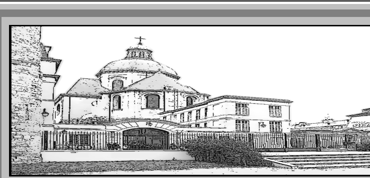
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi
M.P.S.I.2



2024 2025

TD10

◁0▷ On se place dans $\mathbb{N}$ où, conformément à l'axiomatique de Peano, on a juste défini 0 et l'application inc qui incrémente un entier d'une unité (c'est $n \longmapsto n+1$). Le but est de définir l'addition et d'en vérifier les propriétés.
On pose $\forall n,\ n+0=n$ et $\forall(a,\ b)\in\mathbb{N}^2,\ a+inc(b)=inc(a+b)$. Ou si vous préférez $a+(b+1)=(a+b)+1$.
On a donc par exemple $5+3=5+(2+1)=(5+2)+1=(5+(1+1))+1=(((5+1)+1)+1)$.
Rien ne dit que l'addition soit commutative pour l'instant, ni même que 0 soit neutre à gauche aussi. Attention, n'allez pas trop vite.
Montrez par récurrence sur b : $\forall(a,\ b)\in\mathbb{N}^2,\ a+b\in\mathbb{N}$.

Pour l'hérédité des récurrences, afin de respecter l'esprit de Peano, on passera de b à $inc(b)$.
Et pour la lecture, on notera $\boxed{\text{N}}$ la propriété $\forall n,\ n+0=n$ (0 est neutre à droite)
et $\boxed{\text{A}}$ la propriété $\forall(a,\ b)\in\mathbb{N}^2,\ a+inc(b)=inc(a+b)$
a donné, on prouve $\forall b,\ a+b\in\mathbb{N}$ par récurrence sur b.
Initialisation avec $b=0$: $a+0=a\in\mathbb{N}$.
Si la propriété est vraie pour un b fixé ($a+b$ est dans $\mathbb{N}$), alors on calcule $a+inc(b)=inc(a+b)$. En tant que suivant d'un entier, ce nombre est un entier.

Montrez par récurrence sur b : $\forall b\in\mathbb{N},\ 0+b=b$.

Pour $b=0$, il suffit d'utiliser $\boxed{\text{N}}$
On se donne b et on suppose $0+b=b$. On calcule alors $0+inc(b)$ avec l'espoir de trouver $inc(b)$.
On utilise $\boxed{\text{A}}$ avec $a=0$ (puis l'hypothèse au rang b) : $0+inc(b)=inc(0+b)=in(b)$.

0 est maintenant neutre aussi à gauche.

J'ai croisé ça : $\begin{array}{rcl}(a+b)\quad+(c+1) & = & ((a+b)+c)+1\\ & = & (a+(b+c))+1\\ & = & a+((b+c)+1)\\ & = & \dots\end{array}$. Complétez, et dites ce qu'on est en train de prouver.

On va prouver l'associativité (la vraie) : $(a+b)+c=a+(b+c)$, par récurrence sur c, avec a et b fixés.
On se donne donc a et b, et on montre : $(a+b)+0=a+(b+0)$. Il suffit d'utiliser $\boxed{\text{N}}$

On se donne c et on suppose $(a+b)+c=a+(b+c)$.
On veut montrer alors $(a+b)+inc(c)=a+(b+inc(c))$.
On part du membre de gauche et on applique $\boxed{\text{A}}$: $(a+b)+inc(c)=inc((a+b)+c)$
Par hypothèse de récurrence au rang c : $(a+b)+inc(c)=inc((a+b)+c)=inc(a+(b+c))$.
Par $\boxed{\text{A}}$ appliqué « en sens inverse » : $(a+b)+inc(c)=inc((a+b)+c)=a+inc(b+c)$.
Par $\boxed{\text{A}}$ encore :

$$(a+b)+inc(c)=inc((a+b)+c)=a+inc(b+c)=a+(b+inc(c))$$

C'est ce qu'on voulait.

Montrez par récurrence sur b : $\forall(a,\ b)\in\mathbb{N}^2,\ a+b=b+a$.

On va faire une récurrence. Sur b.
On se donne a et on commence par $b=0$: $a+0=a=0+a$ (en utilisant $\boxed{\text{N}}$ et la neutralité établie à gauche au début.

On suppose que pour un certain b, on a $a+b=b+a$.
On calcule $a+inc(b)=inc(a+b)=inc(b+a)=b+inc(a)$. Raté.

On va commencer par un lemme que j'aurais dû vous proposer dans l'énoncé :
$\forall a,\ inc(a) = inc(0) + a$ (ce qui revient à écrire $a + 1 = 1 + a$).

On initialise avec $a = 0$: $inc(0) = inc(0) + 0$ par $\boxed{\text{N}}$
On se donne a et on suppose $inc(a) = inc(0) + a$.
On veut comparer $inc(inc(a))$ et $inc(0) + inc(a)$.
Par hypothèse de récurrence : $inc(inc(a)) = inc(inc(0) + a)$.
Par $\boxed{\text{A}}$: $inc(inc(a)) = inc(inc(0) + a) = inc(0) + inc(a)$. C'est ce qu'on voulait.

Revenons alors à notre hérédité raté ci dessus, le passage de $a + b = b + a$ à $a + inc(b) = inc(b) + a$.
$a + inc(b) = inc(a + b)$ par $\boxed{\text{A}}$
$a + inc(b) = inc(a + b) = inc(b + a)$ par hypothèse de rang b
$a + inc(b) = inc(a + b) = inc(b + a) = b + inc(a)$ par $\boxed{\text{A}}$
$a + inc(b) = inc(a + b) = inc(b + a) = b + inc(a) = b + (inc(0) + a)$ par le lemme
$a + inc(b) = inc(a + b) = inc(b + a) = b + inc(a) = b + (inc(0) + a) = (b + inc(0)) + a$ par associativité ci dessus
$a + inc(b) = inc(a + b) = inc(b + a) = b + inc(a) = b + (inc(0) + a) = (b + inc(0)) + a = (inc(b + 0)) + a$ par $\boxed{\text{A}}$
$a + inc(b) = inc(a + b) = inc(b + a) = b + inc(a) = b + (inc(0) + a) = (b + inc(0)) + a = (inc(b + 0)) + a = inc(b) + a$ $\boxed{\text{N}}$

On l'a eue !

Montrez : $\forall (a,\ b) \in \mathbb{N}^2,\ (a + b = 0) \Rightarrow (a = b = 0)$.

Pas besoin de récurrence.
On va contraposer.
On se donne a et b et on suppose $\overline{a = b = 0}$. C'est donc que a ou b est non nul.
Comme l'addition est maintenant commutative, on va supposer b non nul.
Il s'écrit donc $b = inc(\beta)$ pour un certain β de $\mathbb{N}$.
On a alors $a + b = a + inc(\beta) = inc(a + \beta)$.
En tant que suivant d'un élément, cet entier ne peut pas être nul (0 n'est le suivant de personne).

Montrez : $\forall (a,\ b) \in \mathbb{N},\ (a + b = a) \Rightarrow b = 0$.

On fait une récurrence sur a.
Pour a égal à 0, on montre $(0 + b = 0) \Rightarrow b = 0$.

On se donne a et on suppose $(a + b = a) \Rightarrow b = 0$.
On regarde pour $inc(a)$.
On suppose $inc(a) + b = inc(a)$.
Par commutativité et propriété $\boxed{\text{A}}$: $(inc(a) + b = inc(a)) \Rightarrow (inc(a + b) = inc(a))$.
Par injectivité de inc : $(inc(a) + b = inc(a)) \Rightarrow (inc(a + b) = inc(a)) \Rightarrow (a + b = a)$.
Par hypothèse de rang a :

$$(inc(a) + b = inc(a)) \Rightarrow (inc(a + b) = inc(a)) \Rightarrow (a + b = a) \Rightarrow b = 0$$

Le tout sans utiliser d'histoire d'opposé.

◁1▷ N est votre année de naissance. z_0 est le complexe $\exp\left(i.\dfrac{N}{2048}.\pi\right)$ et (z_n) est la suite définie par $\forall n,\ z_{n+1} = (z_n)^2$.
On note S le demi plan d'équation $\Im m(z) > 0$. Complétez les 56 cases avec True ou False (ou 1 ou 0 si vous préférez).

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$z_n \in S$														
$z_n \in i.\mathbb{R}$														
$z_n \in \mathbb{R}^+$														

On peut donner une formule explicite pour la suite (z_n) puisque à chaque étape on élève au carré.
On calcule les premiers termes pour ne pas dire de bêtise $z_1 = (z_0)^2$, $z_2 = (z_1)^2 = (z_0)^4$, $z_3 = (z_2)^2 = (z_0)^8$, $z_4 = (z_3)^2 = (z_0)^{16}$ et plus généralement $z_n = (z_0)^{2^n}$ ou pour plus de précision $z_n = (z_0)^{(2^n)}$ pour lever toute ambigüité (récurrence sur n).

On a donc $z_n = \exp\left(i.N.2^{n-11}.\pi\right)$ puisque $2048 = 2^{11}$.

Une chose est sûre : dès que n est assez grand (en l'occurrence $n \geqslant 12$), $N.2^{n-11}.\pi$ est un multiple pair de π. Le complexe $z_n$est sur l'axe réel. Et dans le demi plan S.
Et pour $n = 11$, on a $z_{11} = \exp\left(i.N.\pi\right)$. Tout va dépendre de la parité de votre année de naissance. Mais dans tous les cas, on est sur l'axe réel.

Et pour $n = 10$? On a $z_{10} = \exp\left(i.\frac{N}{2}.\pi\right)$. Attention, la présence du $\frac{\pi}{2}$ peut être trompeuse.
Tout va dépendre de N modulo 4 (avec finalement quatre années concernées) :

	$n = 0$ modulo 4 (ex : 2008)	$n = 1$ modulo 4 (ex : 2005)	$n = 2$ modulo 4 (ex : 2006)	$n = 3$ modulo 4
$z_n = \exp\left(i.\frac{N}{2}.\pi\right)$	1	$e^{i.\pi/2} = i$	$e^{i.\pi} = -1$	$e^{3.i.\pi/2} =$
$z_n \in S$	True	True	True	False
$z_n \in \mathbb{R}$	True	False	True	False

Remontons encore un peu avec $n = 9$ et $z_9 = \exp\left(i.\frac{N}{4}.\pi\right)$.

Et sinon au début ? $z_0 = \exp\left(i.\frac{N}{2048}.\pi\right)$ avec N entre 1024 (je suis large) et 2048. L'angle est entre $\frac{\pi}{2}$ et π. Le point est dans le demi plan supérieur S.

$z_1 = \exp\left(i.\frac{N}{1024}.\pi\right)$ avec N entre $1024 + 512$ (je suis large encore) et 2048. L'angle est entre π et $2.\pi$. Le point est dans le demi plan inférieur.

On continue $z_1 = \exp\left(i.\frac{N}{512}.\pi\right)$ avec N entre 3×512 et 4×512. On encadre de nouveau. Mais ça va être long de tout traiter.

Réfléchissons à nos $N.2^{n-11}.\pi$ et même (et surtout) à nos $N.2^{n-11}.\pi$ modulo $2.\pi$.
Pour savoir dans quel demi demi plan se trouve le complexe, il faut et il suffit de savoir si « son argument modulo $2.\pi$ » est entre 0 et π ou entre π et $2.\pi$.

Tout va reposer sur une décomposition de base 2 (avec ce 2048 au dénominateur, on peut s'en douter).

Prenons pour simplifier la vie le millésime 2006 commun à plusieurs d'entre vous.
On le convertit en base 2 : $\overline{2006}_{10} = \overline{11111010110}_2 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^1$ (on reconnaît un multiple de 2 mais pas de 4 à son motif 10 à la fin).
On divise par 2024 : $Arg(z_0) = \frac{2008}{2024}.\pi = (2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-7} + 2^{-9} + 2^{-10}).\pi$.
On réduit modulo $2.\pi$: pas de changement. On encadre ensuite

$$0 \leqslant Arg(z_0) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024}).\pi \leqslant \pi$$

$$\pi \leqslant Arg(z_1) = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512}).\pi \leqslant 2.\pi$$

$$3.\pi \leqslant Arg(z_2) = (2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256}).\pi \leqslant 4.\pi$$

$$7.\pi \leqslant Arg(z_3) = (4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}).\pi \leqslant 8.\pi$$

$$15.\pi \leqslant Arg(z_4) = (8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}).\pi \leqslant 16.\pi$$

$$31.\pi \leqslant Arg(z_5) = (16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}).\pi \leqslant 32.\pi$$

$$62.\pi \leqslant Arg(z_6) = (32 + 16 + 8 + 4 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}).\pi \leqslant 63.\pi$$

$$125.\pi \leqslant Arg(z_7) = (64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}).\pi \leqslant 126.\pi$$

$$250.\pi \leqslant Arg(z_8) = (128+64+32+16+8+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}).\pi \leqslant 251.\pi$$

$$501.\pi \leqslant Arg(z_9) = (256+128+64+32+16+4+1+\frac{1}{2}).\pi \leqslant 502.\pi$$

$$1003.\pi = Arg(z_{10}) = (512+256+128+64+32+8+2+1).\pi = 1003.\pi$$

$$2006.\pi = Arg(z_{11}) = (1024+512+256+128+64+16+4+2).\pi = 2006.\pi$$

$$4012.\pi = Arg(z_{12}) = (2048+1024+512+256+128+32+8+4).\pi = 4012.\pi$$

On peut donc répondre à la question posée, et je le fais pour quelques millésimes :

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$N = 2006$														
$z_n \in S$														
$z_n \in i.\mathbb{R}$														
$z_n \in \mathbb{R}^+$														

◃2▹ Justifiez : une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ est $x \longmapsto \frac{Arctan(x/a)}{a}$.

◃3▹ Y a-t-il plus d'applications injectives de S_4 dans S_3 que de parties à 12 éléments dans S_4 *(rappel : S_n est l'ensemble des permutations d'un ensemble à n éléments).*
Y a-t-il plus d'applications injectives de S_3 dans S_4 que de parties à 12 éléments dans S_4

S_n est fait des $n!$ permutations de la liste $[1,\ 2, \dots n]$ (ou range(n) si on préfère commencer à 0).

S_4 est de cardianl 24 et S_3 n'est que de cardinal 6.
Comment une application pourrait elle être injective du gros ensemble vers le petit.
Il n'y en a pas ?

En revanche, il y a $\binom{24}{12}$ partoes à 12 éléments dans l'ensemble à 24 éléments.
Explicitement : $\dfrac{24.23.22.21.20.19.18.17.16.15.14.13}{12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}$ (douze termes en haut, autant en bas).

On trouve $2^2.7.13.17.19.23$ pour le matheux (qui préfère la magie des nombres)
et 2 704 156 pour le physicien qui préfère les ordres de grandeur
et $2^2.7.13.17.19.23$ pour le chimiste qui a vu dans cette façon d'écrire une composition atomique
et « trop » pour le SIIiste.

Et combien d'applications injectives de S_3 dans S_4 ?
On chosit l'image du premier élément de S_3 : 24 choix.
On chosit l'image du deuxième élément de S_3 : 23 choix car une image est déjà atteinte.
On chosit l'image du troisième élément de S_3 : 22 choix car deux images sont déjà atteintes.

Et ainsi de suite jusqu'au sixième et dernier élément de S_3 qui a 19 choix.

En multipliant les possibles : 24.23.22.21.20.19 (qu »'on écrit aussi $\dfrac{24!}{(24-6)!}$).

Explicitement 96 909 120. Le gagnant remporte tout !

◃4▹ On veut résoudre l'équation $z^2 = z + \overline{z}$ d'inconnue z complexe.
Montrez que nécessairement, z^2 est un réel, puis que z est soit réel, soit imaginaire pur.
Traitez les deux cas.

Pas de problème de domaine de définition, z fait ce qu'il veut dans $\mathbb{C}$.
Mais comme z^2 est égal à $z + \overline{z}$, le voilà réel.

En regardant la forme polaire, z^2 est réel si et seulement si z est réel (argument égal à π ou 0) ou z est imaginaire pur (argument égal à $\pi/2$ modulo π).

On n'a donc pas besoin de se lancer dans des $(a+i.b)^2 = \dots$.

On traite le premier cas : z est réel. On l'écrit $z = x$ avec x réel pour garder nos habitudes.
On doit résoudre $x^2 = x + x$ d'inconnue réelle.
On a deux solutions : $x = 0$ et $x = 2$.

On traite le second cas : z est imaginaire pur.
Sans détailler les notations : $(i.y)^2 = i.y - i.y$. On a encore $y = 0$ comme unique solution.

◁5▷ $x \longmapsto \dfrac{2.x+1}{x-3}$ est elle définie de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$?
Elle elle injective de $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$?
Est elle bijective de $\mathbb{R} - \{3\}$ dans $\mathbb{R}$?
Est elle bijective de $\mathbb{R} - \{3\}$ dans $\mathbb{R} - \{2\}$?

Elle est déinie sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (la valeur à éviter est 3 qui est entier, et si 2 n'a pas non plus d'image, ce n'est pas un drame).
Mais elle n'est pas à valeur dans $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. En effet, il y a des non entiers dont l'image est entière.
Par exemple $2/3$ est dans $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ mais son image est dans $\mathbb{Z}$ (c'est -1).

Elle est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$. Et elle est injective. On résout $\dfrac{2;x+1}{x-3} = \dfrac{2.y+1}{y-3}$ et on trouve $x = y$.

Injective mais par surjective. Le nombre 2 n'est jamais atteint. C'est la valeur asymptote.
Essayez de résoudre $\dfrac{2.x+1}{x-3} = 2$.

Enfin, de $\mathbb{R} - \{3\}$ sur $\mathbb{R} - \{2\}$ elle est bijective et sa réciproque est connue.

◁6▷ Combien y a-t-il de permutations dans S_4 ?
Combien y a-t-il de permutations de S_4 ? (attention, lisez bien).
Combien de P pour que le cardinal de $P(P(..P(\{1, 2, 34\})\ldots))$ dépasse le cardinal calculé juste avant ?

◁7▷ Voici un jeu des défi maths pour école primaire (et de la Fédération Française des Jeux Mathématiques) : Chaque flèche vise toute les cases vides de sa rangée (ligne, colonne ou diagonale), même « à travers » une autre flèche. Place un jeton dans chaque case vide visée par au moins trois flèches.

$\longrightarrow$		$\downarrow$		$\longleftarrow$
$\searrow$	$\swarrow$	$\searrow$	$\swarrow$	
	$\longrightarrow$			
			$\uparrow$	
$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$		$\nwarrow$

Niveau Ecole élémentaire : résolvez cet exercice.
Niveau I.T.C. : les données sont un entier (`n`, la taille du carré) et huit listes : les cases où sont les flèches en fonction de leur direction (ici : `N = [[3,3], [4,1]]`, `S=[[0,3]]`, `E=[[0,0], [2,1]]`, `O=[[0,4]]`, `NE=[[4,0]]`, `SO=[[1,3], [1,1]]`, `NO=[[4,2], [4,4]]` et `SE=...`) Écrivez un script `Python` qui retourne alors la liste des cases répondant au critère « case vide visée par au moins trois flèches ».
Bonus : écrivez un script qu'il n'y a pas dans les données des incohérences du type « une flèche hors du tableau », « une case avec deux flèches ».
Super bonus : écrivez un script avec des `can.create_rectangle(...)`, `can.create_oval(...)`.

On commence par le truc qui teste quand même que les cases sont bien dans le bon range.

```
def TestOccupation( ) :
....Occupees = N+S+E+O+NE+SE+NO+SO #toutes les cases occupées
....NbOcc = len(Occupees) #nombre de cases occupées
....for k in range(NbOcc) :
........Case = Occupees[k] #on lit la case
........if Case[0]<0 or Case[0]>=n or Case[1]<0 or Case[1]>=n : #est elle hors tableau
............return False
........for i in range(k) : #on regarde les cases avant elle
............if Case == Occupees[i] : #était elle déjà dans la liste ?
................return False
....return True #tout s'est bien passé
```

On considèrera que `n`, `N`, `S`, `E`, `O`... sont des variables globales, sinon, on les passe en variables dans la procédure qui suit.

```
def Resolution( ) :
....Occupees = N+S+E+O+NE+SE+NO+SO #toutes les cases occupées
....Positions = [ ] #liste des positions où on mettra un jeton
....for i in range(n) : #ligne à ligne
........for k in range(n) : #on avance sur la ligne
............if Test(i,k) :
................Positions.append([i, k])
....return Positions
```

Il faut penser aussi au test pour chaque case.

```
def Test(i,k) :
....if [i, k] in Occupees : #on ne regarde que les cases vides
........return(False)
....NbVisees = 0
....for Fleche in N : #les flèches visant le Nord
........if Fleche[1] == k : #même colonne
............if Fleche[0] > i : #et venant du bas
................NbVisees += 1 #la case est visée
....for Fleche in S : #les flèches visant le Sud
........if Fleche[1] == k if Fleche[0] < i : #même colonne et venant du haut
................NbVisses += 1 #la case est visée
....for Fleche in E : #les flèches visant l'Est
........if Fleche[0] == i and if Fleche[0] < k : #même ligne et venant de gauche
................NbVisses += 1 #la case est visée
....for Fleche in O : #les flèches visant l'Occident
........if Fleche[0] == i and if Fleche[0] > k : #même ligne et venant de gauche
................NbVisses += 1
....for Fleche in NE :
........if Fleche[0]+Fleche[1] == i+k : #même diagonale
............if Fleche[1] < k : #du bon coté
................NbVisses += 1
....#et encore trois tests de ce genre
....return NbVisees >= 3 #le booleen est évalué, on répond donc True ou False.
```

Une année, une élève m'a même proposé un programme qui résout et visualise les solutions, avec même des couleurs suivant le nombre de flèches qui pointent vers la case libre.

```
'ENTRER LES COORDONNEES DES FLECHES [LIGNE,COLONNE]'
N = [[3, 3], [4, 1]]
S = [[0, 3]]
E = [[0, 0], [2, 1]]
O = [[0, 4]]
NE = [[4, 0]]
SO = [[1, 3], [1, 1]]
NO = [[4, 2], [4, 4]]
SE = [[1, 0], [1, 2]]
#ici c'est un exemple

from tkinter import Tk
from tkinter import Canvas

def td(n) :
....tableau = [ ]
....for i in range(n) :
........for j in range(n) :
............case = [i, j]
............tableau.append(case)
....cases_vides = [ ]
....cases_pleines = N + S + E + O + NE + SO + NO + SE #fusion de listes
....cases_jetons = [ ]
```

```
....nb_pointé = [ ]
....nb_cases_pleines = len(cases_pleines)

....for cases in cases_pleines : #cas flèche en dehors du tableau
.......if cases[0] < 0 or cases[0] >= n or cases[1] < 0 or cases[1] >= n :
...........return False
.......i = 0 #cas plusieurs flèches à la même case
.......for j in range (nb_cases_pleines) :
...........if cases_pleines[j] == cases :
...............i += 1
...........if i > 1 :
...............return False

....for cases1 in tableau :
.......if cases1 not in cases_pleines :
...........cases_vides.append(cases1)
....for cases in cases_vides :
.......nb = 0 #nb de flèches qui le pointent
.......for casesN in N : #pour le Nord
...........if cases[1] == casesN[1] and cases[0] < casesN[0] :
...............nb += 1
.......for casesS in S : #pour le Sud
...........if cases[1] == casesS[1] and cases[0] > casesS[0] :
...............nb += 1
.......for casesE in E : #pour l'Est
...........if cases[0] == casesE[0] and cases[1] > casesE[1] :
...............nb += 1
.......for casesO in O : #pour l'Est, non je plaisante
...........if cases[0] == casesO[0] and cases[1] < casesO[1] :
...............nb += 1
.......for casesNE in NE : #pour le NordEst
...........if cases[0] + cases[1] == casesNE[1] + casesNE[0] and cases[0] < casesNE[0] and cases[1] > casesNE[1]
:
...............nb += 1
.......for casesSO in SO : #pour le SudOuest
...........if cases[0] + cases[1] == casesSO[1] + casesSO[0] and cases[0] > casesSO[0] and cases[1] < casesSO[1]
:
...............nb += 1
.......for casesNO in NO : #pour le NordOuest
...........if cases[0] + casesNO[1] == cases[1] + casesNO[0] and cases[0] < casesNO[0] and cases[1] < casesNO[1]
:
...............nb += 1
.......for casesSE in SE : #pour le SudEst
...........if cases[0] + casesSE[1] == cases[1] + casesSE[0] and cases[0] > casesSE[0] and cases[1] > casesSE[1]
:
...............nb += 1
.......if nb >= 3 :
...........cases_jetons.append(cases)
...........nb_pointé.append(nb)
....for i in range(len(cases_jetons)) :
.......print('On place un jeton sur la case', cases_jetons[i], 'qui est pointée par', nb_pointé[i], 'flèches.')


....window = Tk( ) #c'est parti pour le dessin
....window.geometry("1000x1000")
....window.configure(background = "grey")
....window.title("Schéma")
....window.resizable(True, True)

....canvas = Canvas(width = 100*n, height = 100*n, bg = "white")
....canvas.pack(padx = 50, pady = 50)

....for case in tableau : #création des cases, avec flèches
.......canvas.create_rectangle(case[1]*100, case[0]*100, (case[1]+1)*100, (case[0]+1)*100)
.......if case in N : #création des flèches Nord
```

```
...........canvas.create_line((case[1]+1/2)*100, (case[0]+1)*100, (case[1]+1/2)*100, case[0]*100, arrow='last')

.......if case in S : #création des flèches Sud
...........canvas.create_line((case[1]+1/2)*100, case[0]*100, (case[1]+1/2)*100, (case[0]+1)*100, arrow='last')

.......if case in E : #création des flèches Sud
...........canvas.create_line(case[1]*100, (case[0]+1/2)*100, (case[1]+1)*100, (case[0]+1/2)*100, arrow='last')

.......if case in O : #création des flèches Ouest
...........canvas.create_line((case[1]+1)*100, (case[0]+1/2)*100, (case[1])*100, (case[0]+1/2)*100, arrow='last')

.......if case in NE : #création des flèches NordEst
...........canvas.create_line(case[1]*100, (case[0]+1)*100, (case[1]+1)*100, (case[0])*100, arrow='last')

.......if case in SO : #création des flèches SudOuest
...........canvas.create_line((case[1]+1)*100, case[0]*100, case[1]*100, (case[0]+1)*100, arrow='last')
.......if case in NO : #création des flèches NordOuest
...........canvas.create_line((case[1]+1)*100, (case[0]+1)*100, case[1]*100, case[0]*100, arrow='last')
.......if case in SE : #création des flèches SudEst
...........canvas.create_line(case[1]*100, case[0]*100, (case[1]+1)*100, (case[0]+1)*100, arrow='last')
....i = 0
....for case in cases_jetons : #plus la couleur est foncée, plus il y a de flèches qui pointent le jeton (on
peut changer les couleurs si on veut ou en rajouter)
.......if nb_pointé[i] == 3 :
...........canvas.create_oval(case[1]*100, case[0]*100, (case[1]+1)*100, (case[0]+1)*100, fill='#B0F2B6')
#vert très clair
.......if nb_pointé[i] == 4 :
...............canvas.create_oval(case[1]*100, case[0]*100, (case[1]+1)*100, (case[0]+1)*100, fill='#3A9D23')
#vert clair
.......if nb_pointé[i] == 5 :
...........canvas.create_oval(case[1]*100, case[0]*100, (case[1]+1)*100, (case[0]+1)*100, fill='#095228')
#vert foncé
.......if nb_pointé[i] == 6 :
...........canvas.create_oval(case[1]*100, case[0]*100, (case[1]+1)*100, (case[0]+1)*100, fill='#000000')
#noir i += 1
....window.mainloop( )
```

◃8▹

♡ Montrez $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\sin(\theta).d\theta}{\sin(\theta)+\cos(\theta)}=\frac{\pi}{8}-\frac{\ln(2)}{4}$.

On pourra changer de variable avec $t=\tan(\theta)$, et décomposer ensuite en éléments simples.

On commence par diviser numérateur et dénominateur par $\cos(\theta)$ jamais nul : $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\sin(\theta).d\theta}{\sin(\theta)+\cos(\theta)}=\int_0^{\pi/4}\frac{\tan(\theta).d\theta}{\tan(\theta)+1}$.

Le changement proposé donne $dt=(1+t^2).d\theta$.

$\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\sin(\theta).d\theta}{\sin(\theta)+\cos(\theta)}=\int_0^1\frac{t}{1+t}.\frac{dt}{1+t^2}$.

On décompose en éléments simples : $\displaystyle\frac{T}{(1+T).(1+T^2)}=\frac{1}{2}.\Big(\frac{-1}{1+T}+\frac{T+1}{1+T^2}\Big)$.

On intègre en logarithmes et arctangente :

$\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\sin(\theta).d\theta}{\sin(\theta)+\cos(\theta)}=-\frac{1}{2}.\int_0^1\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{4}.\int_0^1\frac{2.t.dt}{1+t^2}+\frac{1}{2}.\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$.

◃9▹

Décomposez f en éléments simples et calculez $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n :

$f=x\longmapsto\dfrac{1}{1-x}$	$f=x\longmapsto\dfrac{1}{1-x^2}$	$f=x\longmapsto\dfrac{1}{x^2-3.x+2}$	$f=x\longmapsto\dfrac{x^2-4.x-14}{x^3+3.x^2-6.x-8}$

Pour la décomposition, certaines sont déjà des éléments simples :

$f=x\longmapsto\dfrac{1}{1-x}$	$f=x\longmapsto\dfrac{1}{1-x^2}$	$f=x\longmapsto\dfrac{1}{x^2-3.x+2}$	$f=x\longmapsto\dfrac{x^2-4.x-14}{x^3+3.x^2-6.x-8}$
$\dfrac{1}{1-x}$	$\dfrac{1}{2}.\Big(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}\Big)$	$\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$	$\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+4}$

(on a trouvé une racine évidente du dernier, puis factorisé).

On calcule ensuite les dérivées successives d'un élément simple de la forme $x \longmapsto \frac{1}{x+a}$. Mais surtout, on l'écrit $x \longmapsto (x+a)^{-1}$.

$x \longmapsto (x+a)^{-1}$	$x \longmapsto -(x+a)^{-2}$	$x \longmapsto 2.(x+a)^{-3}$	$x \longmapsto -6.(x+a)^{-4}$	$x \longmapsto 24.(x+a)^{-5}$

On émet une conjecture

$$\Big(x \longmapsto (x+a)^{-1}\Big)^{(n)} = \Big(x \longmapsto (-1)^n.n!.(x+a)^{-n-1}\Big)$$

avec • clignotant $(-1)^n$
• stalactite de factorielle $n!$
• exposant qui s'éloigne $(x+a)^{-n-1}$

Elle est validée pour les premières valeurs de n.
On la consolide par une hérédité de récurrence.

Pour n donné, on suppose $\Big(x \longmapsto (x+a)^{-1}\Big)^{(n)} = \Big(x \longmapsto (-1)^n.n!.(x+a)^{-n-1}\Big)$ et on redérive :

$$\Big(\Big(x \longmapsto (x+a)^{-1}\Big)^{(n)}\Big)' = \Big(x \longmapsto (-1)^n.n!.(-n-1).(x+a)^{-n-1-1}\Big)$$

$$\Big(\Big(x \longmapsto (x+a)^{-1}\Big)^{(n)}\Big)' = \Big(x \longmapsto (-1)^{n+1}.(n+1)!.(x+a)^{-(n+1)-1}\Big)$$

La formule est validée. Reste à l'appliquer à divers a :

$f = x \longmapsto \frac{1}{1-x}$	$f = x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{2}.\Big(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\Big)$
$\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$	$\frac{n!}{2}.\Big(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\Big)$
$f = x \longmapsto \frac{1}{1-x}$	$f = x \longmapsto \frac{x^2-4.x-14}{x^3+3.x^2-6.x-8}$
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+4}$
$\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$	$(-1)^n.n!.\Big(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x-2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+4)^{n+1}}\Big)$

Il faut savoir jongler entre « je mets $\frac{1}{(x+a)^2}$ sous la forme $(x+a)^{-2}$ plus facile à dériver
je reviens de $(x+a)^{-n}$ à $\frac{1}{(x+a)^n}$ »

Il ne reste plus qu'à calculer en $x = 0$.

Attention : N'espérez pas trouver directement une formule pour $f^{(n)}(0)$.
La démarche est « je devine une formule pour $f^{(n)}$
je la démontre par récurrence (avec x qui peut bouger)
j'applique ensuite en $x = 0$

◃10▹ ♡ Calculez $\int_0^1 \frac{12.x+18}{(x^3+7.x^2+14.x+8)}.dx$ (factorisez le dénominateur, décomposez en trois éléments simples).

Le dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle, l'application est continue, l'intégrale existe.

Pour que l'exercice soit un exercice de mathématiques, il est bon que le dénominateur ait des racines évidentes (et négatives).
On tente -1 : $-1+7-14+8=0$.
On factorise : $(x^3+7.x^2+14.x+8) = (x+1).(x^2+6.x+8) = (x+1).(x+2).(x+4)$.

On va décomposer $\frac{12.x+18}{(x+1).(x+2).(x+4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+4}$.
On propose l'égalité des numérateurs[1] : $12.x+18 = a.(x+2).(x+4) + b.(x+1).(x+4) + c.(x+1).(x+2)$.

1. et pas « on identifie » qui donne le sens $\Big(\frac{12.x+18}{(x+1).(x+2).(x+4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+4}\Big) \Rightarrow (a = b\ldots,\ b = \ldots,\ c = \ldots)$, dont on n'a rien à faire puisqu'il part de la réponse cherchée au lieu d'y aboutir

On ne résout pas le système de trois équations à trois inconnues.
On se contente de dire qu'il va avoir une solution.
Et on la trouve par conditions nécessaires :

en -1	$-12+18=$	$a.(1).(3)$	$+b.0$	$+c.0$	$a=2$
en -2	$-24+18=$	$a.0$	$+b.(-1).(2)$	$+c.0$	$b=3$
en -4	$-48+18=$	$a.0$	$+b.0$	$+c.(-3).(-2)$	$c=-5$

On notera quand même ici la puissance de raisonnement du matheux face au bourrin calculateur.
Et on notera encore son efficacité rédactionnelle par un simple « on propose/on vérifie » :

$$\frac{12.x+18}{(x+1).(x+2).(x+4)} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} - \frac{5}{x+4}$$

On intègre de 0 à 1 avec trois logarithmes : $2.\ln\left(\frac{1+1}{0+1}\right) + 3.\ln\left(\frac{1+2}{0+2}\right) - 5.\ln\left(\frac{1+4}{0+4}\right)$.

Si on y tient, on termine le calcul (mais la méthode importe plus que le résultat) : $\boxed{\ln\left(\frac{2^9.3^3}{5^5}\right)}$

◁11▷ ♡ On sait : $\dfrac{X^2+a.X+b}{(X-1).(X-2).(X+3)} = \dfrac{2}{X-1} + \dfrac{1}{X-2} + \dfrac{\alpha}{X+\beta}$. Trouvez α et β. (décomposition en simples éléments ?)

Ceci est un exercice élémentaire sur la décomposition en éléments simples, mais autre que le sempiternel « décomposez ceci en éléments simples ». Puisse-t-il vous aider à comprendre (avant d'apprendre).

Pour que le membre de droite donne après réduction au dénominateur commun celui de gauche, il faut que β soit égal à 3.

On réduit ensuite effectivement $\dfrac{2}{X-1} + \dfrac{1}{X-2} + \dfrac{\alpha}{X+3} = \dfrac{(3+c).X^2+(4-3.c).X+2.c-15}{(X-1).(X-2).(X+3)}$.

c vaut donc -2 et on a même $\boxed{\dfrac{X^2+10.X-19}{(X-1).(X-2).(X+3)} = \dfrac{2}{X-1} + \dfrac{1}{X-2} - \dfrac{2}{X+3}}$

◁12▷ Calculez $\displaystyle\int_0^{1/5} \tan(3.Arctan(x)).dx$ (on change de variable ? même pas !).

L'existence ne pose pas de problème, $Arctan(x)$ ne passe pas sur la valeur $\frac{\pi}{6}$ (pourquoi $\frac{\pi}{6}$ mais parce que $3.\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ et là, la tangente « explose »).
En effet, pour qu'il mette le pied sur $\frac{\pi}{6}$, il aurait fallu atteindre $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et ici on s'arrête en $\frac{1}{5}$ égal à $\frac{1}{\sqrt{25}}$.

On développe ensuite $\tan(3.\theta) = \dfrac{\dfrac{2.t}{1-t^2}+t}{1-\dfrac{2.t}{1-t^2}.t}$ avec des notations naturelles.

Ici, tout se « simplifie » et l'intégrale vaut $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{t^3-3.t}{3.t^2-1}.dt$ (et si ça vous rappelle $t^3 \quad +3.i.t^2 \quad -3.t \quad -i$, vous avez raison).
On décompose en éléments simples en commençant par une « partie entière » (c'est à dire un polynôme) :

$$\frac{t^3-3.t}{3.t^2-1} = \frac{\left(\frac{t}{3}\right)(3.t^2-1)}{3.t^2-1} - \frac{\frac{8}{3}}{3.t^2-1}$$

$$\frac{t^3-3.t}{3.t^2-1} = \frac{t}{3} - \frac{4}{3.(3.t+\sqrt{3})} - \frac{4}{3.(3.t-\sqrt{3})}$$

il ne fallait pas oublier le $\frac{t}{3}$ qui correspond d'ailleurs au comportement vers $+\infty$ (équivalent).

On intègre en $\frac{t^2}{6} - \frac{4}{9}.\ln(1-3.t^2)$ et on trouve $\boxed{\dfrac{1}{150} - \dfrac{4.\ln(22/25)}{9}}$

◁13▷ ♡ Pourquoi la décomposition en éléments simples de $\frac{X^2+3.X+4}{X^2-3.X+2}$ n'est elle pas $\frac{8}{1-X}+\frac{14}{X-2}$.
Quelle sera la décomposition de $\frac{X^3-2.X^2+5.X+4}{X^2-3.X+2}$?

On propose, on tente de vérifier : $\frac{8}{1-X}+\frac{14}{X-2}=\frac{6.X+2}{X^2-3.X+2}$.
Le dénominateur est le bon, mais pas le numérateur.
D'ailleurs, on aura beau faire, $\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X-2}$ ne pourra faire que des choses en $\frac{\alpha.X+\beta}{X^2-3.X+2}$.
Il nous manque le degré 2.

D'ailleurs, vers $+\infty$, $x\longmapsto\frac{x^2+3.x+4}{x^2-3.x+2}$ tend vers 1
$x\longmapsto\frac{8}{1-x}+\frac{14}{x-2}$ tend vers 0
Ajoutons ce 1 qui manque : $1+\frac{8}{1-X}+\frac{14}{X-2}=\frac{X^2+3.X+4}{X^2-3.X+2}$
On note que les coefficients qu'on auraot obtenu par la méthode des pôles sur la formule erronée

$$\frac{X^2+3.X+4}{X^2-3.X+2}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X-2}$$

sont quand même les bons.

$$\frac{X^3-2.X^2+5.X+4}{X^2-3.X+2}=X+1-\frac{8}{X-1}+\frac{14}{X-2}$$

Comprenez vous pourquoi ?

◁14▷ ♡ On pose $f=x\longmapsto\frac{1}{x^2-2.x.\cos(\theta)+1}$. Calculez $f^{(4)}(0)$ *(indication : décomposez en éléments simples sur $\mathbb{C}$ avant de dériver, et souvenez vous que je vous interdit strictement de dériver $x\longmapsto\frac{1}{(x-a)^2}$ en $x\longmapsto-\frac{2.(x-a)}{(x-a)^4}$: ; travaillez avec des exposants négatifs ou retournez au collège).*

Pour décomposer en éléments simples, il vaut mieux d'abord factoriser le dénominateur $X-.X.\cos(\theta)+1=(X-e^{i.\theta}).(X-e^{-i.\theta})$ (factorisation classique à connaître).
On a alors deux complexes à trouver a et b vérifiant $\frac{1}{x^2-2.x.\cos(\theta)+1}=\frac{a}{x-e^{i.\theta}}+\frac{b}{x-e^{-i.\theta}}$.
On réduit au dénominateur commun, on simplifie par le dénominateur : $1=a.(x-e^{-i.\theta})+b.(x-e^{i.\theta})$.
On prend des x particuliers : $1=a.(e^{-i.\theta}-e^{i.\theta})+b.0$ et $1=a.0+b.(e^{i.\theta}-e^{-i.\theta})$.
On fait appel aux formules de Moivre et Euler, et on trouve

$$\frac{1}{x^2-2.x.\cos(\theta)+1}=\frac{1}{2.i.\sin(\theta)}.\Big(\frac{1}{x-e^{i.\theta}}-\frac{1}{x-e^{-i.\theta}}\Big)$$

qu'on pouvait proposer et vérifier.

Sous cette forme, il devient aisé de dériver une fois, deux fois, trois fois, quatre fois.
Mais c'est la forme $\frac{1}{x^2-2.x.\cos(\theta)+1}=\frac{1}{2.i.\sin(\theta)}.\Big((x-e^{i.\theta})^{-1}-(x-e^{-i.\theta})^{-1}\Big)$ qui est la plus pratique :

$$\begin{array}{llcll}
n=0 & f(x) & = & \frac{1}{2.i.\sin(\theta)}. & \Big((x-e^{i.\theta})^{-1} \quad -(x-e^{-i.\theta})^{-1}\Big)\\
n=1 & f'(x) & = & \frac{1}{2.i.\sin(\theta)}. & \Big(-(x-e^{i.\theta})^{-2} \quad +(x-e^{-i.\theta})^{-2}\Big)\\
n=2 & f''(x) & = & \frac{1}{2.i.\sin(\theta)}. & \Big(2.(x-e^{i.\theta})^{-3} \quad -2.(x-e^{-i.\theta})^{-3}\Big)\\
n=3 & f^{(3)}(x) & = & \frac{1}{2.i.\sin(\theta)}. & \Big(-6.(x-e^{i.\theta})^{-4} \quad +6.(x-e^{-i.\theta})^{-4}\Big)\\
n=4 & f^{(4)}(x) & = & \frac{1}{2.i.\sin(\theta)}. & \Big(24.(x-e^{i.\theta})^{-5} \quad -24.(x-e^{-i.\theta})^{-5}\Big)
\end{array}$$

Je vous laisse conjecturer la formule générale.

On calcule en 0 : $f^{(4)}(0)=\frac{24}{2.i.\sin(\theta)}.\Big(-e^{5.i.\theta}+e^{-5.i.\theta}\Big)$
Le sinus revient par miracle, avec un $2.i$, mais avec $5.\theta$: $f^{(4)}(0)=24.\frac{\sin(5.\theta)}{\sin(\theta)}$ (généralisez à n)

Je n'ose imaginer que des élèves auront commis l'erreur incroyable : $f(0) = \frac{1}{1}$ *donc en dérivant :* $f^{(4)}(0) = 0$ *!*
Cette idiotie vous ramène au rang de... de qui ? Je ne sais pas. Elle veut dire que vous ne savez pas ce qu'est une fonction, une dérivée, un calcul, un cerveau, un être humain...

◁15▷ Montrez $\int_{t=-1}^{2} \frac{t+7}{t+\sqrt{t+2}-10}.dt = 1 + 12.\ln\left(\frac{18}{25}\right)$ (changez de variable, décomposez en éléments simples, intégrez en logarithmes).

$\int_{t=-1}^{2} \frac{t+7}{t+\sqrt{t+2}-10}.dt$ existe par continuité *($t+2$ reste positif, et pour annuler $t-10+\sqrt{t+2}$, il faudrait avoir $t^2-20.t+100 = t+2$, ce qui n'a lieu qu'en 7 et 14).*

On pose $u = \sqrt{t+2}$ et donc $t = u^2 - 2$. On différentie : $dt = 2.u.du$.
L'intégrale devient $\int_{u=1}^{u=2} \frac{u^2+5}{u^2-2+u-10}.2.u.du$.
On factorise le dénominateur : $\frac{2.u^3+10.u}{(u+4).(u-3)}$ et on décompose en éléments simples.
La méthode des pôles donnerait : $\frac{12}{u-3} + \frac{24}{u-4}$ et même $\frac{12}{u-3} + \frac{24}{u+4}$.
Mais la réduction au dénominateur commun n'est pas valable :

$$\frac{12}{u-3} + \frac{24}{u+4} = \frac{36.u-24}{(u-3).(u-4)}$$

Il manque tout une partie polynomiale :

$$\frac{2.u^3+10.u}{(u+4).(u-3)} = \frac{(2.u-2).(u^2+u-12)+36.u-24}{(u-3).(u+4)}$$

Finalement $\boxed{\frac{2.u^3+10.u}{(u+4).(u-3)} = (2.u-2) + \frac{12}{u-3} + \frac{24}{u+4}}$

Il ne reste qu'à intégrer entre 1 et 2 : $\left[u^2-2\right]_1^2 = 1$ et les autres termes donnent un logarithme.

$$\int_{t=-1}^{2} \frac{t+7}{t+\sqrt{t+2}-10}.dt = 1 + 24.\ln(3) + 12.\ln(2) - 24.\ln(5)$$

Et on a bien $1 + 12.\ln\left(\frac{18}{25}\right)$ *(résultat négatif, mais la fonction intégrée l'est).*

◁16▷ L'élève Pabokoul-Déba veut décomposer en éléments simples $\frac{6.x^4-9.x^3-22.x-45}{(x-3).(x^4+6.x^2+5)}$.
Il écrit $\frac{a}{x-3} + \frac{b.x+c}{x^2+3} + \frac{d.x+e}{x^2+2}$, réduit au dénominateur commun, identifie les numérateurs et obtient le système

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} a & +b & & +d & & = & 6 \\ & -3.b & +c & -3.d & +e & = & -9 \\ 5.a & +2.b & -3.c & +3.d & -3.e & = & 0 \\ & -6.b & +2.c & -9.d & +3.e & = & -22 \\ 6.a & & -6.c & & -9.e & = & -45 \end{array}\right|$$

. Il résout et trouve $(a, b, c, d, e) = (1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 5)$. Mais il a tout faux.
Pourquoi ?

La résolution du système est la bonne.
Mais le dénominateur n'est pas le bon !
Quel con ce Pabokoul !

◁17▷ ♡ Calculez les deux intégrales que voici $\int_1^2 \frac{dt}{e^t - e^{-t}}$ et $\int_1^2 \frac{dt}{5^t - 5^{-t}}$ (on change de truc qui bouge ?).

Idée naturelle : changer de variable (non sans avoir vérifie que l'intégrale existe car la fonction est continue, son dénominateur ne s'annulant pas).

On pose $e^t = u$, et on doit calculer $\int_e^{e^2} \frac{du}{u.\left(u-\frac{1}{u}\right)}$.

On décompose ce $\dfrac{1}{u^2-1}$ en éléments simples : $\dfrac{1}{2}.\Big(\dfrac{1}{u-1}-\dfrac{1}{u+1}\Big)$.
On intègre en logarithmes, et on trouve $\dfrac{1}{2}.\Big(\ln(e^2-1)-\ln(e-1)-\ln(e^2+1)+\ln(e+1)\Big)$
Et on pourra simplifier $\ln(e^2-1)-\ln(e-1)$ en $\ln(e+1)$.

L'autre intégrale est sur le même modèle : $5^t=u$ donc $t=\dfrac{\ln(u)}{\ln(5)}$ et $dt=\dfrac{du}{\ln(5).u}$.
On effectuera la même décomposition en éléments simples et le même calcul d'intégrale.
$\dfrac{\ln(18)-\ln(13)}{.\ln(5)}$ et on ne peut guère simplifier plus.

◃18▹ ♣ On appelle élément simple tout rationnel de la forme $\dfrac{a}{p^b}$ avec a entre 0 et $p-1$ et l'exposant b entier naturel.
On appelle aussi éléments simples les entier relatifs. On affirme que tout rationnel se décompose en somme d'éléments simples.

Exemples :

$\dfrac{11}{15}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{22}{15}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{32}{15}=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{13}{25}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5^2}$

Décomposez en éléments simples

$\dfrac{5}{7}$	$\dfrac{12}{7}$	$-\dfrac{12}{7}$	$\dfrac{17}{21}$	$\dfrac{173}{49}$	$\dfrac{11}{52}$	$\dfrac{11}{12}$	$\dfrac{123}{60}$

$\dfrac{5}{7}$	$\dfrac{12}{7}$	$-\dfrac{12}{7}$	$\dfrac{17}{21}$	$\dfrac{173}{49}$	$\dfrac{11}{52}$	$\dfrac{11}{12}$	$\dfrac{123}{60}$
$\dfrac{5}{7}$	$1+\dfrac{5}{7}$	$-2+\dfrac{2}{7}$	$\dfrac{1}{7}+\dfrac{2}{3}$	$3+\dfrac{3}{7}+\dfrac{5}{49}$	$-1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{6}{13}$	$\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}$	

Le premier est déjà un élément simple.

Le second déborde un peu au dessus d'un entier. On prend sa partie entière plus un élément simple.

Pour le troisième, il faut se méfier : la partie entière de $\dfrac{-12}{7}$ est bien -3.

Pour le quatrième, on décompose le dénominateur, et on cherche a et b pour avoir $\dfrac{a}{7}+\dfrac{b}{3}=\dfrac{17}{21}$. $3.a+7.b=17$, qu'est ce que Bézout en pense ?

Pour $\dfrac{173}{7^2}$, on décompose : $173=3\times 49+3\times 7+5$. C'est « basique ».

Sachant $52=2^2\times 13$, on pose a priori $\dfrac{11}{52}=\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{13}$, .

on trouve $\dfrac{11}{52}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{7}{13}$

et on avance pas à pas en redecomposant $\dfrac{11}{52}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{7}{13}$

enfin, on efface le signe moins $\dfrac{11}{52}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-1+\dfrac{6}{13}$

De même $\dfrac{11}{12}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}$ car $11=1.3+.4$.

◃19▹ Calculez $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}}\tan(2.Arctan(t)).dt$ (simplifiez déjà).

L'application est continue ($Arctan(t)$) ne va pas jusqu'à $\pi/4$), l'intégrale existe.
Et on explicite : $\tan(2.Arctan(t))=\dfrac{2.t}{1-t^2}$.
On décompose en éléments simples : $\dfrac{2.t}{(1-t).(1+t)}=\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{1}{1+t}$. Il ne reste qu'à intégrer en logarithme :

$$\boxed{\int_0^{1/\sqrt{3}}\tan(2.Arctan(t)).dt=\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

en utilisant toutes les quantités conjuguées possibles pour virer les $\sqrt{3}$.

Remarque : on a même directement une forme en $\dfrac{u'}{u}$ si on veut.

◃20▹ Retrouvez les coefficients : $\dfrac{2.x^2+2}{x^4+x^2+1}=\dfrac{a.x+b}{x^2+x+1}+\dfrac{c.x+d}{x^2-x+1}$.
Complétez : $\displaystyle\int\frac{2.x^2+2}{x^4+x^2+1}.dx=\Big[\star.Arctan\Big(\frac{x^2-1}{☻.x}\Big)\Big]$.

$$\frac{2.x^2+2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}$$

$$\int\frac{2.x^2+2}{x^4+x^2+1}.dx=\Big[\frac{2.\sqrt{3}}{3}..Arctan\Big(\frac{x^2-1}{\sqrt{3}.x}\Big)\Big]$$

◃21▹ Complétez : $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+x}=\ln(1+\sqrt{x}+x)-\star.Arctan\Big(\frac{\cdots}{.}\Big)$.

Puisqu'on nnou le propose, on dérive $x\longmapsto\ln(1+\sqrt{x}+x)$ et on trouve $x\longmapsto\dfrac{1+\frac{1}{2.\sqrt{x}}}{1+x+\sqrt{x}}$.

On a un terme à compenser $x\longmapsto\dfrac{1}{2.\sqrt{x}.(1+x+\sqrt{x})}$.

On va le calcule par changement de variable : $\displaystyle\int\frac{dx}{2.\sqrt{x}.(1+x+\sqrt{x})}=\int\frac{du}{1+u+u^2}$.

On factorise canoniquement :

$$\int\frac{dx}{2.\sqrt{x}.(1+x+\sqrt{x})}=\int\frac{du}{1+u+u^2}=\int\frac{du}{(u+0.5)^2+0;75}=\frac{4}{3}.\int\frac{du}{\Big(\frac{2.u+1}{\sqrt{3}}\Big)^2+1}$$

On intègre en Arctangente : $\boxed{\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+x}=\ln(1+\sqrt{x}+x)-\frac{2}{\sqrt{3}}.Arctan\Big(\frac{2.\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}}\Big)}$

◃22▹ ♡ Sachant $y_0=2$ et $2^t.y'_t+3^t.y_t=0$, calculez y_1. Sachant $y_0=2$ et $2^t.y'_t+2^t.y_t=1$, calculez y_1.

L'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients continus $2^t.y'_t+3^t.y_t=1$ avec condition initiale se met sous forme de Cauchy Lipschitz sur $\mathbb{R}$ sans problème : $y'_t+(3/2)^t.y_t=0$. Avec les notations habituelles : $a_t=(3/2)^t=e^{t.\ln(3/2)}$. On intègre en $A_t=\dfrac{e^{t.\ln(3/2)}-1}{\ln(3/2)}$ histoire d'avoir la primitive nulle en 0. On trouve donc $y_t=y_0.e^{-\left(e^{t.\ln(3/2)}-1\right)/\ln(3/2)}=2.e^{-\left(e^{t.\ln(3/2)}-1\right)/\ln(3/2)}$. On veut la valeur en 1 : $2.e^{-\left(e^{\ln(3/2)}-1\right)/\ln(3/2)}$.

On simplifie en $\boxed{2.e^{-\left(\frac{3}{2}-1\right)/\ln(3/2)}=2.e^{\frac{3}{2.\ln(2/3)}}}$ et on n'a guère mieux.

Pour $y_0=2$ et $2^t.y'_t+2^t.y_t=1$, les solutions homogènes sont simples : $h'_t+h_t=0$: $h_t=h_0.e^{-t}$.
On cherche une solution particulière de $y'_t+y_t=e^{-t\ln(2)}$ sous forme justement exponentielle : $\lambda.e^{-t.\ln(2)}$. On ajuste : $\lambda=\dfrac{1}{1-\ln(2)}$.

On a la forme générale des solutions : $y_t=\lambda.e^{-t}+\frac{2^{-t}}{1-\ln(2)}$ valables sur $\mathbb{R}$.

La condition initiale livre la valeur de λ : $\dfrac{2.\ln(2)-1}{\ln(2)-1}$.

La valeur en 1 est $\boxed{\dfrac{2.\ln(2)-1}{\ln(2)-1}.\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{2-2.\ln(2)}}$

◃23▹ Résolvez l'équation différentielle $\begin{vmatrix} y_t & 1 & 1\\ y'_t & 3 & -2\\ y''_t & 9 & 4\end{vmatrix}=0$ d'inconnue y fonction de t.

C'est finalement une équation différentielle linéaire à coefficients constants : $30.y_t-5.y'_t-5.y''_t=0$.
On l'écrit même $y''_t+y'_t-6.y_t=0$.
L'équation caractéristique est $\lambda^2+\lambda-6=0$.
Elle admet deux racines 2 et -3.
Les solutions sont donc $Vect_{\mathbb{R}}(t\longmapsto e^{2.t},\ t\longmapsto e^{-3.t})$.

◁24▷ En utilisant la formule $\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}\dots a_n^{\sigma(n)}$ calculez les déterminants suivants

$\begin{vmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix}$		$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$			$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$		$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$			$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

◁25▷ On va démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, mais en évitant le raisonnement que tout le monde fait[a].
On pose $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n.\sqrt{2} \in \mathbb{N}\}$. Montrez : $\forall n \in A,\ n.\sqrt{2} - n \in A$.
Concluez quen'a pas de plus petit élément.
Concluez que A est vide. Déduisez $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

a. le site CutTheKnot a référencé trente preuves, pourquoi tout le monde donne la même et fait semblant de croire qu'il faut retenir la même pour tous et pas une autre...

On suppose *(peut être à tort)* que n est dans A.
On regarde alors $\sqrt{2}.n - n$. Comme n est dans A, c'est la différence de deux entiers. C'est un entier.
Il est non nul, puisque $\sqrt{2}$ ne vaut pas 1 et n est non nul.
On le multiplie par $\sqrt{2}$: $\sqrt{2}.(\sqrt{2}.n - n) = 2.n - \sqrt{2}.n$. C'est encore la différence de deux entiers, c'est un entier.
On a bien tout pour dire : $\sqrt{2}.n - n$ est dans A.

Mais ce nouvel entier est strictement plus petit que n *(c'est $(\sqrt{2}-1).n$ avec $\sqrt{2}-1$ plus petit que 1)*.

On est parti pour avoir dans A une suite strictement décroissante d'entiers naturels. C'est étrange.

Plus simplement, on arrive à : « A est vide ».
S'il ne l'était pas, on noterait a son plus petit élément *(toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus petit élément)*. Et $\sqrt{2}.a - a$ serait encore dans A, ce qui contredirait la « minimalité » de a.

Il n'existe pas d'entier non nul n vérifiant $n.\sqrt{2} \in \mathbb{N}$.
Il n'existe pas de couple d'entiers non nuls $(n,\ m)$ vérifiant $n.\sqrt{2} = m$.
Il n'existe pas de couple d'entiers non nuls $(n,\ m)$ vérifiant $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$. C'est bon, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

◁26▷ On va démontrer de plusieurs façons que l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers est infini dans $\mathbb{N}$.

Toutes ces démonstrations vont être un peu sur le même principe :
chaque fois qu'on a des nombres premiers, on en trouve un nouveau.
On va donc en avoir autant qu'on veut, donc une infinité.

Mais le mieux sera à chaque fois de faire un raisonnement par l'absurde :
si il y en a un nombre fini, alors on prend « le plus grand » ou « le plus possible de nombres premiers » ; on en construit un nouyveau, et on a une contradiction.

♡ 0 ♡ On suppose que l'ensemble des nombres premiers est fini, formé de N entiers $\{p_1, \dots p_N\}$. On pose alors $Q = 1 + \prod_{n=1}^{N} p_n$. Montrez que cet entier admet au moins un diviseur premier q. Montrez que q n'est aucun des p_i.

Le nombre Q est un entier (produit et somme d'entiers). Et il est plus grand que 1.
Comme tout entier plus grand que 1, il a au moins un diviseur premier.

Principe : si le nobre est premier, c'est bon. Sinon, par définition de « non premier », il se déceompose en $Q = q_1.q_2$ avec $1 < q_1 < Q$ et $1 < q_1 < Q$.
On recommence avec q_1 qui est soit premier, soit divisible.
Par descente infinie, on s'arrêtera sur un entier qui sera alors un nombre premier.

> *Variante par récurrence forte.*
> 2 *admet un facteur premier.*
> *Supposons pour un n donné que tous les entiers de* 2 *à n se décomposent.*
> *On considère $n+1$. Si il est premier, c'est bon, il admet lui même comme facetru premier.*
> *Sinon, il se décompose en deux entiers entre* 2 *et n qui admettent chacun au moins un facteur premier.*

Notons q un diviseur premier de Q.

Si q était l'un des p_i, il diviserait Q mais il diviserait aussi $\prod_{n=1}^{N} p_n$ (en étant un des facteurs du produit).

Mais alors il diviserait la différence $Q - \prod_{n=1}^{N} p_n$.
Et un nombre premier ne peut pas diviser 1.

Le diviseur premier est donc un nouveau nombre premier.

♡ 1 ♡ Concluez.

On suppose par l'absurde qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers. On les prend tous et on en construit le « produit plus un » appelé Q.
On extrait un facteur premier.
Et on a un nouveau nombre premier, ce qui contredit le fait de les avoir tous pris.

On peut même profiter de cette idée pour construire de proche en proche une liste de nombres premiers.
On part de 2.
On le met dans un produit où il est seul, on ajoute 1. On a 3. C'est un nombre premier.
On prend 2 et 7, on construit $2.3+1$. C'est un nouveau nombre premier.
On regarde alors $2.3.7+1$. C'est 45. Il est premier.
On considère alors $2.3.7.43+1$. Il vaut 1807 et n'est pas premier. Son plus petit facteur premier est 13.
On continue avec $2.3.7.43.13+1$ et ainsi de suite.

Programmation. On crée une procédure qui cherche le plus petit facteur premier d'un entier.

```
def facteur(N) :
....for k in range(2, N+1) : #la dernière possibilité sera Q lui même
........if (N%k) == 0 :
............return k #on a un facteur
```

Cet algorithme cherche le plus petit diviseur de Q. Et comme c'est le premier, il est justement premier.
Cet algorithme termine (par sortie brutale et pas jolie de boucle en cours d'exécution). Si le nombre Q est premier, c'est à la dernière étape qu'on retourne justement Q lui même.

```
L = [2] #car il y a un début à tout
P = 2 #le produit
for loop in range(10) :
....f = facteur (P+1)
....L.append(facteur(P+1))
....P *= f
```

Mais ça devient vite horrible :
[2, 3, 7, 43, 13, 53, 5, 6221671]

◊ 0 ◊ Pour tout n, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ (nombre de Fermat, à comprendre comme $2^{(2^n)} + 1$). Calculez F_n pour n de 0 à 3.

0	1	2	3	4
3	5	17	257	65 537

◊ 1 ◊ Montrez pour tout n : $2 + \prod_{k=0}^{n} F_k = F_{n+1}$.

On initialise une récurrence avec ce qui est écrit au dessus.

On se donne n et on suppose $2+\prod_{k=0}^{n} F_k = F_{n+1}$ et même

$$\prod_{k=0}^{n} F_k = F_{n+1} - 2$$

On multiplie par F_{n+1} :

$$\prod_{k=0}^{n+1} F_k = (F_{n+1})^2 - 2.F_{n+1}$$

On ajoute 2 (et même $1+1$)

$$\prod_{k=0}^{n+1} F_k = (F_{n+1})^2 - 2.F_{n+1} + 1 + 1 = (F_{n+1}-1)^2 + 1$$

On remplace par la définition

$$\prod_{k=0}^{n+1} F_k = (2^{(2^{n+1})})^2 + 1 = 2^{(2^{n+1}).2} + 1 = 2^{(2^{n+2})} + 1 = F_{n+2}$$

L'hérédité est achevée.

Une preuve directe est aussi possible, considérez par exemple $(1+z).(1+z^2).(1+z^4).(1+z^8)$.

$$\begin{array}{lcccccc}
 & (1-z). & (1+z). & (1+z^2). & (1+z^4). & (1+z^8) \\
 & = & (1-z^2). & (1+z^2). & (1+z^4). & (1+z^8) \\
\textit{Multipliez par } (1-z) : & = & & (1-z^4). & (1+z^4). & (1+z^8) \\
 & = & & & (1-z^8). & (1+z^8) \\
 & = & & & & (1-z^{16})
\end{array}$$

On a donc $(1+z).(1+z^2).(1+z^4)\dots(1+z^{2^n}) = \dfrac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z}$.
Il ne reste plus qu'à prendre $z=2$.

◊ 2 ◊ Déduisez que le seul diviseur commun de F_k et F_p pour k différent de p est égal à 1.

On se donne deux entiers p et k distincts.
Sans perte de généralité, on va supposer $k < p$.
On cherche alors à vérifier que le seul diviseur commun de F_p et $F_k$est égal à 1.
On prend donc un diviseur commun de F_p et F_k que l'on note d (objectif : $d=1$.

Comme il divise F_k il divise $\prod_{n=0}^{p-1} F_n$ (c'est le k^{ieme} facteur du produit).
Il divise donc $F_p - 2$ par la formule précédente.
Mais comme il divise aussi F_p il divise la différence
d divise 2. d ne peut donc valoir que 1 ou 2.
Mais 2 n'est pas un diviseur de F_p ni de F_k puisque par construction, F_p et F_k sont premiers.
ne reste donc que la seule solution : $d=1$.

◊ 3 ◊ Le raisonnement commence alors par « même si les F_i ne sont pas forcément premiers... » et se termine par « ...il y a donc une infinité de nombres premiers ». Complétez le.

Déjà, il y a une infinité de nombres de Fermat.
Et aucun n'a de facteur commun avec les autres.
Si il y avait un nombre fini de nombres premiers p_1 à p_N, il nous suffit de considérer les nombres de Fermat de F_0 à F_n (ça en fait $n+1$).
Chacun d'entre eux a un facteur premier.
On va associer à chacun son plus petit facteur premier : $F_k \longmapsto p_{i_k}$ pour i_k bien choisi.
Mais comme les F_k et F_p n'ont aucun facteur premier en commun, les indices i_k et i_p sont distincts.
On a donc une application injective de l'ensemble $\{F_0,\ F_1, \dots F_n\}$ dans l'ensemble des nombres premiers.
L'ensemble de départ a $n+1$ éléments et l'ensemble d'arrivée n'en a que n. C'est contradictoire avec l'injectivité.

Autre idée sans « par l'absurde » : à chaque F_kj'associe son plus petit facteur premier, je construis ainsi une infinité de nombres premiers.

n	0	1	2	3	4	5	6	
Fermat F_n	3	5	17	257	65 537	4 294 967 297	18 446 744 073 709 551 616	
plus petit facteur premier	3	5	17	257	65 537	641	274 177	

C'est Euler qui a montré que F_5 n'était pas premier.
Fermat avait crû à partir des premiers qu'il avait de quoi engendrer explicitement des nombres premiers.

♯ 0 ♯ Bonus : Écrivez un script qui détermine combien de F_k pour k de 0 à 6 sont premiers.

C'est visible au dessus.
Ensuite, F_7 vaut quand même 340 282 366 920 938 463 463 374 607 431 768 211 456

♠ 0 ♠ Soit p un nombre premier. On pose $N = 2^p - 1$ et on note q un facteur premier de N.

Exemples

$p = 5$	$N = 2^5 - 1$ est premier	$q = 2^5 - 1 = 31$
$p = 7$	$N = 2^7 - 1$ est premier	$q = 2^7 - 1 = 127$
$p = 11$	$N = 2^{11} - 1$ se factorise	$q = 23$ ou $q = 89$

Montrez : $2^p = 1\ [q]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ (n < p) \Rightarrow (2^n \neq 1\ [q])$ (il faudra penser à écrire une identité de Bézout entre n et p).

Comme q est un facteur de N, il divise N. On a donc $2^p - 1 = 0\ [q]$ et directement $2^p = 1\ [q]$.

Prenons ensuite un entier n et supposons le plus petit que p.
Comme p est premier, n et p sont premiers entre eux. Et l'ami Bézout nous dit qu'il existe deux entiers relatifs a et b vérifiant $a.n + b.p = 1$.

On montre alors que 2^n ne peut pas valoir 1 modulo q.
Sinon on aurait $2^n = 1\ [q]$ puis $(2^n)^a = 1^a\ [q]$ (compatibilité des puissances avec les congruences [2]).

Comme on a déjà $2^p = 1\ [q]$, on a aussi $(2^p)^b = 1\ [q]$.

Par compatibilité, on multiplie les égalités membre à membre : $(2^n)^a.(2^p)^b = 1\ [q]$.
En développant les puissances, on aboutit à $2^{a.n+b.p} = 1\ [q]$ c'est à dire $2 = 1\ [q]$.
Quitte à pousser le bouchon jusqu'au bout, on a a alors $1 = 0\ [q]$ ce qui est contradictoire (rappelons que q est un facteur premier, il ne vaut pas 1).

♠ 1 ♠ On pose $A = \{1,\ 2, \dots q-1\}$ et on définit sur A la relation $\Re$ par $(a\Re b) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N},\ a = 2^n.b\ [q])$. Montrez que c'est une relation d'équivalence sur A.

Réflexive.

On se donne a et on cherche n vérifiant $a = 2^n.a\ [q]$. Il suffit de prendre $n = 1$.

Symétrique.

On se donne a et b et on suppose que a est en relation avec b (il existe donc un entier n vérifiant $a = 2^n.b\ [q]$).
On cherche alors un (autre) entier m vérifiant $b = 2^m.a\ [q]$.

> *Bien sûr, si on écrit tout de manière formelle sans réfléchir et y voir de logique, on écrit $a.2^{-n} = 2^{-n}.2^n.b\ [q]$ et on dit « c'est bon avec $m = -n$ ». mais ceci n'a pas de sens. m est négatif.*
>
> *Si on garde ses réflexes de Terminable, on met des$+k.q$ partout à la place des congruences et ça devient indigeste.*

Mais on rappelle que l'on a $2^p = 1\ [q]$.
On propose alors $m = p - n$. On a alors $2^{p-n}.a = 2^{p-n}.2^b.b\ [q] = 2^p.b\ [q]$ et c'est fini.
L'idée était de déplacer avec p pour que soit positif (tout repose sur $1 = 2^p\ [q]$).

Ah, mais $p - n$ est peut être encore négatif ?
Bon, proprement, on écrit $n = p.d + r$ avec r entre 0 et $p - 1$ (division euclidienne).
On propose cette fois $m = (d+1).p - n$ et c'est bon, il est positif et les $2^{(d+1).p}$ s'en vont modulo q.

Transitive.

On se donne a, b et c. On suppose $a\Re b$ et aussi $b\Re c$.

2. y compris pour les exposants négatifs car q est premier

On traduit : il existe n et m vérifiant $a = 2^n.b\ [q]$ et $b = 2^m.c\ [q]$.
On reporte : $a = 2^{n+m}.c\ [q]$. Et comme $n + m$ est un entier, on reconnaît $a\Re c$.

Comment perdre des points sur ces questions ?
Les élèves qui ont vraiment du mal et regardent les définitions avec les yeux d'une poule qui trouve un couteau[3] *écrivent toutes les définitions avec le même n : $a = 2^b.b\ [q]$ et $b = 2^n.c\ [q]$ et ainsi de suite.*
Sinon, il y a ceux qui rédigent n'importe comment, avec
$\forall a,\ a\Re a \Leftrightarrow a = 2^0.a\ [q]$
En écrivant ceci, ils disent juste « je connais la définition ». Mais ils ne prouvent pas $\forall a,\ a\Re a$. Ils prouvent une équivalence.
Et cette équivalence pourrait tout aussi bien être $\forall a,\ a \neq a \Leftrightarrow a = e^a$, puisque ce serait ici Faux⇔Faux.
Bâtir un raisonnement, ce n'est pas aligner des symboles mathématiques partout. Bien au contraire.
C'est rédiger avec des mots, des idées, et surtout des variables qu'on introduit.
Bref, on écrit sous forme « $\forall, \ldots \Rightarrow \ldots$ » ce qu'on doit prouver.
Mais pour le prouver, on écrit « on prend... on suppose... on montre... ».

♠ 2 ♠ Explicitez les six classes d'équivalence dans le cas $p = 5$.

p vaut 5, $2^p - 1$ vaut 31 et donc q vaut aussi 31.
On vérifie au passage $2^5 = 32 = 1\ [31]$.
Les puissances de 2 modulo 31 valent donc 1, 2, 4, 8 et 16.
Chaque entier a sera donc en relation avec a, $2.a$, $4.a$, $8.a$ et $16.a$. Et c'est tout.
On peut donc découper et mettre ensemble 1, 2, 4, 8 et 16.
Ensuite, on prend un élément qu'on a pas encore pris : 3. On met dans sa classe 3, 6, 12, 24 et 48 (égal à 17).
Qui n'a pas encore été pris ? 5. Allez, c'est parti avec 5, 10, 20, 9 et 18.

1	2	4	8	16
3	6	12	24	17
5	10	20	9	18
7	14	28	25	19
11	22	13	26	21
15	30	29	27	23

Chaque élément est dans une classe et une seule. Et ils sont tous là.

♠ 3 ♠ Déterminez les deux classes d'équivalence pour p égal à 11 (avec le choix $q = 23$).

On a choisi $q = 23$ (qui divise bien $2^{11} - 1$.
On n'a que 22 éléments à répartir en classes d'équivalence.
Dans la classe de 1, on a les puissances de 2 (réduites modulo 23) :

1	2	4	8	13	32=9	18	36=13	26=3	6	12

et on a ensuite $2.12 = 24 = 1$, la liste se referme.

Il reste onze éléments à placer dans l'autre classe. On va la commencer par un élément pas encore pris : 5 (mais commencer par 10 ou 7 ne fera que déphaser la liste.

1	2	4	8	13	9	18	13	23	6	12
5	10	20	17	11	22	21	19	15	7	14

♠ 4 ♠ On revient au cas général pour p. Montrez qu'il y a p éléments dans chaque classe d'équivalence.

Dans la classe d'équivalence de l'élément a il y a tous les $2^n.a$ avec n entre 0 et $p - 1$.

♠ 5 ♠ Déduisez que p divise $q - 1$ puis que q est strictement plus grand que p.

On découpe A en classes d'équivalences. C'est une partition de A (chaque élément est dans une classe et une seule).
On dit qu'il y a k classe.
Mais comme chacun est de cardinal p, on déduit au final qu'il y a $k \times p$ éléments dans A.

Mais quel est le cardinal de A ? On commence à 1 et termine à $q - 1$. C'est donc $q - 1$.
On a donc $k \times p = q - 1$.

On note au passage que ceci donne $1 \times q - k \times p = 1$. C'est une identité de Bézout entre p et q.

3. *expression populaire pour dire « sans comprendre »*

On a $q = k.p + 1 > p + 1$. Il est donc plus grand que p.

♠ 6 ♠ Déduisez : $\forall p \in \mathbb{P},\ \exists q \in \mathbb{P},\ q > p$. Déduisez que $\mathbb{P}$ est infini.

Pour tout nombre premier p trouvé, il existe un nouveau nombre premier strictement plus grand que p.
On construit ainsi une suite strictement croissante d'entiers premiers (on peut commencer à 2).
Par croissance stricte, on a une infinité d'entiers premiers tous distincts.

Pratiquement, si on part de 2

p	$2^p - 1$	q nouveau nombre premier
2	3	3
3	7	7
7	127	127
127	170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727	euh...

♣ 0 ♣ Pour tout couple d'entiers relatifs $(a,\ b)$, on pose $N_{a,b} = \{a + n.b \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Déterminez $N_{a,,0}$, $N_{a,1}$, $N_{0,2}$ et $N_{1,2}$.
Une partie A de $\mathbb{Z}$ est dite « ouverte » si $\forall a \in A,\ \exists b \in \mathbb{N}^*,\ N_{a,n} \subset A$.
Montrez que ce sont des ensembles ouverts : $\emptyset$ | $\mathbb{Z}$ | $2.\mathbb{Z}$

On mâchouille les définition :

$N_{a,0} = \{a\}$	$N_{a,1} = \mathbb{Z}$	$N_{0,2} = \{2.n \mid n \in \mathbb{Z}\} = 2.\mathbb{Z}$	$N_{1,2} = \{2.n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\} = 2.\mathbb{Z} + 1$

Remarque : $N_{a,1}$ est l'ensemble des $a + n$ et tout entier k s'écrit bien $a + n$ pour n bien choisi.
D'autre part, $N_{0,2} = N_{12,2} = N_{2024,2}$ et ainsi de suite. Le fait de démarrer à 2024 au lieu de 0 ne change rien, puisque n décrit $\mathbb{Z}$.

L'ensemble vide répond à toute quantification commençant par $\forall a \in \emptyset,\ \ldots$.

Prenons a quelconque dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble $N_{a,1}$ est égal à $\mathbb{Z}$ lui aussi, et est inclus dans $\mathbb{Z}$.

Prenons a dans $2.\mathbb{Z}$. L'ensemble $N_{a,2}$ est égal lui aussi à $2.\mathbb{Z}$. Il existe donc b (égal à 2) vérifiant $N_{a,b} \subset 2.\mathbb{Z}$.

♣ 1 ♣ Montrez que $\mathbb{P}$ n'est pas ouvert (qu'il soit fini ou non, ce n'est pas encore la question).

Être ouvert, c'est vérifier : $\forall a \in A,\ \exists b \in \mathbb{N}^*,\ N_{a,b} \subset A$.

Prouver $\mathbb{P}$ non ouvert, c'est prouver $\exists a \in \mathbb{P},\ \forall b \in \mathbb{N}^*,\ N_{a,b} \not\subset A$.
Et même plus précisément

$$\exists a \in \mathbb{P},\ \forall b \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{Z},\ a + n.b \notin \mathbb{P}$$

A nous de choisir a. Bon, on va prendre 2 car c'est un élément de $\mathbb{P}$ un peu à part (mais peut être que n'importe quel a conviendrait).
Ensuite, b est quelconque. Ce n'est pas à nous de le choisir.
En revanche, n a le droit de dépendre de a et b. Je prends $n = 2$. l'entier $a + 2.b$ est pair, plus grand que 2. Il n'est donc pas premier.

♣ 2 ♣ Montrez que tout ouvert non vide est infini.

On prend un ouvert non vide.
Lequel ? On ne sait pas justement, c'est « montrez que tout ouvert... ».
Quoi qu'il en soit, il contient au moins un élément a.
On applique à cet élément a la définition de « A est ouvert ».
Il existe b non nul tel que l'ensemble $N_{a,b}$ soit inclus dans A.
Mais comme b est non nul, $N_{a,b}$ est infini (faites varier n dans la formule $a + n.b$).
Et comme il est inclus dans A, A est aussi infini.

♣ 3 ♣ Montrez que si A et Ω sont ouverts, alors $A \cup \Omega$ et $A \cap \Omega$ sont ouverts.

On suppose donc deux choses :
• $\forall a \in A,\ \exists b_a \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ a + n.b_a \in A$
◦ $\forall \alpha \in \Omega,\ \exists \beta_\alpha \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \alpha + n.\beta_\alpha \in \Omega$

Bien choisir les noms de variables c'est important. Mettre des noms différents pour des éléments pris au hasard dans des ensembles différents, c'est plus prudent.

Indiquer qui dépend de qui, c'est aussi capital. Ici, b dépend de a. On l'appelle b_a. En revanche, n ne dépend de personne.

On a un objectif double.

On commence par la réunion : a-t-on $\forall x \in A \cup \Omega,\ \exists y \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ x + n.y \in A \cup \Omega$
On se donne x dans $A \cup \Omega$. On a deux possibilités : il est dans A ou bien il est dans Ω.
Si x est dans A, alors il existe b_x vérifiant $\forall n \in \mathbb{Z},\ x + n.b_x \in A$.
On déduit $\forall n \in \mathbb{Z},\ x + n.b_x \in A \cup \Omega$.

Si x est dans Ω, alors il existe β_x vérifiant $\forall n \in \mathbb{Z},\ a + n.b_x \in \Omega$.
On déduit $\forall n \in \mathbb{Z},\ x + n.\beta_x \in \Omega \cup A$.

Dans les deux cas, un certain $N_{x,b}$ est inclus dans $A \cup \Omega$.

Passons à l'intersection : a-t-on $\forall x \in A \cap \Omega,\ \exists y \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ x + n.y \in A \cap \Omega$
On se donne x dans $A \cap \Omega$. Il est à la fois dans A et dans Ω.
Comme x est dans A, alors il existe b_x vérifiant $\forall n \in \mathbb{Z},\ x + n.b_x \in A$.
Comme x est dans Ω, alors il existe β_x vérifiant $\forall m \in \mathbb{Z},\ x + n.\beta_x \in \Omega$.
L'idée est alors de prendre $b_x.\beta_x$ (ou même leur $p;P;c.m.$).
On vérifie pour tout n : $x + n.(b_x.\beta_x) = x + (n.\beta_x).b_x \in A$ et $x + n.(b_x.\beta_x) = x + (n.b_x).\beta_x \in \Omega$
L'ensemble $N_{x,b_x.\beta_x}$ est inclus à la fois dans A et Ω. Il est dans l'intersection $A \cap \Omega$.

La clef était $N_{a,\ b_x.\beta_x} \subset N_{a,\ b_x} \subset A$ et la même ou presque avec Ω.

♣ 4 ♣

Montrez que si les k ensembles A_1 à A_k sont ouverts, alors $\bigcap_{i=1}^{k} A_k$ est encore un ouvert.

On peut faire une récurrence sur le nombre d'ouverts dans l'intersection, en utilisant le résultat précédent « la réunion de deux ouverts est un ouvert ».

♣ 5 ♣

Montrez que si les ensembles A_i (pour i dans I) sont ouverts, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est encore un ouvert.
Rappel $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$ et $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}$.

Attention, ici la réunion peut être une réunion infinie.
On n'aura pas le droit de prendre comme on aurait pu le faire au dessus le produit de tous les p_x.

Mais en fait tout va bien.

On prend un élément a dans la réunion $\bigcup_{i \in I} A_i$. Par définition, il est dans un des A_i qu'on va noter A_{i_0} pour le particulariser.
Mais alors, come A_{i_0}est ouvert et a dans A_{i_0}, il existe un b non nul vérifiant $N_{a,b} \subset A_{i_0}$.
Par définition même de la grande réunion $N_{a,b} \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.
On a bien établi que la réunion était un ouvert.

Le nom « ouvert » et « fer » a été choisi dans cette démonstration car nos démonstrations reprennent les idées de démonstrations que vous croiserez en analyse et topologie, avec le nom d'ouverts et femés.
Sinon , la notion d'intervalle ouvert vous est connue.
Et si $]\alpha,\ \beta[$ est ouvert, on a $\forall a \in]\alpha,\ \beta[,\ \exists b > 0,\ ]a - b,\ a + b[\subset]\alpha,\ \beta[$.

♣ 6 ♣

On dit qu'un ensemble F est fermé si son complémentaire dans $\mathbb{Z}$ est un ouvert.
Montrez que $\{-1,\ 1\}$ est un fermé (mais pas un ouvert).

$\{-1,\ 1\}$ n'est pas ouvert. C'est direct, puisque les ouverts non vides sont de cardinal infini !

Pour montrer maintenant qu'il est fermé, il convient de montrer que $\mathbb{Z} - \{-1,\ 1\}$ est ouvert.

On prend a dans $\mathbb{Z}$ mais différent de -1 et 1.
Il faut trouver b tel que $N_{a,b}$ ne contiennent ni -1 ni 1.
Il s'égit donc de trouver b tel que les $a+b.n$ ne vaillent jamais -1 ou 1.

a faire.

♣ 7 ♣ Montrez que ce sont à la fois des ouverts et des fermés : | $\emptyset$ | $\mathbb{Z}$ | $2.\mathbb{Z}$ |

Pour l'ensemble vide, on a déjà montré qu'il est ouvert. Et son complémentaire est $\mathbb{Z}$. Et $\mathbb{Z}$ est ouvert. C'est bon.

Par symétrie des rôles, $\mathbb{Z}$ est ouvert, et son complémentaire aussi. $\mathbb{Z}$est ouvert et fermé.

On a montré que $2.\mathbb{Z}$ était un ouvert.
Il nous manque que son complémentaire (l'ensemble des entiers impairs) est aussi ouvert.
On prend a quelconque dans $2.\mathbb{Z}+1$ (écrivons le $2.c+1$ avec c entier pour nous simplifier la vie). On considère alors $N_{a,2}=\{(2.c+1)+2.n \mid n\in\mathbb{Z}\}$. On retrouve l'ensemble des entiers impairs. On a bien $N_{a,2}\subset(2.\mathbb{Z}+1)$.

On note qu'avec « $2.\mathbb{Z}$ et $2.\mathbb{Z}+1$ sont ouverts », on a montré que $2.\mathbb{Z}$ était à la fois ouvert et fermé, mais on a montré aussi que $2.\mathbb{Z}+1$ est à la fois ouvert et fermé.

♣ 8 ♣ Montrez que $\mathbb{N}$ n'est ni ouvert, ni fermé.

Si $\mathbb{N}$ était ouvert, avec le cas particulier $a=0$ dans la définition, il existerait b non nul vérifiant $N_{0,b}\subset\mathbb{N}$. Or, dans $N_{0,b}$ il y a $0+b.(-1)$ qui est négatif.

Si $\mathbb{N}$ était fermé, son complémentaire $\mathbb{Z}^{-*}$ serait ouvert.
On aurait $\forall a<0,\ \exists b\in\mathbb{N}^*,\ N_{a,b}\subset\mathbb{Z}^{-*}$.
Prenons alors (raisonnement par l'absurde) $a=-1$. il existe un b tel que tous les éléments de la forme $-1+n.b$ soient strictement négatifs. Or $-1+b$ est positif. Déjà fini !

♣ 9 ♣ Montrez que chaque $N_{\alpha,\beta}$ est à la fois ouvert et fermé.

On se fixe a et b et on montre que $N_{a,b}$est ouvert.
On y prend un élément quelconque α qu'on écrit $a+n_0.b$ pour un n bien choisi.
Quel β va-t-on prendre ? Pas difficile à construire. Prenons $\beta=b$ et vérifions que $N_{\alpha,\ b}$ est inclus dans $N_{a,b}$.
Mais les éléments de $N_{\alpha,\ b}$ sont de la forme $(a+n_0.b)+n.b$ donc de la forme $a+k.b$ avec k décrivant $\mathbb{Z}$.

On a donc même $N_{\alpha,b}=N_{a,b}$ finalement.

Et son complémentaire est il bien ouvert ? La solution de facilité est de l'écrire

♣ 10 ♣ Montrez que $\bigcup_{p\in\mathbb{P}} N_{0,p}$ est égal à $Z-\{-1,\ 1\}$.

♣ 11 ♣ Concluez que $\mathbb{P}$ ne peut pas être fini.

◃27▹ Calculez $\sum_{k=0}^{2021} j^k$ et $\sum_{k=0}^{2021}(1+j)^k$ avec toujours ce même complexe de cube 1 (comme la salsa).

On a des séries géométriques, de raison différente de 1.
Pour chacune, le premier terme vaut 1.
Et le terme à venir dans $\sum_{k=0}^{2021} j^k$ est j^{2022} ce qui fait

$$\sum_{k=0}^{2021} j^k=\frac{1-1}{1-j}=0$$

On pouvait aussi regrouper les éléments trois par trois.

De même, $\sum_{k=0}^{2021}(1+j)^k=\dfrac{1-(1+j)^{2022}}{1-(1+j)}$.
Or, $(1+j)^{2022}=(e^{i.\pi/3})^{2022}=e^{674.i.\pi}=1$. Cette somme aussi est nulle.

Mais on aurait dû cette fois regrouper les termes six par six.

◃28▹ Écrivez un script qui prend en entrée un entier naturel **n** et retourne la somme des inverses des diviseurs de **n**.

Version rapide :

```
def Scooby(n) :
....S = 0
....for d in range(1, n+1) :
........if n%d==0 :
............S += 1./d
....return S
```

Plus efficace, car il n'y a plus de diviseur au delà de $\sqrt{n}$:

```
def Scooby(n) :
....S = 1/n
....for d in range(1, int(sqrt(n))+1) :
........if n%d==0 :
............S += 1/d
....return S
```

Et si on la veut sous forme rationnelle cette somme ?

◃29▹ Calculez $\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n} j\Big)$ de deux façons. Retrouvez $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

Dans ce sens là :

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n} j\Big) = \sum_{i=0}^{n}\frac{(n-i+1).(n+i)}{2} = \frac{1}{2}.\sum_{i=0}^{n}(n.(n+1)+i-i^2)$$

On compte et somme $\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n} j\Big) = \frac{n.(n+1)^2}{2} + \frac{n.(n+1)}{4} - \frac{1}{2}.\sum_{i=0}^{n} i^2$ en considérant qu'on ne sait pas calculer la somme des carrés.

Mais dans l'autre sens

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n} j\Big) = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j = \sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{j} j\Big)$$

On compte

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n} j\Big) = \sum_{j=0}^{n}(j+1).j = \sum_{j=0}^{n} j^2 + \frac{n.(n+1)}{2}$$

Si on connaît la somme des carrés, on trouve $\frac{n.(n+1).(n+2)}{3}$.

Sinon, on aboutit à

$$\sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n} j\Big) = \frac{n.(n+1)^2}{2} + \frac{n.(n+1)}{4} - \frac{1}{2}.C_n = \frac{n.(n+1)}{2} + C_n$$

En égalisant dans la seconde moitié $2.n^2.(n+1) + n.(n+1) = 2.n.(n+1) + 6.C_n$ et finalement $C_n = \frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$.

◃30▹ Calculez la somme $\sum_{q=0}^{n}(-1)^{n-q}.q^2$ pour n de 0 à 6 puis pour tout n de $\mathbb{N}$.

On calcule les premières sommes $\sum_{q=0}^{n}(-1)^{n-q}.q^2$

$n=0$	0^2							$=0$
$n=1$	-0^2	$+1^2$						$=1$
$n=2$	0^2	-1^2	$+2^2$					$=3$
$n=3$	-0^2	$+1^2$	-2^2	$+3^2$				$=6$
$n=4$	0^2	-1^2	$+2^2$	-3^2	$+4^2$			$=10$
$n=5$	-0^2	$+1^2$	-2^2	$+3^2$	-4^2	$+5^2$		$=15$

La formule générale ressemble à la somme des premiers entiers.

On montre : $\boxed{\sum_{q=0}^{n}(-1)^{n-q}.q^2=\frac{n.(n+1)}{2}}$

Quelles sont les approches possibles ?

● La récurrence. La formule est initialisée.

On la suppose vraie pour un n donné. On passe au suivant :

$$\sum_{q=0}^{n+1}(-1)^{n+1-q}.q^2=(-1)^{n+1-(n+1)}.(n+1)^2+\sum_{q=0}^{n}(-1)^{n+1-q}.q^2$$

$$\sum_{q=0}^{n+1}(-1)^{n+1-q}.q^2=(n+1)^2-\sum_{q=0}^{n}(-1)^{n-q}.q^2$$

$$\sum_{q=0}^{n+1}(-1)^{n+1-q}.q^2=(n+1)^2-\frac{n.(n+1)}{2}$$

$$\sum_{q=0}^{n+1}(-1)^{n+1-q}.q^2=(n+1).\frac{2.(n+1)-n}{2}$$

$$\sum_{q=0}^{n+1}(-1)^{n+1-q}.q^2=\frac{(n+1).(n+2)}{2}$$

● La généralisation hâtive :

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & = & -1^2 & +2^2 & -3^2 & +4^2 & \dots & -13^2 & +14^2 & -15^2 & +16^2 & -17^2 & +18^2 & -19^2 & +20^2 \\
 & = & (2+1). & (2-1) & +(4+3). & (4-3) & & +(14+13). & (14-13) & +(15+16). & (15-16) & & & +(19+20). & (20-19) \\
S_{20} & = & 3 & & +7 & & & +27 & & +31 & & +35 & & +39 & \\
 & = & 1 & +2 & +3 & +4 & & +13 & +14 & +15 & +16 & +17 & +18 & +19 & +20
\end{array}$$

● Le calcul visuel :

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^{n-q}.q^2=n^2-(n-1)^2+(n-2)^2-(n-3)^2+(n-4)^2-(n-5)^2+\dots$$

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^{n-q}.q^2=\Big(n^2-(n-1)^2\Big)+\Big((n-2)^2-(n-3)^2\Big)+\Big((n-4)^2-(n-5)^2\Big)+\dots$$

(le dernier ?)

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^{n-q}.q^2=\Big(2.n-1\Big)+\Big(2.n-5\Big)+\Big(2.n-7\Big)+\dots+1$$

On a une suite arithmétique, il suffit de compter le nombre de termes et de regarder la moyenne des extrêmes.

● Le calcul aussi astucieux : on définit $f=x\longmapsto\sum_{q=0}^{n}e^{q.x}$ (c'est $x\longmapsto\dfrac{1-e^{(n+1).x}}{1-e^x}$).

On la dérive deux fois $f''=x\longmapsto\sum_{q=0}^{n}q^2.e^{q.x}$.

On calcule en $x=i.\pi$.

Non, on va préférer

● Le calcul bien conduit en distinguant les cas.

n pair, de la forme $2.N$:

$$\sum_{q=0}^{2.N}(-1)^{2.N-q}.q^2=\sum_{q=0}^{2.N}(-1)^{q}.q^2$$

$$\sum_{q=0}^{2.N}(-1)^{2.N-q}.q^2 = \sum_{q=pair} q^2 - \sum_{q=impair} q^2$$

$$\sum_{q=0}^{2.N}(-1)^{2.N-q}.q^2 = \sum_{p=1}^{N}(2.p)^2 - \sum_{p=1}^{N}(2.p-1)^2$$

$$\sum_{q=0}^{2.N}(-1)^{2.N-q}.q^2 = \sum_{p=1}^{N}((2.p)^2 - (2.p-1)^2)$$

$$\sum_{q=0}^{2.N}(-1)^{2.N-q}.q^2 = \sum_{p=1}^{N}(4.p-1)$$

$$\sum_{q=0}^{2.N}(-1)^{2.N-q}.q^2 = N.\frac{3+(4.N-1)}{2}$$

nombre de termes fois moyenne des extrêmes

$$\sum_{q=0}^{2.N}(-1)^{2.N-q}.q^2 = \frac{(2.N).(2.N+1)}{2}$$

n impair de la forme $2.N+1$:

$$\sum_{q=0}^{2.N+1}(-1)^{2.N+1-q}.q^2 = -\sum_{q=0}^{2.N+1}(-1)^{q}.q^2$$

$$\sum_{q=0}^{2.N}(-1)^{2.N-q}.q^2 = -\sum_{q=pair} q^2 + \sum_{q=impair} q^2$$

et ainsi de suite

◃31▹ ♡ Calculez pour n donné ces trois sommes là

$A_n = \sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} \frac{j}{i}$	$B_n = \sum_{i+j=n} i.j$	$C_n = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} Max(i,\ j)$

$$A_n = \sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} \frac{j}{i}$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.\sum_{j=0}^{i-1} j$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.\frac{i.(i-1)}{2}$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{2}$$

$$\boxed{A_n = \frac{n.(n-1)}{4}}$$

$$B_n = \sum_{i+j=n} i.j$$

$$B_n = \sum_{i=0}^{n} i.(n-i)$$

$$B_n = n.\sum_{i=0}^{n} i - \sum_{i=0}^{n} i^2$$

$$\boxed{B_n = \frac{n^3-n}{6}}$$

$$C_n = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} Max(i,\ j)$$

$$C_n = \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} Max(i,\ j) + \sum_{0\leqslant i=j\leqslant n} Max(i,\ j) + \sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} Max(i,\ j)$$

$$C_n = 2.\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} Max(i,\ j) + \sum_{0\leqslant i=j\leqslant n} i$$

$$C_n = 2.\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} j + \sum_{i=0}^{n} i$$

$$C_n = 2.\sum_{j=0}^{n} j \sum_{i=0}^{j-1} 1 + \frac{n.(n+1)}{2}$$

$$C_n = 2.\sum_{j=0}^{n} j^2 + \frac{n.(n+1)}{2}$$

$$\boxed{C_n = \frac{n.(n+1).(4.n+5)}{6}}$$

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n \to_{n\to+\infty} e^1$$

◃32▹ ♡ Dans le développement du déterminant d'une matrice A de taille 8 et de terme général a_i^k, combien de termes de la forme $a_1^1.a_3^2.a_.^3.a_!^4.a_:^5.a_4^6.a_2^7.a_,^8$ ont un signe + ?

Ce sont des termes de la forme $a_1^1.a_3^2.a_i^3.a_j^4.a_k^5.a_4^6.a_2^7.a_l^8$ où $[i,\ j,\ k,\ l]$ est une permutation de la liste $[5,\ 6,\ 7,\ 8]$.
Il y en a 24 (factorielle de 4).

Mais chaque fois qu'on fait un choix $[i,\ j,\ k,\ l]$ qui a un signe plus, il y a $[j,\ i,\ k,\ l]$ qui a un signe moins.

Et chaque fois qu'on fait un choix $[i,\ j,\ k,\ l]$ qui a un signe moins, il y a $[j,\ i,\ k,\ l]$ qui a un signe plus.
Il y en a autant avec un signe plus qu'avec un signe moins.
Ce qui en fait 12 avec le signe *plus*.

◃33▹ ♡ Montrez : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+4.n+3} = \frac{3}{4}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+4.n+3} = \frac{1}{4}$ *(la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ signifie $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$).*

Calculons à horizon fini $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2+4.n+3} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1).(n+3)}$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2+4.n+3} = \frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2+4.n+3} = \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}.\sum_{k=3}^{N+3} \frac{1}{k}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2+4.n+3} = \frac{1}{2}.\Big(1+\frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2}.\Big(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3}\Big)$$

On peut faire tendre N vers l'infini et voir disparaître les deux termes en N.

De la même façon : $\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2+4.n+3} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(n+1).(n+3)}$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2+4.n+3} = \frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n+3}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2+4.n+3} = \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{N+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{1}{2}.\sum_{k=3}^{N+3} \frac{(-1)^{k-3}}{k}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2+4.n+3} = -\frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{N+1} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{1}{2}.\sum_{k=3}^{N+3} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2+4.n+3} = -\frac{1}{2}.\Big(-1+\frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{2}.\Big(\frac{(-1)^{N+2}}{N+2} + \frac{(-1)^{N+3}}{N+3}\Big)$$

Les termes « au bout » s'en vont, quel que soit leur signe.

◁ 34 ▷ Démontrez la formule d'intégration par parties *(dite aussi formule d'Abel, mais c'est tellement plus parlant quand on la rapproche de $\int a.b = [a.B] - \int a'.B$ avec $B' = b$ que vous connaissez !).*

Si l'on pose $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n.b_n$ et $B_m = \sum_{k=0}^{m} b_k$. Alors : $S_N = a_N.B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n.(a_{n+1} - a_n)$.

On peut évidemment faire une récurrence.

On peut partir du membre de droite, le plus compliqué a priori et tenter de le simplifier.

$$a_N.B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n.(a_{n+1} - a_n) = a_N.B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n.a_{n+1} + \sum_{n=0}^{N-1} B_n.a_n$$

on a séparé, on va décaler un des indices en l'appelant p (et on change le nom de l'autre)

$$a_N.B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n.(a_{n+1} - a_n) = a_N.B_N - \sum_{p=1}^{N} B_{p-1}.a_p + \sum_{p=0}^{N-1} B_p.a_p$$

on isole deux termes pour « aligner les parties communes »

$$a_N.B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n.(a_{n+1} - a_n) = a_N.B_N - B_{N-1}.a_N - \sum_{p=1}^{N-1} B_{p-1}.a_p + a_0.B_0 + \sum_{p=1}^{N-1} B_p.a_p$$

on fusionne les parties communes

$$a_N.B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n.(a_{n+1} - a_n) = a_N.B_N - B_{N-1}.a_N + \sum_{p=1}^{N-1} a_p.(B_p - B_{p-1}) + a_0.B_0$$

on simplifie et on note que B_0 vaut b_0

$$a_N.B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n.(a_{n+1} - a_n) = a_N.B_N - B_{N-1}.a_N + \sum_{p=1}^{N-1} a_p.b_p + a_0.b_0$$

on simplifie le premier terme en $a_n.b_n$et on l'incorpore à la somme comme le dernier

$$a_N.B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n.(a_{n+1} - a_n) = \sum_{p=0}^{N} a_p.b_p$$

◁ 35 ▷ ♡ Calculez $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1).(k+3)}$ puis $\sum_{k=0}^{n} \frac{k+2}{(k+1)^2.(k+3)^2}$. Il faudra décomposer en éléments simples et décaler les indices, télescoper.

Éléments simples : $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1).(k+3)} = \frac{1}{2}.\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)} - \frac{1}{(k+3)}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1).(k+3)} = \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}.\sum_{k=3}^{n+3} \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1).(k+3)} = \frac{1}{2}.\Big(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\Big)$$

Forme attendue : $\frac{k+2}{(k+1)^2.(k+3)^2} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{(k+1)^2} + \frac{c}{k+3} + \frac{d}{(k+3)^2}$

En fait, on a de la chance : a et c sont nuls : $\frac{k+2}{(k+1)^2.(k+3)^2} = \frac{1}{4}.\Big(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+3)^2}\Big)$.

On somme et télescope, avec un décalage de 2 :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k+2}{(k+1)^2.(k+3)^2} = \frac{1}{4}.\Big(\frac{1}{(1)^2} + \frac{1}{(2)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{(n+3)^2}\Big)$$

◁36▷ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{2.k-1}{\binom{k}{2}^2}$.

La somme a l'air étrange. Et si finalement on pouvait la calculer ?
Après tout, le binomial $\binom{k}{2}$ n'est pas un quotient de factorielles...[4].
On a $\binom{k}{2} = \dfrac{k.(k-1)}{2}$.

Oui, je sais, vous aviez le même avec $\dfrac{k!}{(k-2)!.2!}$ *finalement.*
Mais comment pouvez vous ensuite voir ceci comme le choix de deux éléments parmi k ?
Comment pouvez vous rapidement le calculer pour k égal à 8 ?

On poursuit : $\dfrac{2.k-1}{\binom{k}{2}^2} = \dfrac{4.(2.k-1)}{k^2.(k-1)^2}$.
Une somme de fractions rationnelles. On va décomposer en éléments simples.

$$\frac{4.(2.k-1)}{k^2.(k-1)^2} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2} + \frac{c}{(k-1)} + \frac{d}{(k-1)^2}$$

Les quatre éléments sont ceux qu'on attend.
Ils sont logiques pour reconstituer le dénominateur.
Et l'idée de seulement $\dfrac{4.(2.k-1)}{k^2.(k-1)^2} = \dfrac{b}{k^2} + \dfrac{d}{(k-1)^2}$ *comme proposé par certains n'est pas logique.*
Il n'y a pas assez de constantes sur lesquelles jouer si on réduit au dénominateur commun.
La vision « dimension en algèbre linéaire » ou « nombre de constantes à déterminer » est celle qui doit vous guider pour les décompositions en simples éléments.

On trouve b et d par la méthode des pôles (ce sont bien les termes importants en 0 et en 1).

$\dfrac{4.(2.k-1)}{k^2.(k-1)^2} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k^2} + \dfrac{c}{(k-1)} + \dfrac{d}{(k-1)^2}$ *donne* $\dfrac{4.(2.X-1)}{(X-1)^2} = a.X + b + \dfrac{c.X}{(X-1)} + \dfrac{d.X}{(X-1)^2}$
On fait tendre X vers 0 : $\dfrac{4.(2.0-1)}{(0-1)^2} = 0 + b + 0 + 0$.
b vaut -4. *Et d vaut* 4 *aussi*.

On trouve a et c par la valeur en 2 et en 3 ou par réduction au dénominateur commun.

$$\frac{4.(2.k-1)}{k^2.(k-1)^2} = \frac{0}{k} - \frac{4}{k^2} + \frac{0}{(k-1)} + \frac{4}{(k-1)^2}$$

Tout ça pour avoir finalement seulement deux termes, comme le mauvais élève qui aurait mal compté ses constantes...

On peut à présent sommer : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{4.(2.k-1)}{k^2.(k-1)^2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{4}{(k-1)^2} - \frac{4}{k^2}$.
Puis télescoper : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{4.(2.k-1)}{k^2.(k-1)^2} = \frac{4}{(2-1)^2} - \frac{4}{n^2}$.
Et même passer à la limite : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{4.(2.k-1)}{k^2.(k-1)^2} = \frac{4}{(2-1)^2}$.

On notera que la convergence de la série pouvait être prouvée par les méthodes classiques : terme général en $O\left(\dfrac{1}{k^3}\right)$.
Mais pour la valeur de la somme, il fallait revenir à de l'explicite.

4. si vous persistez à calculer $\binom{n}{3}$ avec des factorielles partout, c'est que vous êtes resté en première ; et comme avec une voiture, si vous restez en première, vous roulez, mais vous n'allez pas loin

◁37▷ Recomposez en éléments compliqués : $5.X-5+\frac{7}{X-2}+\frac{28}{X+3}$.

Décomposez en éléments simples $\frac{(3.X^2+2.X+4).(8.X^2-7.X+7)}{(X^3-2.X^2+X-2).(X^3+3.X^2+X+3)}$.

◁38▷ ♡ Calculez $\int_1^2 \frac{dt}{e^t-e^{-t}}$ et $\int_1^2 \frac{dt}{5^t-5^{-t}}$.

Idée naturelle : changer de variable (non sans avoir vérifie que l'intégrale existe car la fonction est continue, son dénominateur ne s'annulant pas).

On pose $e^t=u$, et on doit calculer $\int_e^{e^2} \frac{du}{u.\left(u-\frac{1}{u}\right)}$.

On décompose ce $\frac{1}{u^2-1}$ en éléments simplesi : $\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)$.

On intègre en logarithmes, et on trouve $\frac{1}{2}.\Big(\ln(e^2-1)-\ln(e-1)-\ln(e^2+1)+\ln(e+1)\Big)$

Et on pourra simplifier $\ln(e^2-1)-\ln(e-1)$ en $\ln(e+1)$.

L'autre intégrale est sur le même modèle : $5^t=u$ donc $t=\frac{\ln(u)}{\ln(5)}$ et $dt=\frac{du}{\ln(5).u}$.

On effectuera la même décomposition en éléments simples et le même calcul d'intégrale.

$\frac{\ln(18)-\ln(13)}{.\ln(5)}$ et on ne peut guère simplifier plus.

◁39▷ Pourquoi n'a-t-on pas $\left(x\longmapsto \frac{x^3+4.x^2-16.x+5}{x^3-2.x^2-5.x+6}\right)=\left(x\longmapsto \frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}\right)$.

Résolvez $\left(x\longmapsto \frac{x^3+4.x^2-16.x+5}{x^3-2.x^2-5.x+6}\right)^{(n)}=\left(x\longmapsto \frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}\right)^{(n)}$ *(qui est l'inconnue ?)*

En réduisant $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}$ au dénominateur commun, on aura $\frac{a.x^2+b.x+c}{(x-1).(x-3).(x+2)}$.

Le dénominateur sera le bon, mais pas le numérateur. Degré insuffisant.

Toute fraction $\frac{a.x^2+b.x+c}{(x-1).(x-3).(x+2)}$ se décompose en $\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x-3}+\frac{\gamma}{x+2}$.

Mais $\frac{a.x^3+b.x^2+c.x+d}{(x-1).(x-3).(x+2)}$ va donner $\lambda+\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x-3}+\frac{\gamma}{x+2}$.

Et $\frac{a.x^4+b.x^3+c.x^2+d.x+e}{(x-1).(x-3).(x+2)}$ va donner $\lambda.x+\mu+\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x-3}+\frac{\gamma}{x+2}$.

Et ainsi de suite.

$\left(x\longmapsto \frac{x^3+4.x^2-16.x+5}{x^3-2.x^2-5.x+6}\right)^{(n)}=\left(x\longmapsto \frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}\right)^{(n)}$ n'a pas pour inconnue x (x est variable muette).

L'inconnue est n.

Par exemple : pour $n=0$, a-t-on $\left(x\longmapsto \frac{x^3+4.x^2-16.x+5}{x^3-2.x^2-5.x+6}\right)=\left(x\longmapsto \frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}\right)$. Non.

Ce qu'on a vraiment $\left(x\longmapsto \frac{x^3+4.x^2-16.x+5}{x^3-2.x^2-5.x+6}\right)=\left(x\longmapsto 1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}\right)$.

Mais si on dérive une fois, voire plus, le 1 s'en va.

$$\left(x\longmapsto \frac{x^3+4.x^2-16.x+5}{x^3-2.x^2-5.x+6}\right)'=\left(x\longmapsto 1+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}\right)'=\left(x\longmapsto \frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+2}\right)'$$

$n=1$ est solution.

Et les suivants aussi.

◁40▷ ♣ ou ♡ ? Calculez la limite (étonnante ?) de $\dfrac{e.\sqrt[3]{e}.\sqrt[5]{e}.\sqrt[7]{e}.\sqrt[9]{e}\dots\sqrt[2.n+1]{e}}{\sqrt[2]{e}.\sqrt[4]{e}.\sqrt[6]{e}.\sqrt[8]{e}.\sqrt[10]{e}\dots\sqrt[2.n]{e}}$ quand n tend vers l'infini (mot clef : $\ln(1+h)=\sum_{k=1}^{n}\dots+\dots$ avec $h=1$).

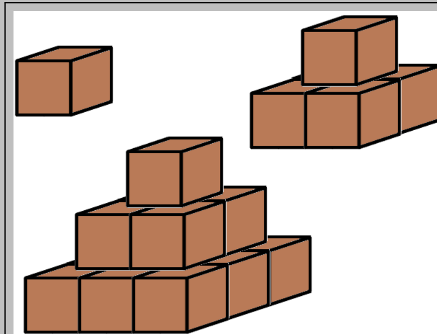
En notation « fractionnaire » : $\dfrac{e.\sqrt[3]{e}.\sqrt[5]{e}.\sqrt[7]{e}.\sqrt[9]{e}\dots\sqrt[2.n+1]{e}}{\sqrt[2]{e}.\sqrt[4]{e}.\sqrt[6]{e}.\sqrt[8]{e}.\sqrt[10]{e}\dots\sqrt[2.n]{e}}=\dfrac{e.e^{\frac{1}{3}}.e^{\frac{1}{5}}.e^{\frac{1}{7}}.e^{\frac{1}{9}}\dots e^{\frac{1}{2.n+1}}}{e^{\frac{1}{2}}.e^{\frac{1}{4}}.e^{\frac{1}{6}}.e^{\frac{1}{8}}.e^{\frac{1}{10}}\dots e^{\frac{1}{2.n}}}$.
On passe tout à un seul exposant, avec des signes moins pour le dénominateur.

$$\frac{e.\sqrt[3]{e}.\sqrt[5]{e}.\sqrt[7]{e}.\sqrt[9]{e}\dots\sqrt[2.n+1]{e}}{\sqrt[2]{e}.\sqrt[4]{e}.\sqrt[6]{e}.\sqrt[8]{e}.\sqrt[10]{e}\dots\sqrt[2.n]{e}}=e^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2.n+1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\dots-\frac{1}{2.n}}=e^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots-\frac{1}{2.n}+\frac{1}{2.n+1}}$$

Et que fait cet exposant ? C'est la série harmonique alternée. Elle converge vers $\ln(2)$
(écrire la formule de Taylor avec reste intégrale $\ln(1+1)$ et regarder le reste tendre vers 0 quand n tend vers l'infini).
La limite donne $e^{\ln(2)}$. Et ça, c'est 2 ! et je peux même écrire « et ça c'est 2! »

Le programme prend en entrée[a] un nombre de cubes n et indique la hauteur de la plus grande pyramide qu'il peut construire avec ces cubes. Les pyramides de taille 1, 2 et 3 sont visibles ci-contre.
Variante : les pyramides sont creuses.

La suite a est périodique de période 7 de premiers termes (0, 7, 6, 5, 3, 2, 0), écrivez un script Python qui prend n en entrée et retourne a.



[a] « prend en entrée **n** » ça veut dire **def Programme(n) :** et pas des **n = int(input('Donnez un entier n : ')** ; on fait de la programmation, pas de la discussion avec le chat Scratch ; et sinon, prend en entrée, ça ne veut pas dire « commande
◁41▷ avant son plat principal une salade niçoise »

Les pyramides obtenues utilisent de plus en plus de cubes :

hauteur (=taille du carré de base aussi)	1	2	3	4
nombre de cubes utilisés	1	5	14	30

Mais le bon tableau est

hauteur (=taille du carré de base aussi)	1	2	3	4	5
couche complémentaire de base	1	4	9	16	25
nombre de cubes utilisés	1	5	14	30	55

Chaque couche représente k^2 cubes, et la pyramide de hauteur h a besoin de $\sum_{k=1}^{h}k^2$ cubes, c'est à dire $P_h=\dfrac{h.(h+1).(2.h+1)}{6}$.

La question est donc : pour n donné, quelle valeur peut atteindre h vérifiant $P_h=\dfrac{h.(h+1).(2.h+1)}{6}\leqslant n$.

Pour le physicien : on approxime : $P_h=\dfrac{h.(h+1).(2.h+1)}{6}\simeq\dfrac{h^3}{3}$ doit être de l'ordre de n : $h=\sqrt[3]{3.n}$.

Et pour la physicienne (plus rigoureuse que le physicien) : $h=\left\lfloor\sqrt[3]{3.n}\right\rfloor$ *(on arrondit à l'entier inférieur, par sécurité).*

Mais c'est du travail à la louche, et ce n'est pas celui attendu de la part de l'informaticien.

Tant que P_h est plus petit que n, on passe au h suivant.
On va utiliser une boucle conditionnelle avec incrémentation de h et calcul des P_h.

```
def Pyramide(n) :
....h=0
....while h*(h+1)*(2*h+1)/6 <= n :
........h += 1
....return h-1
```

On retourne h-1 car on est allé trop loin.
Mais le test est « inférieur ou égal » pour valider le cas où on arrive à bâtir une pyramide sans rien laisser de côté.

```
def Pyramide(n) :
....h, S = 0, 0
...while S <= n :
........h += 1
........S += h*h
....return h-1
```

Ce programme est plus dans l'esprit de l'informatique, en calculant la somme de manière cumulée. En plus, il correspond exactement à ce que ferait l'enfant, ajouter un étage tant qu'il a assez de briques. Mais le système scolaire va parfois pervertir l'approche naturelle en faisant mettre des équations partout. Ah, vite, des maths...

Ensuite, que se passe-t-il si la pyramide est creuse ? Il faut beaucoup moins de cubes pour chaque étage. On a juste besoin du tour du carré de côté n :

hauteur (=taille du carré de base aussi)	1	2	3	4	5	6	7
bordure complémentaire de base	1	4	8	12	16	20	24
nombre de cubes utilisés	1	5	13	25	41	61	

Pour chaque étage de plus, le nombre de cubes nécessaire augmente de 4 (chaque côté s'allonge de 1).
La bordure au rang n nécessite $4.n-4$ cubes sauf au rang 0 qui nécessite quand même un cube.

Le nombre de cubes utiles est donc $1+\sum_{k=2}^{n}(4.n-4)$ et on trouve $2.n^2-2.n+1$.

On notera que c'est aussi $\frac{h.(h+1).(2.h+1)}{6} - \frac{(h-2).(h-1).(2.h-3)}{6}$ puisqu'il faut prendre une pyramide plein de hauteur h et la creuser d'une autre, de hauteur $h-2$.

```
def PyramideCreuse(n) :
....h, S = 1, 1
...while S <= n :
........S += 4*h
........h +=1
....return h-1
```

Enfin, pour la suite :

```
def Suite(n) :
....L = [0, 7, 6, 5, 3, 2, 0]
....return L[n%7]
```

◃ 42 ▹ Démontrez par récurrence : $\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$ pour tout n. Et sans récurrence ?

On note P_n la propriété $\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$.

On initialise avec P_0 : d'un côté un produit vide et de l'autre $(0!)^1$: il y a égalité.
Et même avec P_1 : d'un côté le produit vaut juste 1 et de l'autre $(1!)^2$ n'en est pas loin non plus.

Supposons, pour un entier n donné, qu'on a bien $\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$.

On passe au rang $n+1$ dans le membre de gauche, puisque c'est lui le plus compliqué :

$$\prod_{k=1}^{n+1} k^k.k! = \Big(\prod_{k=1}^{n+1} k^k.k!\Big).(n+1)^{n+1}.(n+1)!$$

On remplace par hypothèse de rang n : $\prod_{k=1}^{n+1} k^k.k! = \Big((n!)^{n+1}\Big).(n+1)^{n+1}.(n+1)!$

On fait entrer $(n+1)^{n+1}$ dans la grande parenthèse :

$$\prod_{k=1}^{n+1} k^k.k! = \Big((n!).(n+1)\Big)^{n+1}.(n+1)! = \Big((n+1)!)\Big)^{n+1}.(n+1)!$$

et on retrouve bien $\Big((n+1)!\Big)^{n+1+1}$.

Sinon, je vous laisse réfléchir à l'explication ci dessous

					5
				4	4
			3	3	2
		2	2	2	2
.	1	1	1	1	1

5	5	5	5	5	.
4	4	4	4		
3	3	3			
2	2				
1					

5	**5**	**5**	**5**	**5**	5
4	**4**	**4**	**4**	4	4
3	**3**	**3**	3	3	2
2	**2**	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1

là, c'est $\prod_{k=1}^{n} k!$ en colonnes	et là $\prod_{k=1}^{n} k^k$ en lignes	et là, finalement $(n!)^{n+1}$

◃ 43 ▹ Justifiez $\sum_{k=0}^{2019}(2)^{(-1)^k}.k = 2\,548\,230$ (attention, combien de termes ?).

Dans la somme $\sum_{k=0}^{2019}(2)^{(-1)^k}.k$, on a des $2.k$ et des $2^{-1}.k$, c'est à dire des $2.k$ et des $\dfrac{k}{2}$.

On va séparer suivant la parité de k :

k pair	k impair
$\sum_{p=0}^{1009}(2)^{(-1)^{2.p}}.(2.p)$	$\sum_{p=0}^{1009}(2)^{(-1)^{2.p+1}}.(2.p+1)$
$4.\sum_{p=0}^{1009} p$	$\dfrac{1}{2}.\sum\limits_{p=0}^{1009}(2.p+1)$

La première somme vaut $4.\dfrac{1009.1010}{2}$. La seconde vaut $\dfrac{(1010)^2}{2}$ *(somme classique des premiers impairs)*.

◃44▹ Calculez

$A=\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}.a^k$	$B=\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}.a^n$
$C=\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\dbinom{k}{i}.a^i$	$D=\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\dbinom{n}{k}.a^i$

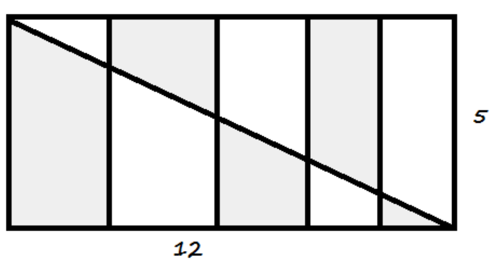
$A=\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}.a^k=(1+a)^n$	$B=\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}.a^n=2^n.a^n$
$C=\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\dbinom{k}{i}.a^i=\dfrac{(1+a)^{n+1}-1}{a}$	$D=\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\dbinom{n}{k}.a^i=\dfrac{2^n-a.(1+a)^n}{1-a}$

Pour C, on sépare $C=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\sum\limits_{i=0}^{k}\dbinom{k}{i}.a^i\right)=\sum\limits_{k=0}^{n}(1+a)^k$.

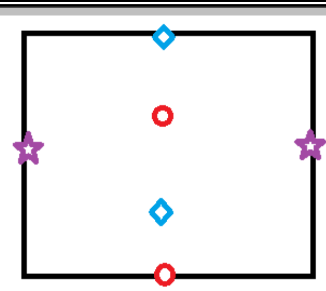
On trouve $\dfrac{1-(1+a)^{n+1}}{1-(1+a)}$.

Pour D : $D=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\dbinom{n}{k}.\left(\sum\limits_{i=0}^{k}a^i\right)\right)=\dfrac{1}{1-a}.\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}.1-\dfrac{1}{1-a}.\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}.a^{k+1}$.

◃45▹

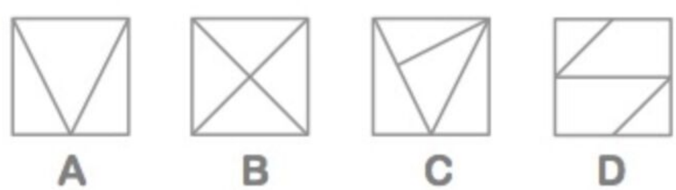


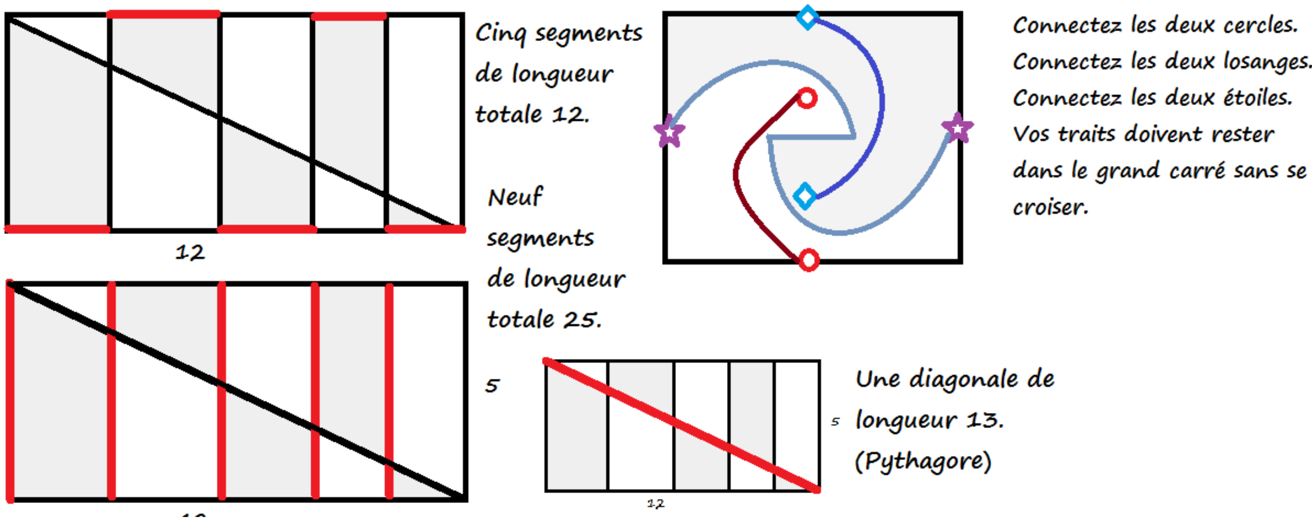
Calculez les périmètre de la figure grisée.



Connectez les deux cercles.
Connectez les deux losanges.
Connectez les deux étoiles.
Vos traits doivent rester dans le grand carré sans se croiser.

Which diagram cannot be drawn without lifting your pencil off the page and without drawing along the same line twice?

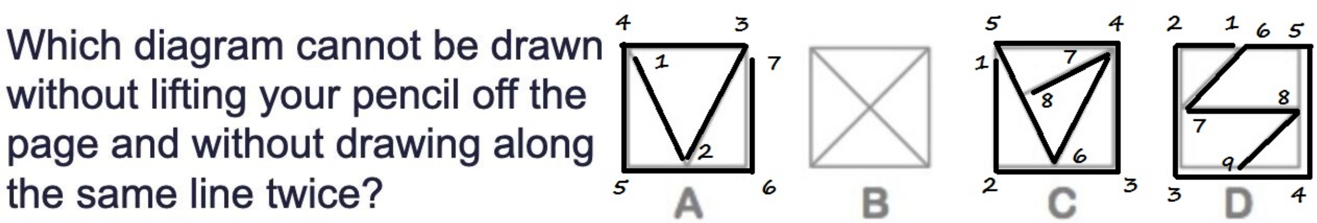




L'autre exercice concerne les graphes que l'on peut tracer sans lever le crayon.
Le problème vient des sommets « impairs ».
C'est quoi la parité d'un sommet ? C'est le nombre d'arêtes qui partent de ce sommet.
Si un sommet est pair, avec deux arêtes, on va rriver par l'une et partir par l'autre.
Si un sommet est pair, avec quatre arêtes, on va arrive par une, partir par une autre, et le somme est alors encore pair d'ordre 2. On y reviendrapuis on en repartira.
Si un sommet est impair, avec une seule arête (un bout qui dépasse), on partira ou on terminera par ce sommet.
Si un sommet est impair d'indice 3, on peut traverser ce sommet en arrivant par une arête puis en partant par une autre. Mais il reste alors une arête seule. On sera donc obligé de commencer ou finir par cette arête.

Généralisation :
sommet de type pair : chaque fois qu'on y passe, on peut rapartir
sommet de type impair : quand on y passe il reste impair, et donc à la fin, il reste une arête solitaire ; on est donc obligé de commencer ou finir par ce sommet.

Dans la figure B il y a quatre sommets impairs (indice3) et un seul sommet pair. Le parcours devrait donc avoir quatre extrémités (deux débuts et deux fins ?). C'est donc impossible.



◁46▷ Soit σ une permutation de $\{1, \dots 30\}$ *(bijection de l'ensemble dans lui même)*. Montrez : $\sum_{k=10}^{19} \sigma^5(k) \geqslant 55$ *(pour σ^5, comprenez $\sigma \circ \sigma \circ \sigma \circ \sigma \circ \sigma$)*.

Le fait qu'on regarde σ^5 n'a aucune importance. C'est juste une nouvelle permutation.
Et les entiers $\sigma^5(10)$ à $\sigma^5(19)$ sont dix entiers distincts.
Et la somme de dix entiers distincts vaut au moins $1+2+3+\ldots+10$.
Il suffit de les ordonner du plus petit au plus grand. le plus petit vaut au moins 1. Le suivant vaut au moins $1+1$ et ainsi de suite.

◁47▷ Montrez pour tout x réel positif : $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}$. Déduisez : $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{e}}$.

Ne comparons pas $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ et e^{-x}, mais comparons plutôt leurs logarithmes respectifs : $n.\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)$ et $-x$.
On crée donc, pour n fixé l'application $x \longmapsto n.\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)+x$.

On la dérive $x \longmapsto n.\dfrac{\dfrac{-1}{n}}{1-\dfrac{x}{n}}+1$ et on simplifie cette dérivée : $x \longmapsto \dfrac{x}{x-n}$.
Cette dérivée est négative sur $[0,\ n]$, donc l'application est décroissante.
Elle est nulle en 0. la voilà donc négative sur $[0,\ n]$.
On a donc $n.\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right) \leqslant -x$. On passe à l'exponentielle (croissante) : $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}$ pour tout x de $[0,\ n]$.

On l'écrit pour chaque entier de 0 à n : $\left(1-\dfrac{p}{n}\right)^n \leqslant e^{-p}$.
On somme :

$$\sum_{p=0}^{n}\left(1-\frac{p}{n}\right)^n \leqslant \sum_{p=0}^{n} e^{-p}$$

On change de variable dans la première somme : $k=n-p$ (et quand p va de 0 à n, k fait de même dans l'autre sens) :

$$\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n \leqslant \sum_{p=0}^{n} e^{-p}$$

On calcule la série géométrique du second membre : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n \leqslant \frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}} \leqslant \frac{1}{1-e^{-1}}$.

◃48▹ On rappelle $\det(A) = \displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}\dots a_n^{\sigma(n)}$. Montrez que si A est une matrice triangulaire ($a_i^k=0$ si $k<i$) alors son déterminant est le produit des termes diagonaux.
Montrez : $\det\begin{pmatrix} a & b & \beta \\ c & d & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha.(a.d-b.c)$.

◃49▹ ♡ Dérivez $x \longmapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.Calculez $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4.x+8}}$.

$x+\sqrt{1+x^2}$ existe pour tout x réel et est strictement positif.
Explication : le produit $x+\sqrt{1+x^2}).(x-\sqrt{1+x^2})$ vaut -1, c'est donc qu'un des deux est positif et l'autre négatif
le plus grand des deux c'est celui avec un signe plus devant la racine
c'est donc lui le positif ! Et toc !

On dérive en $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ valable aussi sur $\mathbb{R}$ (en fait $x \longmapsto \dfrac{1+\dfrac{2.x}{2.\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ mais ça se simplifie !)

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4.x+8}} = \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+4}} = \frac{1}{2}.\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{\left(\dfrac{x+2}{2}\right)^2+1}} = \int_{u=1}^{u=7/2} \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$$

On trouve $\boxed{\ln\left(\frac{7+\sqrt{53}}{2}\right)-\ln(1+\sqrt{2})}$

◃50▹ Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos^5(t).dt$ en utilisant la bonne règle de Bioche.
Calculez $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt$ (en posant $t=sh(x)$ par exemple.
Calculez $\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$.

Pour la première, la règle $t \longmapsto -t$ ne donne rien.

Passons à $t \longmapsto \pi-t$ qui cette fois ci est valable.
On pose donc $s=\sin(t)$ et donc $\cos(t)=\sqrt{1-s^2}$ au moins sur l'intervalle $t\in[0,\ \pi/6]$ [5]

5. votre travail de matheux commence à « mais au fait, c'est $\sqrt{1-s^2}$ou c'est $-\sqrt{1-s^2}$? » ; le reste n'est que calcul

On change les bornes, l'élément différentiel et la fonction

$$\int_{t=0}^{\pi/6} \cos^5(t).dt = \int_{s=0}^{1/2} (\sqrt{1-s^2})^5.\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \int_{s=0}^{1/2} (1-s^2)^2.ds = \Big[\frac{s^5}{5} - 2.\frac{s^3}{3} + s\Big]_0^{1/2} = \frac{203}{480}$$

(et en tant que atheux, on se fout pas mal de la valeur du moment qu'elle est cohérente à l'encadrement).

Passons à $t \longmapsto \pi + t$. Elle ne donne rien.

Enfin, le changement universel donne

$$\int_{t=0}^{\pi/6} \cos^5(t).dt = \int_{x=0}^{\tan(\pi/12)} \frac{(1-x^2)^5}{(1+x^2)^5}.\frac{2.dx}{1+x^2}$$

Avec l'aide d'un logiciel car je n'ai pas tant de courage

$$\frac{(1-X)^5}{(1+X)^6} = \frac{32}{(1+X)^6} - \frac{80}{(1+X)^5} + \frac{80}{(1+X)^4} - \frac{40}{(1+X)^3} + \frac{10}{(1+X)^2} - \frac{1}{(1+X)}$$

(je vous explique plus loin)
Avec un changement de variable

$$\frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^6} = \frac{32}{(1+x^2)^6} - \frac{80}{(1+x^2)^5} + \frac{80}{(1+x^2)^4} - \frac{40}{(1+x^2)^3} + \frac{10}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{(1+x^2)}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer. Mais il faudra ruser avec des idées comme

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{(1+x^2).dx}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{2}.\int \frac{2.x}{(1+x^2)^2}.x.dx = \Big[Arctan(x)\Big] - \frac{1}{2}.\Big[\frac{-1}{1+x^2}.x\Big] + \frac{1}{2}\int \frac{-1}{1+x^2}.1.dx$$

(vous avez vu l'intégration par parties ?)
J'ai au final (merci Xcas) une primitive en

$$x \longmapsto \frac{15.x^9 + 20.x^7 + 58.x^5 + 20.x^3 + 15.x}{15.(1+x^2)^5}$$

Je rappelle enfin :

$$\tan\Big(\frac{\pi}{12}\Big) = \tan\Big(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}.1} = 2 - \sqrt{3}$$

et j'arrive au même rationnel en prétendant avoir fait les calculs tout seul.

Remarque : pour la décomposition en éléments simples

$$\frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^6} = \frac{32}{(1+x^2)^6} - \frac{80}{(1+x^2)^5} + \frac{80}{(1+x^2)^4} - \frac{40}{(1+x^2)^3} + \frac{10}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{(1+x^2)}$$

ce n'est pas si compliqué. J'ai commencé par poser $X = x^2$ car c'est en fait la vraie variable.
J'a ensuite posé $Y = X + 1$ et décomposé

$$\frac{(1-X)^5}{(1+X)^6} = \frac{(2-Y)^5}{(Y)^6} = \frac{64 - 80.Y + 80.Y^2 - 40.Y^3 + 10.Y^4 - Y^5}{Y^6}$$

Il ne reste plus qu'à séparer et revenir à la vraie variable

$$\frac{(1-X)^5}{(1+X)^6} = \frac{64}{Y^6} - \frac{80}{Y^5} + \frac{80}{Y^4} - \frac{40}{Y^3} + \frac{10}{Y^2} - \frac{1}{Y} = \frac{64}{(1+X)^6} - \frac{80}{(1+X)^5} + \dots$$

Mais sinon, comment aurait on calculé $\int_0^{\pi/6} \cos^5(t).dt$?
Bien sûr en l'écrivant

$$\int_0^{\pi/2} (\cos^2(t))^2.\cos(t).dt = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))^2.\cos(t).dt = \int_0^{\pi/2} (\sin^4(t) - 2.\sin^2(t) + 1).\cos(t).dt$$

comme dans la règle de Bicohe du changement en sinus.

Mais on pouvait aussi faire appel à Euler et Moivre

$$\cos^5(t) = \frac{(e^{i.t}+e^{-i.t})^5}{2^5} = \frac{e^{5.i.t}+5.e^{4.i.t}.e^{-i.t}+10.e^{3.i.t}.e^{-2.i.t}+10.e^{2.i.t}.e^{-3.i.t}+5.e^{i.t}.e^{-4.i.t}+e^{-5.i.t}}{2.16} en$$

regroupant les termes de même exposant au signe près

$$\cos^5(t) = \frac{2.\cos(5.t)+5.2.\cos(3.t)+10.2.\cos(t)}{2.16}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer

$$\int_0^{\pi/6} \cos^5(t).dt = \frac{1}{16}.\int_0^{\pi/6}(\cos(5.t)+5.\cos(3.t)+10.\cos(t)).dt = \frac{1}{16}.\Big[\frac{\sin(5.t)}{5}+5.\frac{\sin(3.t)}{3}+10.\sin(t)\Big]_0^{\pi/6}$$

Passons à $\int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt$ avec un sinus hyperbolique. $t = sh(x)$ donc $dt = ch(x).dx$ et surtout $ch^2(x)-sh^2(x)=1$.
Comme le cosinus hyperbolique est à coup sûr positif

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt = \int_{x=0}^{\ln(1+\sqrt{1+1^2})} ch(x).ch(x).dx = \int_{x=0}^{\ln(1+\sqrt{1+1^2})} \frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}.dx = \int_{x=0}^{\ln(1+\sqrt{1+1^2})} \frac{e^{2.x}+2+e^{-2.x}}{4}.dx$$

On intègre en exponentielles et on termine le calcul.

Mais au fait, comment a-t-on résolu $sh(x)=1$? On voulait $e^x-e^{-x}=2$ mais on ajoute une information $e^x.e^{-x}=1$
.
On connait la somme et la différence. Autant dire que ce sont deux nombres dont on connaît la somme et le produit : $(e^x)+(-e^{-x})=2$ et $e^x.(-e^{-x})=1$.
e^x et $-e^x$ sont les deux racines de $X^2-2.X-1$.
On a donc la racine positive : $e^x = 1+\sqrt{2}$ et on sait aussi $-e^{-x}=1-\sqrt{2}$.

Ceci permet de conclure à la fin pour les valeurs à la borne du haut d el'intervalle d'intégration. Bref

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt = \Big[\frac{e^{2.x}-e^{-2.x}}{8}+\frac{x}{2}\Big]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2}$$

On peut aussi foncer et proposer

$$\Big[\frac{x.\sqrt{1+x^2}}{2}+\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2}}{2}\Big]$$

issu d'une intégration par parties et d'une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ déjà croisée.

Et enfin $\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ se traite directement

$$\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}} = \int_1^4 \frac{1}{1+(\sqrt{t})^2}.\frac{dt}{\sqrt{t}} = \Big[2.Arctan(\sqrt{t})\Big]_1^4$$

Si vous ne le voyez pas directement, changez de variable en $u=\sqrt{t}$.
Quitte à fusinner ensuite $Arctan(2)-Arctan(1)$ en $Arctan\Big(\frac{2-1}{1+2.1}\Big)$, on a une formule pas trop laide.

◃51▹ Montrez : $\int_0^{\pi/4} \frac{4.\cos(\theta).d\theta}{\sin(\theta)+\cos(\theta)} = \ln(2)+\frac{\pi}{2}$ après avoir justifié l'existence de l'intégrale.

Rappel : pour calculer $\int R(\cos(\theta),\sin(\theta)).d\theta$ on change de variable avec les règles de Bioche, en testant l'invariance de $R(\cos(\theta),\sin(\theta)).d\theta$ par symétrie trigonométrique :

symétrie	invariance	poser
$\theta \to -\theta$	si $R(\cos(-\theta),\sin(-\theta)).(-d\theta) = R(\cos(\theta),\sin(\theta)).d\theta$	poser $c=\cos(\theta)$
$\theta \to \pi-\theta$	si $R(\cos(\pi-\theta),\sin(\pi-\theta)).(-d\theta) = R(\cos(\theta),\sin(\theta)).d\theta$	poser $s=\sin(\theta)$
$\theta \to \pi+\theta$	si $R(\cos(\pi+\theta),\sin(\pi+\theta)).d\theta = R(\cos(\theta),\sin(\theta)).d\theta$	poser $\tau=\tan(\theta)$
$\theta \longmapsto \theta+2.\pi$	si rien n'a marché	poser $t=\tan(\theta/2)$

L'existence de $\int_0^{\pi/4} \frac{4.\cos(\theta).d\theta}{\sin(\theta)+\cos(\theta))}$ fait juste appel aux mots clefs "continuité" et "intégration sur un segment".

Bioche a ses règles, il n'aura pas piscine, mais il vous dira qu'on ne peut pas poser $c = \cos(\theta)$ ni $s = \sin(\theta)$, mais $\tau = \tan(\theta)$. On a donc $\theta = Arctan(\tau)$ sur notre domaine, puis $d\theta = \dfrac{d\tau}{1+\tau^2}$. On force ensuite : $\dfrac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)+\sin(\theta)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}$. L'intégrale devient $\displaystyle\int_{\tau=0}^{\tau=1} \frac{4.d\tau}{(1+\tau^2).(1+\tau)}$.

On décompose en éléments simples $\dfrac{4}{(1+T).(1+T^2)} = \dfrac{a}{1+T} + \dfrac{b.T+c}{1+T^2} = \dfrac{2}{T+1} + \dfrac{-2.T+2}{T^2+1} = 2.\dfrac{1}{T+1} - \dfrac{2.T}{1+T^2} + 2.\dfrac{1}{T^2+1}$.

On peut intégrer avec des logarithmes et une arctangente : $\Big[2.\ln(1+\tau) - \ln(1+\tau^2) + 2.Arctan(\tau)\Big]_{\tau=0}^{\tau=1}$.

Preuve qu'il ne faut pas avoir une confiance totale en un logiciel : XCas donne la réponse étrange et même négative $\ln(\sqrt{2}) - \pi/4$ *! Et j'ai du mal à comprendre par quel changement de variable erroné ce logiciel y parvient...*

◃52▹ Montrez : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{ch(t)}{ch(2.t)}.dt = \frac{\pi.\sqrt{2}}{4}$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(\theta)}{\cos(2.\theta)}.d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}.\ln\Big(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\Big)$.
Indication : $u^4+1 = (u^2+1)^2 - 2.u^2$ et on peut factoriser.

Les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{ch(t)}{ch(2.t)}.dt$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(t)}{\cos(2.t)}.dt$ existent par continuité des applications mises en jeu *(les dénominateurs ne s'annulent pas)*.

Pour $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(\theta)}{\cos(2.\theta)}.d\theta$, faisons appel à Bioche : pas $t \longmapsto -t$; mais $t \longmapsto \pi - t$ (deux signes moins).
Bref, on va $s = \sin(\theta)$. On a alors $\cos(\theta).d\theta = ds$ et $\cos(2.\theta) = 1 - 2.\sin^2(\theta)$.
On affronte donc après simplifications $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{ds}{(1-\sqrt{2}.s).(1+\sqrt{2}.s)}$. On décompose en éléments simples

$$\frac{1}{(1-\sqrt{2}.s).(1+\sqrt{2}.s)} = \frac{1}{2}.\Big(\frac{1}{1-\sqrt{2}.s} + \frac{1}{1+\sqrt{2}.s}\Big)$$

et on intègre en logarithmes.

L'autre intégrale est du même genre :

$$\int_0^{+\infty} \frac{ch(t)}{ch(2.t)}.dt = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} \frac{d(sh(t))}{1+2.sh^2(t)}$$

On intègre en arctangente.

◃53▹ Montrez : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2.\theta)}{2+\cos^2(\theta)}.d\theta = \ln\Big(\frac{3}{2}\Big)$. Montrez : $\displaystyle\int_0^{1} \frac{Arctan(t)}{(1+t)^2}.dt = \frac{\ln(2)}{4}$.

Existence : continuité des applications intégrées.

Bioche pour la première : par $\theta \longmapsto -\theta$, $\dfrac{\sin(2.\theta)}{2+\cos^2(\theta)}.d\theta$ devient $\dfrac{-\sin(2.\theta)}{2+\cos^2(\theta)}.(-d\theta)$, ce qui ne change rien.
C'est donc qu'on peut changer de variable en $c = \cos(\theta)$.
En effet, $\sin(2.\theta) = 2.\cos(\theta).\sin(\theta)$ et on reconnaît $\displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{2.\cos(\theta)}{2+\cos^2(\theta)}.\sin(\theta).d\theta$.
L'intégrale devient $\displaystyle\int_{c=1}^{c=0} \frac{2.c}{2+c^2}.(-dc)$. On intègre en $\Big[\ln(2+c^2)\Big]_{c=0}^{c=1}$ (ou si vous préférez, dérivez $\theta \longmapsto \ln(2+\cos^2(\theta))$ pour vérifer).
On a bien une différence de logarithmes, ou le logarithme d'un quotient.

On intègre par parties :

$Arctan(t)$	$\hookrightarrow$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$\dfrac{1}{(1+t)^2}$	$\hookleftarrow$	$-\dfrac{1}{1+t}$

On décompose ensuite en éléments simples : $\dfrac{1}{(1+t^2).(1+t)} = \dfrac{a.t+b}{1+t^2} + \dfrac{c}{1+t}$.

On a très vite $\dfrac{1}{(1+t^2).(1+t)} = \dfrac{1}{2}.\Big(\dfrac{1-t}{1+t^2} + \dfrac{1}{1+t}\Big)$.
On a finalement une primitive en tenant compte du premier terme crochet :
$\boxed{t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{2} - \dfrac{\ln(1+t^2)}{4} + \dfrac{Arctan(t)}{2} - \dfrac{Artan(t)}{1+t}}$ Le reste n'est que calcul.

La démarche est plus intéressante que le résultat.

◁54▷ Montrez $\displaystyle\int_3^{10} \frac{3.dx}{x+4-\sqrt{x+6}} = \ln(25)$ après avoir justifié l'existence de l'intégrale.

Pour l'existence de $\displaystyle\int_3^{10} \frac{3.dx}{x+4-\sqrt{x+6}}$, il suffit de dire qu'on intègre une application continue sur un segment.
Mais il faut quand même s'assurer que
• la racine carrée existe (pas de problème, $x+6$ va de 9 à 16)
• le dénominateur ne s'annule pas *(il faudrait pour celà avoir $x+4 = \sqrt{x+6}$, or, en élevant au carré, on trouve $x^2+8.x+16 = x+6$, qui n'est vrai qu'en -2 et -5, hors de notre intervalle)*.
On change de variable *(mot clef C^1 difféomorphisme)* : $u = \sqrt{x+6}$, donc $x = u^2-6$ et $dx = 2.u.du$.
L'intégrale devient

$$\int_{u=\sqrt{9}}^{u=\sqrt{16}} \frac{6.u}{u^2-6+4-u}.du$$

(on dit "merci Tonton Nicolas pour les bornes simples"). On décompose en éléments simples

$$\frac{6.u}{u^2-u-2} = \frac{6.u}{(u+1).(u-2)} = \frac{2}{u+1} + \frac{4}{u-2}$$

(on dit merci aussi pour les pôles simples vraiment simples et les coefficients gentils).
Il n'y a plus qu'à intégrer en logarithme pour arriver à $2.\ln\Big(\dfrac{4+1}{3+1}\Big) + 4.\ln\Big(\dfrac{4-2}{3-2}\Big)$. En fusionnant, il reste juste $\boxed{2.\ln(5)}$

◁55▷ ♡ Montrez que $th(x/2)$ est rationnelle si et seulement si $sh(x)$ et $ch(x)$ sont rationnels.
Si $sh(x)$ vaut $\dfrac{60}{229}$, est il vrai que $ch(x)$ est rationnel ?

On utilise les formules $\boxed{sh(x) = \dfrac{2.t}{1-t^2},\ ch(x) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}}$ qui se démontrent directement en partant par exemple du membre de droite.
On peut aussi écrire $t = \dfrac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{e^{x/2}+e^{-x/2}} = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$. On renverse : $e^x = \dfrac{t+1}{1-t}$ puis on inverse : $e^{-x} = \dfrac{1-t}{1+t}$ *(en sachant que $1-t$ est strictement positif)*.
On somme :

$$2.ch(x) = \frac{t+1}{1-t} + \frac{1-t}{1+t} = \frac{(t+1)^2+(t-1)^2}{(1-t).(1+t)} = \frac{2.t^2+2}{1-t^2}$$

et aussi $2.sh(x) = \dfrac{2.t}{1-t^2}$ par le même type de calcul.

On raisonne ensuite par équivalence.
Si t est rationnelle alors $\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ et $\dfrac{2.t}{1-t^2}$ sont rationnels *(stabilité de $\mathbb{Q}$ par les opérations en jeu)*.

Si $ch(x)$ et $sh(x)$ sont rationnels, alors en renversant $ch(x) = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ on déduit que t^2 est rationnel.

On reporte dans $t = \dfrac{(1-t^2).sh(x)}{2}$ et voilà t rationnel.

Quand $sh(x)$ vaut $\dfrac{60}{229}$ alors par la formule $ch^2 - sh^2 = 1$, on trouve que $ch^2(x)$ vaut $\dfrac{60^2+229^2}{229^2}$.
On passe à la racine, car $ch(x)$ est positif, et le résultat n'a aucun interêt...
C'eut été plus drôle avec $\dfrac{68}{285}$ qui donnait $ch(x) = \dfrac{293}{285}$ *(retrouvez le triplet pythagoricien caché)*.

C'est quand le sinus tout court vaut $\frac{60}{229}$ que le cosinus est rationnel.

◁56▷ On pose $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$ et $a_{n+2} = a_{n+1}.a_n$. Calculez a_n pour tout n.
On pose $b_0 = \alpha$, $b_1 = \beta$ et $b_{n+2} = b_{n+1}.(b_n)^2$. Calculez b_n pour tout n.

Si α ou β est nul, c'est facile, on tombe très vite sur 0 et on y reste.

Sinon, on calcule les premiers, histoire d'émettre une conjecture :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	α	β	$\alpha.\beta$	$\alpha.\beta^2$	$\alpha^2.\beta^3$	$\alpha^3.\beta^5$	$\alpha^5.\beta^8$	$\alpha^8.\beta^{13}$	$\alpha^{13}.\beta^{21}$

La récurrence vient très vite, avec une formule tout de suite explicite : $a_n = \alpha^{F_n}.\beta^{F_{n+1}}$ où (F_n) (avec des parenthèses) est une suite de Fibonacci ($F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$), initialisée par 1 et 0.
Elle est initialisée : $a_0 = \alpha^1.\beta^0$ et $a_1 = \alpha^1.\beta^0$.

Supposons, pour un n donné, la formule vraie au rang n : $a_n = \alpha^{F_{n+1}}.\beta^{F_n}$ et $a_{n+1} = \alpha^{F_{n+2}}.\beta^{F_{n+1}}$. On multiplie :

$$a_{n+2} = \alpha^{F_{n+1}}.\beta^{F_n}.\alpha^{F_{n+2}}.\beta^{F_{n+1}} = \alpha^{F_{n+1}+F_{n+2}}.\beta^{F_n+F_{n+1}} = \alpha^{F_{n+3}}.\beta^{F_{n+2}}$$

La formule est validée par récurrence.

Recommençons avec des carrés : $b_{n+2} = b_{n+1}.(b_n)^2$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
b_n	α	β	$\alpha^2.\beta$	$\alpha^2.\beta^3$	$\alpha^6.\beta^5$	$\alpha^{10}.\beta^{11}$	$\alpha^{22}.\beta^{21}$	$\alpha^{42}.\beta^{43}$	$\alpha^{86}.\beta^{85}$

Ce qui serait présomptueux, ce serait de trouver tout de suite une formule explicite. On n'est plus au lycée, là où tout est simple.
C'est à vous de faire tout le travail par étapes.

On montre par récurrence évidente sur n que b_n est un produit de α et β avec des puissances à détailler.
Mettons cette idée en forme avec l'existence de deux suites u_n et v_n vérifiant $b_n = \alpha^{u_n}.\beta^{v_n}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
b_n	α	β	$\alpha^2.\beta$	$\alpha^2.\beta^3$	$\alpha^6.\beta^5$	$\alpha^{10}.\beta^{11}$	$\alpha^{22}.\beta^{21}$	$\alpha^{42}.\beta^{43}$	$\alpha^{86}.\beta^{85}$
u_n	1	0	2	2	6	10	22	42	86
v_n	0	1	1	3	5	11	21	43	85

On est certes tenté de raconter des choses en $|u_n - v_n| = 1$ pour tout n.
Mais ça ne sert pas beaucoup.
Ce qu'on veut, c'est prouver l'existence de ces suites (par récurrence) et trouver leur forme ou pour le moins des informations.

Par récurrence forte, supposons pour un entier n que u_n, v_n, u_{n+1} et v_{n+1} existent.
On écrit donc $b_n = \alpha^{u_n}.\beta^{v_n}$ et $b_{n+1} = \alpha^{u_{n+1}}.\beta^{v_{n+1}}$.
On multiplie : $b_{n+2} = (\alpha^{u_n}.\beta^{v_n})^2.\alpha^{u_{n+1}}.\beta^{v_{n+1}} = \alpha^{2.u_n+u_{n+1}}.\beta^{2.v_n+v_{n+1}}$.
On pose alors $u_{n+2} = 2.u_n + u_{n+1}$ et $v_{n+2} = 2.v_n + v_{n+1}$ (là, c'est à nous de prendre cette initiative).
u_{n+2} et v_{n+2} existent. C'est bon, la récurrence s'achève.

Les deux suites (u_n) et (v_n) existent.

Maintenant, on les explicite. On a montré $u_{n+2} = 2.u_n + u_{n+1}$.
On écrit l'équation caractéristique : $\lambda^2 = \lambda + 2$. On trouve $(u_n) \in Vect((2^n),\ ((-1)^n))$.
Si vous préférez : il existe A et B vérifiant « pour tout n, $u_n = A.(2)^n + B.(-1)^n$.
Il ne va de même pour (v_n). Et on trouve A et B par les conditions initiales :

suite u	suite v
$A.(2)^n + B.(-1)^n$	$A'.(2)^n + B'.(-1)^n$
$A + B = 1$	$A' + B' = 0$
$2.A - B = 0$	$2.A' - B' = 1$
$\frac{2^n + 2.(-1)^n}{3}$	$\frac{2^n - (-1)^n}{3}$

La formule définitive est $\boxed{b_n = \alpha^{(2^n+2.(-1)^n)/3}.\beta^{(2^n-(-1)^n)/3}}$

◃57▹ **Combien l'équation $a.b = 10!$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?**

Pour l'équation $a.b = 10!$, il suffit de trouver les diviseurs a de 10!. Pour chaque a, il y a un unique b.
Et on va chercher les solutions positives. En effet, pour un couple tel que $(120,\ 30240)$, on aura aussi $(-120,\ -30240)$.
Alors, qui sont les diviseurs de 10! ? Déjà, on écrit 10! comme produit de facteurs premiers.

$$(1).(2).(3).(2^2).(5).(2.3).(7).(2^3).(3^2).(2.5) = 2^8.3^4.5^2.7$$

Les nombres a ne peuvent contenir que des facteurs 2, 3, 5 et 7. Et encore, avec des exposants pas trop grands.

On va écrire $a = 2^\alpha.3^\beta.5^\gamma.7^\delta$ et $a = 2^{8-\alpha}.3^{4-\beta}.5^{2-\gamma}.7^{1-\delta}$ avec
$\begin{array}{lll} \alpha & \text{dans} & \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\} \\ \beta & \text{dans} & \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\} \\ \gamma & \text{dans} & \{0,\ 1,\ 2\} \\ \delta & \text{dans} & \{0,\ 1\} \end{array}$

On a au total 9.5.3.2 couples, que l'on double pour les histoires de signes.

Au total $\boxed{\text{540 solutions}}$ dont la liste ne sera pas donnée ici.

La question « le nombre de diviseurs de $2^a.3^b.5^d\dots$ est égal à $(1+a).(1+b).(1+c)\dots$ » fut longtemps un classique de Terminale.

Sinon, on pouvait aussi proposer

```
F = 1
for k in range(10) :
....F *= k+1
NbDiv = 0
for k in range(1, F+1) :
....if F%k == 0 :
........NbDiv +=1
print(2*NbDiv)
```

◃58▹ **Résolvez dans $\mathbb{R}$ $\sqrt{x^2 - 5.x + 4} \geqslant |2.x+1|$.
Résolvez dans $\mathbb{R}$ $\sqrt{x^2 - 5.x + 4} \geqslant 2.x+1$.**

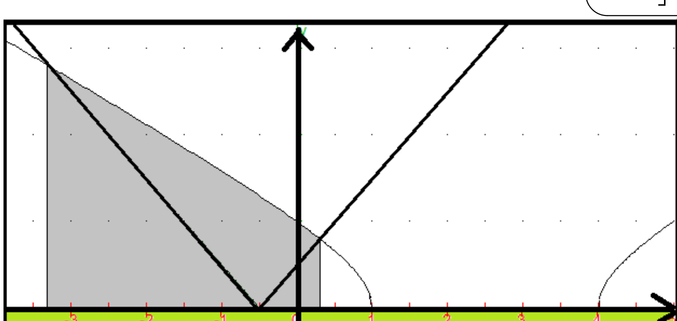
Dans la première inéquation, tout est positif. Il y a donc équivalence avec $x^2 - 5.x + 4 \geqslant (2.x+1)^2$.
On trouve l'inéquation du second degré $0 \geqslant 3.x^2 + 9.x - 3$. Le trinôme convexe $x^2 + 3.x - 1$ est négatif entre ses racines : $S = \left[\frac{-3-\sqrt{13}}{2},\ \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right]$.
Sauf qu'il y a aussi une condition dès le début : il faut que $x^2 - 5.x + 4$ soit positif. On doit donc intersecter avec $]-\infty,\ 1] \cup [4,\ +\infty[$.

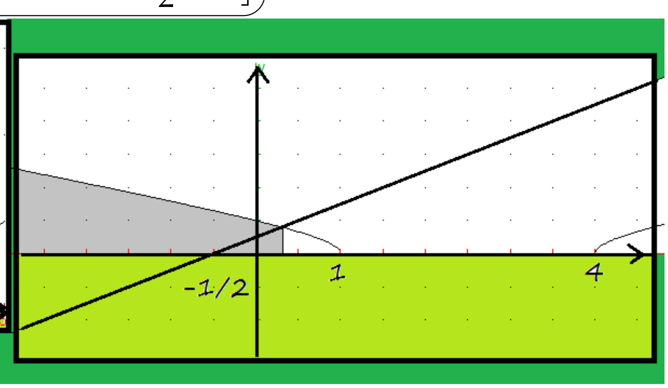
Par chance, $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ est plus petit que 1 : $\boxed{S = \left[\frac{-3-\sqrt{13}}{2},\ \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right]}$

Pour la seconde, on a la conditions de départ : $x^2 - 5.x + 4 \geqslant 0$.
Ensuite, on sépare :

domaine	condition	équation	
$\left[-\frac{1}{2},\ +\infty\right[$	$2.x+1 \geqslant 0$	$(2.x+1)^2 \leqslant x^2 - 5.x + 4$	$\left[\frac{-3-\sqrt{13}}{2},\ \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right] \bigcap \left[-\frac{1}{2},\ +\infty\right[$
$\left]-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]$	$2.x+1 \leqslant 0$	$2.x+1 \leqslant 0 \leqslant \sqrt{x^2 - 5.x + 4}$	$\left]-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]$

Et on intersecte encore avec $]-\infty,\ 1] \cup [4,\ +\infty[$: $\boxed{S = \left]-\infty,\ \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right]}$





Et que n'ai je dressé un tableau ?

	$\left]-\infty, \frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right]$	$\left[\frac{-3-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1}{2}\right]$	$\left[\frac{-1}{2}, \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right]$	$\left[\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, -1\right]$	$\left[-1, 4\right]$	$\left[4, +\infty\right[$
$\sqrt{x^2-5.x+4}$	existe positif	existe positif	existe positif	existe positif	n'existe pas	existe
$2.x+1$	négatif	négatif	positif	positif	positif	positif
$\|2.x+1\|$	$-1-2.x$	$-1-2.x$	$1+2.x$	$1+2.x$	$1+2.x$	$1+2.x$
$x^2-5.x+4 \geqslant (2.x+1)^2$	faux	vrai	vrai	faux	faux	faux

◁ 59 ▷ ♡ Montrez : $\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 2.(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$. Déduisez que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)_n$ diverge.

On utilise la quantité conjuguée :

$$2.(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = 2.\frac{k+1-k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{k}}$$

Joli et classique.

Sinon, on peut voir une comparaison série intégrale : $\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}.dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}.dt = \frac{1}{\sqrt{k}}.\int_k^{k+1} dt = \frac{1}{\sqrt{k}}$.
Et devinez qui est le premier membre ?

Il reste ensuite à sommer. On minore $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ par $2.\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$.
Le minorant télescope.
Il n'y a plus qu'à appeler un gendarme.

◁ 60 ▷ La suite a_n tend vers 0 à l'infini. Donnez la limite des suites suivantes :
$\left(\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}-a_k\right)$, $\left(\sum_{k=0}^{n} a_{k+2}-2.a_{k+1}+a_k\right)$, $\left(\sum_{k=0}^{n} a_{k+3}-3.a_{k+2}+3.a_{k+1}-a_k\right)$. Trouvez une formule générale.

On télescope : $\forall n,\ \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}-a_k = a_{n+1}-a_0$.
On a une limite et elle vaut $-a_0$.

Pour tout n, $\sum_{k=0}^{n} a_{k+2}-2.a_{k+1}+a_k = \sum_{k=0}^{n}(a_{k+2}-a_{k+1})-(a_{k+1}-a_k) = (a_{n+2}-a_{n+1})-(a_1-a_0)$.
Cette fois, la limite vaut a_1-a_0.

Pour conclure $\left(\sum_{k=0}^{n} a_{k+3}-3.a_{k+2}+3.a_{k+1}-a_k = \sum_{k=0}^{n}(c_{k+1}-c_k)\right.$ avec $c_k = a_{k+2}-2.a_{k+1}+a_k$.
Cette fois, la limite est $a_2-2.a_1+a_0$.

La généralisation sera pleine de binomiaux, avec des sommes de sommes...

◁ 61 ▷ ♣ Calculez $\prod_{k=2}^{2015}\left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)}$ *(les crochets désignent la partie entière).*

Ecrivons ce produit avec des points de suspension pour comprendre :

k	2	3	4	5	6	7	8			2013	2014	2015
$\left[\frac{k}{2}\right]$	1	1	2	2	3	3	4			1006	1007	1007
$(-1)^k$	1	-1	1	-1	1	-1	1			-1	1	-1
$\left[\frac{k}{2}\right]^{(-1)^k}$	1	$\frac{1}{1}$	2	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{3}$	4			$\frac{1}{1006}$	1007	$\frac{1}{1007}$

Chaque fois qu'il y a un entier au numérateur, il y a le même au dénominateur. Le produit vaut $\boxed{1}$

Proprement, on sépare par parité : $\displaystyle\prod_{k=2}^{2015}\left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} = \prod_{\substack{2\leqslant k\leqslant 2015\\ k\ pair}}\left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)}.\prod_{\substack{2\leqslant k\leqslant 2015\\ k\ impair}}\left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)}$

$$\prod_{k=2}^{2015}\left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} = \prod_{p=1}^{1007}\left[\frac{2.p}{2}\right]^{((-1)^{2.p})}.\prod_{p=1}^{1007}\left[\frac{2.p+1}{2}\right]^{((-1)^{2.p+1})}$$

$$\prod_{k=2}^{2015}\left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} = \prod_{p=1}^{1007}\left[\frac{2.p}{2}\right].\prod_{p=1}^{1007}\left[\frac{2.p+1}{2}\right]^{-1}$$

$$\prod_{k=2}^{2015}\left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} = \Big(\prod_{p=1}^{1007}p\Big).\Big(\prod_{p=1}^{1007}\frac{1}{p}\Big)$$

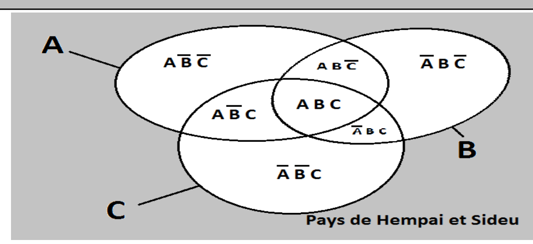
$$\prod_{k=2}^{2015}\left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} = 1007!.\frac{1}{1007!}$$

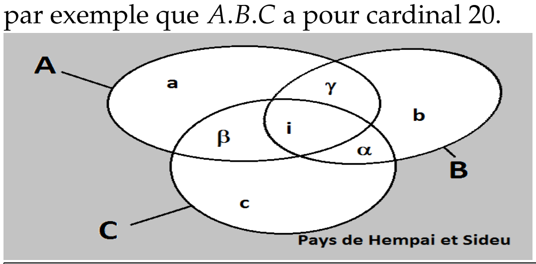
$$\prod_{k=2}^{2015}\left[\frac{k}{2}\right]^{((-1)^k)} = 1$$

Un livre vous le rédigera ainsi, avec toute la rigueur voulue.
Mais qui, sinon la recherche à la main avec mille points de suspension, vous fera comprendre qu'il fallait passer par là ? Une vidéo peut être.

◃62▹ Dans le pays de Hempai et Sideu, il y a des Arfs, des Bloutchs et des Crops (et c'est tout, mais on peut être Arfe et Bloutch, et même les trois à la fois, comme d'ailleurs 20 habitants). 50 Arfs sont aussi des Crops. Il y a 90 Bloutchs, dont un tiers sont d'ailleurs aussi des Crops. Parmi les Bloutchs, il y en a autant qui sont Arfs et Crops qu'il n'y en a qui sont Arf ou_e Crops. 40 Crops ne sont ni Arf, ni Bloutch. Il y a 100 Arfs. Alors, combien d'habitants dans ce pays Hempai et Sideu ? Et combien répondront "oui" à la question "*si tu es Arf, alors tu n'es ni Bloutch, ni Crop*" (*sachant qu'ils sont tous bons en logique et sincères*).

Les Arfs, Bloutchs et les Crops. On ne sait même pas combien ils sont dans chaque catégorie. Mais on a des informations. On va découper les habitants en sept catégories, qu'on peut noter par exemple $A.\overline{B}.C$ ou $\overline{A}.B.\overline{C}$ avec un symbolisme qu'on comprend aisément. On sait par exemple que $A.B.C$ a pour cardinal 20.





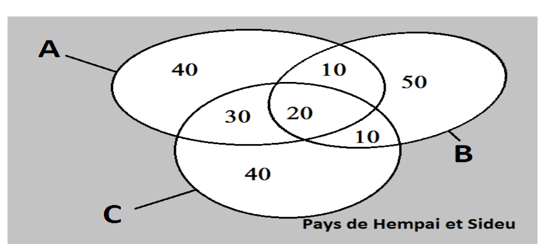
On note les différents cardinaux avec des lettres (il va y en avoir sept) et on traduit les sept informations.
Sept informations pour sept inconnues, la chose semble cohérente. On a des chances d'avoir une et une seule solution.

information	équation	numéro
On peut être les trois à la fois, comme d'ailleurs 20 habitants	$i = 20$	1
50 Arfs sont d'ailleurs aussi des Crops	$\beta + i = 50$	2
Il y a 90 Bloutchs...	$b + \gamma + \alpha + i = 90$	3
...dont un tiers sont d'ailleurs aussi des Crops	$i + \alpha = 30$	4
Parmi les Bloutchs autant sont "Arfs et Crops" que "Arf ou_e Crops"	$i = \alpha + \gamma$	5
40 Crops ne sont ni Arf, ni Bloutch	$c = 40$	6
Il y a 100 Crops.	$\alpha + \beta + i + c = 100$	7

On résout peu à peu le système en vérifiant si on utilise toutes les équations

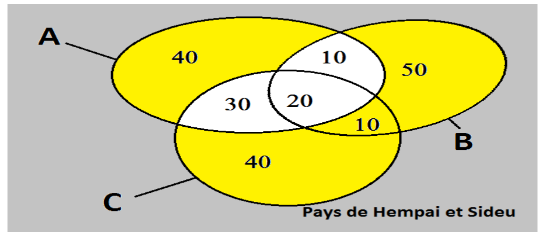
1	2	4	
$i = 20$	$\beta = 30$	$\alpha = 10$	

5	3	6	7
$\gamma = 10$	$b = 50$	$c = 40$	$c = 40$



On a tous les nombres cherchés, il ne reste plus qu'à sommer... Ils sont $\boxed{200}$ individus au total.

Quant à la question “si tu es Arf, alors tu n’es ni Bloutch, ni Crop”, elle est de la forme “$A \Rightarrow (\overline{B}\ et\ \overline{C})$. On l’écrit $\overline{A}\ ou\ (\overline{B}\ et\ \overline{C})$. On l’écrit aussi $\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$. On hachure les éléments concernés, et on les compte : ils sont $\boxed{140}$
On peut passer d’ailleurs par le complémentaire : ceux qui sont A mais pas (ni B ni C), c’est à dire ceux qui sont A et (B ou C).



◁63▷ Déterminez

$Sup\left\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-y}) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\right\}$	$Sup\left\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$
$Inf\left\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-y}) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\right\}$	$Inf\left\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$

La borne supérieure d’un ensemble est son plus petit majorant. Et par exemple, $[0,\ 1[$ a pour borne supérieure 1 alors qu’il n’a pas de plus grand élément.

Les quatre ensembles avec des arc tangentes sont majorés par $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$ et non vides. Ils sont aussi minorés par 0, car ce sont des sommes d’arctangentes positives. Ils ont chacun une borne supérieure et une borne inférieure.

Pour tout x, $Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x})$ vaut toujours $\frac{\pi}{2}$ (c’est $Arctan(u) + Arctan(1/u)$ avec u positif, c’est dans le cours de géométrie ; sinon, pour convaincre le physicien, dites lui de dériver $x \longmapsto Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x})$ et il comprendra).

L’ensemble $\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est un singleton : $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (écrit aussi $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$). Sa borne supérieure et sa borne inférieure valent $\frac{\pi}{2}$ (atteintes toutes les deux).
Sinon, π majore $Arctan(e^x) + Arctan(e^{-y})$ quand x et y décrivent $\mathbb{R}$.
On fait tendre x vers $+\infty$ et y vers $-\infty$, les deux termes tendent vers $\frac{\pi}{2}$. Le majorant π n’est pas atteint, mais c’est bien le plus petit majorant.
De même, en faisant tendre $-\infty$ et y vers $+\infty$, la borne inférieure vaut 0.

$Sup\left\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-y}) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\right\} = \pi$	$Sup\left\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \frac{\pi}{2}$
$Inf\left\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-y}) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\right\} = 0$	$Inf\left\{Arctan(e^x) + Arctan(e^{-x}) \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \frac{\pi}{2}$

◁64▷ Fillomino. C’est quoi ce jeu là ? Il faut découper le plan en maisons. Une maison n’est pas forcément carrée, mais elle est d’un seul tenant *(vous voyez sur chaque gille une maison de taille* 3 *dont les trois cases sont appelées* 3*)*. Et dans une maison, si il y a des nombres *(et il y en a toujours au moins un)*, ils indiquant la taille de la maison *(donc une maison de taille* 1 *contient l’unique chiffre* 1*)*. Deux maisons de même taille ne peuvent pas se toucher autrement que par un coin.

3				2	4		
2		1	3	3	2	1	
1		4		3			
4	4	5				4	3
1	2			1	5		4
		4	1			5	3
3		4	3			3	
1	4	2		3	1	2	

3	**3**	**3**	**2**	2	4	**4**	**4**
2	**2**	1	3	3	2	1	**4**
1	**4**	4	**5**	3	**2**	**3**	**3**
4	4	5	**5**	**5**	**4**	4	3
1	2	**2**	**5**	1	5	**4**	4
3	**3**	4	1	**5**	**5**	5	3
3	**4**	4	3	**3**	**5**	3	**3**
1	4	2	**2**	3	1	2	**2**

◁ 65 ▷ ♡ Donnez une primitive de $x \longmapsto x.(Arctan(x))^2$ *(si vous intégrez par parties, dites vous que x peut venir de* $\frac{x^2}{2}$ *certes, mais aussi de* $\frac{x^2+1}{2}$*).*

Sans donner de bornes, pour travailler sur des primitives :

$\int x.(Arctan(x))^2.dx = \left[\frac{x^2+1}{2}.(Arctan(x))^2\right] - \int Arctan(x).dx$ avec

$(Arctan(x))^2$	$\hookrightarrow$	$\frac{2.Arctan(x)}{x^2+1}$
x	$\hookleftarrow$	$\frac{x^2+1}{2}$

On a donc $\boxed{\frac{x^2+1}{2}.(Arctan(x))^2 - x.Arctan(x) + \frac{\ln(1+x^2)}{2}}$ et tout ce que vous voulez en ajoutant une constante.

◁ 66 ▷ ♡ Résolvez $Arctan'(e^x) = \frac{1}{1+e^{2.x}}$. d'inconnue réelle x.

Enorme confusion pour qui croit savoir faire des maths mais calcule sans réfléchir.
On a $Arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et donc $Arctan'(e^x) = \frac{1}{1+(e^x)^2}$.
Dans l'ordre : on dérive, puis on remplace t par e^x.
On a donc ici $S = \mathbb{R}$.

La confusion : on n'a pas dérivé $x \longmapsto Arctan(e^x)$.
On a dérivé Arctan puis calculé en e^x.
C'est bien pour ça que $(Arctan((e^x))'$ *n'a pas de sens ou en tout cas est un summum d'ambiguïté.*
De même $f'(-x)$ *est clair. Et* $(f(-x))'$ *ne l'est pas du tout.*
Et ce n'est pas pour rien que le matheux insiste sur $(x \longmapsto f(-x))' = (x \longmapsto -f'(x))$ *par exemple.*

◁ 67 ▷ Le polynôme P de degre 4 a pour racines a, b, c et d (distincts). Decomposez en elements simples $\frac{P'(X)}{P(X)}$.
Et si on a $a = b$ la formule est elle encore valable ?

La clef : on factorise P (en mettant un coefficient dominant λ) puis on dérive $P = \lambda.(X-a).(X-b).(X-c).(X-d)$

$$P' = \lambda.(X-b).(X-c).(X-d) + \lambda.(X-a).(X-c).(X-d) + \lambda.(X-a).(X-b).(X-d) + \lambda.(X-a).(X-b).(X-c)$$

On dérive

$$\frac{P'}{P} = \frac{\lambda.(X-b).(X-c).(X-d) + \lambda.(X-a).(X-c).(X-d) + \lambda.(X-a).(X-b).(X-d) + \lambda.(X-a).(X-b).(X-c)}{\lambda.(X-a).(X-b).(X-c).(X-d)}$$

et on simplifie $\boxed{\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{1}{X-a} + \frac{1}{X-b} + \frac{1}{X-c} + \frac{1}{X-d}}$
On note que λ a disparu.
Et on note que a, b, c et d n'ont pas besoin d'être distincts quand on dérive puis quand on divise.
Simplement, on écrira $\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{1}{X-a} + \frac{1}{X-b} + \frac{1}{X-c} + \frac{1}{X-d} = \frac{2}{X-a} + \frac{1}{X-c} + \frac{1}{X-d}$ avec un joli 2 au numérateur qui marque la multiplicité de la racine.

◁ 68 ▷ ♣ On pose $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$. Calculez a^b. On ne sait pas, en l'état d'avancement actuel des mathématiques, si a est rationnel ou irrationnel. Montrez quand même que dans les deux cas, vous pouvez trouver deux irrationnels α et β tels que α^β soit redevenu rationnel.

$a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ (en utilisant $(a^b)^c = a^{b.c}$).

C'est un rationnel.
On ne sait pas si a est rationnel ou non ? pas grave, étudions les deux cas.

cas	choix des deux irrationnels	vérification
$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rationnel	$\alpha = \beta = \sqrt{2}$	$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$
$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrationnel	$\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $\beta = \sqrt{2}$	$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$

On a donc trouvé qu'il existe toujours un couple $(\alpha,\ \beta)$ avec α et β irrationnels et α^{η} rationnel.

Et si le physicien vient vous emmerder en demandant « c'est qui alors ce couple ? », vous ne pouvez pas lui répondre autrement qu'avec « dans un cas c'est... et dans l'autre c'est... ».
Et si il vous demande « mais lequel faut il choisir », répondez lui que ce n'est pas pire que la physique quantique...

Et si quelqu'un vous demande « est ce que ce n'est pas superbe comme démonstration », soyez sûr que c'est un mathématicien. Ou un poète. Ou inclusif.

◃69▹ ♡ Étudiez les variations sur $\mathbb{R}$ de l'application $\theta \longmapsto \theta - \sin(\theta)$. Déduisez pour tout θ réel : $|\sin(\theta)| \leqslant |\theta|$.
Le professeur demande de prouver pour tout θ réel et tout n entier naturel : $|\sin(n.\theta)| \leqslant n.|\sin(\theta)|$. Un élève propose la démonstration suivante : en appliquant le résultat précédent à θ et à $n.\theta$ on a $|\sin(\theta)| \leqslant |\theta|$ et $|\sin(n.\theta)| \leqslant |n.\theta|$, on effectue ensuite le quotient des inégalités et on trouve $\dfrac{|\sin(n.\theta)|}{|\sin(\theta)|} \leqslant n$ et c'est fini.
Où est l'erreur ? Démontrez quand même le résultat du professeur par récurrence sur n.
A-t-on aussi : $\forall \theta \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{R}^+,\ |\sin(n.\theta)| \leqslant n.|\sin(\theta)|$?
A-t-on aussi : $\forall \theta \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{R}^+,\ |\cos(n.\theta)| \leqslant n.|\cos(\theta)|$?
Montrez aussi : $|sh(x)| \geqslant |x|$ pour tout x réel.

L'application $\theta \longmapsto \theta - \sin(\theta)$ se dérive en $\theta \longmapsto 1 - \cos(\theta)$. Sa dérivée est positive ou nulle partout.
L'application $\theta \longmapsto \theta - \sin(\theta)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
Elle est nulle en 0.
Elle est donc négative sur $]-\infty,\ 0]$ et positive sur $[0,\ +\infty[$.

On a donc $\sin(\theta) \leqslant \theta$ pour θ positif
$\sin(\theta) \geqslant \theta$ pour θ négatif
$-\sin(\theta) \leqslant -\theta = |\theta|$
Maintenant, tout dépend du signe de $\sin(\theta)$.
Prenons θ positif : si $\sin(\theta)$ est positif, on a $|\sin(\theta)| = \sin(\theta) \leqslant \theta = |\theta|$.
Mais sinon ? On fait appel à une autre application : $\theta \longmapsto \theta + \sin(\theta)$.
Elle a aussi une dérivée positive, donc elle croît. Elle est nulle en 0.
Elle est donc positive sur $\mathbb{R}^+$: $-\sin(\theta) \leqslant \theta$.
Ceci donne alors $|\sin(\theta)| = -\sin(\theta) \leqslant \theta = |\theta|$.

On fait le même type de raisonnement sur $\mathbb{R}^-$.
Ou même, on applique le résultat précédent en $-\theta$ positif.

L'élève qui écrit $\begin{array}{ccc} |\sin(n.\theta)| & \leqslant & |n.\theta| \\ |\sin(\theta)| & \leqslant & |\theta| \end{array}$ a raison.
C'est quand il passe au quotient que c'est n'importe quoi. Certes tout est positif (pour les inégalités c'est important). Mais ce sont les produits qui passent, pas les quotients.
Rappelons $2 \leqslant 4$ et $1 \leqslant 4$. le passage au quotient donne $2 \leqslant 1$. Trop fort !

On se donne θ (non multiple de π afin d'avoir un dénominateur non nul) et on fait varier n au sein d'une récurrence.
On initialise à $n = 0$: $\dfrac{|\sin(0.\theta)|}{|\sin(\theta)|} = 0$.
On se donne n. On suppose vrai $\dfrac{|\sin(n.\theta)|}{|\sin(\theta)|} \leqslant n$.
On calcule alors :

$$\frac{|\sin((n+1).\theta)|}{|\sin(\theta)|} = \frac{|\sin(n.\theta).\cos(\theta) + \cos(n.\theta).\sin(\theta)|}{|\sin(\theta)|} \leqslant \frac{|\sin(n.\theta)|}{|\sin(\theta)|}.|\cos(\theta)| + |\cos(n.\theta)|.\frac{|\sin(\theta)|}{|\sin(\theta)|}$$

On majore les cosinus (en valeur absolue) par 1 : $\dfrac{|\sin((n+1).\theta)|}{|\sin(\theta)|} \leqslant \dfrac{|\sin(n.\theta)|}{|\sin(\theta)|} + \dfrac{|\sin(\theta)|}{|\sin(\theta)|}$.

On exploite l'hypothèse de récurrence et on majore bien par $n+1$.

On notera que pour n trop grand, le résultat n'a plus aucun intérêt.

On a prouvé $\forall\theta\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ |\sin(n.\theta)|\leqslant n.|\sin(\theta)|$.
En effet, pour θ multiple de π, la formule est encore valable, du type $0\leqslant 0$.

Mais qu'en est il de $\forall\theta\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{R}^+,\ |\sin(n.\theta)|\leqslant n.|\sin(\theta)|$ dans lequel les ensembles ont été intervertis ?
Pour θ égal à 1 et n égal à   on obtient une contradiction.

$\forall\theta\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{R}^+,\ |\cos(n.\theta)|\leqslant n.|\cos(\theta)|$ donnerait pour $\theta=0$ et $n=\dfrac{1}{2}$ une formule étrange, vous ne trouvez pas ?

Pour comparer $sh(x)$ et x (en valeur absolue), on crée $x\longmapsto sh(x)-x$ et $x\longmapsto sh(x)+x$ de dérivées positives.

◃70▹ Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{2.n} k^{(2+(-1)^k)}$.

$$\sum_{k=0}^{2.n} k^{(2+(-1)^k)} = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2.n\\ k\ pair}} k^3 + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2.n\\ k\ impair}} k$$

$$\sum_{k=0}^{2.n} k^{(2+(-1)^k)} = 8.\sum_{0\leqslant p\leqslant n} p^3 + n^2$$

(somme des premiers impairs)

$$\sum_{k=0}^{2.n} k^{(2+(-1)^k)} = 2.n^2.(n+1)^2 + n^2$$

◃71▹ ♡ Calculez $\displaystyle\sum_{k=3}^{N}\frac{1}{k^2-4}$ en décomposant en éléments simples.

$$\frac{1}{k^2-4}=\frac{1}{(k-2).(k+2)}=\frac{1}{4}.\Big(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k+2}\Big)$$

On laisse de côté pour l'instant le facteur 4.

On somme

$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$\dots$	$k=n-2$	$k=n-1$	$k=n$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{n-4}$	$\frac{1}{n-3}$	$\frac{1}{n-2}$
$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{9}$		$-\frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n+1}$	$-\frac{1}{n+2}$

On décale

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$				$\frac{1}{n-2}$				
				$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{7}$		$-\frac{1}{n-2}$	$-\frac{1}{n-1}$	$-\frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n+1}$	$-\frac{1}{n+2}$

On simplifie ce qui doit se simplifier.

Il ne reste « que » huit termes.

$$\boxed{\sum_{k=3}^{N}\frac{1}{k^2-4}=\frac{1}{4}.\Big(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\Big)}$$

On pouvait le deviner (ou le trouver dans un livre) et le démontrer ensuite par récurrence sur n. mais ce serait rester niveau Terminale.

◃72▹ ♡ On définit sur $\mathbb{N}$ la relation $\Re$ par $a\Re b \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a+b\\ b\end{pmatrix}$ *est impair*. cette relation est elle symétrique, réflexive, antisymétrique, transitive ? Qui sont les éléments en relation avec 0 ? Qui sont les éléments en relation avec 1 ?
♯ Quelle est la prochaine année n à venir vérifiant $n\Re(n+1)$? (Python autorisé)

Réflexive. On se donne a, on se demande si on a $\binom{a+a}{a}$ est impair. C'est déjà raté pour a égal à 1.

Symétrique. On se donne a et b. On suppose que $\binom{a+b}{b}$ est impair. Mais par symétrie sur la ligne du triangle, ce nombre vaut aussi $\binom{a+b}{a}$, qui est donc aussi impair.

Transitive. on se donne a, b et c. On suppose que $\binom{a+b}{b}$ et $\binom{b+c}{c}$ sont impairs. Et on se demande si ça a un rapport avec $\binom{a+c}{c}$.
Même en écrivant les binomiaux sous forme de factorielles, on ne voit pas de raison.
On cherche donc un contre-exemple.
$1\Re 0$ car $\binom{1}{0}$ est impair
$0\Re 1$ car $\binom{1}{0}$ est impair (il n'a pas changé)
mais on n'a pas $1\Re 1$ puisque $\binom{2}{1}$ est pair.

Être en relation avec 0 c'est vérifier $\binom{a+0}{0}$ est impair. mais ce coefficient vaut 1. C'est donc toujours vrai.
$\forall a,\ a\Re 0$.

Et pour être en relation avec 1 : on calcule $\binom{a+1}{1} = a+1$. Cet entier est impair si et seulement si a est pair.
$\forall a \in \mathbb{N},\ a\Re 1 \Leftrightarrow a \in 2.\mathbb{N}$.

On veut ensuite $\binom{2.n+1}{n}$ impair (et n plus grand que le millésime de l'année en cours).
On lance une recherche avec Python.

```
def Binomial(n, k) :
....B = 1
....for i in range(k) :
........B = B*(n-i)
........B = B//(i+1)
....return(B)
```

```
n = 2020
while Binomial(2*n+1,n)%2==0 :
....n +=1
```

Et la réponse est 2047. Et elle restera valable un paquet d'années...

Ne soyez pas surpris par la contruction du binomial par

```
....B = 1
....for i in range(k) :
........B = B*(n-i)
........B = B//(i+1)
```

Elle vient de la formule $\binom{n}{k} = \frac{n.(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k}$ avec k termes en haut comme en bas.
La vraie définition et formule pour calculer des binomiaux. Par exemple $\binom{17}{4} = \frac{17.16.15.14}{1.2.3.4}$.
Si vous persistez à utiliser $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$ pour les calculs, vous ne dépasserez jamais le niveau Bac. Désolé de vous le dire pour la dix neuvième fois.
Les méthodes qui vous ont permis d'avoir le bac et de briller en Terminale ne sont pas forcément les meilleures pour continuer au delà.
Vous devez accepter de vous remettre en cause et de ne pas vous contenter de « mais ça marchait jsuq'à présent ».
Pour certains élèves, c'est la chose la plus difficile à faire en Prépas, accepter de casser ses certitudes qui le faisaient réussir face à des camarades nuls en sciences et à des épreuves de bac presque aussi nulles que ces camarades là.

On reconnaît donc le programmeur à « fais moi une fonction `binomial` » :

informaticien	« matheux » de Terminale	physicien

`def Binomial(n, k) :`
`....B = 1`
`....for i in range(k) :`
`........B = B*(n-i)`
`........B = B//(i+1)`
`....return(B)`
	`def Facto(n) :`
	`....P = 1`
	`....for k in range(1,`
	`n+1) :#attention`
	`........P *= k`
	`....return(P)`
	
	`def Binomial(n, k) :`
	`....Numer = Facto(n)`
	`....Denom =`
	`Facto(k)*Facto(n-k)`
	`....return(Numer//Denom)`
		`from math import *`

La colonne du milieu n'est pas fausse. Mais elle est déplorable.
Sincèrement, vous trouvez intelligent de demander à l'ordinateur de calculer

$$\frac{(1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17)}{(1.2.3.4).(1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13)}$$

à la place de $\dfrac{17.16.15.14}{1.2.3.4}$?

◃73▹ ♡ Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k+4^k}{5^k}$.

Une série géométrique de premier terme 1, de raison $\dfrac{3}{5}$ et de terme à venir $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n+1}$.

Une série géométrique de premier terme 1, de raison $\dfrac{4}{5}$ et de terme à venir $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}$.éventuels

La somme vaut $\boxed{\dfrac{15}{2} - \dfrac{3^{n+1}}{5^n.2} - \dfrac{4^{n+1}}{5^n}}$