if T[i][k] :
............NbC[i] += 1
```

Moi j'ai ça : `[0, 11, 11, 11, 13, 11, 11, 12, 12, 11, 8, 11, 9, 10, 9]` et les ligne bis.

Les lignes `10` et `12` ont peu de correspondances...
Et comme je ne sais pas lire tout seul :

```
Maxi, Memo = 0, [ ]
for Index in range(NbL) :
....if NbC[Index] > Maxi :
........Memo = [ ]
....if NbC[Index] == Maxi :
........Memo.append(Index)
```

C'est la ligne 4 (Nord-Sud, que j'appelle encore Clignancourt -Orléans, car ce sont mes vieux terminus) qui en coupe le plus : elle en coupe 13. Elle ne rate que les deux lignes 3bis et 7bis.

Quant aux lignes 3bis et 7bis, c'est tout le contraire.

◃17▹ **Ce chacal urine. Le baron guéri. Bon, rions ! Me voilà, trolls affriolants ! Un raton. Essai de défi transcendant. Élu gratiné. Y grec ! Magyare stalinienne. Sylvie a dessiné. L'apaisé s'y amusa, ils virent César hélas ! Fard de gala en déshérence.** Là, on est sur des lignes de R.E.R. à moins de dix minutes de **prias** ou aux terminus.

Ce chacal urine. Arcueil-Cachan.
Le baron guéri. Bourg la Reine.
Bon, rions ! Robinson.
Me voilà, trolls affriolants ! Maisons-Alfort Alfortville.
Un raton. Tournan.
Essai de défi transcendant. Stade de France Saint-Denis.
Élu gratiné. Argenteuil.
Y grec ! Cergy.
Magyare stalinienne. Saint-Germain en Laye.
Fard de gala en déshérence. La Défense. Grande Arche.
Sylvie a dessiné. Issy-Val de Seine.
L'apaisé s'y amusa, Massy-Palaiseau.
ils virent César hélas ! Versailles-Chantiers.

◃18▹ J'ai calculé $\frac{10000}{99989999}$ et j'ai vu 0.0001000100020003000500080013002100340055008901440233037706 10...
Et je me souviens que la suite de Fibonacci commence par (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610.
Ça ne peut pas être le hasard ! On pose $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Exprimez F_nà l'aide de ρ^n et ϕ^n.

♣0♣ Développez $(x+\rho).(x+\phi)$ et décomposez en éléments simples $\frac{\sqrt{5}.x}{1-x-x^2}$ (notée $f(x)$).

♣1♣ Donnez le développement limité en 0 de $\frac{1}{1-h}$ en 0 à l'ordre n.

♣2♣ Justifiez que le développement limité en 0 de $\frac{\rho}{\rho+h}$ en 0 à l'ordre n est $\sum_{k=0}^{n} \phi^k.h^k + o(h^n)$.

♣3♣ Donnez le développement limité en 0 de $\frac{\phi}{\phi+h}$ en 0 à l'ordre n et celui de $f(h)$ à l'aide de la suite de Fibonacci. Donnez l'écriture irréductible de $f(10^{-4})/\sqrt{5}$. Concluez.

La suite de Fibonacci est un cas particulier de suite récurrente linéaire d'ordre 2.
On écrit juste son équation caractéristique $\lambda^2 = \lambda + 1$.
Ses deux racines sont justement $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
On sait que la suite de Fibonacci est une combinaison de deux suites géométriques de raisons ρet ϕ : $A.\rho^n + B.\phi^n$.
Les conditions initiales $F_0 = F_1$ permettent de déterminer ces constantes A et B : $\boxed{F_n = \frac{\rho.\rho^n - \phi.\phi^n}{\sqrt{5}}}$

On développe $(x+\rho).(x+\phi) = 1 - x - x^2$.

On décompose en éléments simples $\dfrac{\sqrt{5}.x}{1-x-x^2} = \dfrac{-\sqrt{5}.x}{(x+\rho).(x+\phi)} = \dfrac{\alpha}{x-\rho} + \dfrac{\beta}{x-\phi}$
On détermine α et β par un système ou par la méthode des pôles :

$$\frac{\sqrt{5}.x}{1-x-x^2} = \frac{-\sqrt{5}.x}{(x+\rho).(x+\phi)} = \frac{-\rho}{x+\rho} + \frac{\phi}{x+\phi}$$

Le développement limité de $\dfrac{1}{1-h}$ est du cours :

$$\frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + h^3 + \ldots + h^n + o(h^n)$$

et il vient de $\Big(x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}\Big)^{(n)} = \Big(x \longmapsto \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}\Big)$.
On écrit ensuite (en exploitant au bon moment $\phi = \dfrac{-1}{\rho}$) :

$$\frac{\rho}{h+\rho} = \frac{1}{1+\dfrac{h}{\rho}} = \sum_{k=0}^{n}\Big(-\frac{h}{\rho}\Big)^k + o(h^n) = \sum_{k=0}^{n} h^k.\Big(-\frac{1}{\rho}\Big)^k + o(h^n) = \sum_{k=0}^{n} h^k.\phi^k + o(h^n)$$

On fait de même avec l'autre racine :

$$\frac{\phi}{h+\phi} = \frac{1}{1+\dfrac{h}{\phi}} = \sum_{k=0}^{n}\Big(-\frac{h}{\phi}\Big)^k + o(h^n) = \sum_{k=0}^{n} h^k.\Big(-\frac{1}{\phi}\Big)^k + o(h^n) = \sum_{k=0}^{n} h^k.\phi^k + o(h^n)$$

On soustrait les deux développements limités :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}(\rho^k - \phi^k).x^k + o(x^n)$$

Mais on relie ceci à la question du début sur la suite de Fibonacci :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} F_{n-1}.\sqrt{5}.x^k + o(x^n)$$

On nous invite à regarder $f(10^{-4})/\sqrt{5}$. On trouve $\dfrac{10^{-4}}{1-10^{-4}-10^{-8}} = \dfrac{10^4}{10^8-10^4-1} = \dfrac{10000}{10000000-10000-1} = \dfrac{10000}{99989999}$.
C'est notre rationnel du début !

Mais on a aussi $f(10^{-4})$ qui doit « beaucoup ressembler » à $\sum_{k=0}^{n} F_n.\sqrt{5}.10^{-4.n}$.

Si on simplifie et ne regarde pas le $o(h^n)$ (à tort) : $\dfrac{10^{-4}}{1-10^{-4}-10^{-8}} = 10^{-4}.F_0 + 10^{-8}.F_1 + 10^{-12}.F_2 + 10^{-16}.F_3 + \ldots$

Et calculer cette somme, c'est prendre F_0 et le déplacer quatre chiffres derrière la virgule.
Puis prendre F_1 et le placer huit chiffres derrière la virgule.
Quant à F_2 on le place douze chiffres derrière la virgule.

Simplement, comme on se déplace à chaque fois de quatre chiffres, il ne faut pas aller trop loin. Vient le moment où les $F_n$ont plus de quatre chiffres et « se marchent les uns sur les autres ».

De plus, on prétend avoir utilisé un développement limité. mais on ne peut pas y placer un nombre.
Un développement limité n'est valable que pour une variable qui tend vers 0. Et 10^{-4} ne tend vers rien à part lui même.

En tant que matheux, il faudrait prendre es formules de Taylor avec reste intégrale, et dire que quand on écrit $\dfrac{10^{-4}}{1-10^{-4}-10^{-8}} \simeq 10^{-4}.F_0 + 10^{-8}.F_1 + 10^{-12}.F_2 + 10^{-16}.F_3$ l'erreur est égale au reste. Elle est majorée par 10^{-18}

après calculs (non faits ici) et n'influence pas les seize premiers chiffres derrière la virgule.

◁ 19 ▷

Résolvez dans $\mathbb{R}^2$: $\left\{\begin{array}{rrcr} x^3 & +3.x.y^2 & = & 14 \\ y^3 & +3.x^2.y & = & -13 \end{array}\right|$.
Même question dans $\mathbb{C}^2$.

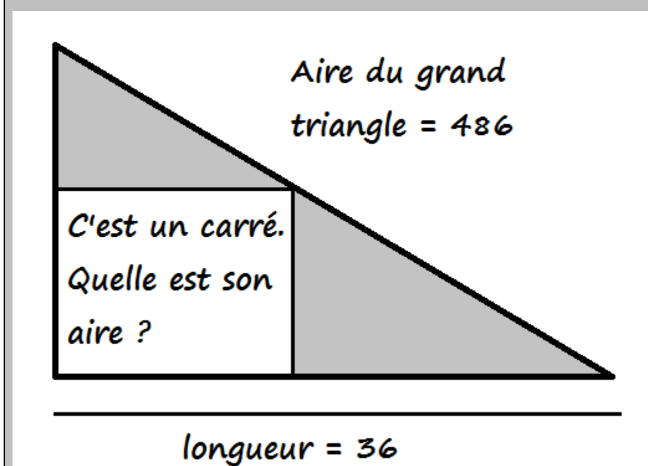
On raisonne par équivalences avec somme et produit. On reconnaît alors la formule du binôme $\left\{\begin{array}{rcrcr} (x & + & y)^3 & = & 1 \\ (x & - & y)^3 & = & 27 \end{array}\right|$.

Dans $\mathbb{R}$ on trouve $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 3 \end{array}\right|$. A nouveau par équivalences, on trouve une unique solution $S_{(x,y)} = \{(2,\ -1)\}$ (et on vérifie à toutes fins utiles).

Dans $\mathbb{C}$ on a des solutions comme $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & j \\ x & - & y & = & 3 \end{array}\right|$ ou $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & j^2 \\ x & - & y & = & 3.j \end{array}\right|$. Comme on peut apparier à notre guise, on a neuf solutions

$(2,\ -1)$	$\left(\frac{j+3}{2},\ \frac{j-3}{2}\right)$	$\left(\frac{j^2+3}{2},\ \frac{j^2-3}{2}\right)$
$\left(\frac{1+3.j}{2},\ \frac{1-3.j}{2}\right)$	$(2.j,\ -j)$	$\left(\frac{j^2+3.j}{2},\ \frac{j^2-3.j}{2}\right)$
$\left(\frac{1+3.j^2}{2},\ \frac{1-3.j^2}{2}\right)$	$\left(\frac{j+3.j^2}{2},\ \frac{j-3.j^2}{2}\right)$	$(2.j^2,\ -j^2)$

◁ 20 ▷



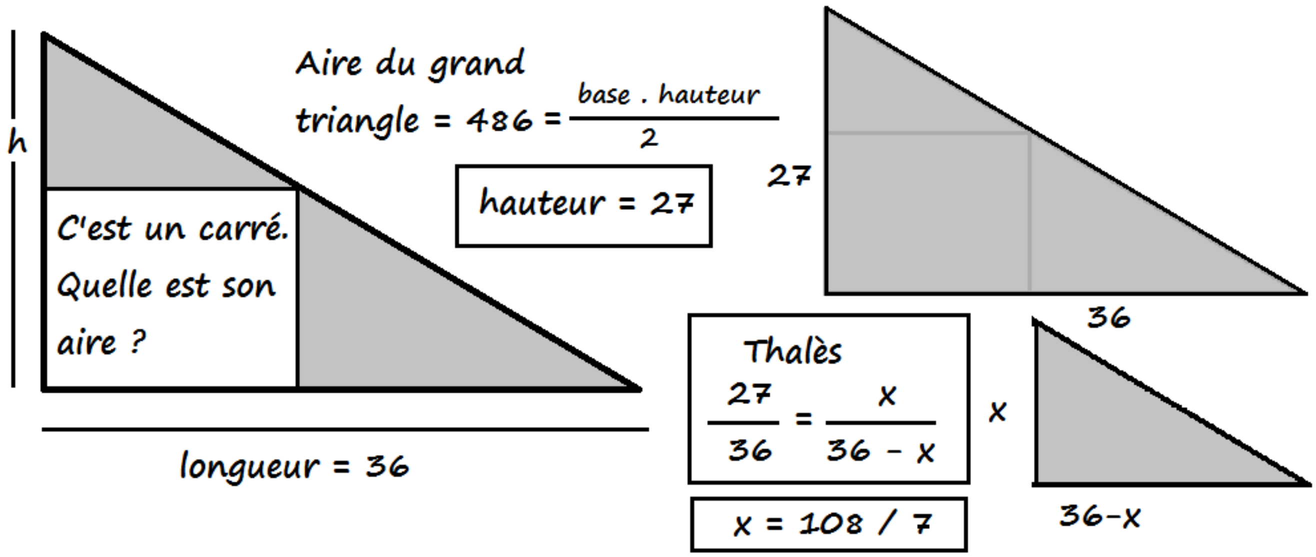
Pour être tranquille, l'instituteur a écrit $a = 1,1\overline{785714}2857142857\ldots$ et $b = 3,\overline{18}181818\ldots$ et a demandé « posez la multiplication ».
Votre petit frère est en train de calculer

	1,	1	7	8	5	7	1	4	2	8	5	7	1
x	3,	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8
	3,	5	3	5	7	1	4	2	8	5	7	1	4
	0,	1	1	7	8	5	7	1	4	2	8	5	7
	0,	0	9	4	2	8	5	7	1	4	2	8	5
	0,	0	0	1	1	7	8	5	7	1	4	2	8
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
=	3,	6											

Pour quatre points, aidez le ![a]

a. moi je vous aide avec $117857025 = 3^4.5^2.11^2.13.37$ et $10^6 = 3^3.7.11.13.37+1$

Le colleur demande à Arthur : trouvez le maximum de x^y pour x et y dans $\mathbb{N}$ sachant $x+y=8$ (maximum noté μ).
Arthur qui assiste à la colle dit « pour x et y dans $\mathbb{R}$, j'ai mieux que votre μ, avec $x = 3,5$ » ; vérifiez l'affirmation d'Arthur (sachant $7^9 = 40353607$).
Mais Arthur qui passait par là cherche à faire encore mieux ? C'est jouable ?



0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	7	6	5	4	3	2	1	0
8^0	7^1	6^2	5^3	4^4	3^5	2^6	1^7	0^8
1	7	36	125	256	243	64	1	0
$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

Le maximum sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est donc 4^4.

Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, l'élève propose $x = 3,5 = \dfrac{7}{2}$, et donc $y = 4,5 = \dfrac{9}{2}$.

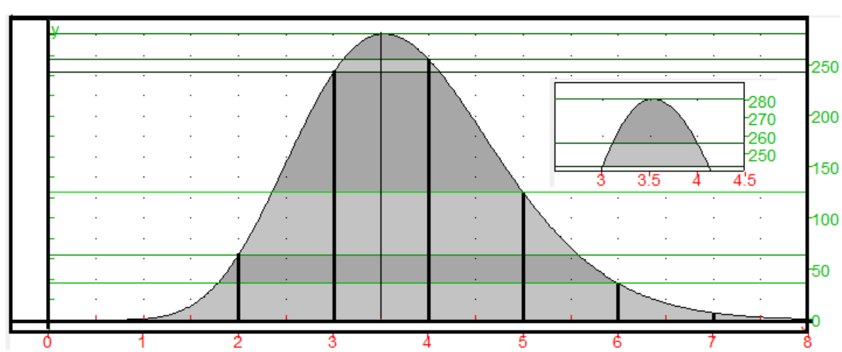
Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on pose donc $y = 8 - x$ et on étudie $(8-x)^x$ comme fonction de x.

Quelle est cette valeur ? $x^y = \left(\dfrac{7}{2}\right)^{9/2} = \sqrt{\dfrac{7^9}{2^9}}$?

On doit comparer 4^4 et $\sqrt{\dfrac{7^9}{2^9}}$. On va calculer leur quotient ou même le quotient de leurs carrés

$$\frac{\frac{7^9}{2^8}}{(4^4)^2} = \frac{7^9}{4^8.2^9} = \frac{7^9}{2^{25}} = \frac{40\,353\,607}{2^{10}.2^{10}.32}$$

à la louche, le dénominateur est juste un peu plus grand que $10^3.10^3.32$ alors que le numérateur dépasse clairement 40.10^6.



Quitte à poser $f = x \longmapsto x^{8-x}$, on a donc

$$f(3,5) > f(4) > f(3)$$

Le sens de variations de l'application f est le même que celui de $x \longmapsto (8-x).\ln(x)$.

On dérive cette application et on trouve $x \longmapsto \dfrac{8-x}{x} - \ln(x)$.

On ne trouve pas de formule pour l'endroit où la dérivée s'annule et change de signe.

En tout cas, pas à l'aide des fonctions usuelles.
Le signe de la dérivée est celui de $x \longmapsto 8 - x - x.\ln(x)$, application dont on peut mesurer elle aussi le sens de variations.
On calcule le signe de la dérivée en $7/2$. On n'a pas 0.
Le maximum n'est pas en $3,5$.

Pour information, il est en 3.535 à 10^{-3} près et vaut à peu près 281.

$x =$	2	3	3.535	3,5	4	5
			280,9			
				280,7		
					256	
		243				
						125
	64					

Bon, on ne va pas poser une multiplication infinie.
On va déjà reconnaître qui sont ces deux rationnels donnés par leur écriture décimale.
On va suivre deux méthodes, pour varier les plaisirs

$10^6.a$	1	1	7	8	5	7	1,	4	2	8	5	7	1	4	2
a							1,	1	7	8	5	7	1	4	2
$10^6.a - a$	1	1	7	8	5	7	0,	2	5	0	0	0	0	0	0

On a donc

$$a = \frac{1\,178\,570,25}{999\,999} = \frac{3^4.5^2.11^2.13.37}{(2.5)^2}.\frac{1}{3^3.7.11.13.37} = \frac{33}{28}$$

De la même façon, $b - 3 = 0,181818\ldots$ et donc $100.(b-3) = 18 + (b-3)$ et $b - 3 = \dfrac{2}{11}$. On a donc $b = \dfrac{35}{11}$.

L'autre méthode, c'est une série géométrique de termes $18.10^{-2.k}$ (raison 10^{-2})

$$b = 3 + \sum_{k=1}^{+\infty} 18.10^{-2.k} = 3 + \frac{18.10^{-2}}{1 - 10^{-2}} = \frac{35}{11}$$

Et la troisième méthode est « on propose/on vérifie ».

La fin de l'exercice, c'est

$$a.b = \frac{33}{28}.\frac{35}{11} = \frac{3.11.7.5}{7.4.11} = \frac{15}{4} = 3.75$$

C'est un décimal avec seulement deux chiffres derrière la virgule.

◁21▷ Complétez la permutation suivant pour que sa signature vaille -1 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & * & 4 & * \end{pmatrix}$. Pouvez vous alors la décomposer à l'aide de $\overrightarrow{1\,2\,3}$ et $\overrightarrow{2\,3\,4}$?
Et si on impose "signature égale à 1" ?

pour que ce soit une permutation, on n'a guère le choix

	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	ou	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
décomposition	$\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)}$		$\overrightarrow{(1\,2\,3\,4)}$
signature	$(-1) \times (-1)$		$(-1)^3$
			c'est elle

Mais on ne peut pas la décomposer avec les tricycles.
$\overrightarrow{(1\,2\,3)}$ et $\overrightarrow{(2\,3\,4)}$ ont pour signature 1. En les composant de multiples façons, on n'aura que des permutations de signature 1 et jamais le quadricycle de signature -1.

En revanche, le double bicycle $\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)}$ peut peut-être se décomposer avec $\overrightarrow{(1\,2\,3)}$ et $\overrightarrow{(2\,3\,4)}$.

Mais on n'en a aucune garantie. Au mieux, la signature ne donne pas de contradiction.
Et alors ? Il peut y en avoir une ailleurs sur un autre invariant que la signature !
Il n'y a que deux façons de prouver qu'une décomposition existe :
- en donner une
- ou raisonner comme un chimiste

Bref, il n'y a qu'une façon de faire : en donner une.

Par exemple $\boxed{\overrightarrow{(1\,2)} \circ \overrightarrow{(3\,4)} = \overrightarrow{(1\,2\,3)} \circ \overrightarrow{(2\,3\,4)}}$

(le premier essai fut le bon, j'ai de la chance !).

◁ 22 ▷ Écrivez un script Python qui pour une permutation sigma donnée (sous forme de liste des images) déterminez le plus long cycle.
Par exemple, pour [0, 3, 8, 1, 9, 6, 4, 10, 2, 7, 5] il répondra [4, 9, 7, 10, 5, 6] (ou [5, 6, 4, 9, 7, 10]) puisque c'est le même.
Comme votre programme devra travailler sur des permutations très longues, il doit être optimisé pour avoir tous les points, et ne pas perdre de temps.

On crée déjà la petite procédure qui pour un élément donné détermine son cycle dans la permutation

```
def cycle_extrait(a, sigma) :
....L = [a]
....while not(sigma[a] in L) :
.........a=sigma[a]
.........L.append(a)
....return L
```

```
def cycle_extrait(a, sigma) :
....aa, L = a, [a]
....while not(sigma[aa] in L) :
.........a=sigma[aa]
.........L.append(aa)
....return L
```

Attention, ce script modifie la valeur de a en cours de programme. Certes, en sortant de la procédure, a reprend sa valeur, mais ce n'est as très poli. On préfèrera donc le script de droite avec variable de sauvegarde.
Ensuite, on parcourt les valeurs de a, on regarde le cycle, et on le compare au plus grand cycle déjà trouvé *(on aura initialisé au cycle de longueur 0, facile à dépasser)*

```
def plus_grand_cycle(sigma) :
....LMax =[]
....LongMax=0
....for a in range(len(sigma)) :
........cycle_a = cycle_extrait(a, sigma)
........Long = len(cycle_a)
........if Long > LongMax :
............LongMax = Long
............LMax = cycle_a
....return LMax
```

Ce script est évidemment un peu brutal, puisque on explore le cycle de chaque élément. Mais plusieurs éléments ont le même cycle. Par exemple pour [0, 3, 8, 1, 9, 6, 4, 10, 2, 7, 5]

qui s'écrit en fait $\overrightarrow{(0)} \circ \overrightarrow{(1\ 3)} \circ \overrightarrow{(2\ 8)} \circ \overrightarrow{(4\ 9\ 7\ 10\ 5\ 6)}$, on sort les listes suivantes :

$a = 0$: [0]	$a = 1$: [1,3]	$a = 2$: [2,8]	$a = 3$: [3,1]	$a = 4$: [4,9,7,10,5,6]	$a = 5$: [5,6,4,9,7,10]

et ainsi de suite. Le cycle déjà croisé pour 4 est revisité pour 5, 6 et les autres.
On pourra donc créer une liste des éléments déjà visités, ou marquer dans une liste les positions déjà visitées (ici, ce sera le rôle de la liste de booléens vierge) :

```
def plus_long-cycle(sigma) :
....LongMax=0
....LMax = []
....vierge = [True for k in range(len(sigma))] #tout est vierge a priori
....for a in range(len(sigma)) : #on va parcourir la liste
........if vierge[a] : #mais on ne prendra que les éléments jamais explorés
............vierge[a] = False
............cycle_a = [a]
............while not(sigma[a] in cycle_a) : #le cycle déjà créée
................a = sigma[a]
................vierge[a] = False #on marque qu'on est passé
................cycle_a.append(a)
............if len(cycle_a) > LongMax :
................LongMax = len(cycle_a)
................LMax = cycle_a
....return LMax
```

◁ 23 ▷ Y a-t-il plus d'applications injectives de S_4 dans S_3 que de parties à 12 éléments dans S_4 *(rappel : $S_n$est l'ensemble des permutations d'un ensemble à n éléments).*

S_3 est de cardinal 6 et S_4 est de cardinal 24.

De A vers B il y a b^a application *(b choix pour chacun des a éléments, d'où b.b . . . b)*.
Mais les applications injectives ? Le premier élément de A a b choix.
Le second élément n'en a plus que $b-1$.
Le suivant en a $b-2$.
Et ainsi de suite, jusqu'au dernier (sauf si $a > b$!).
On a donc 24.23.22.21.20.19 applications injectives de S_6dans S_4 *(et aucune de S_4 dans S_3)*.

Ensuite, on compte les parties à 12 éléments dans S_4 :

$$\binom{24}{12} = \frac{24.23.22.21.19.18.17.16.15.14.13}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}$$

On les compare en effectuant un quotient :

$$\frac{24.23.22.21.20.19}{\dfrac{24.23.22.21.19.18.17.16.15.14.13}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}} = \frac{12!}{13.14.15.16.17.18} = \frac{(12!)^2}{18!}$$

Plus grand que 1 après simplification en $\dfrac{2^4.3^2.5.11}{13.17}$

◁24▷ Trouvez un élément de S_7 vérifiant $\sigma(1) = 7$, $\sigma^3(1) = 5$, $\sigma^5(1) = 1$, $\sigma^5 \neq Id$, $\forall k$, $\sigma^k(4) \neq 2$ et $\exists k$, $\sigma^k(3) = 2$.
Question subsidiaire : combien de solutions ?
Rappel S_n est l'ensemble des $n!$ permutations de la liste $[1,\ 2, \dots n]$.

$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & & & & & & \end{array}$ et 7 est envoyé sur un élément qui ne peut pas être 7 (déjà pris)
ni 1 sinon on aurait $\sigma^2(1) = 1$, puis $\sigma^3(1) = 7$
L'image de 7 (par exemple 2) aura pour image 5.

Il faudra ensuite être envoyé sur un élément pas encore atteint, qui lui même reviendra sur 1.
Par exemple $\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 5 & & & 6 & 1 & 2 \end{array}$ vérifie $\sigma(1) = 7$, $\sigma^3(1) = 5$, $\sigma^5(1) = 1$.

On peut envoyer 3 sur 3 et 4 sur 4. Mais alors on a $\sigma^5 = Id$. On les échange alors.
$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 & 2 \end{array}$ vérifie $\sigma(1) = 7$, $\sigma^3(1) = 5$, $\sigma^5(1) = 1$ et $\sigma^5 \neq Id$.

Et jamais 4 ne pourra aller sur 2 ($\sigma^k(4)$ vaut 3 ou 4 suivant parité).
Mais 3 n'ira jamais non plus sur 2. Et ça c'est dommage.

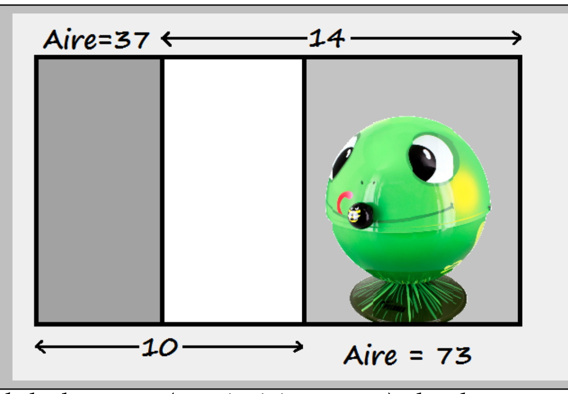
On reprend $1 \ \rightarrow \ 7 \ \rightarrow \ 2 \ \rightarrow \ 5 \ \rightarrow \ 3 \ \rightarrow 1$ qui s'écrit aussi $\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 5 & 1 & & 3 & & 2 \end{array}$.

On permute aussi 6 et 4 pour ne pas avoir $\sigma^5 = Id$.
L'orbite de 4 ne passe pas par 2. l'orbite de 3 passe par 2 : $\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 5 & 1 & 6 & 3 & 4 & 2 \end{array}$ et c'est $\overrightarrow{(1\,7\,2\,5\,3)} \circ \overrightarrow{(4\,6)}$.

Les solutions sont de la forme $\overrightarrow{(1\ 7\ a\ 5\ b)} \circ \overrightarrow{(c\ d)}$.
2 et 4 ne peuvent pas être dans le même cycle.
2 et 3 doivent être dans le même cycle.

$$\begin{array}{rccc} & \overrightarrow{(1\,7\,2\,5\,3)} \circ \overrightarrow{(4\,6)} & \textit{et} & \overrightarrow{(1\,7\,3\,5\,2)} \circ \overrightarrow{(4\,6)} \\ \textit{puis} & \overrightarrow{(1\,7\,4\,5\,6)} \circ \overrightarrow{(2\,3)} & \textit{et} & \overrightarrow{(1\,7\,6\,5\,4)} \circ \overrightarrow{(2\,3)} \end{array}$$

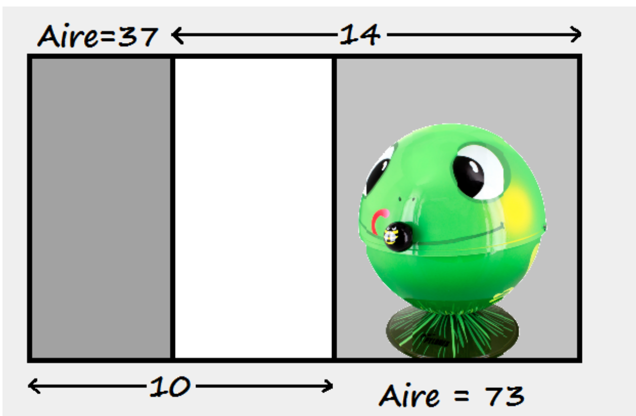
Sur le drapeau de SucriLand, les aires des deux parties grisées sont respectivement de 37 cm^2 et 73 cm^2 (la plus grande pour la tête de Sucri).
Deux longueurs sont connues (10 cm et 14 cm). Donnez l'aire de la partie blanche au milieu.



Donnez le p.g.c.d. de $100^2 - 33^2$ et $99^2 - 32^2$.

---

a est un réel donné. On définit $f = \cos + a.\sin$ et $g = \cos^2 + a.\sin^2$.
◃25▹ Indiquez suivant la valeur de a qui de f et g a le plus grand maximum sur $\mathbb{R}$. Même question avec minimum..



Notons h la hauteur (a priori inconnue) du drapeau, ainsi que a, x et b les largeurs des trois bandes, dans l'ordre.
On a alors rapidement un système, en étudiant les longueurs : $\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & x & = & 10 \\ b & + & x & = & 14 \end{array}\right|$ et les aires : $\left\{\begin{array}{ccccc} a & \times & h & = & 37 \\ b & \times & h & = & 73 \end{array}\right|$.
Et ce qu'on cherche, c'est $x.h$. On a quatre équations pour quatre inconnues, c'est bon, normalement !

On récupère déjà par soustraction : (1) : $b - a = 4$ et (2) : $(b - a).h = 36$.
On divise : $h = 9$ (ou plutôt : $h = 9$ cm).

On multiplie (1) par h puis on somme $\left\{\begin{array}{ccccc} a.h & + & x.h & = & 10.h \\ b.h & + & x.h & = & 14.h \end{array}\right|$: $a.h + b.h + 2.x.h = 24.h$.

Or, le système 2 donnait $a.h + b.h = 110$. Il reste $2.x.h = 24.9 - 110$ et après division : $\boxed{x.h = 53\ cm^2}$

On ne va quand même pas calculer $100^2 - 33^2$?
Si ! C'est $(100 + 33).(100 - 33)$. On peut factoriser : $133.67 = 7.19.67$.

De même, $99^2 - 32^2 = (99 + 32).(99 - 32) = 131.67$.
On a deux décompositions en produit de facteurs premiers. Et le facteur commun. Le p.g.c.d. vaut 67.

L'application $\cos + a.\sin$ se met sous la forme $t \longmapsto \sqrt{1 + a^2}.\cos(t - \varphi)$ pour φ bien choisi. Son maximum vaut $\sqrt{1 + a^2}$ et son minimum $-\sqrt{1 + a^2}$..

Qu'en est il de $\cos^2 + a.\sin^2$? Elle s'écrit $\cos^2 + a.(1 - \cos^2)$ soit encore $a + (1 - a).\cos^2$.
Elle varie donc entre $a + (1 - a)$ (atteint en 0) et a (atteint en $\pi/2$).
Mais qui est le maximum pour elle ? Attention, en effet, $1 - a$ a un signe !

Tout dépend de a.

Pour a plus grand que 1 :	Maximum = a	Minimum = 1
Pour a plus petit que 1 :	Maximum = 1	Minimum = a

et pour a égal à 1, l'application est constante, égale à 1, pas de surprise.

On résume :

f	Pour tout a :	Maximum $\sqrt{1 + a^2}$	Minimum $-\sqrt{1 + a^2}$
g	Pour a plus grand que 1 :	Maximum = a	Minimum = 1
	Pour a plus petit que 1 :	Maximum = 1	Minimum = a

◃26▹ $(G, \times)$ est le groupe $range(1, 17)$ pour la multiplication modulo 17.
Pour tout a de G, on pose $\varphi_a : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & a \times x \end{array}$. Montrez que chaque φ_a est une permutation de $[1,\ 2,\ 16]$ que vous décomposezrez en produit de cycles par habitude.
Existe-t-il des permutations de S_{17} ne s'écrivant pas φ_a ?
Montrez $\forall (a,\ b) \in G^2,\ \varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{b \times a}$.
Montrez que l'ensemble $\{\varphi_1, \ldots \varphi_{16}\}$ est un sous-groupe de $(S_n,\ \circ)$

◁27▷ Un élève étourdi a oublié la signature dans la définition du déterminant d'une matrice de taille n sur n. Il a dfini ce qu'on appelle le permanent

$$per(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)}$$

Quel est le premanent de la matrice unité ?
A-t-on toujours $per(A.B) = per(A).per(B)$ en taille $é$? En taille 3 ?

Vous avez droit à quatre nombres a, b, c et d de somme 1, maximisez le permanent de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

◁28▷ ♣ Vérifiez que l'on définit une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ par $a \blacktriangleleft b$ si $\begin{array}{ccc} a \text{ impair} & \text{et} & b \text{ pair} \\ & \text{ou} & \\ (b-a)/2 & \in & \mathbb{N} \end{array}$. Classez la liste $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$ par ordre croissant. Donnez la borne supérieure de l'ensemble des nombres premiers *(en a-t-il encore une si on travaille sur* $(\mathbb{Z}, \blacktriangleleft)$ *?)*. Donnez la borne supérieure de l'ensemble des nombres impairs. Donnez la borne supérieure de l'ensemble des diviseurs de 2015. L'ensemble des multiples de 3 a-t-il une borne supérieure ?
Rappel : la borne supérieure d'un ensemble est son plus petit majorant. Pour l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$*, la borne supérieure de* $[0, 1[$ *est* 1*. Celle de* $[0, 1]$ *aussi.*

Les entiers impairs sont classés avant les pairs.

Si on veut comparer ensuite deux nombres impairs a et b, le quotient $\dfrac{b-a}{2}$ est entier. Et il est « entier naturel » si et seulement si b est plus grand que a au sens usuel.

Si on veut comparer ensuite deux nombres pairs a et b, le quotient $\dfrac{b-a}{2}$ est entier. Et il est « entier naturel » si et seulement si b est plus grand que a au sens usuel.

On a donc en premier les entiers impairs, classés par ordre croissant pour l'ordre usuel, puis les entiers pairs par ordre croissant aussi pour l'ordre usuel :

$$1 \blacktriangleleft 3 \blacktriangleleft 5 \blacktriangleleft 7 \blacktriangleleft 9 \blacktriangleleft \dots \blacktriangleleft 2019 \blacktriangleleft 2021 \blacktriangleleft \dots\dots 0 \blacktriangleleft 2 \blacktriangleleft 4 \blacktriangleleft 6 \blacktriangleleft 8 \blacktriangleleft 10 \blacktriangleleft \dots \blacktriangleleft 2018 \blacktriangleleft 2020 \blacktriangleleft 2022 \blacktriangleleft \dots$$

$\boxed{R}$ On vérifie qu'un entier n (pair ou impair) vérifie toujours $n \blacktriangleleft n$ pour la raison 2 : $\dfrac{n-n}{2} \in \mathbb{N}$.

$\boxed{T}$ On se donne trois entiers a, b et c et on suppose $a \blacktriangleleft b$ et $b \blacktriangleleft c$. On veut arriver à $a \blacktriangleleft c$.

On commence par traduire les hypothèses : $\begin{array}{ccc} a \text{ impair} & \text{et} & b \text{ pair} \\ & \text{ou} & \\ (b-a)/2 & \in & \mathbb{N} \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} b \text{ impair} & \text{et} & c \text{ pair} \\ & \text{ou} & \\ (c-b)/2 & \in & \mathbb{N} \end{array}$.

Par distributivité de *et* sur *ou* ($(\alpha \text{ ou } \beta) \text{ et } (\gamma \text{ ou } \delta)$ c'est $(\alpha \text{ et } \gamma) \text{ ou } (\alpha \text{ et } \delta) \text{ ou } (\beta \text{ et } \gamma) \text{ ou } (\beta \text{ et } \delta)$), on a quatre cas, qu'il faut étudier/éliminer. Et il faut conclure dans chacun des cas.
Mais attention, c'est seulement une fois qu'on aura étudié tous les cas qu'on pourra conclure (pour certains élèves, c'est l'évidence même, puisque c'est un raisonnement ; pour d'autres qui se disent « c'est des maths, donc ça obéit à une logique propre », ça donne des délires idiots. Mais la logique des maths est la logique que vous utilisez tous les jours. Du moins j'espère).

α *et* γ	(a impair et b pair) et (b impair et c pair)	impossible
α *et* δ	(a impair et b pair) et ($\dfrac{c-b}{2} \in \mathbb{N}$)	(a impair et c pair)
β *et* γ	($\dfrac{b-a}{2} \in \mathbb{N}$) et ($b$ impair et c pair)	(a impair et c pair)
β *et* δ	($\dfrac{b-a}{2} \in \mathbb{N}$) et ($\dfrac{c-b}{2} \in \mathbb{N}$)	($\dfrac{c-a}{2} = \dfrac{c-b}{2} + \dfrac{b-a}{2} \in \mathbb{N}$)

On a utilisé que si $\dfrac{c-b}{2}$ est entier, alors b et c sont de même parité.

$\boxed{A}$ On prend cette fois seulement a et b et on fait deux hypothèses qu'on distribue :

$$\begin{array}{ccc} a \text{ impair} & \text{et} & b \text{ pair} \\ & \text{ou} & \\ (b-a)/2 & \in & \mathbb{N} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} b \text{ impair} & \text{et} & a \text{ pair} \\ & \text{ou} & \\ (a-b)/2 & \in & \mathbb{N} \end{array}$$

On veut arriver à $a = b$ par disjonction de cas (et en éliminant les trois cas absurdes) :

α *et* γ	(a impair et b pair) et (b impair et a pair)	impossible
α *et* δ	(a impair et b pair) et ($\dfrac{a-b}{2} \in \mathbb{N}$)	impossible
β *et* γ	($\dfrac{b-a}{2} \in \mathbb{N}$) et ($b$ impair et a pair)	impossible
β *et* δ	($\dfrac{b-a}{2} \in \mathbb{N}$) et ($\dfrac{a-b}{2} \in \mathbb{N}$)	$b-a$ est à la fois positif et négatif... $a=b$

On a bien une relation d'ordre
Et c'est un ordre total, même si ce n'est pas demandé.

Attention : *Pour rédiger des passages tels que « la relation ◄ est antisymétrique », on fait des maths, c'est à dire qu'on ne se précipite pas sur des calculs ou des formules.*
On y va pas à pas, en introduisant des variables, en faisant des hypothèses et en arrivant à une conclusion.
Schéma :
- *on se donne a, b et c*
- *on suppose a ◄ b et b ◄ c*
- *on traduit en ...*
- *maintenant enfin, on a des formules, des disjonctions de cas, que sais je encore*
- *on arrive à ...*
- *on reconnaît a ◄ c*

Un « raisonnement » qui n'aura pas cette mise en forme sera souvent une bouillie infâme, un polynère de formules, une truc qui préttend avoir l'odeur des maths et ne fait que puer le moins que rien.

Moins grave, la conclusion est « la relation ◄ est transitive »
et non pas « a relation a ◄ b est transitive »
Que font ici a et b ?

Comme les nombres premiers sont tous impairs, sauf 2, on les trie ainsi :
$3 \blacktriangleleft 5 \blacktriangleleft 7 \blacktriangleleft 11 \blacktriangleleft 13 \blacktriangleleft 17 \blacktriangleleft \ldots \blacktriangleleft 2333 \blacktriangleleft 2339 \blacktriangleleft \ldots \blacktriangleleft 2$
Le plus petit est 3 et le plus grand (au sens de cet ordre) est 2.

Les nombres impairs sont plus problématiques. Il n'y a pas de plus grand élément.

Mais tous les nombres pairs en sont des majorants. Et 0 est le plus petit d'entre eux.

Les entiers impairs ont une borne supérieure (non atteinte) : 0
$1 \blacktriangleleft 3 \blacktriangleleft 5 \blacktriangleleft 7 \blacktriangleleft 11 \blacktriangleleft 13 \blacktriangleleft \ldots \blacktriangleleft 2019 \blacktriangleleft 2021 \blacktriangleleft \ldots \blacktriangleleft 0$ et on ne fera pas mieux que 0.

La liste des diviseurs de 2015 : $1 \blacktriangleleft 5 \blacktriangleleft 13 \blacktriangleleft 31 \blacktriangleleft 65 \blacktriangleleft 155 \blacktriangleleft 403 \blacktriangleleft 2015$ par ordre croissant. La borne supérieure est 2015.

L'ensemble des multiples de 3 peut se décrire ainsi :
$3 \blacktriangleleft 9 \blacktriangleleft 15 \blacktriangleleft 21 \blacktriangleleft 27 \blacktriangleleft \ldots \blacktriangleleft 2013 \blacktriangleleft 2019 \blacktriangleleft \ldots \blacktriangleleft 0 \blacktriangleleft 6 \blacktriangleleft 12 \blacktriangleleft \ldots \blacktriangleleft 2016 \blacktriangleleft \ldots$
Il n'a pas de borne supérieure.

◃29▹ ♣ On définit sur $\mathbb{C}$ la relation ◄ par $z \blacktriangleleft z'$ si et seulement si $\left\{ \begin{array}{ccc} (\Re e(a) & < & \Re e(b)) \\ & ou & \\ (\Re e(a) = \Re e(b) & et & \Im m(a) \leq \Im m(b)) \end{array} \right|$.

a - Triez les complexes suivants : $1+i$, 2, $1-3.i$, $4-13.i$, $2.i$ et $-1-7.i$.
b - Montrez que c'est une relation d'ordre *(attention, (p ou q) et (r ou s) c'est (p et r) ou (p et z) ou (q et r) ou (q et s))*.
Pourquoi l'appelle-t-on "*ordre alphabétique*" ou "*lexicographique*" ou "*ordre du dictionnaire*" ?
c - Représentez graphiquement l'ensemble des complexes entre $1+i$ et $1+3.i$.
d - Représentez graphiquement l'ensemble des complexes entre $1+i$ et $3+3.i$.
e - Cette relation d'ordre des elle compatibles avec l'addition ? Est elle compatible avec la multiplication ?

Montrez qu'il ne peut pas exister de relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{C}$ telle que $z \longmapsto z^3$ soit croissante (point de départ : si on avait $i \preccurlyeq (-i)$ alors on aurait... et sinon...).

a - On compare les parties réelles pour faire le tri.
Et quand elles sont égales, on regarde les parties imaginaires.

Ceci permet de commencer le tri : partie réelle

$-1-7.i$	$0+2.i$	$1+i$	$2+0.i$	$4-13.i$
		$1-3.i$		

Puis on finalise pour les deux éléments ayant la même partie réelle, avec leurs parties imaginaires :

$-1-7.i$	$0+2.i$	$1-3.i$	$1+i$	$2+0.i$	$4-13.i$

---

b - On a trois propriétés à vérifier.

$\boxed{\text{R}}$ On se donne un seul complexe a et on vérifie $a \blacktriangleleft a$.

En effet, on a bien $\left\{\begin{array}{ccc} \Re e(a) & < & \Re e(a) \\ & ou & \\ \Re e(a) = \Re e(a) & et & \Im m(a) \leq \Im m(a) \end{array}\right|$ *(juste grâce à la deuxième ligne).*

$\boxed{\text{A}}$ On se donne a et b et on suppose à la fois

$$\left\{\begin{array}{ccc} \Re e(a) & < & \Re e(b) \\ & ou & \\ \Re e(a) = \Re e(b) & et & \Im m(a) \leq \Im m(b) \end{array}\right| \ et \ \left\{\begin{array}{ccc} \Re e(b) & < & \Re e(a) \\ & ou & \\ \Re e(b) = \Re e(a) & et & \Im m(b) \leq \Im m(a) \end{array}\right|$$

On veut arriver à $a = b$ (c'est à dire $\Re e(a) = \Re e(b)$ et $\Im m(a) = \Im m(b)$).

Le schéma $\begin{pmatrix} p \\ ou \\ q \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} r \\ ou \\ s \end{pmatrix}$ se distribue en quatre cas à étudier : $\begin{array}{llll} (p\ et\ r) & & & \\ \ \ ou & (q\ et\ r) & & \\ & \ \ ou & (p\ et\ s) & \\ & & \ \ ou & (q\ et\ s) \end{array}$

(c'est la distributivité, comme $(p+q).(r+s) = (p.r) + (q.r) + (p.s) + (q.s)$).

On étudie les quatre, même si certains vont donner des impossibilités :

$\left\{\begin{array}{ccc} \Re e(a) & < & \Re e(b) \\ & & \\ & & \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \Re e(b) & < & \Re e(a) \\ & & \\ & & \end{array}\right.$	impossible
$\left\{\begin{array}{ccc} \Re e(a) & < & \Re e(b) \\ & & \\ & & \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ \Re e(b) = \Re e(a) & et & \Im m(b) \leq \Im m(a) \end{array}\right.$	impossible
$\left\{\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ \Re e(a) = \Re e(b) & et & \Im m(a) \leq \Im m(b) \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \Re e(b) & < & \Re e(a) \\ & & \\ & & \end{array}\right.$	impossible
$\left\{\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ \Re e(a) = \Re e(b) & et & \Im m(a) \leq \Im m(b) \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ \Re e(b) = \Re e(a) & et & \Im m(b) \leq \Im m(a) \end{array}\right.$	$\Re e(a) = \Re e(b)$ et $\Im m(a) = \Im m(b)$

La seule possibilité est donc bien $a = b$.

$\boxed{\text{T}}$ On suit un schéma assez similaire à celui ci dessus.
On se donne trois complexes qu'on nomme a, b et c.
On suppose $a \blacktriangleleft b$ et $b \blacktriangleleft c$.
On traduit les hypothèses et on cherche à arriver à $a \blacktriangleleft c$.

On suppose donc $\left\{\begin{array}{ccc} \Re e(a) & < & \Re e(b) \\ & ou & \\ \Re e(a) = \Re e(b) & et & \Im m(a) \leq \Im m(b) \end{array}\right|$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \Re e(b) & < & \Re e(c) \\ & ou & \\ \Re e(b) = \Re e(c) & et & \Im m(b) \leq \Im m(c) \end{array}\right|$

On distribue là encore :

$\left\{\begin{array}{ccc} \Re e(a) & < & \Re e(b) \\ & & \\ & & \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \Re e(b) & < & \Re e(c) \\ & & \\ & & \end{array}\right.$	$\Re e(a) < \Re e(b) w < \Re e(c)$ et *des trucs*	$\Re e(a) < \Re e(c)$
$\left\{\begin{array}{ccc} \Re e(a) & < & \Re e(b) \\ & & \\ & & \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ \Re e(b) = \Re e(c) & et & \Im m(b) \leq \Im m(c) \end{array}\right.$	$\Re e(a) < \Re e(b) = \Re e(c)$ et *des trucs*	$\Re e(a) < \Re e(c)$
$\left\{\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ \Re e(a) = \Re e(b) & et & \Im m(a) \leq \Im m(b) \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \Re e(b) & < & \Re e(c) \\ & & \\ & & \end{array}\right.$	$\Re e(a) = \Re e(b) < \Re e(c)$ et *des trucs*	$\Re e(a) < \Re e(c)$
$\left\{\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ \Re e(a) = \Re e(b) & et & \Im m(a) \leq \Im m(b) \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ \Re e(b) = \Re e(c) & et & \Im m(b) \leq \Im m(c) \end{array}\right.$	$\Re e(a) = \Re e(b) = \Re e(c)$ et $\Im m(a) \leqslant \Im m(b) \leqslant \Im m(c)$	$\Re e(a) = \Re e(c)$ et $\Im m(a) \leqslant \Im m(c)$

Dans les quatre cas, on a bien $a \blacktriangleleft c$.

Ayant R, A et T, on a une relation d'ordre.

Montrons que cet ordre est total[4] : $\forall (a,\ b) \in \mathbb{C}^2,\ ((a \blacktriangleleft b)\ ou\ (b \blacktriangleleft a))$.
On prend deux complexes a et b.
On extrait les deux parties réelles qu'on note α et β.

4. pardon, j'ai oublié de le demander dans l'énoncé ?

Comme l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$ est total, on a trois possibilités (s'excluant mutuellement) :

$\alpha < \beta$	$\alpha = \beta$	$\alpha > \beta$

Dans les deux cas extrêmes, on peut conclure :

$\alpha < \beta$	$\alpha = \beta$	$\alpha > \beta$
$(a \blacktriangleleft b)$	à voir	$(b \blacktriangleleft a)$

Dans le cas médian, il faut encore comparer les deux parties imaginaires.
Là encore, comme l'ordre usuel $\leqslant$ est total sur $\mathbb{R}$, on a trois possibilités et chacune permet de conclure

$\alpha < \beta$	$\alpha = \beta$			$\alpha > \beta$
$(a \blacktriangleleft b)$	$\Im m(a) < \Im m(b)$	$\Im m(a) = \Im m(b)$	$\Im m(a) > \Im m(b)$	$(b \blacktriangleleft a)$
	$(a \blacktriangleleft b)$	$(a \blacktriangleleft b)$ et $(b \blacktriangleleft a)$	$(b \blacktriangleleft a)$	

On peut conclure dans tous les cas.

Toujours des questions sans calcul, mais où on bâtit un raisonnement.
On teste donc votre capacité à être ingénieur, et c'est tout.
On notera que le tableau est bien mieux qu'un long discours et étudie bien tous les cas.

Les complexes a entre $1+i$ et $1+3.i$ doivent vérifier deux critères

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1 & < & \Re e(a) \\ & ou & \\ 1 = \Re e(a) & et & 1 \leq \Im m(a) \end{array}\right| \quad et \quad \left\{\begin{array}{ccc} \Re e(a) & < & 1 \\ & ou & \\ \Re e(a) = 1 & et & \Im m(a) \leq 3 \end{array}\right|$$

Si on distribue là encore les quatre cas, on en trouve trois qui sont incompatibles, comme

$1 < \Re e(a)$	et	$\Re e(a) < 1$
$1 < \Re e(a)$	et	$1 = \Re e(a)$ et ...

Il ne reste que le couplage

$1 = \Re e(a)$ et $1 \leq \Im m(a)$	et	$1 = \Re e(a)$ et $1 \leq \Im m(a) \leqslant 3$

Ce sont donc les complexes de la forme $1 + i.y$ avec y entre 1 et 3 (segment « vertical »).

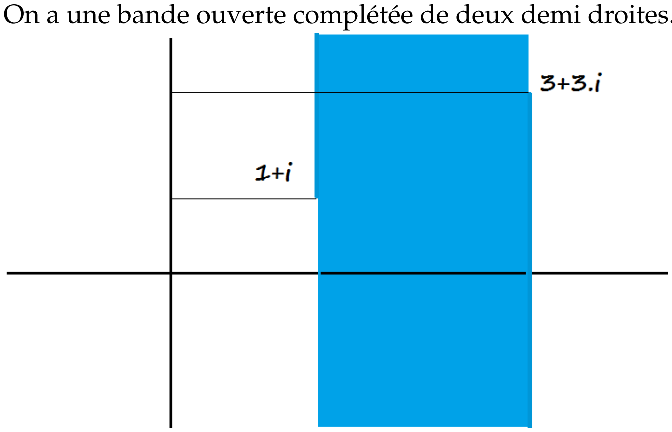
Les complexes a entre $1+i$ et $3+3.i$ doivent vérifier deux critères

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1 & < & \Re e(a) \\ & ou & \\ 1 = \Re e(a) & et & 1 \leq \Im m(a) \end{array}\right| \quad et \quad \left\{\begin{array}{ccc} \Re e(a) & < & 3 \\ & ou & \\ \Re e(a) = 3 & et & \Im m(a) \leq 3 \end{array}\right|$$

On distribue les quatre cas,

$1 < \Re e(a)$ et $\Re e(a) < 3$	$1 < \Re e(a)$ / $\Re e(a) = 3$ et $\Im m(a) \leqslant 3$	$\Re e(a) = 1$ et $1 \leqslant \Im m(a)$ / $\Re e(a) < 3$	$\Re e(a) = 1$ et $1 \leqslant \Im m(a)$ / $\Re e(a) = 3$ et $\Im m(a) \leqslant 3$
bande verticale	demi droite $x = 3$ et $y \leqslant 3$	demi droite $x = 1$ et $1 \leqslant y$	fous toi de moi

On a une bande ouverte complétée de deux demi droites.



Prenons trois complexes a, b et c.
Supposons $a \blacktriangleleft b$, et regardons si on peut ajouter c de chaque côté et conserver l'inégalité :

On suppose donc $\left\{\begin{array}{ccc} \Re e(a) & < & \Re e(b) \\ & ou & \\ \Re e(a) = \Re e(b) & et & \Im m(a) \leq \Im m(b) \end{array}\right|$.

Si on a $\Re e(a) < \Re e(b)$ alors on a $\Re e(a+c) < \Re e(b+c)$ et donc $(a+c) \blacktriangleleft (b+c)$.
Si on a $\Re e(a) = \Re e(b)$ et $\Im m(a) \leq \Im m(b)$ alors on a $\Re e(a+c) = \Re e(b+c)$ et $\Im m(a+c) \leq \Im m(b+c)$ et donc $(a+c) \blacktriangleleft (b+c)$.

Dan,s les deux cas, on a $(a+c) \blacktriangleleft (b+c)$.
La relation $\blacktriangleleft$ est compatible avec la loi $+$.

Pour la loi $\times$ c'est raté. On a $1 \blacktriangleleft 2$ mais on n'a plus $1 \times (-2) \blacktriangleleft 2 \times (-2)$.
Même pas besoin d'aller chercher dans $\mathbb{C}$.

◃30▹ On rappelle que sur $\mathbb{R}$, la relation d'égalité est une relation d'ordre (ordre partiel évidemment). Montrez que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide, majorée pour l'égalité admet une borne supérieure (plus petit majorant pour l'égalité).

Adjugé, elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Pour l'antisymétrie, la chose à prouver est :
$\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ (a = b \text{ et } b = a) \Rightarrow (a = b)$.
Et c'est bien vrai !
Et ce n'est pas incompatible avec la symétrie qui dit
$\forall (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ (a = b) \Rightarrow (b = a)$.

Qu'est ce qu'une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée pour l'égalité.

Rappelons « majorée pour une relation $\dashv$: $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ a \dashv M$.
Et donc majorée pour l'égalité c'est $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ a = M$.

L'ensemble A n'a qu'un élément : ce « majorant » M.

Mais alors, comme A est un singleton $\{M\}$, l'ensemble de ses « majorants » se réduit aussi à cet élément unique.
Et le « plus petit majorant » est M lui même.

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée est un singleton $\{M\}$ et admet pour borne supérieure cet élément M lui même.

◃31▹ ♣ L'application $n \longmapsto a_n$ est une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ *(telle par exemple que la suite de Stern-Brocott)*. On se donne ε strictement positif. Montrez que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n - \varepsilon.2^{-n-2},\ a_n + \varepsilon.2^{-n-2}]$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Q}$ et dont la longueur totale ne dépasse pas ε.

Chaque intervalle est de longueur $2.\varepsilon.2^{-n-2}$.
On somme ces longueurs (même si certains intervalle se superposent, on aura un majorant de la longueur totale).
On obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon.2^{-n-1}$ ce qui fait ε.
Chaque rationnel est dans un de ces intervalles (celui qui est centré sur lui) et même dans d'autres peut être.
Bilan, on a enfermé $\mathbb{Q}$ dans une ensemble dont la longueur ne dépasse pas $2.\varepsilon$! C'est fou !

◃32▹ ♡ Résolvez $\sum_{k=n+1}^{2.n} k \geqslant 10^5$.

Résolvez $2.\sum_{k=n}^{2.n} k^3 \geqslant 15.\sum_{k=0}^{n^2} k$.

$\sum_{k=n+1}^{2.n} k \geqslant 10^5$ est la somme des termes d'une suite arithmétique.

Il y a n termes, et la moyenne des extrêmes vaut $\dfrac{2.n+n+1}{2}$.

Si vous préférez : $\sum_{k=n+1}^{2.n} k = \sum_{k=0}^{2.n} k - \sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{2.n.(2.n+1)}{2} - \dfrac{n.(n+1)}{2}$.
Sinon j'ai aussi : $\sum_{k=n+1}^{2.n} k = \sum_{p=1}^{n} (p+n) = \sum_{p=1}^{n} p + \sum_{p=1}^{n} n = \dfrac{n.(n+1)}{2} + n.n$.

On résout donc $\dfrac{n.(3.n+1)}{2} \geqslant 10^5$ soit encore $3.n^2 + n - 2.10^5 \geqslant 0$.
On trouve deux racines de signe opposé. Par cohérence, on va demander d'être plus grand que la racine positive

: $n \geqslant \dfrac{-1+\sqrt{1+24.10^5}}{6}$.

Il faut et suffit que n dépasse 258, *poussieres*. On n'y peut rien : $\boxed{S = [259,\ +\infty[}$

Vérification pythonienne : $\sum_{k=258}^{2.258} k = 99\,975$ *et* $\sum_{k=259}^{2.259} k = 100\,751$.

Pour l'exercice suivant, on utilise encore les formules du cours :

$$2.\sum_{k=n}^{2.n} k^3 \geqslant 15.\sum_{k=0}^{n^2} k \Leftrightarrow 2.\Big(\frac{2.n.(2.n+1)}{2}\Big)^2 - 2.\Big(\frac{n.(n+1)}{2}\Big)^2 \geqslant 15.\frac{n^2.(n^2+1)}{2}$$

On note qu'on a des polynômes de degré 4 de chaque côté. Mais les termes en n^4 se simplifient.

Tous calculs faits : $9.n^3 - 6.n^2 \geqslant 0$.

C'est vrai dès le rang 1 ! Trop fort.

◁33▷ ♣ (a_n) est une suite d'entiers naturels. On suppose : $((a_n)!)$ est croissante, $(a_{n!})$ est décroissante et a_{12} vaut 12 que vaut a_{2019} ?

(a_n) est une suite d'entiers naturels. On peut donc définir $(a_n)!$ pour tout entier naturel n. Pour que cette suite soit croissante, il faut et il suffit, « par composition inverse » que (a_n) soit croissante. A un petit détail près : la suite peut « s'amuser un certain temps » à prendre les valeurs 0 et 1 ; l'application avec des factorielles sera croissante, car constante. Mais comme un terme vaut 12, la suite est contrainte de croitre (mais elle pourrait faire des bêtises du style

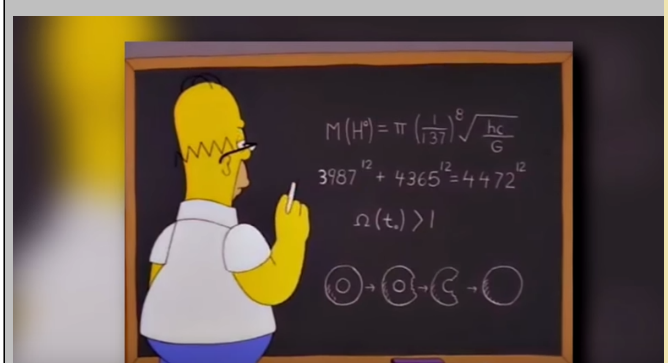
$$(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 12,\ldots)$$

et par la fonction factorielle, on obtiendrait

$$(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 24,\ 479001600,\ldots)$$

Mais la suite « extraite » $(a_1,\ a_1,\ a_2,\ a_6,\ a_{24},\ a_{120},\ \ldots)$ devrait décroître. Or, la voici extraite d'une suite croissante.
Elle est donc à la fois croissante et décroissante. Elle est constante.
La suite croissante contient une suite constante.
Comme un terme vaut 12, $\boxed{\text{ils valent tous 12}}$

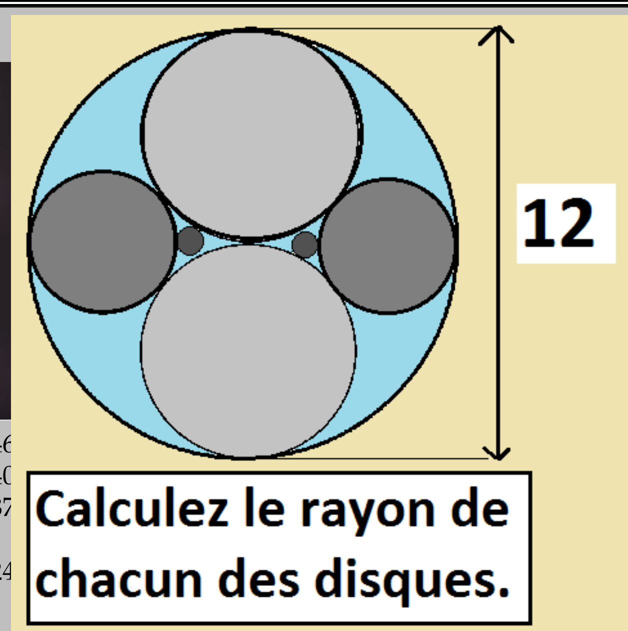
Une remarque d'ailleurs, due à monsieur Pierre de Fermat : comment la suite d'entiers naturels $(a_{n!})$ peut elle décroitre sans devenir stationnaire ?



$3987^{12} = 161344746097512912834964919705151517153466$
$4365^{12} = 4784218173994732133273973898263933618164 0$
somme $= 6397665634969861261623623095315448789698 7$

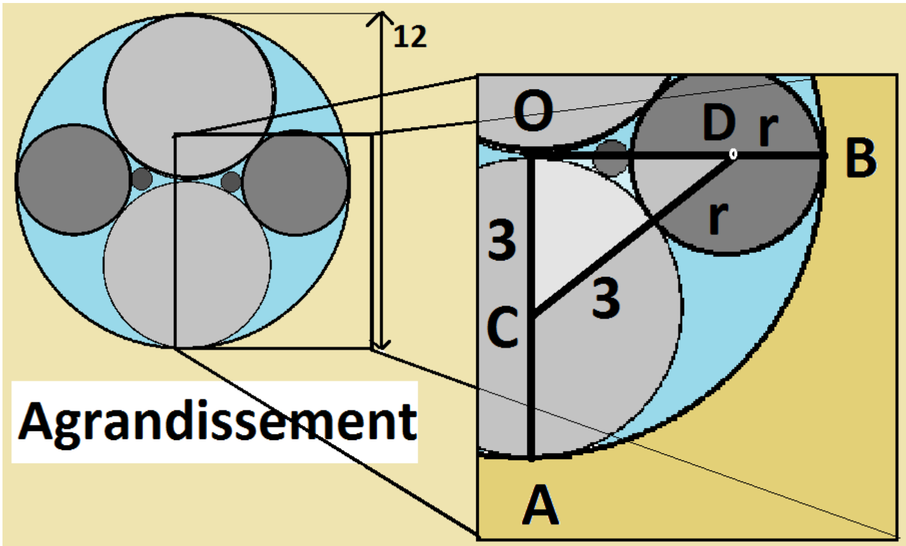
$4472^{12} = 6397665634848672580686235832216857578412 4$
Erreur relative : 2×10^{-11}

◁34▷



Exercice sans rapport.

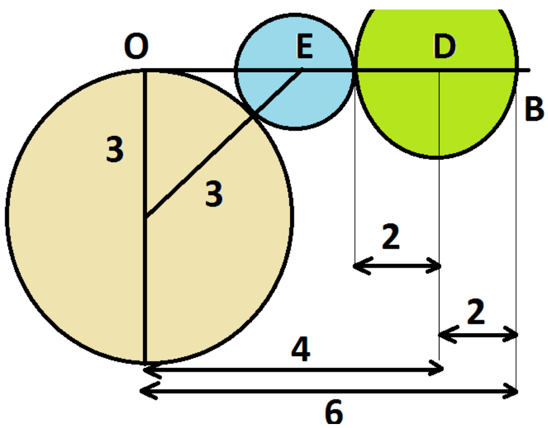
A gauche, les Simpsons rendent hommage au théorème de Fermat.



Le grand disque a pour diamètre 12 et donc pour rayon 6.
Les deux disques moyens ont chacun pour rayon 3 et diamètre 6.
On ne connaît pas le rayon des disques de droite et gauche, on le note r *(par symétrie, le même pour les deux)*.
On nomme O le centre du grand disque, C le centre du disque moyen du bas et D le centre du disque petit de droite.

On a immédiatement $OA = 6$ *(diamètre)* et $OC = 3$ (rayon).
On a aussi $OB = 6$ *(diamètre)* et $DB = r$ *(rayon du petit disque)* et $OD = 6 - r$ *(différence)*.
On a aussi $CD = r + 3$ *(somme des deux rayons quand les disques sont tangents)*.
Le théorème de Pythagore dans le triangle $(D\ O\ C)$ *(rectangle en O)* donne : $(r+3)^2 = 3^3 + (6-r)^2$.
On simplifie par 9 et par r^2 : $6.r = 36 - 12.r$. On simplifie : $\boxed{r = 2}$

On note que le triangle est alors un célèbre $(3,\ 4,\ 5)$ *pythagoricien.*



On travaille alors avec les tout-petits disques.
On note ρ leurs rayons. On note E le centre d'un tout petit disque, sur le segment $[O,\ D]$.
Par condition de tangence : $ED = 2 + \rho$.
Par soustraction : $OE = 4 - (2 + \rho) = 2 - \rho$.
Par condition d'alignement aussi : $CE = 3 + \rho$.
On fait encore appel au théorème de Pythagore dans $(E\ O\ C)$: $(3+\rho)^2 = 3^2 + (2-\rho)^2$.

On simplifie encore $\boxed{\rho \text{ vaut } \frac{2}{5}}$

Ce type d'exercice de géométrie est un SANGAKU *(littéralement tablettes mathématiques). Il s'agissait de tablettes de bois votives présentes dans certains temples japonais et figurant des énigmes de géométrie euclidienne gravées. Ces objets établissaient un lien avec la vie artistique et la vie religieuse par le biais des mathématiques. Elles apparurent durant l'époque d'Edo (1603-1867) et fabriquées par des membres de toutes les classes sociales. Les sangaku étaient peints en couleur sur des tablettes de bois suspendues à l'entrée de temples et d'autels shintoïstes (Jinja) en offrande aux divinités locales1 . Selon certaines sources, il s'agissait de montrer le talent d'un maître mathématicien à la vue du plus grand nombre. (Wikipedia).*

◁ 35 ▷ Le professeur propose un chalenge à ses cent élèves. Ils sont numérotés de 1 à 100 et chacun connaît son numéro. Ils sont tous appelés un à un (et une seule fois) dans le bureau du professeur où se trouve une commode avec 100tiroirs numérotés de 1 à 100.
Le professeur a placé de façon aléatoire dans chaque tiroir un papier portant le numéro d'un prisonnier. Chaque tiroir contient un numéro, et chaque prisonnier a son numéro dans un tiroir.
Chaque élève ne peut ouvrir que cinquante tiroirs (qu'il refermera ensuite).
Il faut qu'il trouve son propre numéro dans un des cinquante tiroirs pour gagner.
Les élèves ne peuvent communiquer entre eux pendant l'épreuve, ne savent pas qui a déjà été appelé, et n'ont pas le droit de déplacer les papiers dans les tiroirs.
Ils gagnent si ils trouvent tous leur numéro.
Ils peuvent communiquer avant l'épreuve pour élaborer une stratégie.

Montrez que la probabilité qu'ils gagnent est de toutes façons inférieure ou égale à 50%.

Première stratégie : ils ouvrent tous cinquante tiroirs au hasard. Probabilité qu'ils gagnent ?

Seconde stratégie : ils ouvrent tous les même cinquante tiroirs du haut. probabilité qu'ils gagnent ?

Troisième stratégie : chaque prisonnier k ouvre le tiroir numéroté k, sort le papier qui porte alors un numéro $\sigma(k)$. Si $\sigma(k)$ vaut k, il a gagné, et ouvre quarante neuf tiroirs pour obéir à la règle mais il s'en fout. Sinon, il ouvre le tiroir $\sigma(k)$ et regarde le papier. Il ouvre alors le tiroir portant le numéro de ce papier et ainsi de suite jusqu'à avoir ouvert 50 tiroirs.
Montrez que la probabilité de gagner est liée à la probabilité qu'une permutation de S_{100} ne contienne aucun cycle de longueur plus grande que 50.

Déduisez que la probabilité de gagner est $1-\sum\limits_{k=51}^{100}\dfrac{1}{k}$.

Application numérique ?

Estimation de cette probabilité $1-\sum\limits_{k=n+1}^{2.n}\dfrac{1}{k}$ quand n tend vers l'infini ?

(exercice piqué à Guillaume et Clément Deslandes).

◁ 36 ▷ Montrez que la relation « divise » est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$ (R.A.T.).
Montrez que $\mathbb{N}-\{0,\ 1\}$ n'a alors pas de plus petit élément pour cette relation d'ordre.
Montrez qu' »en général » $\{a,\ b\}$ n'a pas de plus petit élément, mais a son plus grand minorant : $p.g.c.d.(a,\ b)$.

◁ 37 ▷

Déterminez ces quatre Sup/Inf		
	$a = Sup\{\sin(Arctan(x)) \mid x\in\mathbb{R}^+\}$	$\alpha = Sup\{Arctan(\sin(x)) \mid x\in\mathbb{R}^+\}$
	$b = Inf\{\sin(Arctan(x)) \mid x\in\mathbb{R}^+\}$	$\beta = Inf\{Arctan(\sin(x)) \mid x\in\mathbb{R}^+\}$

$a = Sup\{\sin(Arctan(x)) \mid x\in\mathbb{R}^+\} = 1$	majorant vers lequel on tend en $+\infty$
$b = Inf\{\sin(Arctan(x)) \mid x\in\mathbb{R}^+\}$	minorant atteint en 0

puis

$\alpha = Sup\{Arctan(\sin(x)) \mid x\in\mathbb{R}^+\} = \dfrac{\pi}{4}$	atteint de multiples fois quand le sinus vaut 1
$\beta = Inf\{Arctan(\sin(x)) \mid x\in\mathbb{R}^+\} = \dfrac{-\pi}{4}$	atteint de multiples fois quand le sinus vaut -1

◁ 38 ▷ Pour a et b dans $\mathbb{Z}$, on pose $a \blacktriangleleft b$ si et seulement si on a $\pi.a+[\pi.b] \leqslant \pi.b+[\pi.a]$ *(les crochets désignent la partie entière)*. Montrez que c'est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$. Pour information , j'ai classé les entiers de 0 à 20 :
$0 \blacktriangleleft 15 \blacktriangleleft 8 \blacktriangleleft 1 \blacktriangleleft 16 \blacktriangleleft 9 \blacktriangleleft 2 \blacktriangleleft 17 \blacktriangleleft 10 \blacktriangleleft 3 \blacktriangleleft 18 \blacktriangleleft 11 \blacktriangleleft 4 \blacktriangleleft 19 \blacktriangleleft 12 \blacktriangleleft 5 \blacktriangleleft 13 \blacktriangleleft 6 \blacktriangleleft 14 \blacktriangleleft 7$
Justifiez que 0 est bien le plus petit de tous les entiers.

C'est un peu une question de cours. On doit rappeler les définitions de la relation d'ordre : « réflexive, antisymétrique et transitive ». Mais rappeler les définitions sans que ce soit sur un exemple n'est que récitation stérile.
Réflexive. On se donne a et on vérifie $a \blacktriangleleft a$: en effet $\pi.a+[\pi.a] \leqslant \pi.a+[\pi.a]$ (il y a même égalité).

On rappelle que la preuve consiste à écrire $\forall a\in\mathbb{Z},\ a \blacktriangleleft a$ en effet $\forall a\in\mathbb{Z},\ \pi.a+[\pi.a] \leqslant \pi.a+[\pi.a]$.
On n'argumente pas par $\forall a\in\mathbb{Z},\ (a \blacktriangleleft a \Leftrightarrow \pi.a+[\pi.a] \leqslant \pi.a+[\pi.a])$ puisque là, vous écrivez juste une définition. Et une définition est vraie.
On notera que la proposition suivante est correcte : $\forall a\in\mathbb{Z},\ (a \not\blacktriangleleft a \Leftrightarrow \pi.a+[\pi.a] > \pi.a+[\pi.a])$ puisque Faux $\Leftrightarrow$ Faux est vrai !

Antisymétrique. On prend a et b. On suppose $a \blacktriangleleft b$ et en même temps $b \blacktriangleleft a$.Il faut aboutir à $a=b$. On traduit l'hypothèse : $\pi.a+[\pi.b] \leqslant \pi.b+[\pi.a]$ et aussi $\pi.b+[\pi.a] \leqslant \pi.a+[\pi.b]$. On déduit $\pi.b+[\pi.a] = \pi.a+[\pi.b]$. Mais pas encore $a=b$... Il ne faut pas s'arrêter à « j'ai obtenu une égalité quelquepart, je suis heureux ».

On fait passer de l'autre côté : $\pi.(b-a) = [\pi.b]-[\pi.a]$. Si a n'est pas égal à b, on divise : $\pi = \dfrac{[\pi.b]-[\pi.a]}{b-a}$.
πserait rationnel, comme quotient de deux entiers. C'est contradictoire. La seule solution est $a=b$.

Transitive. On se donne a, b et c. On suppose $a \blacktriangleleft b$ et $b \blacktriangleleft c$. Il faut arriver à $a \blacktriangleleft c$.
On traduit les hypothèses : $\pi.a+[\pi.b] \leqslant \pi.b+[\pi.a]$ et $\pi.b+[\pi.c] \leqslant \pi.c+[\pi.b]$.
On somme les deux hypothèses pour avoir des $\pi.a$ et des $[\pi.c]$ dans le premier membre : $(\pi.a+[\pi.b])+(\pi.b+[\pi.c]) \leqslant (\pi.b+[\pi.a])+(\pi.c+[\pi.b])$.
On simplifie par $\pi.b+[\pi.b]$ et on a bien $\pi.a+[\pi.c] \leqslant \pi.c+[\pi.a]$ c'est à dire $a \blacktriangleleft c$.

Pour tout entier n, on a $0 \blacktriangleleft n$ puisque $0.\pi-[0.\pi] = 0 \leqslant n.\pi-[n.\pi]$ puisque la partie décimale d'un réel est toujours positive ou nulle.

◁39▷ ♣ On appelle élément simple tout rationnel de la forme $\frac{a}{p^b}$ avec a entre 0 et $p-1$ et l'exposant b entier naturel.
On appelle aussi éléments simples les entier relatifs. On affirme que tout rationnel se décompose en somme d'éléments simples.

Exemples :

$\frac{11}{15}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$	$\frac{22}{15}=\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$	$\frac{32}{15}=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{5}$	$\frac{13}{25}=\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}$

Décomposez en éléments simples

$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{17}{21}$	$\frac{173}{49}$	$\frac{11}{52}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{123}{60}$

$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{17}{21}$	$\frac{173}{49}$	$\frac{11}{52}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{123}{60}$
$\frac{5}{7}$	$1+\frac{5}{7}$	$-2+\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}+\frac{2}{3}$	$3+\frac{3}{7}+\frac{5}{49}$	$-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{6}{13}$	$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$	

Le premier est déjà un élément simple.
Le second déborde un peu au dessus d'un entier. On prend sa partie entière plus un élément simple.
Pour le troisième, il faut se méfier : la partie entière de $\frac{-12}{7}$ est bien -3.
Pour le quatrième, on décompose le dénominateur, et on cherche a et b pour avoir $\frac{a}{7}+\frac{b}{3}=\frac{17}{21}$. $3.a+7.b=17$, qu'est ce que Bézout en pense ?
Pour $\frac{173}{7^2}$, on décompose : $173=3\times 49+3\times 7+5$. C'est « basique ».
Sachant $52=2^2\times 13$, on pose a priori $\frac{11}{52}=\frac{a}{4}+\frac{b}{13}$, .

on trouve $\frac{11}{52}=\frac{3}{4}-\frac{7}{13}$

et on avance pas à pas en redecomposant $\frac{11}{52}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{7}{13}$

enfin, on efface le signe moins $\frac{11}{52}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-1+\frac{6}{13}$

De même $\frac{11}{12}=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$ car $11=1.3+.4$.

8 divisé par 2 donne

division	mathématique	horizontale	verticale
résultat	4	$_o$ et ^{o}	ε et 3

. Justifiez : $e^{i.\pi/2}.8=\infty$.

◁40▷ Montrez par récurrence sur le cardinal que toute partie finie de $\mathbb{Z}$ a un plus petit élément.

◁41▷ ♡ Retrouvez les coefficients : $\frac{X^2+X+1}{X^3-\ldots X^2-\ldots X+6}=\frac{\ldots}{X-1}+\frac{\ldots}{X+2}+\frac{\ldots}{X-3}$.

$X^3-\ldots X^2-\ldots X+6=(X-1).(X+2).(X-3)$.
Ensuite, on nomme les trois coefficients cherchés et on réduit au dénominateur commun :
$\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+2}+\frac{c}{X-3}=\frac{a.(X+2).(X-3)+b.(X-1).(X-3)+c.(X-1).(X+2)}{(X-1).(X+2).(X-3)}$
Raisonnons par condition nécessaire et suffisante :
$X^2+X+1=a.(X+2).(X-3)+b.(X-1).(X-3)+c.(X-1).(X+2)$.
Puis par condition nécessaire : en 1 : $1^2+1+1=a.(1+2).(1-3)+b.0.(1-3)+c.0.(1+2)$
en -2 : $(-2)^2-2+1=a.0.(-2-3)+b.(-2-1).(-2-3)+c.(-2-1).0$
en 3 : $3^2+3+1=a.(3+2).0+b.(3-1).0+c.(3-1).(3+2)$
On trouve a, b et c par conditions nécessaires. On vérifie en développant.

Finalement : $\boxed{\frac{X^2+X+1}{X^3-2.X^2-5.X+6}=\frac{-1/2}{X-1}+\frac{1/5}{X+2}+\frac{13/10}{X-3}}$

◁42▷ J'ai deux informations sur la suite u : voici ses premiers termes

n	0	1	2	3	4	5
u_n	9	-8	46	-2		

et elle est de la forme $\exists(a,\ b)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n,\ u_{n+2}=a.u_{n+1}+b.u_n$.
Trouvez a et b. Retrouvez les termes qui manquent.

On a un système pour la formule $u_{n+2}=a.u_{n+1}+b.u_n$:

n	0	1	2	3	4	5
u_n	9	-8	46	-2		
			$-8.a+9.b=46$	$46.a-8.b=-2$		

Deux équations pour trois inconnues, c'est exactement ce qu'il nous faut : $\begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 46 & -8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ -2 \end{pmatrix}$

Erreur : *Pardon, on avait juste deux inconnues, et pas trois comme j'indique ?*
Oui, a et b. Mais il y a aussi cette fille que vous croisez tous les matins dans le métro et qui peut être vous sourit sous son masque, inconnue, mais troublante.

Soit qu'on inverse la matrice : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 46 & -8 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 46 \\ -2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{64-9.46} \begin{pmatrix} -8 & -9 \\ -46 & -8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 46 \\ -2 \end{pmatrix}$

Soit qu'on combine : $\begin{array}{rrcrl} -8.a & +9.b & = & 46 & L1 \\ 46.a & -8.b & = & -2 & L2 \\ 350.a & & = & 8.46-2.9 & 8.L1+9.L2 \end{array}$: $\boxed{a \text{ vaut } 1 \text{ et } b \text{ vaut } 6}$

$\forall n,\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6.u_n$ et on complète « à la main » :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	9	-8				
	6.9	-8	$=46$			
		$6.(-8)$	$+46$	$=-2$		
			6.46	$+(-2)$	$=274$	
				$6.(-2)$	$+274$	$=262$

◁43▷ ♡ Dérivez $x \longmapsto Arctan(3.\tan(x))$ *(utilisez plutôt $t' = 1/c^2$).*
♠ Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)+4.\sin^2(\theta)}$.
♣ Calculez aussi $\displaystyle\int_0^{2.\pi} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)+4.\sin^2(\theta)}$.

Attention : on peut simplifier $\tan(3.\theta)$ (l'exprimer à l'aide de $\tan(\theta)$)
on ne peut pas simplifier $Arctan(3.t)$
on ne peut pas simplifier $Arctan(3.\tan(t))$

Avec domaine de définition $]-\pi/2,\ \pi/2[$ pour éviter tout litige, on dérive une composée :

x	$\longmapsto$	$\tan(x)$	$\longmapsto$	$3.\tan(x)$	$\longmapsto$	$Arctan(3.\tan(x))$
	tan		fois trois		$Arctan$	
	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$		3		$\dfrac{1}{1+(3.\tan(x))^2}$	

On effectue le produit (dérivation de composée) : $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^é(x)}.3.\dfrac{1}{1+\left(3.\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2}$.

On simplifie et trouve

$$x \longmapsto \frac{3}{\cos^2(x)+9.\sin^2(x)}$$

Et pourquoi pas $x \longmapsto \dfrac{3}{1+8.\sin^2(x)}$ en remplaçant $\cos^2$ par $1-\sin^2$.

Comment exploiter ce qui précède ? Avec 4 à la place de 9 ?

x	$\longmapsto$	$\tan(x)$	$\longmapsto$	$2.\tan(x)$	$\longmapsto$	$Arctan(2.\tan(x))$
	tan		fois trois		$Arctan$	
	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$		3		$\dfrac{1}{1+(2.\tan(x))^2}$	

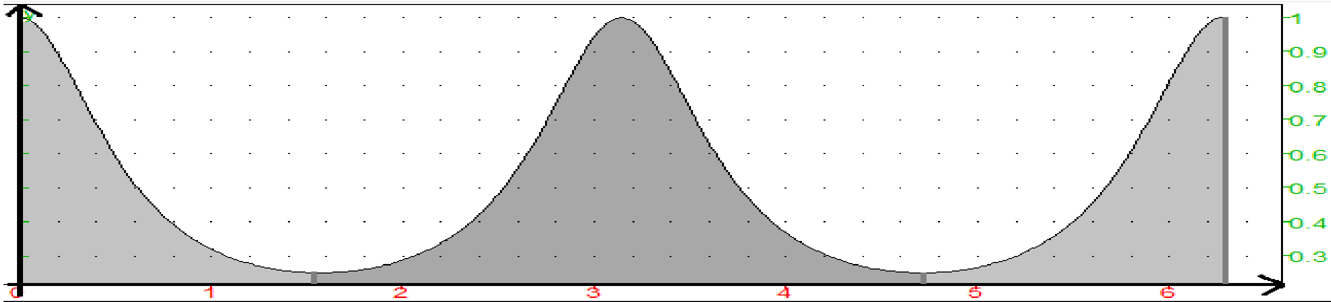
On a prouvé ainsi $\left(x \longmapsto Arctan(2.\tan(x))\right)' = \left(x \longmapsto \dfrac{2}{\cos^2(x)+4.\sin^2(x)}\right)$.

On intègre donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)+4.\sin^2(\theta)} = \left[\frac{1}{2}.Arctan(2.\tan(x)\right]_0^{\pi/4} = \frac{Arctan(2)}{2}}$

Si on veut appliquer la formule de 0 à $2.\pi$, on trouve

$$\int_0^{2.\pi} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)+4.\sin^2(\theta)} = \left[\frac{1}{2}.Arctan(2.\tan(x)\right]_0^{2.\pi} = 0$$

Et ce n'est pas cohérent. On intègre une application quand même positive !
Que faire ? Découper par relation de Chasles.



$$\int_0^{2.\pi} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)+4.\sin^2(\theta)} = \left[\frac{1}{2}.Arctan(2.\tan(x)\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{1}{2}.Arctan(2.\tan(x)\right]_{\pi/2}^{3.\pi/2} + \left[\frac{1}{2}.Arctan(2.\tan(x)\right]_{3.\pi/2}^{2.\pi}$$

On trouve alors π mais ce n'est pas évident, il y a d'étranges « tangentes de $\pi/2$ ».

◁44▷ ♣ On ne connaît pas de formule explicite pour une primitive de $x \longmapsto \frac{Arctan(x)}{x}$, mais on décide qu'on la note F . Dérivez $x \longmapsto F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculez $\int_{1/2}^{2} \frac{Arctan(t)}{t}.dt$.

On dérive $x \longmapsto F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$ (qu'on note G) en $x \longmapsto F'(x) + \frac{1}{x^2}.F'\left(\frac{1}{x}\right)$, ce qui fait

$$x \longmapsto \frac{Arctan(x)}{x} + \frac{1}{x^2}.\frac{Arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

et on simplifie en $x \longmapsto \dfrac{Arctan(x)+Arctan(1/x)}{x}$.

Le cours nous assure que c'est $x \longmapsto \dfrac{\frac{\pi}{2}}{x}$ (en tout cas sur $]0,\ +\infty[$, et son opposé sur $]-\infty,\ 0[$).

En ayant noté F une primitive de la fonction sous le signe intégrale :

$$\int_{1/2}^{2} \frac{Arctan(t)}{t}.dt = F(2) - F\left(\frac{1}{2}\right) = G(2)$$

Pour x égal à 1,on trouve $G(1) = 0$.

Et donc $G(2) - G(1) = \int_1^2 G'(t).dt = \int_1^2 \frac{\pi}{2.t}.dt = \frac{\pi}{2}.\ln(2)$.

$$\boxed{\int_{1/2}^{2} \frac{Arctan(t)}{t}.dt = \frac{\pi.\ln(2)}{2}}$$

Et tout ça, sans primitive *(mais évidemment, il faut* $\int_{1/b}^{b} \frac{Arctan(t)}{t}.dt$ *et pas* $\int_a^b \frac{Arctan(t)}{t}.dt$*).*

◁45▷ Montrez $Arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{Arcsin(x)}{2}$ pour tout réel x de $[-1,\ 1[$.

On définit $x \longmapsto Arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ et $x \longmapsto \frac{\pi}{4} + \frac{Arcsin(x)}{2}$.
On calcule leurs dérivées sur $\} -1,\ 1[$ (domaine de définition commun).
On trouve qu'elles sont égales.
On calcule leurs valeurs en 0. On trouve $\frac{\pi}{4}$ pour les deux.
Bon, elles sont égales.

Comment dériver $x \longmapsto Arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$:

x	$\longrightarrow$	$\dfrac{1+x}{1-x}$	$\longrightarrow$	$\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$	$\longrightarrow$	$Arctan\Big(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\Big)$
	homographie		racine		arctangente	
	$\dfrac{2}{(1-\ldots)^2}$		$\dfrac{1}{2.\sqrt{\ldots}}$		$\dfrac{1}{1+\Big(\ldots\Big)^2}$	
	$\dfrac{2}{(1-x)^2}$		$\dfrac{1}{2.\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$		$\dfrac{1}{1+\Big(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\Big)^2}$	

Le produit $\dfrac{2}{(1-x)^2}\times\dfrac{1}{2.\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}\times\dfrac{1}{1+\Big(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\Big)^2}$ donne $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ après des calculs simples mais propres.

Sinon, il y a un argument caché en posant $\theta = Arctan\Big(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\Big)$.

On a alors $\tan(\theta)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ et θ est entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

On calcule alors $\cos(2.\theta)=\dfrac{1-\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}=\dfrac{1-\dfrac{1+x}{1-x}}{1+\dfrac{1+x}{1-x}}=-x$.

On déduit $\sin\Big(2.\theta-\frac{\pi}{2}\Big)=x$.

On surveille bien l'intervalle, et on peut identifier : $2.\theta-\dfrac{\pi}{2}=Arcsin(x)$. Et c'est (mine de rien) la formule attendue.
Un colleur préfèrera cette méthode.

◃46▹ ♡ Que signifient :

α	β	γ
$\forall(a,\ b)\in A^2,\ a=b$	$\forall(a,b)\in A^2,\ a\neq b$	$\forall b\in A,\ \exists a\in A,\ a=b$
δ	ε	φ
$\exists a\in A,\ \forall b\in A,\ a=b$	$\exists a\in A,\ \exists b\in A,\ a\neq b$	$\forall b\in A,\ \exists a\in A,\ a\neq b$

A est un ensemble, la réponse concerne donc A.

Attention, l'ensemble vide vérifie toutes les propriétés en $\forall$.

A est vide ou n'a qu'un élément	A est vide	tous les ensembles vérifient ça
$\forall(a,\ b)\in A^2,\ a=b$	$\forall(a,b)\in A^2,\ a\neq b$	$\forall b\in A,\ \exists a\in A,\ a=b$
$\exists a\in A,\ \forall b\in A,\ a=b$	$\exists a\in A,\ \exists b\in A,\ a\neq b$	$\forall b\in A,\ \exists a\in A,\ a\neq b$
A est de cardinal 1, c'est $\{a\}$	A est au moins de cardinal 2	A est au moins de cardinal 2... ou vide

◃47▹ Que pensez vous de :
- cos est paire, donc pour tout x, $\cos(-x)=\cos(x)$
- $\cos(x)$ est pair, donc x est congru à $\pi/2$ modulo π.

cos est paire. Au féminin. En tant qu'application.

En revanche, $\cos(x)$ est un réel.
Si on dit qu'il est pair, c'est que c'est un entier. Et la seule solution est $\cos(x)=0$.
ceci implique que x est de la forme $\dfrac{\pi}{2}+k.\pi$ avec k entier.
Gagné.

◃48▹ ♡ Justifiez : $\displaystyle\int_0^\pi\frac{\sin(\theta).d\theta}{1+\cos^2(\theta)}=\frac{\pi}{2}$.

L'existence ne pose pas de problème. Ensuite, on a une forme en $\dfrac{u'}{1+u^2}$.

$$\int_0^\pi\frac{\sin(\theta).d\theta}{1+\cos^2(\theta)}=\Big[-Arctan(\cos(\theta))\Big]_0^\pi=-(Arctan(-1)-Arctan(1))$$

Il faut évidemment connaître déjà $Arctan$ et sa dérivée...

◃49▹ Vrai ou faux :

a	$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \geqslant 1$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant 0$	e
b	$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1 \Rightarrow x^2 \geqslant 0$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leqslant 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 1$	f
c	$\forall n \in \mathbb{N},\ n\ pair \Rightarrow n!\ pair$	$\forall n \in \mathbb{N},\ n\ impair \Rightarrow n!\ impair$	g
d	$\forall n \in \mathbb{N},\ n!\ pair \Rightarrow n\ pair$	$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)!\ impair \Rightarrow n!\ impair$	h

Les preuves sont directes, ou reposent sur des contre-exemples.

non : $x = 0,5$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \geqslant 1$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant 0$	non : -2
oui : $x^2 \geqslant 0$ toujours vrai	$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1 \Rightarrow x^2 \geqslant 0$	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \leqslant 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 1$	oui : seul 0
non : 0	$\forall n \in \mathbb{N},\ n\ pair \Rightarrow n!\ pair$	$\forall n \in \mathbb{N},\ n\ impair \Rightarrow n!\ impair$	non : 5
non : 3	$\forall n \in \mathbb{N},\ n!\ pair \Rightarrow n\ pair$	$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)!\ impair \Rightarrow n!\ impair$	oui : seul 0

◃50▹ Trouvez les deux coefficients a et b vérifiant $\dfrac{1}{1+X^2} = \dfrac{a}{i-X} + \dfrac{b}{i+X}$.
Calculez alors $\left(x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}\right)^{(n)}$ (et si vous dérivez $x \longmapsto \dfrac{1}{(i-x)^2}$ en $x \longmapsto -\dfrac{-2.(i-x)}{(i-x)^4}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{(i-x)^3}$ en $x \longmapsto -\dfrac{-3.(i-x)^2}{(i-x)^6}$, je vous renie, vous méritez au mieux de réussir le bac, peut être avec mention assez bien, gagnée grâce à la biologie).
Calculez $Arctan^{(n)}(0)$ pour tout n.

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Leftrightarrow \frac{1}{1+X^2} = \frac{a.(i+X)}{(i+X).(i-X)} + \frac{b.(i-X)}{(i+X).(i-X)}$$

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Leftrightarrow \frac{1}{1+X^2} = -\frac{a.(i+X)}{1+X^2} - \frac{b.(i-X)}{1+X^2}$$

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Leftrightarrow \frac{1}{1+X^2} = \frac{(b-a).X - i.(a+b)}{1+X^2}$$

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Rightarrow (b-a=0\ et\ i.(b+a) = -1)$$

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Rightarrow \left(a = b = \frac{i}{2}\right)$$

Cette rédaction est presque bien.

Presque car elle contient encore et toujours le réflexe de Terminale. Les implications.
On se fout de savoir $\dfrac{1}{1+X^2} = \dfrac{a}{i-X} + \dfrac{b}{i+X} \Rightarrow (b-a=0\ et\ b+a=-1)$, *puisque* $\dfrac{1}{1+X^2}$ *est notre but.*
En prépas, votre but est d'intégrer une grande ecole.
Votre question est « comment je fais pour intégrer une grande école ? ».
Et si je vous réponds « ah, si tu intègres, alors tu passeras trois ans en école, puis tu auras un boulot », vous pensez quoi de ma réponse ?

Je vous la redonne :

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Leftrightarrow \frac{1}{1+X^2} = \frac{a.(i+X)}{(i+X).(i-X)} + \frac{b.(i-X)}{(i+X).(i-X)}$$

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Leftrightarrow \frac{1}{1+X^2} = -\frac{a.(i+X)}{1+X^2} - \frac{b.(i-X)}{1+X^2}$$

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Leftrightarrow \frac{1}{1+X^2} = \frac{(b-a).X - (a+b)}{1+X^2}$$

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Leftarrow (b-a=0\ et\ i.(b+a) = -1)$$

$$\frac{1}{1+X^2} = \frac{a}{i-X} + \frac{b}{i+X} \Leftarrow \left(a = b = \frac{i}{2}\right)$$

Et en fait, ce sont des équivalences. Mais seule le sens « si je prends a et b ainsi, alors... » nous intéresse.

On a donc $\dfrac{1}{1+X^2}=\dfrac{i}{2}.\Big(\dfrac{1}{i-X}+\dfrac{1}{i+X}\Big)$.
On va dériver n fois, en prenant la forme de droite, facile à dériver.

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f^{(3)}(x)$		$f^{(n)}(x)$
$\dfrac{1}{i-x}=(i-x)^{-1}$	$(i-x)^{-2}$	$2.(i-x)^{-3}$	$6.(i-x)^{-4}$		$n!.(i-x)^{-n-1}$
$\dfrac{1}{i+x}=(i+x)^{-1}$	$-(i+x)^{-2}$	$2.(i+x)^{-3}$	$-6.(i+x)^{-4}$		$(-1)^n.n!.(i-x)^{-n-1}$

Je vous prouve la première par récurrence sur n.
La récurrence est initialisée (et c'est l'initialisation qui nous a permis de deviner la formule).
On se donne n et on suppose $f^{(n)}=(x\longmapsto n!.(i-x)^{-n-1})$.
On redérive : $f^{(n+1)}=(x\longmapsto n!.(-n-1).(-1).(i-x)^{-n-1-1})$.
On assemble tout, et c'est fini.

On a donc, en sommant

$$\Big(x\longmapsto\frac{1}{1+x^2}\Big)^{(n)}=\Big(x\longmapsto\frac{i.n!}{2}\Big((i+x)^{-n-1}+(-1)^n.(i+x)^{-n-1}\Big)\Big)$$

La valeur en 0 donne $\dfrac{i.n!}{2}\Big((i+0)^{-n-1}+(-1)^n.(i+0)^{-n-1}\Big)$ c'est à dire $\dfrac{i.n!.i^{-n-1}.(1+(-1)^n)}{2}$.
Si n est impair, le $1+(-1)^n$ donne 0.

Si n est pair, le $1+(-1)^n$ se simplifie avec le 2 et il reste $i.n!.i^{-n-1}$.
Quitte à écrire $n=2.p$, on a $i.(2.p)!.i^{-2.p}.i^{-1}$ puis $(2.p)!.(i^{-2})^p$.
On résume avec $(2.p)!.(-1)^p$.

Pour les dérivées de $Arctan$ il suffit de décaller, puisque $Arctan'=\Big(x\longmapsto\dfrac{1}{1+x^2}\Big)$.

Et pas $(Arctan(x))'=\frac{1}{1+x^2}$ ni $Arctan'=\dfrac{1}{1+x^2}$.
Vous pourrez écrire $Arctan'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ (avec un joli « pour tout x »), et aussi $\dfrac{d\ Arctan(x)}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

◃51▹ ♡ Résolvez $Arctan(x)+Arctan(x+2)=\dfrac{13.\pi}{4}$ *(mais ne tombez pas dans le piège).*

On passe à la tangente par condition nécessaire $\dfrac{2+x}{1-x^2-2.x}=1$.
On peut résoudre.

Et passer pour un con aux yeux du matheux (le con, c'est celui qui calcule, calcule, calcule au lieu de réfléchir d'abord).

$Arctan(x)+Arctan(x+2)$ ne dépassera jamais π par construction (somme de deux arctangentes).
Il n'y a pas de solution ! C'est tout !

◃52▹ Simplifiez $5.Arctan\Big(\dfrac{1}{7}\Big)+2.Arctan\Big(\dfrac{3}{79}\Big)$.

Cet angle est positif (somme de réels positifs), « petit » (somme de sept réels plus petits que $Arctan(1/\sqrt{3})$.
On calcule étape par étape sa tangente :

$\tan\Big(2.Arctan\Big(\frac{1}{7}\Big)\Big)$	$\tan\Big(2.Arctan\Big(\frac{1}{7}\Big)+Arctan\Big(\frac{3}{79}\Big)\Big)$	$\tan\Big(4.Arctan\Big(\frac{1}{7}\Big)+2.Arctan\Big(\frac{3}{79}\Big)\Big)$	final
$\dfrac{2.\frac{1}{7}}{1-(\frac{1}{1})^2}=\dfrac{7}{24}$	$\dfrac{\frac{7}{24}+\frac{3}{79}}{1-\frac{7}{24}.\frac{3}{79}}=\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{2.\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}=\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}.\frac{1}{7}}=1$

Cet angle a pour tangente 1 et est entre 0 et $7.\dfrac{\pi}{6}$; c'est $\dfrac{\pi}{4}$.

◃53▹ ♡ Justifiez : $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(\theta).d\theta}{4+\cos^2(\theta)}=Arctan(1/2)$ et $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{2.\sin(\theta).d\theta}{4-\cos^2(\theta)}=\ln(3)$.

On a une forme en $\dfrac{u'}{4+u^2}$. Oui, et alors ?

On arrange $\int_0^{\pi}\frac{\sin(\theta).d\theta}{4+\cos^2(\theta)}$ en $\frac{1}{4}.\int_0^{\pi}\frac{\sin(\theta).d\theta}{1+\left(\frac{\cos(\theta)}{2}\right)^2}$. Et même

$$-\frac{1}{2}.\int_0^{\pi}\frac{-\frac{\sin(\theta)}{2}.d\theta}{1+\left(\frac{\cos(\theta)}{2}\right)^2}$$

On a cette fois une forme en $\frac{u'}{1+u^2}$. On intègre en $-\frac{1}{2}.\left[Arctan\left(\frac{\cos(\theta)}{2}\right)\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}$. On trouve :

$$-\frac{1}{2}.\left(Arctan\left(\frac{-1}{2}\right)-Arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

Par imparité de la fonction $Arctan$, on a deux fois la moitié d'$arctan(1/2)$.

La seconde nécessite un changement de variable.
Puis une décomposition en éléments simples.

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{2.\sin(\theta).d\theta}{4-\cos^2(\theta)}=\int_{c=1}^{c=-1}\frac{2.(-dc)}{4-c^2}$$

j'ai changé de variable

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{2.\sin(\theta).d\theta}{4-\cos^2(\theta)}=\int_{-1}^{1}\frac{2}{4-c^2}.dc$$

j'ai sorti le signe et rétabli les bornes

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{2.\sin(\theta).d\theta}{4-\cos^2(\theta)}=\int_{-1}^{1}\frac{2}{(4-c).(4+c)}.dc$$

j'ai factorisé

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{2.\sin(\theta).d\theta}{4-\cos^2(\theta)}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{4-c}+\frac{1}{4+c}\right).dc$$

j'ai décomposé
Il ne reste plus qu'à intégrer et simplifier.

◃54▹ ♡ Décomposez en éléments simples $\frac{X^2+X+1}{X^3-2.X^2-11.X+12}$ (c'est à dire « crivez le sous la forme $\frac{\alpha}{X-a}+\frac{\beta}{X-b}+\frac{\gamma}{X-c}$.

On factorise le dénominateur.
On a une racine évidente : 1 $(1-2-11+12=0)$
On factorise $X^3-2.X^2-11.X+12=(X-1).(X^2-X-12)$ *(posez la division ou sinon, vérifiez)*.
On termine : $X^3-2.X^2-11.X+12=(X-1).(X^2-X-12)=(X-1).(X+3).(X-4)$.

On affirme qu'on va pouvoir décomposer en

$$\frac{X^2+X+1}{X^3-2.X^2-11.X+12}=\frac{X^2+X+1}{(X-1).(X+3).(X-4)}=\frac{a}{X-4}+\frac{b}{X+3}+\frac{c}{X-1}$$

Et pour ce faire, on réduit au dénominateur commun et on identifie les numérateurs :
$X^2+X+1=a.(X+3).(X-1)+b.((X-4).(X-1)+c.(X-4).(X+3)$
Et surtout, on ne développe pas.
On réfléchit avant de calculer.

On sait que le physicien sera capable de développer, identifier, résoudre le système.
Il y a donc une solution.

Alors il suffit de la trouver astucieusement.
On va donner à X trois valeurs bien choisies dans la formule

$X^2+X+1=a.(X+3).(X-1)+b.(X-4).(X-1)+c.(X-4).(X+3)$.

	X^2+X+1	$=a.(X+3).(X-1)$	$+b.(X-4).(X-1)$	$+c.(X-4).(X+3)$	
$x=1$	3	$=0$	$+0$	$+c.(-3).(4)$	$c=-1/4$
$x=-3$	7	$=0$	$+b.(-7).(-4)$	$+0$	$b=1/4$
$x=4$	21	$=a.(7).(3)$	$+0$	$+0$	$c=-1/4$

◁55▷ Résolvez $\int_x^{2.x}\frac{d\theta}{\sin(\theta)}=\ln(5)$ d'inconnue x (le nombre de solutions est il fini ou non ?).

En utilisant la primitive du cours, on trouve $\ln\left(\frac{\tan(x)}{\tan(x/2)}\right)=\ln(5)$ en tout cas sur un domaine convenable.

On passe à l'exponentielle (injective) : $\frac{\tan(x)}{\tan(x/2)}=5$. On pose $t=\tan(x/2)$ (sous réserve d'existence).

L'équation devient $\frac{2.t}{t.(1-t^2)}=5$. On simplifie par t car $t=0$ ne peut pas être solution.

On trouve $t=\frac{\sqrt{15}}{5}$ et son opposé.

On remonte : $\frac{\theta}{2}=Arctan\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$ modulo π (et l'opposé).

On semble trouver un ensemble infini $\left\{2.Arctan\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)+2.k.\pi\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-Arctan\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)+2.k.\pi\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

Mais on ne peut garder que $k=0$ car sinon l'intervalle $[x,\ 2.x]$ contient au moins un réel de la forme $p.\pi$ pour lequel la fonction $\frac{1}{\sin}$ explose.

$$\boxed{\left\{2.Arctan\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right),-Arctan\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\}}$$

Cet exercice est une prime aux mauvais élèves qui oublient les modulo π puisque la bonne réponse nous force (en deux étapes) à les mettre puis les effacer.

◁56▷ ♡ Comparez pour l'ordre usuel $Arccos(5/7)$ et $Arcsin(7/10)$.

Les deux sont entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, domaine où le sinus est croissant.

Le premier a pour sinus $\sqrt{\frac{24}{49}}$,l'autre a pour sinus $\frac{7}{10}$.

Comparons les carrés de ces deux réels positifs : $\frac{24}{49}$ face à $\frac{49}{100}$.

2400 est plus petit que 49^2 (de une unité).

On a donc $\frac{24}{49}<\frac{49}{100}$ puis $Arccos(5/7)<Arcsin(7/10)$

Ça se joue à un centième de degré. Ça doit cacher quelquechose, ça !

◁57▷ Vrai ou vrai : $\forall x\in\mathbb{R},\ Arctan(x)=\frac{7.\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Un arctangente reste entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. On a donc une implication du type « Faux implique ce qu'on veut ».

◁58▷ ♡ Calculez $\int_0^1\frac{dt}{e^t+e^{-t}}$ en y trouvant l'arctangente cachée.

Posons $x=e^t$. L'intégrale devient $\int_1^e\frac{1}{x+\frac{1}{x}}.\frac{dx}{x}$.

On intègre en $Arctan$ et on trouve $\boxed{Arctan(e)-\frac{\pi}{4}}$

◁59▷ Montrez que $\cos\left(Arctan\left(\frac{33}{56}\right)+Arcsin\left(\frac{12}{37}\right)\right)$ est un rationnel positif.

Posons $\alpha=Arctan\left(\frac{8}{15}\right)$ et $\beta=Arcsin\left(\frac{12}{37}\right)$.

On va calculer $\cos(\alpha+\beta)$ c'est à dire $\cos(\alpha).\cos(\beta)-\sin(\alpha).\sin(\beta)$.

Déjà, $\sin(\beta)$ est rationnel, c'est $12/37$.

Mais son cosinus ? C'est $\sqrt{1-\left(\frac{12}{37}\right)^2}$ ce qui fait $\frac{\sqrt{37^2-12^2}}{37}$.

En factorisant et regroupant : $37^2-12^2=(37+12).(37-12)=49.25=7^2.5^2$ on a bien $\cos(\beta)=\frac{35}{37}$. C'est aussi un rationnel.

Passons à α. Sa tangente vaut $\frac{8}{15}$. On peut retrouver son cosinus :

$1+\tan^2=\frac{1}{\cos^2}$ donc $\cos^2(\alpha)=\frac{1}{1+(8/15)^2}=\frac{15^2}{15^2+8^2}=\frac{15^2}{17^2}$ (voir liste des carrés). On remonte : $\cos(\alpha)=\frac{15}{17}$ *(signe imposé car α est entre $-\pi/2$ et $\pi/2$)*. Par produit : $\sin=\tan.\cos$. C'est aussi un rationnel.

Le réel $\cos(\alpha).\cos(\beta)-\sin(\alpha).\sin(\beta)$ est rationnel comme somme produit de rationnels ($(\mathbb{Q},+,.)$ est un corps).

Sera-t-il positif ? α est plus petit que $\pi/4$ et β aussi.
La somme est entre 0 et $\pi/2$, le cosinus est positif.

◁60▷ t est un réel fixé non nul ; décomposez en éléments simples $\frac{1}{(1+x^2).(1+(x-t)^2)}$ sous la forme $\frac{a.x+b}{1+x^2}+\frac{c.x+d}{1+(x-t)^2}$. Justifiez que $\ln\left(\frac{a^2+1}{1+(a-t)^2}\right)$ tend vers 0 quand a tend vers $+\infty$ (et vers $-\infty$). Montrez : $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2).(1+(x-t)^2)}=\frac{2.\pi}{t^2+4}$.

t est fixé, c'est donc en x qu'on va intégrer. Et pas qu'un peu, mais carrément de $-\infty$ à $+\infty$.

Commençons par décomposer en éléments simples comme proposé

$$\frac{1}{(1+x^2).(1+(x-t)^2)}=\frac{a.x+b}{1+x^2}+\frac{c.x+d}{1+(x-t)^2}$$

Faute de pôles réels (et avec des pôles complexes pas très pratiques), on réduit au dénominateur commun et n a un système :

$$\frac{1}{(1+x^2).(1+(x-t)^2)}=\frac{(a.x+b).(x^2-2.x.t+t^2+1)+(c.x+d).(x^2+1)}{(1+x^2).(1+(x-t)^2)}$$

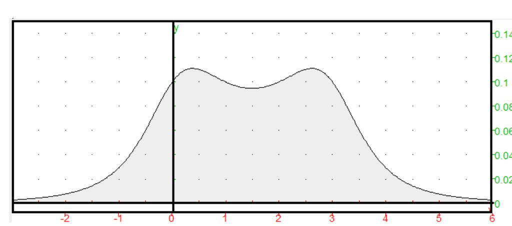
En identifiant on a un système : $\left\{\begin{array}{ccccccc|} x^3 & : & a & & +c & & = & 0 \\ x^2 & : & -2.t.a & +b & & +d & = & 0 \\ x & : & (1+t^2).a & -2.t.b & +c & & = & 0 \\ 1 & : & & (t^2+1).b & & +d & = & 1 \end{array}\right.$.

On garde $L1$ et $L2$, mais on soustrait $L1$ à $L3$ et $L2$ à $L4$: $\left\{\begin{array}{cccccc|} x^3 & : & a & & +c & & = & 0 \\ x^2 & : & -2.t.a & +b & & +d & = & 0 \\ x & : & t^2.a & -2.t.b & & & = & 0 \\ 1 & : & 2.a.t & +t^2.b & & & = & 1 \end{array}\right.$ Les deux dernières livrent a et b par « simple » combinaison : $a=\frac{2}{t^3+4.t}$ et $b=\frac{t}{t^3+4.t}$.

On reporte dans les autres :

$$\frac{1}{(1+x^2).(1+(x-t)^2)}=\frac{1}{t^3+4.t}.\left(\frac{2.x+t}{1+x^2}+\frac{-2.x+3.t}{1+(x-t)^2}\right)$$

On va pouvoir intégrer, disons entre deux bornes véritables. On met déjà de côté $\frac{1}{t^3+4.t}$ qui fait penser au $\frac{\pi}{t^2+4}$ de la réponse attendue.



$\int_a^b\frac{2.x+t}{1+x^2}.dx$ se sépare par linéarité

$\int_a^b\frac{2.x}{1+x^2}.dx+\int_a^b\frac{t}{1+x^2}.dx=\ln\left(\frac{1+b^2}{1+a^2}\right)+t.\Big[Arctan(x)\Big]_{x=a}^{b}$

On traite de même la seconde en effectuant un changement de variable par translation :

$$\int_{x=a}^{b} \frac{-2.x+3.t}{1+(x-t)^2}.dx = \int_{u=a-t}^{b-t} \frac{-2.(u+t)+3.t}{1+u^2}.du = -\int_{u=a-t}^{b-t} \frac{du}{1+u^2} + t.\int_{a-t}^{b-t} \frac{du}{1+u^2}$$

On recolle les morceaux :

$$\int_a^b \frac{dx}{(1+x^2).(1+(x-t)^2)} = \ln\left(\frac{1+b^2}{1+a^2}\right) - \ln\left(\frac{1+(b-t)^2}{1+(a-t)^2}\right) + t.\Big[Arctan(x)\Big]_{x=a}^{b} + t.\Big[Arctan(u)\Big]_{u=a-t}^{b-t}$$

Quand b tend vers $+\infty$, les deux arctangentes $Arctan(b)$ et $Arctan(b-t)$ tendent vers $\dfrac{\pi}{2}$.

Et en regroupant, on a $\ln\left(\dfrac{b^2+1}{(b-t)^2+1}\right)$. Ce terme fait l'objet d'un lemme :

$$\frac{b^2+1}{(b-t)^2+1} \text{ s'écrit } \frac{1+\dfrac{1}{b^2}}{1-\dfrac{2.t}{b}+\dfrac{1+b^2}{b^2}} \text{ et tend vers 1. Son logarithme tend vers 0.}$$

	$\ln\left(\dfrac{1+b^2}{1+(b-t)^2}\right)$	$+\ln\left(\dfrac{1+(a-t)^2}{1+a^2}\right)$	$+t.\Big[Arctan(x)\Big]_{x=a}^{b}$	$+t.\Big[Arctan(u)\Big]_{u=a-t}^{b-t}$
$b \longrightarrow +\infty$	$\longrightarrow 0$		$\longrightarrow t.\dfrac{\pi}{2}$	$\longrightarrow t.\dfrac{\pi}{2}$
$a \longrightarrow -\infty$		$\longrightarrow 0$	$\longrightarrow -t.\dfrac{-\pi}{2}$	$\longrightarrow -t.\dfrac{-\pi}{2}$

On additionne en $2.t.\pi$.

On divise par $t^3+4.t$ et on a bien $\boxed{\dfrac{4.\pi}{t^2+4}}$