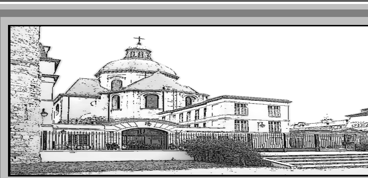
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 25 novembre
M.P.S.I.2



2024 2025
TD09

◃ 0 ▹

Notwen Caasi

On va démontrer et utiliser la formule d'inversion de Newton (d'où le titre ?).
C'est une formule avec des sommes ; pour information, la version « intégrale » et pas « somme » de ce type de résultats, c'est la transformée de Laplace et la transformée de Laplace inverse (avec juste un signe qui change)... mais peut être n'avez vous jamais croisé la transformée de Laplace, alors je dis ça comme ça.

♡ 0 ♡ En développant $(1+X)^p.(1+X)^q$ montrez : $\sum\limits_{i+j=n}\binom{p}{i}.\binom{q}{j}=\binom{p+q}{n}$.

(a_n) et (b_n) sont deux suites de complexes vérifiant $\forall p$, $\sum\limits_{k=0}^{p}\binom{p}{k}.a_k=b_p$.

♡ 1 ♡ Montrez alors $\forall q$, $\sum\limits_{p=0}^{q}(-1)^{p+q}.\binom{q}{p}.b_p = a_q$ *(c'est ça la formule d'inversion de Newton, si les b_n se construisent à l'aide des a_k et de binomiaux, alors les a_p se construisent à l'aide des b_i et de binomiaux).*

♡ 2 ♡ Que donne-t-elle si (a_n) est une suite géométrique (a^n) ?

♠ 0 ♠ Que donne-t-elle si (a_n) est la suite de Fibonacci ?

♯ J'ai tapé `Matrice(5)`. Inversez la. Pensez à ce qu'elle donne multipliée par un vecteur colonne des a_k.

```
def Matrice(n) :
....L=[1]+[0]*n
....M=[L]
....for k in range(n) :
........NL = [1]
............for i in range(1, n+1) :
................NL.append(L[i-1]+L[i])
........M.append(NL)
........L = NL[ : ]
....return M
```

Et maintenant un autre exercice `Python` qui n'a rien à voir avec l'inversion de Newton : écrivez un script qui cherche les `N` premiers entiers dont le carré commence par 2019.
Par exemple : $14\,211^2 = 201\,952\,521$.

Pour tout n, on note μ_n le nombre de permutations σ de $range(n)$ vérifiant $\forall i,\ \sigma(i)\neq i$.

♢ 0 ♢ Justifiez en donnant la liste des permutations :

n	0	1	2	3	4
μ_n	1	0	1	2	9

. Justifiez $\mu_5 = 44$.

Prouvez par un argument de dénombrement : $\mu_n \leqslant n!$ puis $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\mu_k = n!$.

♡ 3 ♡ Déduisez : $\mu_n = \sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^{i+n}.\binom{n}{i}.i!$. Calculez μ_6.

♡ 4 ♡ Montrez : $\frac{\mu_n}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.[1]

♢ 1 ♢ Déduisez que $\frac{\mu_n}{n!}$ converge vers $\frac{1}{e}$ quand n tend vers l'infini (proportion de permutations sans points fixes). Peut on écrire alors $\mu_n \sim \frac{n!}{e}$?

Pour tout N donné, on note $S(N,k)$ le nombre de surjections de $range(N)$ dans $range(k)$. Justifiez et complétez :

1. par exemple, $\frac{\mu_8}{8!} = \frac{14833}{40320} \simeq 0,37$ correspond à une probabilité simple : 8 personnes ayant déposé chacune son téléphone sur la table, elles repartent précipitamment et prennent chacune un téléphone au hasard ; quelle est la probabilité qu'aucune n'ait repris son propre téléphone

	$N=0$	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$
$k=0$		0	0	0	0
$k=1$		1	1	1	1
$k=2$	0	0	2		
$k=3$	0	0	0		36
$k=4$	0	0	0		

Démontrez la formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}.S(N,k)=p^N$ pour tout p de $\mathbb{N}$.

Déduisez une formule pour $S(N,q)$. Calculez le nombre de surjections d'un ensemble à 8 éléments vers un ensemble à 6 éléments. Combien y a-t-il d'applications d'un ensemble à huit éléments dans lui même dont l'ensemble image soit exactement de cardinal 6 ? Sachant qu'on trouve 5 362 560 à la question précédente, si je vous demande d'en donner la liste, quand pourrez vous me rendre votre copie ?

◁ 1 ▷ Qui est ce nombre dont l'écriture binaire est $\overline{0.0\overline{0011}00110011\ldots}_2$ *(pour ceux qui ne l'ont pas compris, la barre au dessus de 0011 c'est pour dire qui est le motif périodique, et la grande barre au dessus, c'est pour préciser qu'on n'est pas en base 10).*

◁ 2 ▷ Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\cos^5(t).dt$ en mettant sous la forme $P(\sin(t)).\cos(t)$.

◁ 3 ▷ Complétez $Arctan(3)+Arcsin(*)=3.\dfrac{\pi}{4}$ en passant par exemple à la tangente de chaque côté.

◁ 4 ▷ ♡ Résolvez $\displaystyle\int_0^{x}\frac{dt}{t^2-6.t+10}=\frac{\pi}{4}$ d'inconnue rationnelle x (forme canonique, arctan...).

◁ 5 ▷ ♡ Déterminez les primitives de $x\longmapsto\dfrac{1}{e^{2.x}+3.e^x+2}$ (éléments simples, changement de variable...).

Un catcheur, un physicien et un mathématicien sont sujets à une expérience : on les enferme dans une pièce avec chacun une boîte d'épinards, fermée, et sans ouvre-boite. Au bout de 24 heures, on va voir ce qu'il sont devenus.
Le catcheur réussit à ouvrir sa boîte : « Eh bien, j'ai simplement violemment projeté la boîte contre le mur. L'impact a été tel qu'elle s'est ouverte », explique-t-il.
Le physicien réussit également à ouvrir sa boîte : « J'ai observé le solide, et calculé ses points de rupture. J'ai alors effectué une pression de manière à exercer une force maximale sur ceux-ci, et la boîte s'est tout naturellement ouverte. »
Le mathématicien, enfin, est retrouvé prostré dans un coin de la pièce, la sueur ruisselant sur son visage, et sa boîte de conserve, fermée, entre les pieds : « Admettons que la boîte est ouverte... Admettons que... »
Une variante propose : À l'arrivée de l'expérimentateur, la boîte est encore fermée et le mathématicien a disparu. Mais d'étranges bruits proviennent de la boîte... Quand l'expérimentateur l'ouvre, il découvre le mathématicien : « Argh ! Une erreur de signe quelque part ! »
Une dernière alternative : Le physicien se débrouille comme cela a été décrit ci-dessus, et le mathématicien est sauvé à temps. Il est alors mené vers les cellules des autres sujets de l'expérience. Au catcheur il dit alors : « Oh, une méthode vraiment grossière. » Dans la cellule du physicien, il regarde la boîte puis les formules, pointe du doigt un tableau et annonce : « Eh bien, ces limites ne peuvent être interverties, et cette intégrale n'existe pas dans $\mathbb{R}$ ».

◁ 6 ▷ ♡ On veut calculer $\displaystyle\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.dx$ notée I par changement de variable $u=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. Exprimez x à l'aide de u. Calculez dx.
Justifiez $I=\displaystyle\int_0^1\frac{4.u^2}{(1+u^2)^2}.du$ (attention, les bornes sont en u et plus en x, d'accord ?).
Intégrez par parties (en dérivant u). Justifiez : $I=\dfrac{\pi}{2}-1$.

Calculez aussi I en changeant de variable : $x=\cos(2.\theta)$. Exprimez dx à l'aide de θ et $d\theta$ et exprimez $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ à l'aide de θ. Retrouvez la valeur de I.

◁ 7 ▷ ♡ Calculez $\displaystyle\int_0^{5.\pi}Arccos(\cos(\theta)).d\theta$. (gare au piège).

◁ 8 ▷ Calculez $\displaystyle\int_a^b x^k.dx$ pour a et b strictement positifs et k réel, par le changement de variable $x=e^t$.

◁ 9 ▷ ♡ Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi}Arctan(\sin(x)).\cos(x).dx$.

◁ 10 ▷ ♣ Calculez (à la main) $\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}^n$ pour n de 0 à 9. Le corps de base est celui des entiers de 0 à 10 pour l'addition et la multiplication modulo 11. Résolvez $\begin{pmatrix}5&2\\1&6\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ d'inconnue entière n.

◁11▷ Calculez $\displaystyle\int_0^{Arctan(1/2)} \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)-\sin(\theta)}.d\theta$ par le changement de variable $t = \tan(\theta)$.

◁12▷ ♡ Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t).dt}{1+\cos^2(t)}$. On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t.\sin(t).dt}{1+\cos^2(t)}$. Effectuez le changement de variable $u = \pi - t$. Déduisez la valeur de I.

◁13▷ Montrez : $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin^2(t).\cos^3(t).dt \in \left\{\frac{11.\sqrt{3}}{160}, \frac{9}{128}, \frac{47}{480}\right\}$ *(en indiquant laquelle des trois est la bonne ; vous pourrez faire un changement de variable très simple en sinus).*

◁14▷ Complétez les étapes qui manquent.
Supposons l'existence d'une solution (a, b, c) à l'équation $a^4 + b^4 = c^2$ et montrons qu'il en existe une autre, (x, y, z), telle que $z < c$. La méthode de descente infinie permet alors de conclure.

Puisque (a^2, b^2, c) est alors un triplet pythagoricien primitif et que (quitte à intervertir a et b si nécessaire) a est impair, il existe un couple (p, q) d'entiers strictement positifs et premiers entre eux tel que $a^2 = p^2 - q^2$, $b^2 = 2.p.q$ et $c = p^2 + q^2$.

De même, puisque (a, q, p) est un triplet pythagoricien primitif, il existe un couple (m, n) d'entiers strictement positifs et premiers entre eux tel que $a = m^2 - n^2$, $q = 2.m.n$ et $p = m^2 + n^2$.

Puisque p et $2.q$ sont premiers entre eux et que $2.p.q$ est un carré, p et $2.q$ sont des carrés.

De même, puisque $2.q$ (donc $m.n$) est un carré, m et n sont des carrés.

Donc il existe des entiers strictement positifs x, y et z (premiers entre eux) tels que $m = x^2$, $n = y^2$ et $x^4 + y^4 = z^2$. Comme $z^2 = p < c^2$, la preuve est établie.

◁15▷ Montrez qu'on n'a évidemment pas $\forall x,\ Arctan(x) = \dfrac{Arcsin(x)}{Arccos(x)}$.

Trouvez quand même (graphiquement ?) le nombre de solutions de $Arctan(x) = \dfrac{Arcsin(x)}{Arccos(x)}$ d'inconnue réelle x (dans quoi ?).

◁16▷ La liste L est faite des stations de métro, sous la forme pour chacune

0	nom	string
1	code	string longueur 4
2	adresse	string
3	lignes	liste d'entiers
4	abscisse sur le graphe	integer
5	ordonnée sur le graphe	integer
6	liste des successeurs	liste de codes

Écrivez un script qui prend en entrée un numéro de ligne et retourne une liste de toutes ses stations.
Écrivez un script qui va trouver le numéro de la ligne la plus longue (en nombre de stations).
Écrivez un script qui va trouver le numéro de la ligne qui coupe le plus d'autres lignes.

◁17▷ **Ce chacal urine. Le baron guéri. Bon, rions ! Me voilà, trolls affriolants ! Un raton. Essai de défi transcendant. Élu gratiné. Y grec ! Magyare stalinienne. Sylvie a dessiné. L'apaisé s'y amusa, ils virent César hélas ! Fard de gala en déshérence.** Là, on est sur des lignes de R.E.R. à moins de dix minutes de **prias** ou aux terminus.

◁18▷ J'ai calculé $\dfrac{10000}{99989999}$ et j'ai vu

0.000100010002000300050008001300210034005500890144023303770610...

Et je me souviens que la suite de Fibonacci commence par (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610.

Ça ne peut pas être le hasard ! On pose $\rho = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Exprimez F_nà l'aide de ρ^n et ϕ^n.

♣0♣ Développez $(x+\rho).(x+\phi)$ et décomposez en éléments simples $\dfrac{\sqrt{5}.x}{1-x-x^2}$ (notée $f(x)$).

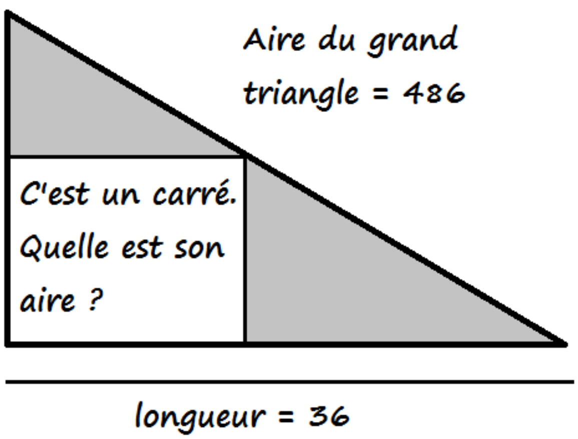
♣ 1 ♣ Donnez le développement limité en 0 de $\dfrac{1}{1-h}$ en 0 à l'ordre n.

♣ 2 ♣ Justifiez que le développement limité en 0 de $\dfrac{\rho}{\rho+h}$ en 0 à l'ordre n est $\sum\limits_{k=0}^{n}\phi^k.h^k+o(h^n)$.

♣ 3 ♣ Donnez le développement limité en 0 de $\dfrac{\phi}{\phi+h}$ en 0 à l'ordre n et celui de $f(h)$ à l'aide de la suite de Fibonacci. Donnez l'écriture irréductible de $f(10^{-4})/\sqrt{5}$. Concluez.

◁ 19 ▷ Résolvez dans $\mathbb{R}^2$: $\left\{\begin{array}{cccc} x^3 & +3.x.y^2 & = & 14 \\ y^3 & +3.x^2.y & = & -13 \end{array}\right|$.
Même question dans $\mathbb{C}^2$.

◁ 20 ▷



Pour être tranquille, l'instituteur a écrit $a = 1,17\overline{857142}857142857\ldots$ et $b = 3,\overline{18}181818\ldots$ et a demandé « posez la multiplication ».
Votre petit frère est en train de calculer

	1,	1	7	8	5	7	1	4	2	8	5	7	1
x	3,	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8	1	8
	3,	5	3	5	7	1	4	2	8	5	7	1	4
	0,	1	1	7	8	5	7	1	4	2	8	5	7
	0,	0	9	4	2	8	5	7	1	4	2	8	5
	0,	0	0	1	1	7	8	5	7	1	4	2	8
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
=	3,	6											

Pour quatre points, aidez le ![a]

[a] moi je vous aide avec $117857025 = 3^4.5^2.11^2.13.37$ et $10^6 = 3^3.7.11.13.37+1$

Le colleur demande à Arthur : trouvez le maximum de x^y pour x et y dans $\mathbb{N}$ sachant $x+y=8$ (maximum noté μ).
Arthur qui assiste à la colle dit « pour x et y dans $\mathbb{R}$, j'ai mieux que votre μ, avec $x=3,5$ » ; vérifiez l'affirmation d'Arthur (sachant $7^9=40353607$).
Mais Arthur qui passait par là cherche à faire encore mieux ? C'est jouable ?

◁ 21 ▷ Complétez la permutation suivant pour que sa signature vaille -1 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & * & 4 & * \end{pmatrix}$. Pouvez vous alors la décomposer à l'aide de $\overrightarrow{1\ 2\ 3}$ et $\overrightarrow{2\ 3\ 4}$?
Et si on impose "signature égale à 1" ?

◁ 22 ▷ Écrivez un script **Python** qui pour une permutation **sigma** donnée (sous forme de liste des images) déterminez le plus long cycle.

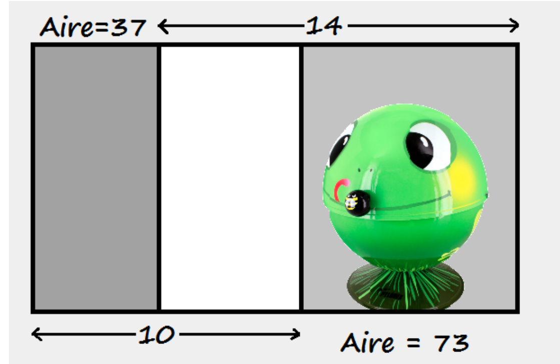
Par exemple, pour `[0, 3, 8, 1, 9, 6, 4, 10, 2, 7, 5]` il répondra `[4, 9, 7, 10, 5, 6]` (ou `[5, 6, 4, 9, 7, 10]`) puisque c'est le même.
Comme votre programme devra travailler sur des permutations très longues, il doit être optimisé, et ne pas perdre de temps.

◁ 23 ▷ ♡ Y a-t-il plus d'applications injectives de S_4 dans S_3 que de parties à 12 éléments dans S_4 *(rappel : S_n est l'ensemble des permutations d'un ensemble à n éléments).*

Les parties à k éléments dans un ensemble de cardinal n, c'est du cours.
Mais les applications injectives aussi : combien de choix pour l'image du premier élément, pis combien de choix pour l'image du second sachant qu'il ne peut pas prendre la même image que le premier, et ainsi de suite.

◁ 24 ▷ Trouvez un élément de S_7 vérifiant $\sigma(1)=7$, $\sigma^3(1)=5$, $\sigma^5(1)=1$, $\sigma^5\neq Id$, $\forall k,\ \sigma^k(4)\neq 2$ et $\exists k,\ \sigma^k(3)=2$.
Question subsidiaire : combien de solutions ?
Rappel S_n est l'ensemble des $n!$ permutations de la liste $[1, 2, \ldots n]$.

Sur le drapeau de SucriLand, les aires des deux parties grisées sont respectivement de 37 cm^2 et 73 cm^2 (la plus grande pour la tête de Sucri).
Deux longueurs sont connues (10 cm et 14 cm). Donnez l'aire de la partie blanche au milieu.



Donnez le p.g.c.d. de $100^2 - 33^2$ et $99^2 - 32^2$.

---

a est un réel donné. On définit $f = \cos + a.\sin$ et $g = \cos^2 + a.\sin^2$.
Indiquez suivant la valeur de a qui de f et g a le plus grand maximum sur $\mathbb{R}$. Même question avec minimum..

◁ 25 ▷

◁ 26 ▷ $(G, \times)$ est le groupe $range(1, 17)$ pour la multiplication modulo 17.
Pour tout a de G, on pose $\varphi_a : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & a \times x \end{array}$. Montrez que chaque φ_a est une permutation de $[1,\ 2,\ 16]$ que vous décomposezrez en produit de cycles par habitude.
Existe-t-il des permutations de S_{17} ne s'écrivant pas φ_a ?
Montrez $\forall (a,\ b) \in G^2,\ \varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{b \times a}$.
Montrez que l'ensemble $\{\varphi_1, \dots \varphi_{16}\}$ est un sous-groupe de $(S_n,\ \circ)$

◁ 27 ▷ Un élève étourdi a oublié la signature dans la définition du déterminant d'une matrice de taille n sur n. Il a dfini ce qu'on appelle le permanent

$$per(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)}$$

Quel est le premanent de la matrice unité ?
A-t-on toujours $per(A.B) = per(A).per(B)$ en taille $é$? En taille 3 ?
Vous avez droit à quatre nombres a, b, c et d de somme 1, maximisez le permanent de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

◁ 28 ▷ ♣ Vérifiez que l'on définit une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ par $a \blacktriangleleft b$ si $\begin{array}{ccc} a \textit{ impair} & \textit{et} & b \textit{ pair} \\ & \textit{ou} & \\ (b-a)/2 & \in & \mathbb{N} \end{array}$. Classez la liste $[0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6]$ par ordre croissant. Donnez la borne supérieure de l'ensemble des nombres premiers *(en a-t-il encore une si on travaille sur $(\mathbb{Z}, \blacktriangleleft)$?).*
Donnez la borne supérieure de l'ensemble des nombres impairs.
Donnez la borne supérieure de l'ensemble des diviseurs de 2015.
L'ensemble des multiples de 3 a-t-il une borne supérieure ?

Rappel : la borne supérieure d'un ensemble est son plus petit majorant. Pour l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$, la borne supérieure de $[0,\ 1[$ est 1. Celle de $[0,\ 1]$ aussi.

◁ 29 ▷ ♣ On définit sur $\mathbb{C}$ la relation $\blacktriangleleft$ par $z \blacktriangleleft z'$ si et seulement si $\left\{ \begin{array}{ccc} (\Re e(a) & < & \Re e(b)) \\ & ou & \\ (\Re e(a) = \Re e(b) & et & \Im m(a) \leq \Im m(b)) \end{array} \right|$.
a - Triez les complexes suivants : $1+i$, 2, $1-3.i$, $4-13.i$, $2.i$ et $-1-7.i$.
b - Montrez que c'est une relation d'ordre *(attention, $(p$ ou $q)$ et $(r$ ou $s)$ c'est $(p$ et $r)$ ou $(p$ et $z)$ ou $(q$ et $r)$ ou $(q$ et $s)$).*
Pourquoi l'appelle-t-on "*ordre alphabétique*" ou "*lexicographique*" ou "*ordre du dictionnaire*" ?
c - Représentez graphiquement l'ensemble des complexes entre $1+i$ et $1+3.i$.
d - Représentez graphiquement l'ensemble des complexes entre $1+i$ et $3+3.i$.
e - Cette relation d'ordre des elle compatibles avec l'addition ? Est elle compatible avec la multiplication ?

Montrez qu'il ne peut pas exister de relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{C}$ telle que $z \longmapsto z^3$ soit croissante (point de départ : si on avait $i \preccurlyeq (-i)$ alors on aurait... et sinon...).

◁ 30 ▷ On rappelle que sur $\mathbb{R}$, la relation d'égalité est une relation d'ordre (ordre partiel évidemment). Montrez que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide, majorée pour l'égalité admet une borne supérieure (plus petit majorant pour l'égalité).

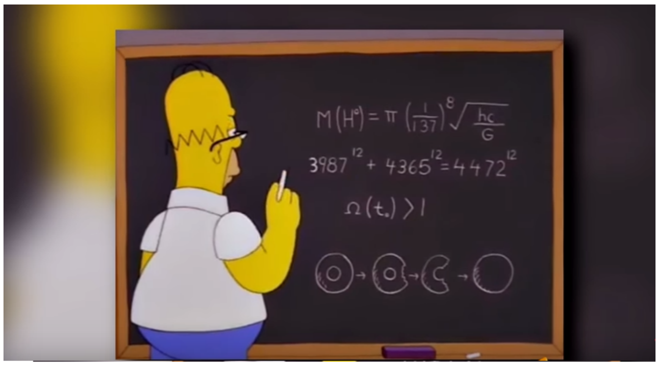
◁ 31 ▷ ♣ L'application $n \longmapsto a_n$ est une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ *(telle par exemple que la suite de Stern-Brocott).* On se donne ε strictement positif. Montrez que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n - \varepsilon.2^{-n-2},\ a_n + \varepsilon.2^{-n-2}]$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Q}$ et dont la longueur totale ne dépasse pas ε.

◁32▷ ♡ Résolvez $\sum_{k=n+1}^{2.n} k \geqslant 10^5$.

Résolvez $2.\sum_{k=n}^{2.n} k^3 \geqslant 15.\sum_{k=0}^{n^2} k$.

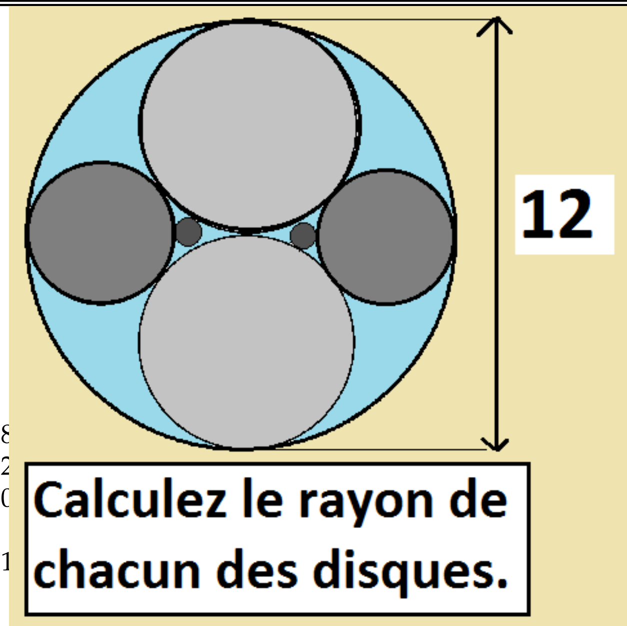
◁33▷ ♣ (a_n) est une suite d'entiers naturels. On suppose : $((a_n)!)$ est croissante, $(a_{n!})$ est décroissante et a_{12} vaut 12 que vaut a_{2019} ?

◁34▷



$3987^{12} = 1613447460975129128349649197051515171534648$
$4365^{12} = 4784218173994732133273973898263933618164062$
somme $= 6397665634969861261623623095315448789698710$

$4472^{12} = 6397665634848672580686235832216857578412441$
Erreur relative : 2×10^{-11}



Exercice sans rapport.

◁35▷ Le professeur propose un chalenge à ses cent élèves. Ils sont numérotés de 1 à 100 et chacun connaît son numéro. Ils sont tous appelés un à un (et une seule fois) dans le bureau du professeur où se trouve une commode avec 100tiroirs numérotés de 1 à 100.
Le professeur a placé de façon aléatoire dans chaque tiroir un papier portant le numéro d'un prisonnier. Chaque tiroir contient un numéro, et chaque prisonnier a son numéro dans un tiroir.
Chaque élève ne peut ouvrir que cinquante tiroirs (qu'il refermera ensuite).
Il faut qu'il trouve son propre numéro dans un des cinquante tiroirs pour gagner.
Les élèves ne peuvent communiquer entre eux pendant l'épreuve, ne savent pas qui a déjà été appelé, et n'ont pas le droit de déplacer les papiers dans les tiroirs.
Ils gagnent si ils trouvent tous leur numéro.
Ils peuvent communiquer avant l'épreuve pour élaborer une stratégie.

Montrez que la probabilité qu'ils gagnent est de toutes façons inférieure ou égale à 50%.

Première stratégie : ils ouvrent tous cinquante tiroirs au hasard. Probabilité qu'ils gagnent ?

Seconde stratégie : ils ouvrent tous les même cinquante tiroirs du haut. probabilité qu'ils gagnent ?

Troisième stratégie : chaque prisonnier k ouvre le tiroir numéroté k, sort le papier qui porte alors un numéro que nous allons appeler $\sigma(k)$. Si $\sigma(k)$ vaut k, il a gagné, et ouvre quarante neuf tiroirs pour obéir à la règle mais il s'en fout. Sinon, il ouvre le tiroir $\sigma(k)$ et regarde le papier. Il ouvre alors le tiroir portant le numéro de ce papier et ainsi de suite jusqu'à avoir ouvert 50 tiroirs.
Montrez que la probabilité de gagner est liée à la probabilité qu'une permutation de S_{100} ne contienne aucun cycle de longueur plus grande que 50.

Déduisez que la probabilité de gagner est $1 - \sum_{k=51}^{100} \frac{1}{k}$.

Application numérique ?

Estimation de cette probabilité $1-\sum_{k=n+1}^{2.n}\frac{1}{k}$ quand n tend vers l'infini ?
(exercice piqué à Guillaume et Clément Deslandes).

◁36▷ Montrez que la relation « divise » est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$ (R.A.T.).
Montrez que $\mathbb{N}-\{0,\ 1\}$ n'a alors pas de plus petit élément pour cette relation d'ordre.
Montrez qu' »en général » $\{a,\ b\}$ n'a pas de plus petit élément, mais a son plus grand minorant : $p.g.c.d.(a,\ b)$.

◁37▷ Déterminez ces quatre Sup/Inf

$a=Sup\{\sin(Arctan(x))\mid x\in\mathbb{R}^+\}$	$\alpha=Sup\{Arctan(\sin(x))\mid x\in\mathbb{R}^+\}$
$b=Inf\{\sin(Arctan(x))\mid x\in\mathbb{R}^+\}$	$\beta=Inf\{Arctan(\sin(x))\mid x\in\mathbb{R}^+\}$

◁38▷ Pour a et b dans $\mathbb{Z}$, on pose $a \blacktriangleleft b$ si et seulement si on a $\pi.a+[\pi.b]\leqslant\pi.b+[\pi.a]$ *(les crochets désignent la partie entière)*.
Montrez que c'est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$. Pour information , j'ai classé les entiers de 0 à 20 :
$0 \blacktriangleleft 15 \blacktriangleleft 8 \blacktriangleleft 1 \blacktriangleleft 16 \blacktriangleleft 9 \blacktriangleleft 2 \blacktriangleleft 17 \blacktriangleleft 10 \blacktriangleleft 3 \blacktriangleleft 18 \blacktriangleleft 11 \blacktriangleleft 4 \blacktriangleleft 19 \blacktriangleleft 12 \blacktriangleleft 5 \blacktriangleleft 13 \blacktriangleleft 6 \blacktriangleleft 14 \blacktriangleleft 7$
Justifiez que 0 est bien le plus petit de tous les entiers.

◁39▷ ♣ On appelle élément simple tout rationnel de la forme $\frac{a}{p^b}$ avec a entre 0 et $p-1$ et l'exposant b entier naturel.
On appelle aussi éléments simples les entier relatifs. On affirme que tout rationnel se décompose en somme d'éléments simples.

Exemples :

$\frac{11}{15}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$	$\frac{22}{15}=\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$	$\frac{32}{15}=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{5}$	$\frac{13}{25}=\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}$

Décomposez en éléments simples

$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{17}{21}$	$\frac{173}{49}$	$\frac{11}{52}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{123}{60}$

◁40▷ Montrez par récurrence sur le cardinal que toute partie finie de $\mathbb{Z}$ a un plus petit élément.

◁41▷ ♡ Retrouvez les coefficients : $\frac{X^2+X+1}{X^3-\ldots X^2-\ldots X+6}=\frac{\ldots}{X-1}+\frac{\ldots}{X+2}+\frac{\ldots}{X-3}$.

◁42▷ J'ai deux informations sur la suite u : voici ses premiers termes

n	0	1	2	3	4	5
u_n	9	-8	46	-2		

et elle est de la forme $\exists(a,\ b)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n,\ u_{n+2}=a.u_{n+1}+b.u_n$.
Trouvez a et b. Retrouvez les termes qui manquent.

◁43▷ ♡ Dérivez $x\longmapsto Arctan(3.\tan(x))$ *(utilisez plutôt $t'=1/c^2$)*.
♠ Calculez $\int_0^{\pi/4}\frac{d\theta}{\cos^2(\theta)+4.\sin^2(\theta)}$.
♣ Calculez aussi $\int_0^{2.\pi}\frac{d\theta}{\cos^2(\theta)+4.\sin^2(\theta)}$.

◁44▷ ♣ On ne connaît pas de formule explicite pour une primitive de $x\longmapsto\frac{Arctan(x)}{x}$, mais on décide qu'on la note F . Dérivez $x\longmapsto F(x)-F\Big(\frac{1}{x}\Big)$. Calculez $\int_{1/2}^{2}\frac{Arctan(t)}{t}.dt$.

◁45▷ Montrez $Arctan\Big(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\Big)=\frac{\pi}{4}+\frac{Arcsin(x)}{2}$ pour tout réel x de $[-1,\ 1[$.

◁46▷ ♡ Que signifient :

α	β	γ
$\forall(a,\ b)\in A^2,\ a=b$	$\forall(a,b)\in A^2,\ a\neq b$	$\forall b\in A,\ \exists a\in A,\ a=b$
δ	ε	φ
$\exists a\in A,\ \forall b\in A,\ a=b$	$\exists a\in A,\ \exists b\in A,\ a\neq b$	$\forall b\in A,\ \exists a\in A,\ a\neq b$

A est un ensemble, la réponse concerne donc A.

◁47▷ Que pensez vous de : • cos est paire, donc pour tout x, $\cos(-x)=\cos(x)$
• $\cos(x)$ est pair, donc x est congru à $\pi/2$ modulo π.

◃48▹ ♡ Justifiez : $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(\theta).d\theta}{1+\cos^2(\theta)}=\frac{\pi}{2}$.

◃49▹ Vrai ou faux :

a	$\forall x\in\mathbb{R},\ x\geqslant 0\Rightarrow x^2\geqslant 1$	$\forall x\in\mathbb{R},\ x^2\geqslant 1\Rightarrow x\geqslant 0$	e
b	$\forall x\in\mathbb{R},\ x\geqslant 1\Rightarrow x^2\geqslant 0$	$\forall x\in\mathbb{R},\ x^2\leqslant 0\Rightarrow x^2+1=1$	f
c	$\forall n\in\mathbb{N},\ n\ pair\Rightarrow n!\ pair$	$\forall n\in\mathbb{N},\ n\ impair\Rightarrow n!\ impair$	g
d	$\forall n\in\mathbb{N},\ n!\ pair\Rightarrow n\ pair$	$\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)!\ impair\Rightarrow n!\ impair$	h

◃50▹ Trouvez les deux coefficients a et b vérifiant $\displaystyle\frac{1}{1+X^2}=\frac{a}{i-X}+\frac{b}{i+X}$.
Calculez alors $\displaystyle\left(x\longmapsto\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)}$ (et si vous dérivez $x\longmapsto\dfrac{1}{(i-x)^2}$ en $x\longmapsto-\dfrac{-2.(i-x)}{(i-x)^4}$ et $x\longmapsto\dfrac{1}{(i-x)^3}$ en $x\longmapsto-\dfrac{-3.(i-x)^2}{(i-x)^6}$, je vous renie, vous méritez au mieux de réussir le bac, peut être avec mention assez bien, gagnée grâce à la biologie).
Calculez $Arctan^{(n)}(0)$ pour tout n.

◃51▹ ♡ Résolvez $Arctan(x)+Arctan(x+2)=\dfrac{13.\pi}{4}$ *(mais ne tombez pas dans le piège)*.

◃52▹ Simplifiez $5.Arctan\left(\dfrac{1}{7}\right)+2.Arctan\left(\dfrac{3}{79}\right)$.

◃53▹ ♡ Justifiez : $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(\theta).d\theta}{4+\cos^2(\theta)}=Arctan(1/2)$ et $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{2.\sin(\theta).d\theta}{4-\cos^2(\theta)}=\ln(3)$.

◃54▹ ♡ Décomposez en éléments simples $\dfrac{X^2+X+1}{X^3-2.X^2-11.X+12}$ (c'est à dire « crivez le sous la forme $\dfrac{\alpha}{X-a}+\dfrac{\beta}{X-b}+\dfrac{\gamma}{X-c}$.

◃55▹ Résolvez $\displaystyle\int_x^{2.x}\frac{d\theta}{\sin(\theta)}=\ln(5)$ d'inconnue x (le nombre de solutions est il fini ou non ?).

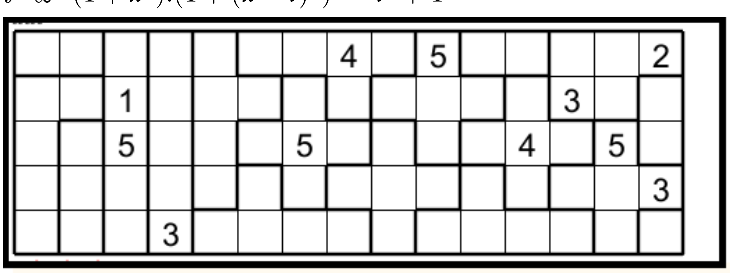
◃56▹ ♡ Comparez pour l'ordre usuel $Arccos(5/7)$ et $Arcsin(7/10)$.

◃57▹ Vrai ou vrai : $\forall x\in\mathbb{R},\ Arctan(x)=\dfrac{7.\pi}{3}\Rightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

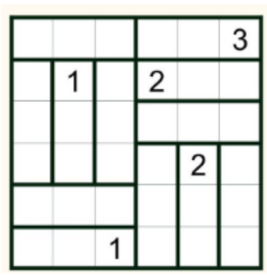
◃58▹ ♡ Calculez $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{e^t+e^{-t}}$ en y trouvant l'arctangente cachée.

◃59▹ Montrez que $\cos\left(Arctan\left(\dfrac{33}{56}\right)+Arcsin\left(\dfrac{12}{37}\right)\right)$ est un rationnel positif.

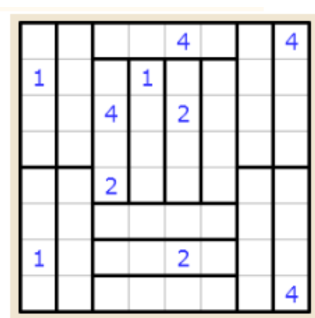
◃60▹ t est un réel fixé non nul ; décomposez en éléments simples $\dfrac{1}{(1+x^2).(1+(x-t)^2)}$ sous la forme $\dfrac{a.x+b}{1+x^2}+\dfrac{c.x+d}{1+(x-t)^2}$. Justifiez que $\ln\left(\dfrac{a^2+1}{1+(a-t)^2}\right)$ tend vers 0 quand a tend vers $+\infty$ (et vers $-\infty$). Montrez : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2).(1+(x-t)^2)}=\frac{2.\pi}{t^2+4}$.



Chaque bloc de cases contient des entiers consécutifs en partant de 1.
Les chiffres apparaissent tous un nombre égal de fois dans chaque ligne et chaque colonne.
Des cases adjacentes contiennent des chiffres différents.



Voici des tatami



Atttnion, au tatami, on ne considère que les cases « adjacentes par un côté » (et pas par un sommet).