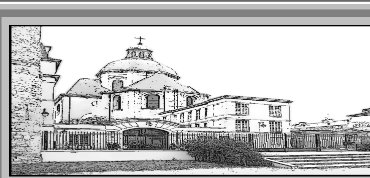
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 2 décembre
$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025

TD10

◃0▹ On se place dans $\mathbb{N}$ où, conformément à l'axiomatique de Peano, on a juste défini 0 et l'application inc qui incrémente un entier d'une unité (c'est $n \longmapsto n+1$). Le but est de définir l'addition et d'en vérifier les propriétés.
On pose $\forall n,\ n+0=n$ et $\forall (a,\ b) \in \mathbb{N}^2,\ a+inc(b)=inc(a+b)$. Ou si vous préférez $a+(b+1)=(a+b)+1$.
On a donc par exemple $5+3=5+(2+1)=(5+2)+1=(5+(1+1))+1=(((5+1)+1)+1)$.
Rien ne dit que l'addition soit commutative pour l'instant, ni même que 0 soit neutre à gauche aussi. Attention, n'allez pas trop vite.
Montrez par récurrence sur b : $\forall (a,\ b) \in \mathbb{N}^2,\ a+b \in \mathbb{N}$.

Montrez par récurrence sur b : $\forall b \in \mathbb{N},\ 0+b=b$.

J'ai croisé ça : $\begin{array}{rcl} (a+b) \quad +(c+1) & = & ((a+b)+c)+1 \\ & = & (a+(b+c))+1 \\ & = & a+((b+c)+1) \\ & = & \dots \end{array}$. Complétez, et dites ce qu'on est en train de prouver.

Montrez par récurrence sur b : $\forall (a,\ b) \in \mathbb{N}^2,\ a+b=b+a$.

Montrez : $\forall (a,\ b) \in \mathbb{N}^2,\ (a+b=0) \Rightarrow (a=b=0)$.

Montrez : $\forall (a,\ b) \in \mathbb{N},\ (a+b=a) \Rightarrow b=0$.

◃1▹ N est votre année de naissance. z_0 est le complexe $\exp\left(i.\dfrac{N}{2048}.\pi\right)$ et (z_n) est la suite définie par $\forall n,\ z_{n+1}=(z_n)^2$.
On note S le demi plan d'équation $\Im m(z) > 0$. Complétez les 56 cases avec True ou False (ou 1 ou 0 si vous préférez).

$n=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$z_n \in S$														
$z_n \in i.\mathbb{R}$														
$z_n \in \mathbb{R}^+$														

◃2▹ Justifiez : une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ est $x \longmapsto \frac{Arctan(x/a)}{a}$.

◃3▹ Y a-t-il plus d'applications injectives de S_4 dans S_3 que de parties à 12 éléments dans S_4 *(rappel : S_n est l'ensemble des permutations d'un ensemble à n éléments)*.
Y a-t-il plus d'applications injectives de S_3 dans S_4 que de parties à 12 éléments dans S_4

◃4▹ On veut résoudre l'équation $z^2 = z + \overline{z}$ d'inconnue z complexe.
Montrez que nécessairement, z^2 est un réel, puis que z est soit réel, soit imaginaire pur.
Traitez les deux cas.

◃5▹ $x \longmapsto \dfrac{2.x+1}{x-3}$ est elle définie de $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$?
Elle elle injective de $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$?
Est elle bijective de $\mathbb{R}-\{3\}$ dans $\mathbb{R}$?
Est elle bijective de $\mathbb{R}-\{3\}$ dans $\mathbb{R}-\{2\}$?

◃6▹ Combien y a-t-il de permutations dans S_4 ?
Combien y a-t-il de permutations de S_4 ? (attention, lisez bien).
Combien de P pour que le cardinal de $P(P(..P(\{1,2,34\})\dots))$ dépasse le cardinal calculé juste avant ?

$\longrightarrow$		$\downarrow$		$\leftarrow$
$\searrow$	$\swarrow$	$\searrow$	$\swarrow$	
	$\longrightarrow$			
			$\uparrow$	
$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$		$\nwarrow$

Voici un jeu des défi maths pour école primaire (et de la Fédération Française des Jeux Mathématiques) : Chaque flèche vise toute les cases vides de sa rangée (ligne, colonne ou diagonale), même « à travers » une autre flèche. Place un jeton dans chaque case vide visée par au moins trois flèches.

◁7▷ **Niveau École élémentaire :** résolvez cet exercice.

Niveau I.T.C. : les données sont un entier (`n`, la taille du carré) et huit listes : les cases où sont les flèches en fonction de leur direction (ici : `N = [[3,3], [4,1]]`, `S=[[0,3]]`, `E=[[0,0], [2,1]]`, `O=[[0,4]]`, `NE=[[4,0]]`, `SO=[[1,3], [1,1]]`, `NO=[[4,2], [4,4]]` et `SE=...`) Écrivez un script `Python` qui retourne alors la liste des cases répondant au critère « case vide visée par au moins trois flèches ».

Bonus : écrivez un script qu'il n'y a pas dans les données des incohérences du type « une flèche hors du tableau », « une case avec deux flèches ».

Super bonus : écrivez un script avec des `can.create_rectangle(...)`, `can.create_oval(...)`.

◁8▷ ♡ Montrez $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(\theta).d\theta}{\sin(\theta)+\cos(\theta)} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln(2)}{4}$.

On pourra changer de variable avec $t = \tan(\theta)$, et décomposer ensuite en éléments simples.

◁9▷ Décomposez f en éléments simples et calculez $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n :

$f = x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$	$f = x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$	$f = x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-3.x+2}$	$f = x \longmapsto \dfrac{x^2-4.x-14}{x^3+3.x^2-6.x-8}$

◁10▷ ♡ Calculez $\displaystyle\int_0^1 \frac{12.x+18}{(x^3+7.x^2+14.x+8)}.dx$ (factorisez le dénominateur, décomposez en trois éléments simples).

◁11▷ ♡ On sait : $\dfrac{X^2+a.X+b}{(X-1).(X-2).(X+3)} = \dfrac{2}{X-1} + \dfrac{1}{X-2} + \dfrac{\alpha}{X+\beta}$. Trouvez α et β. (décomposition en simples éléments ?)

◁12▷ Calculez $\displaystyle\int_0^{1/5} \tan(3.Arctan(x)).dx$ (on change de variable ? même pas !).

◁13▷ ♡ Pourquoi la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^2+3.X+4}{X^2-3.X+2}$ n'est elle pas $\dfrac{8}{1-X} + \dfrac{14}{X-2}$.

Quelle sera la décomposition de $\dfrac{X^3-2.X^2+5.X+4}{X^2-3.X+2}$?

◁14▷ ♡ On pose $f = x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-2.x.\cos(\theta)+1}$. Calculez $f^{(4)}(0)$ *(indication : décomposez en éléments simples sur $\mathbb{C}$ avant de dériver, et souvenez vous que je vous interdit strictement de dériver $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-a)^2}$ en $x \longmapsto -\dfrac{2.(x-a)}{(x-a)^4}$: ; travaillez avec des exposants négatifs ou retournez au collège).*

◁15▷ Montrez $\displaystyle\int_{t=-1}^{2} \frac{t+7}{t+\sqrt{t+2}-10}.dt = 1 + 12.\ln\left(\frac{18}{25}\right)$ (changez de variable ($u = \sqrt{t+2}$), décomposez en éléments simples, intégrez en logarithmes).

◁16▷ L'élève Pabokoul-Déba veut décomposer en éléments simples $\dfrac{6.x^4-9.x^3-22.x-45}{(x-3).(x^4+6.x^2+5)}$.

Il écrit $\dfrac{a}{x-3} + \dfrac{b.x+c}{x^2+3} + \dfrac{d.x+e}{x^2+2}$, réduit au dénominateur commun, identifie les numérateurs et obtient le système

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} a & +b & & +d & & = & 6 \\ & -3.b & +c & -3.d & +e & = & -9 \\ 5.a & +2.b & -3.c & +3.d & -3.e & = & 0 \\ & -6.b & +2.c & -9.d & +3.e & = & -22 \\ 6.a & & -6.c & & -9.e & = & -45 \end{array}\right|$$

. Il résout et trouve $(a, b, c, d, e) = (1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 5)$. Mais il a tout faux. Pourquoi ?

◁17▷ ♡ Calculez les deux intégrales que voici $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{e^t - e^{-t}}$ et $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{5^t - 5^{-t}}$.

◁18▷ ♣ On appelle élément simple tout rationnel de la forme $\dfrac{a}{p^b}$ avec a entre 0 et $p-1$ et l'exposant b entier naturel. On appelle aussi éléments simples les entier relatifs. On affirme que tout rationnel se décompose en somme d'éléments simples.

Exemples : $\frac{11}{15}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$ | $\frac{22}{15}=\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ | $\frac{32}{15}=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{5}$ | $\frac{13}{25}=\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}$

Décomposez en éléments simples

$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$	$-\frac{12}{7}$	$\frac{17}{21}$	$\frac{173}{49}$	$\frac{11}{52}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{123}{60}$

◁19▷ Calculez $\int_0^{1/\sqrt{3}} \tan(2.Arctan(t)).dt$ (simplifiez déjà).

◁20▷ Retrouvez les coefficients : $\frac{2.x^2+2}{x^4+x^2+1}=\frac{a.x+b}{x^2+x+1}+\frac{c.x+d}{x^2-x+1}$.

Complétez : $\int \frac{2.x^2+2}{x^4+x^2+1}.dx=\left[\star.Arctan\left(\frac{x^2-1}{☻.x}\right)\right]$.

◁21▷ Complétez : $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+x}=\ln(1+\sqrt{x}+x)-\star.Arctan\left(\frac{\cdots}{.}\right)$.

◁22▷ ♡ Sachant $y_0=2$ et $2^t.y'_t+3^t.y_t=0$, calculez y_1. Sachant $y_0=2$ et $2^t.y'_t+2^t.y_t=1$, calculez y_1.

◁23▷ Résolvez l'équation différentielle $\begin{vmatrix} y_t & 1 & 1 \\ y'_t & 3 & -2 \\ y''_t & 9 & 4 \end{vmatrix}=0$ d'inconnue y fonction de t.

◁24▷ En utilisant la formule $\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}\dots a_n^{\sigma(n)}$ calculez les déterminants suivants

$\begin{vmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix}$		$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$		$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$		$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$		$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

◁25▷ ♡ On va démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, mais en évitant le raisonnement que tout le monde fait [1].
On pose $A=\{n\in\mathbb{N}^* \mid n.\sqrt{2}\in\mathbb{N}\}$. Montrez : $\forall n\in A,\ n.\sqrt{2}-n\in A$.
Concluez que A n'a pas de plus petit élément.
Concluez que A est vide. Déduisez $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

◁26▷ On va démontrer de plusieurs façons que l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers est infini dans $\mathbb{N}$.

♡ 0 ♡ On suppose que l'ensemble des nombres premiers est fini, formé de N entiers $\{p_1,\dots p_N\}$. On pose alors $Q=1+\prod_{n=1}^{N} p_n$. Montrez que cet entier admet au moins un diviseur premier q. Montrez que q n'est aucun des p_i.

♡ 1 ♡ Concluez.

On peut même profiter de cette idée pour construire de proche en proche avec Python une liste de nombres premiers.
On part de 2.
On le met dans un produit où il est seul, on ajoute 1. On a 3. C'est un nombre premier.
On prend 2 et 7, on construit $2.3+1$. C'est un nouveau nombre premier.
On regarde alors $2.3.7+1$. C'est 45. Il est premier.
On considère alors $2.3.7.43+1$. Il vaut 1807 et n'est pas premier. Son plus petit facteur premier est 13.
On continue avec $2.3.7.43.13+1$ et ainsi de suite.

Programmation : au boulot.

---

1. le site CutTheKnot a référencé trente preuves, pourquoi tout le monde donne la même et fait semblant de croire qu'il faut retenir la même pour tous et pas une autre...

$\boxed{\diamond\ 0\ \diamond}$ Pour tout n, on pose $F_n = 2^{2^n}+1$ (nombre de Fermat, à comprendre comme $2^{(2^n)}+1$). Calculez F_n pour n de 0 à 3.

$\boxed{\diamond\ 1\ \diamond}$ Montrez pour tout n : $2+\prod_{k=0}^{n} F_k = F_{n+1}$.

$\boxed{\diamond\ 2\ \diamond}$ Déduisez que le seul diviseur commun de F_k et F_p pour k différent de p est égal à 1.

$\boxed{\diamond\ 3\ \diamond}$ Le raisonnement commence alors par « même si les F_i ne sont pas forcément premiers... » et se termine par « ...il y a donc une infinité de nombres premiers ». Complétez le.

$\boxed{\sharp\ 0\ \sharp}$ Bonus : Écrivez un script qui détermine combien de F_k pour k de 0 à 6 sont premiers.

$\boxed{\spadesuit\ 0\ \spadesuit}$ Soit p un nombre premier. On pose $N = 2^p-1$ et on note q un facteur premier de N.

Exemples	$p=5$	$N=2^5-1$ est premier	$q=2^5-1=31$
	$p=7$	$N=2^7-1$ est premier	$q=2^7-1=127$
	$p=11$	$N=2^{11}-1$ se factorise	$q=23$ ou $q=89$

Montrez : $2^p=1\ [q]$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ (n<p)\Rightarrow(2^n\neq 1\ [q])$ (il faudra penser à écrire une identité de Bézout entre n et p).

$\boxed{\spadesuit\ 1\ \spadesuit}$ On pose $A=\{1,\ 2,\ldots q-1\}$ et on définit sur A la relation $\Re$ par $(a\Re b)\Leftrightarrow(\exists n\in\mathbb{N},\ a=2^n.b\ [q])$. Montrez que c'est une relation d'équivalence sur A.

$\boxed{\spadesuit\ 2\ \spadesuit}$ Explicitez les six classes d'équivalence dans le cas $p=5$.

$\boxed{\spadesuit\ 3\ \spadesuit}$ Déterminez les deux classes d'équivalence pour p égal à 11 (avec le choix $q=23$).

$\boxed{\spadesuit\ 4\ \spadesuit}$ On revient au cas général pour p. Montrez qu'il y a p éléments dans chaque classe d'équivalence.

$\boxed{\spadesuit\ 5\ \spadesuit}$ Déduisez que p divise $q-1$ puis que q est strictement plus grand que p.

$\boxed{\spadesuit\ 6\ \spadesuit}$ Déduisez : $\forall p\in\mathbb{P},\ \exists q\in\mathbb{P},\ q>p$. Déduisez que $\mathbb{P}$ est infini.

$\boxed{\clubsuit\ 0\ \clubsuit}$ Pour tout couple d'entiers relatifs $(a,\ b)$, on pose $N_{a,b}=\{a+n.b\mid n\in\mathbb{Z}\}$. Déterminez $N_{a,,0}$, $N_{a,1}$, $N_{0,2}$ et $N_{1,2}$.
Une partie A de $\mathbb{Z}$ est dite « ouverte » si $\forall a\in A,\ \exists b\in\mathbb{N}^*,\ N_{a,n}\subset A$.
Montrez que ce sont des ensembles ouverts : $\boxed{\emptyset}\ \boxed{\mathbb{Z}}\ \boxed{2.\mathbb{Z}}$

$\boxed{\clubsuit\ 1\ \clubsuit}$ Montrez que $\mathbb{P}$ n'est pas ouvert (qu'il soit fini ou non, ce n'est pas encore la question).

$\boxed{\clubsuit\ 2\ \clubsuit}$ Montrez que tout ouvert non vide est infini.

$\boxed{\clubsuit\ 3\ \clubsuit}$ Montrez que si A et Ω sont ouverts, alors $A\cup\Omega$ et $A\cap\Omega$ sont ouverts.

$\boxed{\clubsuit\ 4\ \clubsuit}$ Montrez que si les k ensembles A_1 à A_k sont ouverts, alors $\bigcap_{i=1}^{k} A_k$ est encore un ouvert.

$\boxed{\clubsuit\ 5\ \clubsuit}$ Montrez que si les ensembles A_i (pour i dans I) sont ouverts, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est encore un ouvert.

Rappel $\bigcup_{i\in I} A_i=\{x\mid \exists i\in I,\ x\in A_i\}$ et $\bigcap_{i\in I} A_i=\{x\mid \forall i\in I,\ x\in A_i\}$.

$\boxed{\clubsuit\ 6\ \clubsuit}$ On dit qu'un ensemble F est fermé si son complémentaire dans $\mathbb{Z}$ est un ouvert.
Montrez que $\{-1,\ 1\}$ est un fermé (mais pas un ouvert).

$\boxed{\clubsuit\ 7\ \clubsuit}$ Montrez que ce sont à la fois des ouverts et des fermés : $\boxed{\emptyset}\ \boxed{\mathbb{Z}}\ \boxed{2.\mathbb{Z}}$

$\boxed{\clubsuit\ 8\ \clubsuit}$ Montrez que $\mathbb{N}$ n'est ni ouvert, ni fermé.

♣ 9 ♣ Montrez que chaque $N_{\alpha,\beta}$ est à la fois ouvert et fermé.

♣ 10 ♣ Montrez que $\bigcup_{p\in\mathbb{P}} N_{0,p}$ est égal à $Z-\{-1,\ 1\}$.

♣ 11 ♣ Concluez que $\mathbb{P}$ ne peut pas être fini.

◁27▷ Calculez $\sum_{k=0}^{2021} j^k$ et $\sum_{k=0}^{2021} (1+j)^k$ avec toujours ce même complexe de cube 1 (comme la salsa).

◁28▷ Écrivez un script qui prend en entrée un entier naturel `n` et retourne la somme des inverses des diviseurs de `n`.

◁29▷ Calculez $\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n} j\Big)$ de deux façons. Retrouvez $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

◁30▷ Calculez la somme $\sum_{q=0}^{n}(-1)^{n-q}.q^2$ pour n de 0 à 6 puis pour tout n de $\mathbb{N}$.

◁31▷ ♡ Calculez pour n donné ces trois sommes là

$A_n = \sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} \frac{j}{i}$	$B_n = \sum_{i+j=n} i.j$	$C_n = \sum_{0\leqslant i\leqslant n,\ 0\leqslant j\leqslant n} Max(i,\ j)$

◁32▷ ♡ Dans le développement du déterminant[2] d'une matrice A de taille 8 et de terme général a_i^k, combien de termes de la forme $a_1^1.a_3^2.a_.^3.a_!^4.a_.^5.a_4^6.a_2^7.a_,^8$ ont un signe + ?

◁33▷ ♡ Montrez : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+4.n+3}=\frac{3}{4}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4.n+3}=\frac{1}{4}$ *(la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ signifie $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n$).*

◁34▷ Démontrez la formule d'intégration par parties *(dite aussi formule d'Abel, mais c'est tellement plus parlant quand on la rapproche de $\int a.b=[a.B]-\int a'.B$ avec $B'=b$ que vous connaissez !).*

Si l'on pose $S_N=\sum_{n=0}^{N} a_n.b_n$ et $B_m=\sum_{k=0}^{m} b_k$. Alors : $S_N=a_N.B_N-\sum_{n=0}^{N-1} B_n.(a_{n+1}-a_n)$.

◁35▷ ♡ Calculez $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1).(k+3)}$ puis $\sum_{k=0}^{n}\frac{k+2}{(k+1)^2.(k+3)^2}$. Il faudra décomposer en éléments simples et décaler les indices, télescoper.

◁36▷ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de $\sum_{k=2}^{n}\frac{2.k-1}{\binom{k}{2}^2}$.

◁37▷ Recomposez en éléments compliqués : $5.X-5+\frac{7}{X-2}+\frac{28}{X+3}$.

Décomposez en éléments simples $\frac{(3.X^2+2.X+4).(8.X^2-7.X+7)}{(X^3-2.X^2+X-2).(X^3+3.X^2+X+3)}$.

◁38▷ ♡ Calculez $\int_1^2\frac{dt}{e^t-e^{-t}}$ et $\int_1^2\frac{dt}{5^t-5^{-t}}$.

◁39▷ Pourquoi n'a-t-on pas $\Big(x\longmapsto\frac{x^3+4.x^2-16.x+5}{x^3-2.x^2-5.x+6}\Big)=\Big(x\longmapsto\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}\Big)$.

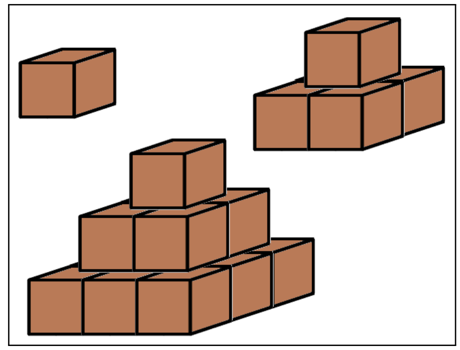
Résolvez $\Big(x\longmapsto\frac{x^3+4.x^2-16.x+5}{x^3-2.x^2-5.x+6}\Big)^{(n)}=\Big(x\longmapsto\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}\Big)^{(n)}$ *(qui est l'inconnue ?)*

◁40▷ ♣ ou ♡ ? Calculez la limite (étonnante ?) de $\frac{e.\sqrt[3]{e}.\sqrt[5]{e}.\sqrt[7]{e}.\sqrt[9]{e}\dots\sqrt[2.n+1]{e}}{\sqrt[2]{e}.\sqrt[4]{e}.\sqrt[6]{e}.\sqrt[8]{e}.\sqrt[10]{e}\dots\sqrt[2.n]{e}}$ quand n tend vers l'infini (mot clef : $\ln(1+h)=\sum_{k=1}^{n}\dots+\dots$ avec $h=1$).

---

2. $\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma)..\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)}$

Le programme prend en entrée[a] un nombre de cubes n et indique la hauteur de la plus grande pyramide qu'il peut construire avec ces cubes. Les pyramides de taille 1, 2 et 3 sont visibles ci-contre.
Variante : les pyramides sont creuses.



La suite a est périodique de période 7 de premiers termes $(0,\ 7,\ 6,\ 5,\ 3,\ 2,\ 0)$, écrivez un script Python qui prend n en entrée et retourne a.

[a] « prend en entrée **n** » ça veut dire **def Programme(n) :** et pas des **n = int(input('Donnez un entier n : '))** ; on fait de la programmation, pas de la discussion avec le chat Scratch ; et sinon, prend en entrée, ça ne veut pas dire « commande avant son plat principal une salade niçoise »

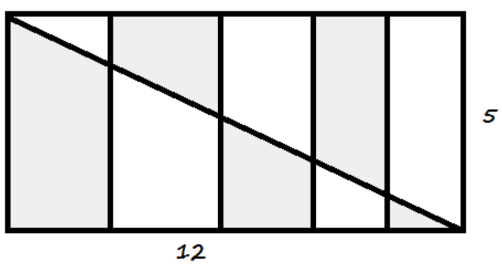
◁ 41 ▷

◁ 42 ▷ Démontrez par récurrence : $\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$ pour tout n. Et sans récurrence ?

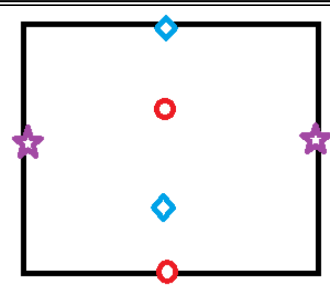
◁ 43 ▷ Justifiez $\sum_{k=0}^{2019} (2)^{(-1)^k}.k = 2\,548\,230$ (attention, combien de termes ?).

◁ 44 ▷ Calculez

$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.a^k$	$B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.a^n$
$C = \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n} \binom{k}{i}.a^i$	$D = \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k}.a^i$



Calculez les périmètre de la figure grisée.



Connectez les deux cercles.
Connectez les deux losanges.
Connectez les deux étoiles.
Vos traits doivent rester dans le grand carré sans se croiser.

◁ 45 ▷

◁ 46 ▷ Soit σ une permutation de $\{1, \ldots 30\}$ *(bijection de l'ensemble dans lui même)*. Montrez : $\sum_{k=10}^{19} \sigma^5(k) \geqslant 55$ *(pour σ^5, comprenez $\sigma\circ\sigma\circ\sigma\circ\sigma\circ\sigma$).*

◁ 47 ▷ Montrez pour tout x réel positif : $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}$. Déduisez : $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{e}}$.

◁ 48 ▷ On rappelle $\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}\ldots a_n^{\sigma(n)}$. Montrez que si A est une matrice triangulaire ($a_i^k = 0$ si $k < i$) alors son déterminant est le produit des termes diagonaux.

Montrez : $\det\begin{pmatrix} a & b & \beta \\ c & d & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha.(a.d - b.c)$.

◁ 49 ▷ ♡ Dérivez $x \longmapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.Calculez $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4.x+8}}$.

◁ 50 ▷ Calculez $\int_0^{\pi/6} \cos^5(t).dt$ en utilisant la bonne règle de Bioche.

Calculez $\int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt$ (en posant $t = sh(x)$ par exemple).

Calculez $\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$.

◁51▷ Montrez : $\int_0^{\pi/4} \frac{4.\cos(\theta).d\theta}{\sin(\theta)+\cos(\theta)} = \ln(2)+\frac{\pi}{2}$ après avoir justifié l'existence de l'intégrale.

Rappel : pour calculer $\int R(\cos(\theta),\sin(\theta)).d\theta$ on change de variable avec les règles de Bioche, en testant l'invariance de $R(\cos(\theta),\sin(\theta)).d\theta$ par symétrie trigonométrique :

symétrie	invariance	poser
$\theta \to -\theta$	si $R(\cos(-\theta),\sin(-\theta)).(-d\theta) = R(\cos(\theta),\sin(\theta)).d\theta$	poser $c=\cos(\theta)$
$\theta \to \pi-\theta$	si $R(\cos(\pi-\theta),\sin(\pi-\theta)).(-d\theta) = R(\cos(\theta),\sin(\theta)).d\theta$	poser $s=\sin(\theta)$
$\theta \to \pi+\theta$	si $R(\cos(\pi+\theta),\sin(\pi+\theta)).d\theta = R(\cos(\theta),\sin(\theta)).d\theta$	poser $\tau=\tan(\theta)$
$\theta \longmapsto \theta+2.\pi$	si rien n'a marché	poser $t=\tan(\theta/2)$

◁52▷ Montrez : $\int_0^{+\infty} \frac{ch(t)}{ch(2.t)}.dt = \frac{\pi.\sqrt{2}}{4}$ et $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(\theta)}{\cos(2.\theta)}.d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}.\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$.
Indication : $u^4+1=(u^2+1)^2-2.u^2$ et on peut factoriser.

◁53▷ Montrez : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2.\theta)}{2+\cos^2(\theta)}.d\theta = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$. Montrez : $\int_0^1 \frac{Arctan(t)}{(1+t)^2}.dt = \frac{\ln(2)}{4}$.

◁54▷ Montrez $\int_3^{10} \frac{3.dx}{x+4-\sqrt{x+6}} = \ln(25)$ après avoir justifié l'existence de l'intégrale.

◁55▷ ♡ Montrez que $th(x/2)$ est rationnelle si et seulement si $sh(x)$ et $ch(x)$ sont rationnels.
Si $sh(x)$ vaut $\frac{60}{229}$, est il vrai que $ch(x)$ est rationnel ?

◁56▷ On pose $a_0=\alpha$, $a_1=\beta$ et $a_{n+2}=a_{n+1}.a_n$. Calculez a_n pour tout n.
On pose $b_0=\alpha$, $b_1=\beta$ et $b_{n+2}=b_{n+1}.(b_n)^2$. Calculez b_n pour tout n.

◁57▷ Combien l'équation $a.b=10!$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$?

◁58▷ Résolvez dans $\mathbb{R}$ $\sqrt{x^2-5.x+4} \geqslant |2.x+1|$.
Résolvez dans $\mathbb{R}$ $\sqrt{x^2-5.x+4} \geqslant 2.x+1$.

◁59▷ ♡ Montrez : $\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 2.(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$. Déduisez que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)_n$ diverge.

◁60▷ La suite a_n tend vers 0 à l'infini. Donnez la limite des suites suivantes :
$\left(\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}-a_k\right)$, $\left(\sum_{k=0}^{n} a_{k+2}-2.a_{k+1}+a_k\right)$, $\left(\sum_{k=0}^{n} a_{k+3}-3.a_{k+2}+3.a_{k+1}-a_k\right)$. Trouvez une formule générale.

◁61▷ ♣ Calculez $\prod_{k=2}^{2015}\left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)}$ *(les crochets désignent la partie entière).*

◁62▷ Dans le pays de Hempai et Sideu, il y a des Arfs, des Bloutchs et des Crops (et c'est tout, mais on peut être Arf et Bloutch, et même les trois à la fois, comme d'ailleurs 20 habitants). 50 Arfs sont aussi des Crops. Il y a 90 Bloutchs, dont un tiers sont d'ailleurs aussi des Crops. Parmi les Bloutchs, il y en a autant qui sont Arfs et Crops qu'il n'y en a qui sont Arf ou_e Crops. 40 Crops ne sont ni Arf, ni Bloutch. Il y a 100 Arfs. Alors, combien d'habitants dans ce pays Hempai et Sideu ? Et combien répondront "oui" à la question "*si tu es Arf, alors tu n'es ni Bloutch, ni Crop*" *(sachant qu'ils sont tous bons en logique et sincères).*

◁63▷ Déterminez

$Sup\left\{Arctan(e^x)+Arctan(e^{-y}) \mid x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\right\}$	$Sup\left\{Arctan(e^x)+Arctan(e^{-x}) \mid x\in\mathbb{R}\right\}$
$Inf\left\{Arctan(e^x)+Arctan(e^{-y}) \mid x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\right\}$	$Inf\left\{Arctan(e^x)+Arctan(e^{-x}) \mid x\in\mathbb{R}\right\}$

La borne supérieure d'un ensemble est son plus petit majorant. Et par exemple, $[0,\ 1[$ a pour borne supérieure 1 alors qu'il n'a pas de plus grand élément.

◁64▷ Fillomino. C'est quoi ce jeu là ? Il faut découper le plan en maisons. Une maison n'est pas forcément carrée, mais elle est d'un seul tenant *(vous voyez sur chaque gille une maison de taille* 3 *dont les trois cases sont appelées* 3*)*. Et dans une maison, si il y a des nombres *(et il y en a toujours au moins un)*, ils indiquant la taille de la maison *(donc une maison de taille* 1 *contient l'unique chiffre* 1*)*. Deux maisons de même taille ne peuvent pas se toucher autrement que par un coin.

3				2	4		
2		1	3	3	2	1	
1		4		3			
4	4	5				4	3
1	2			1	5		4
		4	1			5	3
3		4	3			3	
1	4	2		3	1	2	

◁65▷ ♡ Donnez une primitive de $x \longmapsto x.(Arctan(x))^2$ *(si vous intégrez par parties, dites vous que x peut venir de* $\frac{x^2}{2}$ *certes, mais aussi de* $\frac{x^2+1}{2}$*)*.

◁66▷ ♡ Résolvez $Arctan'(e^x) = \frac{1}{1+e^{2.x}}$. d'inconnue réelle x.

◁67▷ Le polynôme P de degre 4 a pour racines a, b, c et d (distincts). Decomposez en elements simples $\frac{P'(X)}{P(X)}$.

Et si on a $a = b$ la formule est elle encore valable ?

◁68▷ ♣ On pose $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$. Calculez a^b. On ne sait pas, en l'état d'avancement actuel des mathématiques, si a est rationnel ou irrationnel. Montrez quand même que dans les deux cas, vous pouvez trouver deux irrationnels α et β tels que α^β soit redevenu rationnel.

◁69▷ ♡ Étudiez les variations sur $\mathbb{R}$ de l'application $\theta \longmapsto \theta - \sin(\theta)$. Déduisez pour tout θ réel : $|\sin(\theta)| \leqslant |\theta|$.
Le professeur demande de prouver pour tout θ réel et tout n entier naturel : $|\sin(n.\theta)| \leqslant n.|\sin(\theta)|$. Un élève propose la démonstration suivante : en appliquant le résultat précédent à θ et à $n.\theta$ on a $|\sin(\theta)| \leqslant |\theta|$ et $|\sin(n.\theta)| \leqslant |n.\theta|$, on effectue ensuite le quotient des inégalités et on trouve $\frac{|\sin(n.\theta)|}{|\sin(\theta)|} \leqslant n$ et c'est fini.
Où est l'erreur ? Démontrez quand même le résultat du professeur par récurrence sur n.
A-t-on aussi : $\forall\theta\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{R}^+,\ |\sin(n.\theta)| \leqslant n.|\sin(\theta)|$?
A-t-on aussi : $\forall\theta\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{R}^+,\ |\cos(n.\theta)| \leqslant n.|\cos(\theta)|$?
Montrez aussi : $|sh(x)| \geqslant |x|$ pour tout x réel.

◁70▷ Calculez $\sum_{k=0}^{2.n} k^{(2+(-1)^k)}$.

◁71▷ ♡ Calculez $\sum_{k=3}^{N} \frac{1}{k^2-4}$ en décomposant en éléments simples.

◁72▷ ♡ On définit sur $\mathbb{N}$ la relation $\Re$ par $a\Re b \Leftrightarrow \binom{a+b}{b}$ *est impair*. cette relation est elle symétrique, réflexive, anti-symétrique, transitive ? Qui sont les éléments en relation avec 0 ? Qui sont les éléments en relation avec 1 ?
♯ Quelle est la prochaine année n à venir vérifiant $n\Re(n+1)$? (Python autorisé)

◁73▷ ♡ Calculez $\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k+4^k}{5^k}$.